Introducción a la Investigación Experimental

Problemas: gráficas, tablas, redacción, ...

Profesor: Fernando Cristancho Mejía

Versión: 10 de septiembre de 2022

1. Histogramas

1. La Tabla 1 muestra los valores de voltaje proporcionados por un voltímetro conectado a la salida de un tomacorriente de pared. El contenido de esta Tabla está en el archivo adjunto "`voltajes_tarea.csv`" en formato de dos columnas: 'lectura,voltaje(V)'.

95.36	87.09	89.22	91.58	95.88	91.29	91.12	100.03
86.33	87.32	92.84	95.49	97.79	89.59	92.20	91.56
96.17	87.81	88.82	93.63	99.89	101.47	99.76	92.46
87.91	90.41	96.42	98.32	91.75	85.78	98.47	88.64
96.89	92.29	91.38	94.58	89.23	97.91	101.52	88.59
93.96	92.71	81.85	81.63	98.47	103.79	99.93	86.53
95.28	91.88	92.09	106.11	106.93	95.70	102.32	95.55
97.59	100.51	98.07	88.59	99.68	90.77	95.70	89.97
101.37	98.79	88.81	93.18	95.17	95.93	104.70	108.89
99.18	104.20	95.01	95.11	99.45	97.77	100.44	99.20
92.46	105.75	106.70	83.40	89.82	94.78	95.93	88.85
99.87	78.59	87.16	95.37	92.37	85.27	95.76	93.51
94.75	89.89	90.46	91.91	88.01	95.28	99.31	90.36

Tabla 1: Secuencia de 104 valores de voltaje en V, $V_i,\ i = \{0, \ldots, 103\}$, a la salida de un tomacorriente de pared.

1.1. A partir de los valores individuales en la Tabla 1, es decir, del archivo `voltajes.csv`:

1.1.1. Calcule el valor medio del voltaje.

$$\mu = \frac{1}{104} \sum_{i=0}^{103} V_i \tag{1}$$

1.1.2. Calcule la desviación estándar.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{104} \sum_{i=0}^{104} (\mu - V_i)^2} \tag{2}$$

1.1.3. Haga una gráfica con los valores individuales de los voltajes versus el número ordinal de la medida.

1.1.4. En la gráfica trace líneas representando

- El valor medio μ.
- Dos líneas representando los valores $\mu \pm \sigma$.

1.2. Clasifique los números de la Tabla 1 en intervalos o barras de histogramas.

Haga dos gráficas (o una sola gráfica, con dos páneles) usando histogramas con dos diferentes valores del intervalo de voltaje, ΔV, valor que define la anchura de la barra del histograma:

1.2.1. $\Delta V = 1\,\mathrm{V}$

1.2.2. $\Delta V = 2\,\mathrm{V}$

- Haga la(s) gráfica(s) de tal manera que la abscisa (eje x) cubra los rangos mínimo y máximo de los voltajes en la Tabla 1, pero que no se extienda por más del $5\,\%$ de su diferencia $V_{\text{máx}} - V_{\text{mín}}$ hacia valores menores que $V_{\text{mín}}$, ni hacia valores mayores que $V_{\text{máx}}$.
- Rotule los ejes de la siguiente manera:
  ordenadas: frecuencia.
  abscisas: voltaje (V)

1.3. Calcule para cada uno de los histogramas el valor medio y la desviación estándar del conjunto de números en la Tabla 1, ahora usando

$$\mu = \frac{1}{\sum f_j} \sum_{j=0}^{N-1} V_j\, f_j \tag{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum f_j} \sum_{j=0}^{N-1} (V_j - \mu)^2\, f_j \tag{4}$$

$$N = \text{número total de barras en el histograma} \tag{5}$$

$$j = \text{número ordinal de las barras} = \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots\, N-1\}$$

$$V_j = \text{valor medio (en V) de la barra } j$$

$$f_j = \text{número de datos en la barra } j$$

Ojo: en la igualdad (4), σ^2 es la varianza. Lo que se le pide reportar es la raíz cuadrada de esa cantidad, la desviación estándar, σ.

