

# Problemas I - Introducción a la investigación experimental

J.E. Agudelo, D.A. García & J.S. Moreno

*Introducción a la investigación experimental, Departamento de Física,  
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.*

27 de octubre de 2022

## 1. Histogramas

En la Fig. 1 se presenta valores de voltaje medidos a la salida de un tomacorrientes versus el número ordinal de la medida. La línea negra representa el valor el valor medio  $\mu$  de los datos, y las líneas rojas representan los valores  $\mu \pm \sigma$ .

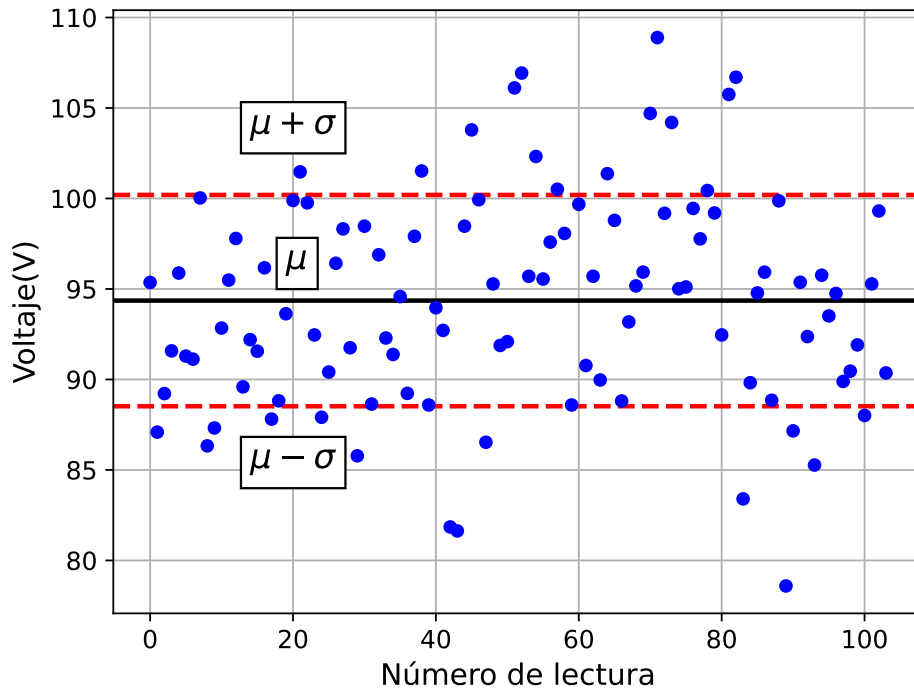


Figura 1: Valores de voltaje en V, a la salida de un tomacorriente.

En la Fig. 2 se presenta la clasificación de los valores de voltaje en histogramas con dos valores diferentes de anchura de las barras:  $\Delta V = 1 \text{ V}$  y  $\Delta V = 2 \text{ V}$ .

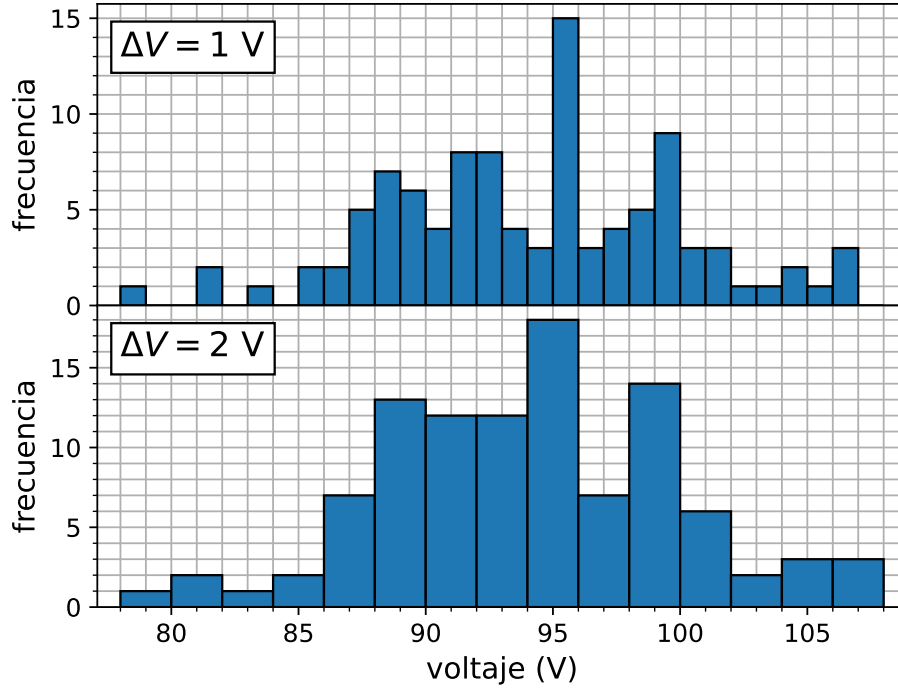


Figura 2: Las fluctuaciones más pronunciadas en el histograma con  $\Delta V = 1 \text{ V}$  pueden oscurecer la interpretación.

En la Tabla 1 se presentan los valores de  $\mu$  y  $\sigma$  en los 3 casos estudiados.

caso	$\mu$ (V)	$\sigma$ (V)
valores originales	94.36	5.84
histograma $\Delta V = 1 \text{ V}$	94.18	5.66
histograma $\Delta V = 2 \text{ V}$	94.04	5.27

Tabla 1: Valor medio y desviación estándar de los voltajes calculados de tres maneras diferentes.

