Phân bố thống kê trong phân rã phóng xạ

Nguyễn Duy Thông
ngdthong@hcmus.edu.vn

Khoa Vật lý - Vật lý Kỹ thuật
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG-HCM

1 Mục tiêu thực hành

- Tìm hiểu về phân bố thống kê trong phân rã phóng xạ.
- Khảo sát các dạng phân bố khi đo phông và đo có nguồn phóng xạ.
- Kiểm định các dạng phân bố tuân.
- Đánh giá 1 giá trị có phải là số lạc.

2 Phân bố thống kê trong phân rã phóng xạ là gì?

Phân rã phóng xạ là một hiện tượng ngẫu nhiên, chúng ta không thể biết trước được một hạt nhân sẽ phân rã vào lúc nào. Nhưng nếu chúng ta thực hiện một số đủ lớn các lần quan sát thì các hiện tượng này lại tuân theo một quy luật thống kê nhất định. Quy luật thống kê này cho phép chúng ta xác định được xác suất xảy ra các sự kiện trong khoảng thời gian khảo sát. Trong quá trình phân rã hạt nhân, cường độ bức xạ của nguồn phóng xạ luôn luôn thăng giáng xung quanh một giá trị trung bình theo một quy luật thống kê nhất định. Sự thăng giáng này gắn liền với bản chất của quá trình phân rã không thể loại trừ được cả khi có dụng cụ đo hoàn hảo nhất.
Giả sử 1 hàm phân bố thống kê $f(x)$, khi đó, các đại lượng đặc trưng của phân bố được tính toán như sau:

- Chuẩn hoá:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{1}$$
- Trị trung bình (kỳ vọng):
$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{2}$$
Đối với giá trị rời rạc (2) trở thành:
$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{n} xf(x)$$
- Phương sai:
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \tag{3}$$
Trường hợp phân bố rời rạc:
$$S^2 = \sum_{x=0}^{n} (x-\bar{x})^2 f(x) \tag{4}$$
- Độ lệch chuẩn:
$$\sigma = \sqrt{S^2} \tag{5}$$

3 Các dạng phân bố thống kê phổ biến

Tùy theo mỗi loại bài toán cần đánh giá, chúng ta có thể dự đoán hàm phân bố tần suất để mô tả dữ liệu của nhiều lần lặp lại phép đo. Phép đo được định nghĩa như là phép đếm số thành công xảy ra trong một số phép thử nghiệm cho trước. Mỗi phép thử nghiệm là một quá trình nhị phân có một trong hai kết quả: phép thử thành công (x = 1) hoặc phép thử không thành công (x = 0).
Trong phép thử mà ta đang khảo sát, thông thường xác suất thành công là một hằng số đối với mọi phép thử. Ví dụ phép thử tung đồng xu, đồng xu có hai mặt, xác suất xuất hiện một mặt là p = 1/2. Nếu ta gieo con xúc sắc có sáu mặt thì xác suất xuất hiện một mặt là 1/6. Trong bài toán khảo sát một hạt nhân phóng xạ trong khoảng thời gian t, số phép thử chính là số hạt nhân trong mẫu khảo sát, còn phép đo là việc đếm số nhân phân rã. Xác suất thành công của một phép thử trong trường hợp này là $(1 - e^{-\lambda t})$ với là hằng số phân rã phóng xạ của mẫu khảo sát.

3.1 Phân bố nhị thức

Đây là mô hình tổng quát nhất và được áp dụng cho các quá trình có xác suất p là hằng số. Gọi n là số phép thử, có xác suất thành công trong mỗi lần thử là p không đổi. Khi đó xác suất được dự đoán để đếm chính xác x lần thành công biến cố mà ta quan tâm trong n lần thử được tính bởi:

$$f(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \tag{6}$$

- Trong (6) : x và n là các số nguyên
- Hàm $f(x)$ là hàm mật độ xác suất.
- Hàm phân bố tích luỹ (hàm xác suất tích luỹ) tới giá trị x nào đó:

$$P(X \leq x) \equiv F(x) = \sum_{x=0}^{x} f(x) \tag{7}$$

- Trị trung bình:

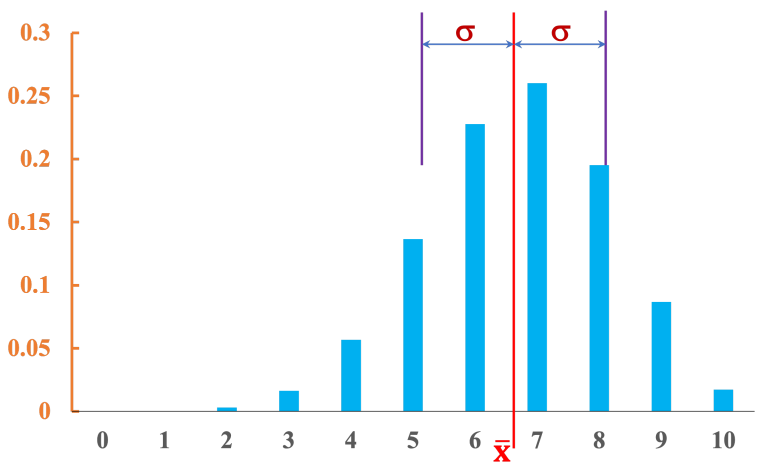
$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x f(x) = pn \tag{8}$$

- Phương sai:

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} (x-\mu)^2 f(x) = pn(1-n) = \mu(1-p) \tag{9}$$

- Độ lệch chuẩn:

$$\sigma = \sqrt{\mu(1-p)} \tag{10}$$



Hình 1: Ví dụ về phân bố nhị thức

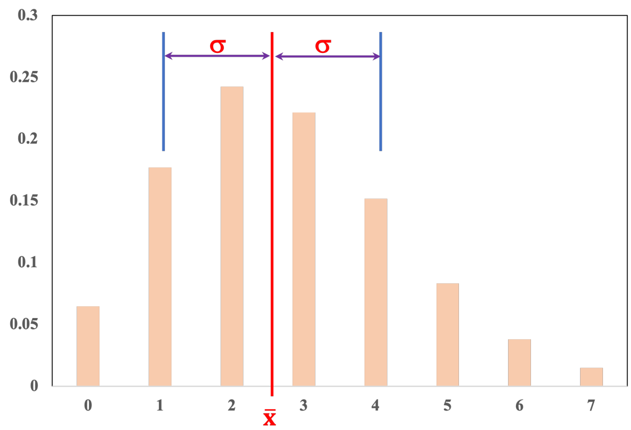
3.2 Phân bố Poisson

Nhiều quá trình nhị phân có xác suất thành công bé đối với mỗi phép thử riêng biệt, tức là $p \ll 1$ và tích np vừa phải (nhỏ hơn 20). Ví dụ trong thí nghiệm đếm hạt nhân, ở đó số hạt nhân trong mẫu là lớn, còn thời gian quan sát ngắn so với chu kỳ bán rã của mẫu phóng xạ. Tương tự trong thí nghiệm trên máy gia tốc, chùm hạt bắn vào bia lớn nhưng xác suất gây ra phản ứng thường rất nhỏ. Khi đó về mặt toán học có thể xấp xỉ phân bố nhị thức thành dạng:

$$f(x) = \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!} \tag{11}$$

Theo phân bố nhị thức, kỳ vọng hay trị trung bình $\mu = pn \equiv \lambda$, (11) trở thành:

$$f(x) = \frac{(\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!} \tag{12}$$



Hình 2: Phân bố Poisson

- Trị trung bình:

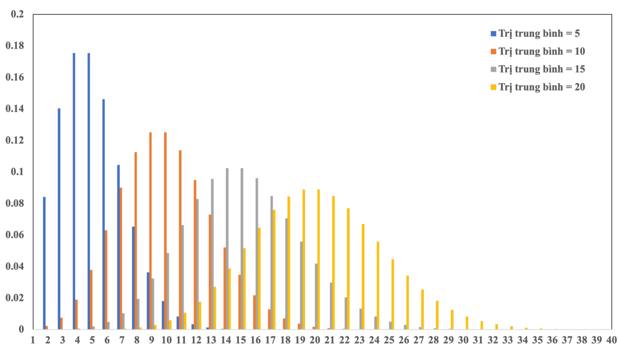
$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x f(x) = pn \equiv \lambda \tag{13}$$