1.4. Reporte en una tabla, al estilo de la Tabla 2, los valores de μ y σ en los tres casos estudiados. Precisión de los valores reportados: 2 cifras decimales.

caso	μ (V)	σ (V)
valores originales		
histograma $\Delta V = 1$ V		
histograma $\Delta V = 2$ V		

Tabla 2: Valor medio y desviación estándar de los voltajes de la Tabla 1 calculados de tres maneras diferentes.

2. Ajuste + Chi cuadrado

Los datos experimentales de tiempo t y desplazamiento x referentes a un objeto móvil son reportados en la Tabla 3.

t (s)	x (cm)	$\sigma(x)$ (cm)
6.5	3.2	1.2
9.3	9.7	2.1
14.6	11.3	3.6

Tabla 3: Un experimento sencillo: el desplazamiento, x para tres tiempos, t. $\sigma(x)$ es la incertidumbre en el desplazamiento.

Proponemos una relación lineal entre x y t,

$$x(t) = a_0 + a_1 t. \tag{6}$$

Vamos a encontrar los parámetros $a_0,\ a_1$ de varias maneras y vamos a comparar la calidad del ajuste entre los diferentes casos:

A. Ajustando la línea recta de tal manera que pase exactamente por los dos primeros puntos,

$$t(\text{s}) = \{6.5,\ 9.3\}$$

.

B. Ajustando la línea recta de tal manera que pase exactamente por el primero y el último punto,

$$t(\text{s}) = \{6.5,\ 14.6\}$$

.

C. Ajustando la línea por minimización de χ^2.

1. En una gráfica con tres páneles, uno por caso, muestre los datos (puntos con barras de incertidumbre) y los ajustes (líneas continuas).

2. ¿Cuáles son los valores de a_0, a_1, χ^2, de las gráficas correspondientes a los casos A y B?

   1. Muestre el álgebra para el cálculo de $a_0,\ a_1$. Observe:
      - Puesto que se trata de unir dos puntos, no necesita programa de ajuste alguno.
      - En estos casos los coeficientes no tienen incertidumbres.
   2. Muestre el álgebra que necesita para el cálculo de χ^2.
   3. Anote $a_0,\ a_1,\ \chi^2$ caso por caso en una tabla. No olvide las unidades.

3. Ajuste los parámetros a_0, a_1 usando su programa preferido para producir la figura que muestre la solución al caso C. ¿Cuáles son ahora los valores de a_0, a_1, χ^2? Agregue los resultados a la Tabla.

4. Caso D: Suponga que la incertidumbre de la distancia para el último dato, $t = 14.6\,\text{s}$ es

   $$\sigma(x = 11.3\,\text{s}) = 30.0\,\text{cm}.$$

   Vuelva a ajustar los datos. Cuáles son los nuevos valores de a_0, a_1, χ^2? Agréguelos a la Tabla.

5. En una figura muestre los datos del caso D (con nuevo valor de incertidumbre) y los ajustes para dos útimos casos, C y D.
6. Verbalice, es decir escriba algunas líneas explicando por qué surge la diferencia entre los dos últimos ajustes, C y D.

3. Decaimiento nuclear del ^{137}Cs

El archivo ‘‘`actividadCs.csv`’’ contiene los datos resultados de una simulación Monte Carlo, en la que se registró la actividad anual (número de decaimientos por año) de una muestra de núcleos de ^{137}Cs. La expresión matemática que relaciona la actividad con el tiempo es la del decaimiento radiactivo,

$$A(t) = A_0 \exp(-t/\tau), \tag{7}$$

con A_0 la activida en el momento en el que inició el experimento y τ el tiempo de vida del núcleo.

Prevenciones:

- La unidad de la actividad, expresada en término de unidades base del SI es el *becquerel* [Bureau International des Poids et Mesures, 2019, p. 138], el cual es un decaimiento por segundo,

$$\text{becquerel} \equiv \text{Bq} = \text{s}^{-1}. \tag{8}$$

  La actividad en los datos mencionados tiene una unidad diferente, número de decaimientos por año.