- Phương sai:

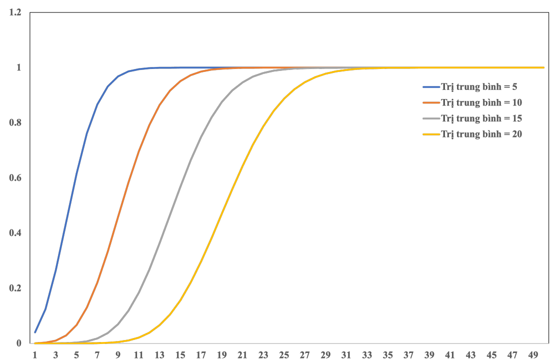
$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} (x-\mu)^2 f(x) = \mu \equiv \lambda \approx \bar{x} \tag{14}$$

- Độ lệch chuẩn:

$$\sigma = \sqrt{\mu} \approx \sqrt{\bar{x}} \tag{15}$$



(a) Phân bố Poisson với nhiều trị trung bình



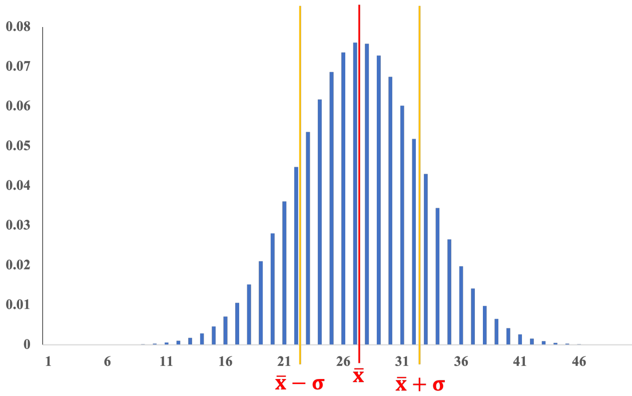
(b) Phân bố Poisson tích luỹ với nhiều trị trung bình

Hình 3: Phân bố Poisson và hàm tích luỹ của phân bố Poisson với nhiều trị trung bình

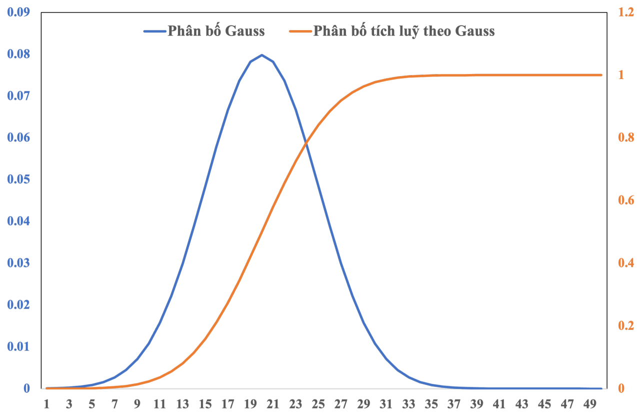
3.3 Phân bố Gauss

Phân bố Poisson là sự đơn giản toán học của phân bố nhị thức khi $p \ll 1$, n lớn và tích $n.p$ vừa phải. Khi trị trung bình $(n.p)$ của phân bố lớn (lớn hơn 20), chúng có thể được xấp xỉ phân bố dạng Gauss:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{16}$$



Hình 4: Đồ thị phân bố Gauss đối xứng qua trị trung bình



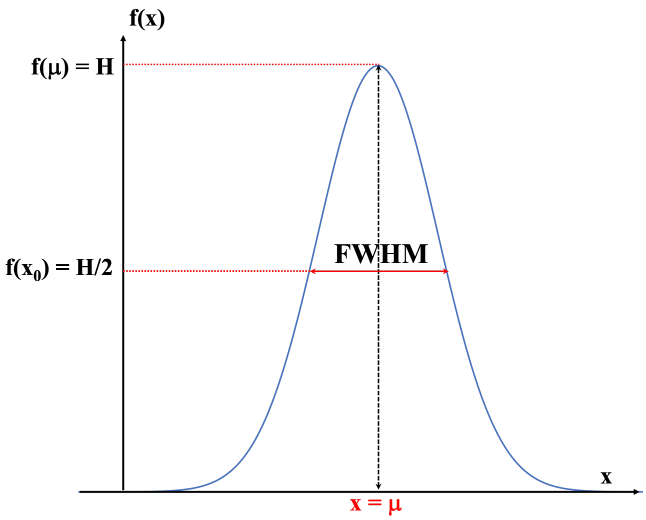
Hình 5: Phân bố Gauss và phân bố tích luỹ theo hàm Gauss

- Khi $\mu = 0, \sigma = 1$, phân bố Gauss được gọi là phân bố Gauss chuẩn hay *phân bố chuẩn*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{17}$$

- Bề rộng 1 nửa FWHM là đại lượng phổ biến trong thiết bị ghi nhận hạt nhân:

$$FWHM = 2,35\sigma \tag{18}$$



Hình 6: Hình ảnh FWHM trong phân bố Gauss

3.4 Phân bố Lorentz

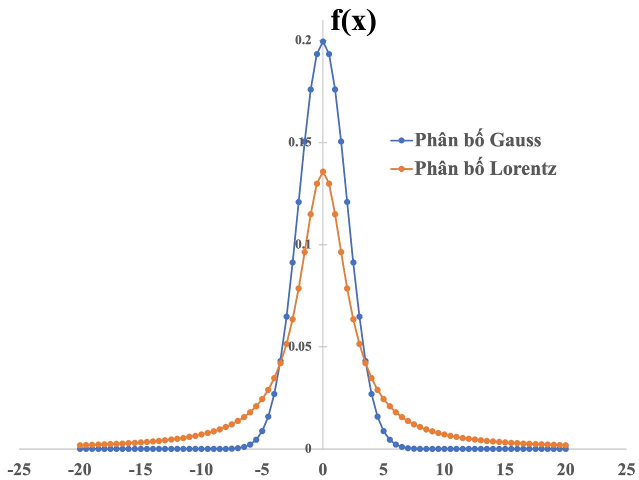
Phân bố Lorentz là phân bố gần đúng của việc mô tả dữ liệu có liên quan tới tính cộng hưởng. Thí dụ tiết diện phản ứng bức xạ hay hấp thu theo năng lượng trong hiệu ứng Mossbauer, các đỉnh phổ năng lượng đo từ hệ phổ kế gamma đầu dò nhấp nháy cũng được mô tả bởi dạng này.

- Hàm phân bố Lorentz

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(x-\mu)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \tag{19}$$

- Phân bố Lorentz đối xung quanh trị trung bình μ và bề rộng phân bố được đặc trưng bởi bề rộng một nửa Γ.

- Sự khác biệt giữa hàm Lorentz và hàm Gauss:



Hình 7: Sự khác biệt giữa hàm Gauss và hàm Lorentz: hàm Gauss tiến về 0 nhanh hơn hàm Lorentz

4 Kiểm định giả thiết thống kê

4.1 Giới thiệu

Kiểm định là việc đánh giá 1 giả thiết đặt ra có được chấp nhận hay không với một mức ý nghĩa nào đó. Để thực hiện phép kiểm định, ta cần phải có giả thiết H_0, đối thiết H_1:

- **Giả thiết** H_0 là giả thiết mà ta muốn kiểm định

  Ví dụ: Giả thiết H_0: $\mu = 2500$

- **Đối thiết** H_1 : bác bỏ giả thiết H_0

  Ví dụ: đối thiết của $H_0 : \mu = 2500$ có thể là :

  $H_1 : \mu > 2500$ hay $H_1 : \mu < 2500$ hay $H_1 : \mu \neq 2500$

- **Giả thiết đơn, kép, một đuôi, hai đuôi:**

  Giả thiết H_0, H_1 được gọi là **đơn** nếu nó chỉ liên quan tới *1 giá trị duy nhất*. Ví dụ $H_0 : \mu = 2500$

  Giả thiết H_0, H_1 được gọi là **kép** nếu nó liên quan đến *1 vùng giá trị*. Ví dụ $H_1 : \mu > 2500, H_1 : \mu < 2500, H_1 : \mu \neq 2500$

  Các giả thiết như : $H_1 : \mu \geq 2500, H_1 : \mu < 2500, H_1 : \mu > 2500, H_1 : \mu \leq 2500$ được gọi là 1 đuôi.