- Una posible fuente de confusión a evitar: existen dos caracterizaciones de la rata de decaimiento de la muestra. Una es a través de τ y otra a través del tiempo que transcurre para que la muestra disminuya a la mitad de su valor inicial, $T_{1/2}$. La relación entre las dos (usted la puede deducir usando la ec. (7)),

$$T_{1/2} = \ln(2)\tau. \tag{9}$$

1. Grafique los datos del decaimiento, es decir $A(t)$ versus t (años) cubriendo todo el rango de tiempo y todo el rango de la ordenada incluidos en los datos.

   Respecto a la gráfica:

   1.1. Semilog, es decir escala logarítmica en las ordenadas (la actividad).

   1.2. Represente los datos con puntos para cada pareja (t, A).

   1.3. Agregue la información de la incertidumbre experimental. Para la incertidumbre experimental, vamos a incluir solamente la incertidumbre estadística, es decir, la incertidumbre de cada valor de actividad es

$$\sigma(A) = \sqrt{A}. \tag{10}$$

2. Ajuste la ec. (7) a los datos, es decir halle los parámetros $A_0,\ \tau$ y repórtelos en una tabla.

   2.1. Cada parámetro debe ir acompañado de la incertidumbre evaluada por el software que usó.

   2.2. Reporte la incertidumbre en notación de paréntesis redondos, $x(\sigma)$, **no** en notación $x \pm \sigma$.

   2.3. No olvide las unidades en cada columna de la tabla.

3. En la misma gráfica de los datos, trace la predicción del ajuste con una línea continua.

4. Represente datos y ajuste en una gráfica lineal en ambos ejes. Verifique que esta gráfica cubre los mismos rangos en A y en t que la gráfica semilog pedida más arriba.

5. Evalúe el número de núcleos que la muestra tenía al inicio del tiempo, $t = 0$, en la simulación. “ Evaluar” quiere decir, defina un método y ajecútelo para encontrar $N(t = 0)$. Igualmente evalúe la incertidumbre de $N(t = 0)$.

4. Ajuste de la gaussiana

El archivo `gauss+recta+incert.csv` contiene los datos resultado de cierto experimento en el cual se cuenta el número de veces (cuentas) que se detecta cierta cantidad (y) como función de una coordenada espacial (x) medida en centímetros. Es peculiar en este experimento que las incertidumbres de y varían fuertemente de una medida a otra. El archivo contiene datos en tres columnas. La primera línea del archivo indica los nombres y unidades de las cantidades,

```
x(cm),y(cuentas),dy(cuentas)
```

No nos interesan los detalles del experimento. Nos interesa la relación funcional entre las variables y y x.

1. Figura 1: Grafique los datos y versus x incluyendo la representación de la incertidumbre de y.

   1.1. Rotule la divisiones mayores de las abscisa (x) en décadas: $40,\ 50,\ \ldots$

   1.2. Haga que las divisiones menores en x coincidan con las posiciones de los puntos. Esto implica que cada década la va a dividir en 4 partes.

   1.3. Incluya una grilla en ordenadas y abscisas. La grilla le va a permitir identificar valores de las coordenadas en la figura.

2. Va a ajustar la suma de una recta y una gaussiana a los datos,

$$f(x) = M \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] + b_0 + b_1(x-\mu) \tag{11}$$

   Para hacer este ajuste necesita inicializar los parámetros. Usando la Figura 1 indique las operaciones aritméticas que hace para evaluar *"a ojo"*, y orientándose con la grilla, los parámetros de ajuste

$$\begin{aligned} \mu &= \\ b_0 &= \\ b_1 &= \\ M &= \\ \sigma &= \end{aligned} \tag{12}$$

3. Ajuste la función (11) usando los parámetros de inicialización que anotó en las igualdades (12).

   3.1. Figura 2: Grafique los puntos experimentales tal como lo hizo en la Figura 1 y trace la representación del ajuste con una línea continua.