  Các giả thiết: $H_1 : \mu \neq 2500$ được gọi là 2 đuôi vì nó tương đương với 2 giả thiết: $H_1 : \mu > 2500, H_1 : \mu < 2500$

- **Các loại sai lầm:**

  1. Sai lầm loại 1: bác bỏ giả thiết H_0 khi thật ra nó đúng

  2. Sai lầm loại 2: chấp nhận H_0 khi thật ra nó sai

  Xác suất để phạm phải sai lầm loại 1 là α được gọi là mức ý nghĩa của phép kiểm định. Đây chính là xác suất để bác bỏ H_0 khi thật ra nó đúng. Như vậy, xác suất để chấp nhận H_0 khi nó đúng là $1 - \alpha$

  Xác suất để phạm phải sai lầm loại 2- chấp nhận H_0 khi nó sai là . Vậy xác suất để bác bỏ H_0 khi nó sai là $1 - \beta$. Và $(1 - \beta)$ được gọi là năng lực của phép kiểm định.

4.2 Kiểm định tính phù hợp của 1 phân bố - Phép kiểm χ^2

1. **Định lý K.Pearson:**

   Để đánh giá mức sai biệt giữa tần số lý thuyết $r_i^{'} = np_i$ và tần số thực nghiệm r_i trong mẫu cỡ n rút từ đám đông, Pearson đưa ra thống kê:

   $$Q_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(r_i - np_i)^2}{np_i} \tag{20}$$

   Để kiểm định phân bố mẫu phù hợp với phân bố lý thuyết:
   Giả thiết H_0: phân bố mẫu phù hợp với lý thuyết.
   Đối thiết H_1: phân bố mẫu không phù hợp lý thuyết.
   a. Bài toán 1: Nếu phân bố lý thuyết đã cho trước (biết trước tham số của nó):
   Bác bỏ H_0 nếu

   $$Q_n^2 > \chi^2_{k-1,\alpha} \text{ với mức ý nghĩa } \alpha \tag{21}$$

Trong Excel: ngưỡng quyết định $\chi^2_{\nu,\alpha} = CHIINV(\alpha,\nu)$ với bậc tự do $\nu = k-1$

b. Bài toán 2: Nếu phân bố lý thuyết chưa biết các tham số: sử dụng dữ liệu thực nghiệm để ước lượng. Tuy nhiên khi đó, bậc tự do là $\nu = k-m-1$ với m là số tham số trong phân bố. Bác bỏ H_0 nếu

$$Q_n^2 > \chi^2_{k-m-1,\alpha} \text{ với mức ý nghĩa } \alpha \tag{22}$$

Ví dụ: Để khảo sát tính ngẫu nhiên của số đếm từ ống đếm GM, Curtiss thực hiện 3455 phép đo sự phân rã của nguồn polonium trong khoảng thời gian như nhau. Sau đó ông đi kiểm định phân bố tần suất có được của dữ liệu với phân bố giả thiết Poisson.

Bảng 1: Số liệu đã phân lớp của số đếm từ ống đếm GM thực hiện bởi Curtiss

x_i	r_i	$n \times p_i$	$r_i - np_i$	$\frac{(r_i-np_i)^2}{np_i}$
0	8	9,7	-1,7	0,298
1	59	56,9	2,1	0,078
2	177	167,3	9,2	0,562
3	311	322,2	-16,2	0,853
4	492	481,4	10,6	0,253
5	528	565,8	-32,8	2,525
6	601	554,3	46,2	3,930
7	467	465,3	1,2	0,006
8	331	341,8	-10,8	0,342
9	220	223,2	-3,2	0,046
10	121	131,2	-10,2	0,293
11	85	20,1	14,9	3,120
12	24	34,3	-10,3	3,095
13	22	15,5	6,5	2,223
14	6	6,5	-0,5	0,038
15	3	2,6	0,4	0,255
≥ 16	0	1,4	-1,4	
Tổng	n = 3455			$Q_n^2 = 18,942$