   3.2. Escriba una tabla con los 5 parámetros resultantes junto con sus incertidumbres teniendo cuidado de usar el número de cifras significativas pertinente para cada parámetro. No olvide las unidades para cada parámetro.

4. La integral de la gaussiana. **Ojo:** Se trata del área bajo la curva gaussiana. La que hay entre el fondo (recta) y la gaussiana.

   4.1. A partir de los parámetros en la Tabla calcule el valor de la integral de la gaussiana.

   4.2. Use propagación de incertidumbres para obtener la incertidumbre de esta integral.

   4.3. Anote el resultado de la integral escribiéndolo con el número correcto de cifras significativas.

5. Interferencia óptica

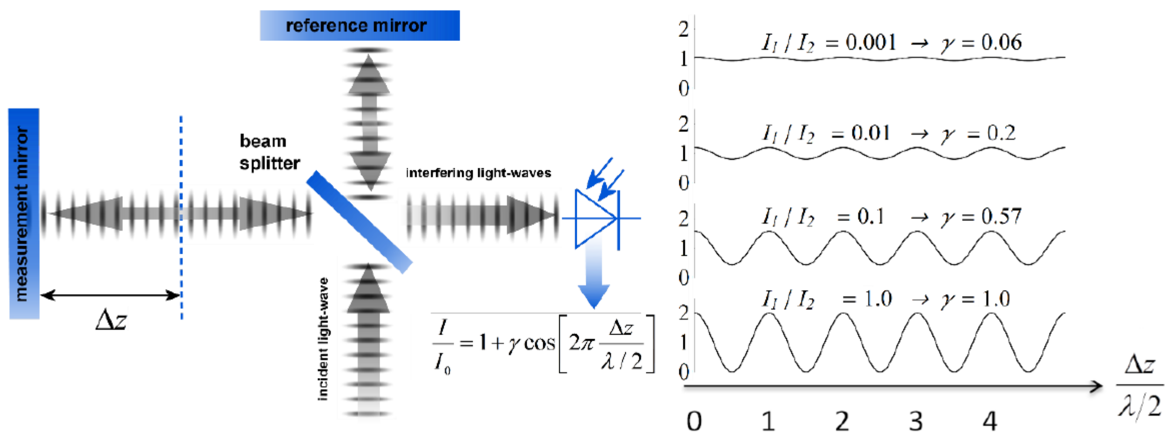

Figura 1: Figura tomada de la Ref. [Consultative Committee for Length, 2019].

La Fig. 1 es usada por el "Comité Consultor para Longitud" del SI [Consultative Committee for Length, 2019, Appendix 2] para explicar una realización del metro.

1. Reproduzca la figura de la izquierda con sus propios medios gráficos y agregue traducción al español de los términos que en ella aparecen.

2. Añada en la figura el origen de los términos $I_1,\ I_2$.

3. Use su propia representación de las ondas planas y del hecho que en dos recorridos las ondas viajan una vez en una dirección y otra en la opuesta.

4. Reproduzca la gráfica de la derecha, la cual representa la cantidad

$$I = I_0 \left[1 + \gamma \cos\left(2\pi \frac{\Delta z}{\lambda/2} \right) \right] \tag{13}$$

   4.1. Muestre las 4 situaciones

$$I_1/I_2 = \{10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 1\} \tag{14}$$

   cada una en un panel, en el mismo rango del argumento de la función

$$0 \leq \Delta z/(\lambda/2) \leq 5. \tag{15}$$

   4.2. Agregue el rótulo correpondiente al valor de I_1/I_2 en cada panel.

Referencias

Bureau International des Poids et Mesures. The International System of Units. BIPM, 9th edition, 2019.

Consultative Committee for Length. The International System of Units. Appendix 2: *Mise en pratique* for the definition of the metre in the SI. BIPM, 9th edition, 2019.