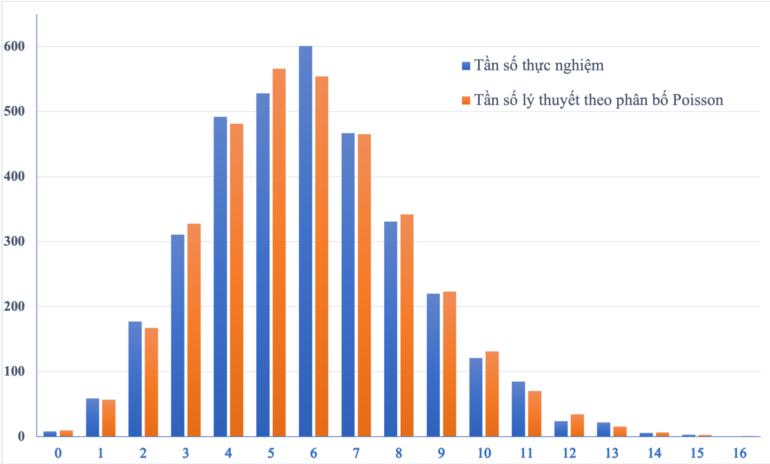
Trong bảng số liệu, r_i là tần số quan sát được ở mỗi lớp x_i, np_i là tần số lý thuyết tính từ giả thiết phân bố Poisson :

$$np_i = n\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{\lambda}$$

với $\lambda \approx \bar{x} = 5,88$.

Với $\alpha = 0,05$, độ tự do của hệ $\nu = 16 - 1 - 1 = 14 \Rightarrow \chi^2_{14,\alpha} = 23,68$.

Ta thấy $Q_n^2 = 18,942 < \chi^2_{14,\alpha} = 23,68$ nên chấp nhận giả thiết H_0 tuân theo phân bố Poisson.



Hình 8: So sánh giữa tần số lý thuyết và tần số thực nghiệm trong thí nghiệm của Curtiss.

2. **Kiểm định tính phù hợp của phân bố Poisson**
Để so sánh định lượng tính phù hợp với phân bố Poisson, có thể dùng phép kiểm chi bình phương với thống kê chi bình phương đặc biệt như sau

$$\chi^2 = \frac{1}{\bar{x}_e}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_e)^2 \tag{23}$$

với $\bar{x}_e$ là trung bình mẫu. Ta có phương sai cỡ mẫu:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_e)^2 \tag{24}$$

Từ (23), (24), suy ra:

$$\frac{S^2}{\bar{x}_e} = \frac{\chi^2}{n-1} \tag{25}$$

Nếu thăng giáng dữ liệu tuân theo phân bố Poisson thì $S^2 = \sigma^2$. Mặt khác, đối với phân bố Poisson $\sigma^2 = \bar{x}_e$. Do đó mức độ sai khác của $\dfrac{S^2}{\bar{x}_e}$ so với 1 sẽ phản ánh mức độ sai khác của phương sai mẫu S^2 vo với phương sai dự đoán σ^2.
Trong công thức (25): $\dfrac{S^2}{\bar{x}_e} = \dfrac{\chi^2}{n-1}$ nên mức độ sai khác của χ^2 so với (n-1) sẽ phản ánh mức độ sai khác của dữ liệu thực nghiệm so với mô hình thống kê Poisson dự đoán. Ta có thống kê χ^2 tuân theo phân bố chi bình phương với độ tự do $\nu = n - 1$. Xác suất p để tìm thấy χ^2 bằng hay lớn hơn giá trị ngưỡng chấp nhận χ_0^2 được đánh giá bằng cách tính tích phân hàm mật độ xác suất chi-bình phương trong khoảng từ χ_0^2 đến ∞ (p-value). Dễ dàng nhận thấy khi chọn p quá nhỏ vào cỡ 0,02 sẽ cho phép có sự thăng giáng quá lớn trong dữ liệu thực nghiệm, còn p quá lớn cho thấy sự thăng giáng quá nhỏ của dữ liệu thực nghiệm. Giá trị p = 0,5 cho thấy mức độ chênh lệch vừa phải của dữ liệu thực nghiệm so với mô hình dự đoán. Chú ý rằng với mỗi giá trị ν có một hàm mật độ xác suất khác nhau, nên giá trị χ_0^2 vừa phụ thuộc xác suất p vừa phụ thuộc độ tự do ν .

3. **Kiểm tra độ ổn định thống kê của hệ thống ghi nhận bức xạ hạt nhân**
Như chúng ta đã biết quá trình phân rã hạt nhân mang bản chất thống kê. Việc chúng tuân theo mô hình thống kê nào tùy thuộc vào bản chất vấn đề mà nó phát sinh cũng như đại lượng vật lý mà chúng ta quan tâm. Các hệ thống đo đếm hạt nhân được gọi là ở trạng thái ổn định khi việc đo đếm quá trình phân rã phóng xạ đó cho kết quả thăng giáng theo đúng mô hình thống kê như bản chất quá trình vật lý đã diễn ra. Việc kiểm tra tính ổn định thống kê của hệ đo mà nó liên quan đến độ tin cậy của kết quả đo thường được kiểm tra định kỳ (hằng tháng) bằng cách

ghi nhận một loạt 20 đến 50 số đếm từ hệ thống ghi nhận với điều kiện đo không đổi. Sau đó khảo sát phân bố tần suất của dữ liệu có được và kiểm định xem chúng có tuân theo mô hình thống kê dự đoán. Nếu phép kiểm là phù hợp, tức thăng giáng nội tại của dữ liệu đo được duy nhất bắt nguồn từ phân bố gốc, hệ đo khi đó được nói là ổn định về mặt thống kê. Ngược lại, sẽ có những yếu tố bất thường làm sự thăng giáng của dữ liệu lệch khỏi quy luật thăng giáng thống kê của quá trình vật lý diễn ra. Khi đó hệ đo được gọi là không ổn định.
Chúng ta bắt đầu với việc thu thập n phép đo độc lập của cùng một đại lượng vật lý. Ví dụ thực hiện một loạt n lần đo liên tiếp từ detector với thời gian đo cho mỗi phép đo là t=1 phút. Từ n số đếm có được xác định phân bố tần suất f(x) của dữ liệu như đã định nghĩa. Từ phân bố này xác định trị trung bình mẫu $\bar{x}_e$ theo công thức và phương sai mẫu S^2.
Tiếp theo chúng ta xác định mô hình thống kê kỳ vọng P(x) mà từ đó chúng ta hy vọng hệ đo cho kết quả thăng giáng thống kê theo mô hình này. Đối với các quá trình phân rã hạt nhân, mô hình thống kê Poisson hay Gauss (tùy thuộc vào độ lớn của giá trị trung bình) đã mô tả ở trên là sự chọn lựa phù hợp. Chú ý rằng để xây dựng các hàm phân bố thống kê này, đặc trưng quan trọng cần biết là trị trung bình x và phương sai σ^2.
Việc cuối cùng là kiểm định xem phân bố của các dữ liệu đo đạc thực nghiệm (có được từ N lần đo độc lập các số đếm hạt nhân) có trùng với mô hình phân bố thống kê dự đoán. Các đặc trưng của phân bố khi đó được xác định và so sánh thông qua các phép kiểm thống kê. Các đặc trưng thường dùng là trị trung bình, phương sai và chính hàm phân bố xác suất. Nếu dữ liệu thực nghiệm phù hợp với phân bố kỳ vọng P(x) ta nói hệ đo ổn định về mặt thống kê.

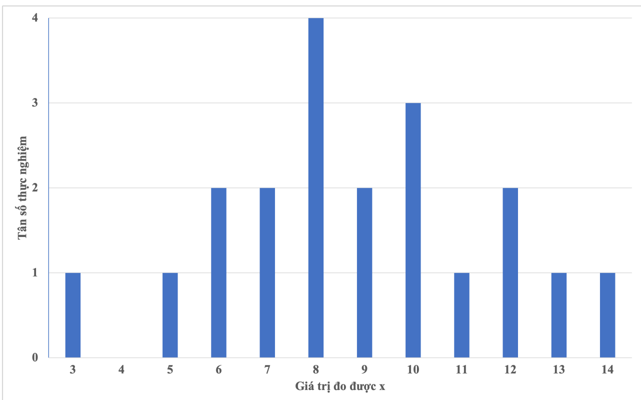
4. **Để loại bỏ 1 giá trị lạc** x_i:

$$\text{khi } z = \frac{|x_i - \mu|}{\sigma} > NORMSINV(\gamma + \frac{1-\gamma}{2}) \tag{26}$$

thì giá trị x_i là số lạc với $\gamma = 1 - \frac{1}{2n}$.
Ví dụ: có n=20 lần đo đại lượng x, kết quả như sau:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	8	5	12	10	13	7	9	10	6	11
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	14	8	8	3	9	12	6	10	8	7

Hãy khảo sát xem trong 1 lần đo bất kỳ $x = 19$ có được chấp nhận không?



GIẢI: Ta có: trị trung bình $\mu \approx \bar{x} = 8,8$ và độ lệch chuẩn $\sigma \approx S = 4,09$.
Với n = 20, độ tin cậy khảo sát là $\gamma = 1 - \frac{1}{2n} = 0,975$.
Ngưỡng quyết định $NORMSIV(\gamma + \frac{1-\gamma}{2}) = 2,24$. Với giá trị $x = 19$, $z = \frac{|x-\mu|}{\sigma} = 2,49$.
Vì $z > 2,24$ nên có thể kết luận $x = 19$ là số lạc

5 Tài liệu tham khảo

Trương Thị Hồng Loan, *Giáo trình xử lý số liệu thực nghiệm hạt nhân*, lưu hành nội bộ, 2013

THỰC HÀNH

1.Kiểm tra độ ổn định thống kê của hệ thống ghi nhận bức xạ hạt nhân

Dụng cụ

- Hệ đếm ST-360 kết hợp với ống đếm Geiger Muller
- Cao thế : 900V
- Nguồn phóng xạ : phông tự nhiên

Tiến hành đo đạc

- Thời gian : 60 s /lần đo
- Số lần thực hiện : 30 lần

Báo cáo kết quả

Trong phân rã phóng xạ, đối với phông tự nhiên, số đếm ghi nhận được tuân theo phân bố Poisson. Hãy đánh giá hệ ổn định về mặt thống kê hay không?

2. Khảo sát phân bố khi đo phông phóng xạ

Dụng cụ

- Hệ đếm ST-360 kết hợp với ống đếm Geiger Muller
- Cao thế : 900V
- Nguồn phóng xạ : phông tự nhiên

Tiến hành đo đạc

- Thời gian : 10 s /lần đo
- Số lần thực hiện : 1000 lần

Báo cáo kết quả

Thực hiện các yêu cầu sau:

- Sử dụng Excel: vẽ tần suất thực nghiệm và tần suất lý thuyết với phân bố Poisson trên cùng đồ thị. Nhận xét đồ thị.
- Xác định: trị trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn.
- Kiểm định giả thiết phân bố tuân theo phân bố Poisson với mức ý nghĩa 5%.
- Trong kết quả thu được: kiểm tra giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất có phải là số lạc không.
- Sử dụng PYTHON và ROOT thực hiện cái yêu cầu sau:
  - Viết chương trình vẽ tần suất thực nghiệm và làm khớp theo phân bố Poisson, Gauss, Lorentz.
  - Xác định trị trung bình, độ lệch chuẩn, trung vị

3. Khảo sát phân bố khi đo với nguồn phóng xạ

Dụng cụ

- Hệ đếm ST-360 kết hợp với ống đếm Geiger Muller
- Cao thế : 900V
- Nguồn phóng xạ : $^{226}Ra, 5\mu Ci$

Tiến hành đo đạc

- Thời gian : 2 s /lần đo
- Số lần thực hiện : 1000 lần

Báo cáo kết quả

Thực hiện các yêu cầu sau:

- Sử dụng Excel: vẽ tần suất thực nghiệm và tần suất lý thuyết với phân bố Gauss trên cùng đồ thị. Nhận xét đồ thị.
- Xác định: trị trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn.
- Kiểm định giả thiết phân bố tuân theo phân bố Poisson, Gauss, Lorentz với mức ý nghĩa 5%.
- Trong kết quả thu được: kiểm tra giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất có phải là số lạc không.
- Sử dụng PYTHON và ROOT thực hiện cái yêu cầu sau:
  - Viết chương trình vẽ tần suất thực nghiệm và làm khớp theo phân bố Poisson, Gauss, Lorentz.
  - Xác định trị trung bình, độ lệch chuẩn, trung vị