## 2. Ajuste + Chi cuadrado

Los datos experimentales de tiempo  $t$  y desplazamiento  $x$  referentes a un objeto móvil son reportados en la Tabla 2.

$t$ (s)	$x$ (cm)	$\sigma(x)$ cm
6.5	3.2	1.2
9.3	9.7	2.1
14.6	11.3	3.6

Tabla 2: Un experimento sencillo: el desplazamiento,  $x$  para tres tiempos,  $t$ .  $\sigma(x)$  es la incertidumbre en el desplazamiento.

Se propone una relación lineal entre  $x$  y  $t$ ,

$$x(t) = a_0 + a_1 t. \quad (1)$$

Se encuentran los parámetros  $a_0$ ,  $a_1$  de 4 maneras:

A. Ajustando la línea recta de tal manera que pase exactamente por los dos primeros puntos,

$$t(s) = \{6.5, 9.3\}.$$

B. Ajustando la línea recta de tal manera que pase exactamente por el primero y el último punto,

$$t(s) = \{6.5, 14.6\}.$$

C. Ajustando la línea por minimización de  $\chi^2$ .

D. Ajustando la línea por minimización de  $\chi^2$ , suponiendo que la incertidumbre de la distancia para el último dato,  $t = 14.6$  s es

$$\sigma(x = 11.3 \text{ s}) = 30.0 \text{ cm}.$$

El parámetro  $a_1$  puede obtenerse para los casos A y B usando la ecuación de la pendiente que une los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

Por otro lado, el parámetro del punto de corte de la recta con el eje  $y$ ,  $a_0$  se halla evaluando la ecuación de la recta punto-pendiente en  $x = 0$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \longrightarrow a_0 - y_1 = a_1(0 - x_1)$$

$$a_0 = y_1 - a_1 x_1 \quad (3)$$

Así, utilizando las ecuaciones (2) y (3), obtenemos, para el caso A

$$a_1^A = \frac{9.7 - 3.2}{9.3 - 6.5} = 2.3 \text{ cm/s},$$

$$a_0^A = 3.2 - (2.3 \times 6.5) = -11.9 \text{ cm}.$$

Para el caso B se sigue el mismo procedimiento

$$a_1^B = \frac{11.3 - 3.2}{14.6 - 6.5} = 1.0 \text{ cm/s},$$

$$a_0^B = 3.2 - (1.0 \times 6.5) = -3.3 \text{ cm}.$$

Calculamos  $\chi^2$ , teniendo en cuenta que la regresión propuesta está dada por la ecuación (1)

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \left( \frac{x_i - (a_0 + a_1 t_i)}{\sigma(x_i)} \right)^2. \quad (4)$$

En la Fig. 3 se presentan los datos y ajustes para los casos A, B y C.

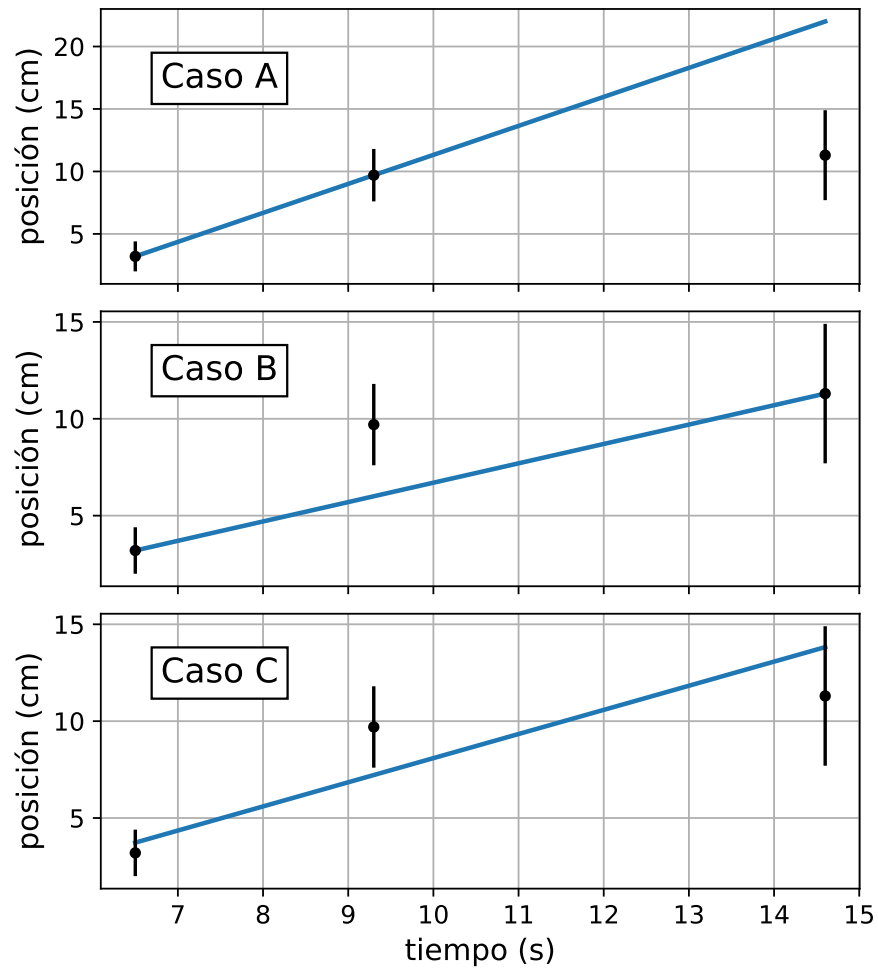


Figura 3: Desplazamiento de un objeto móvil y regresión para los casos A, B y C.

En la Fig. 4 se presentan los datos y ajustes para los casos C y D.

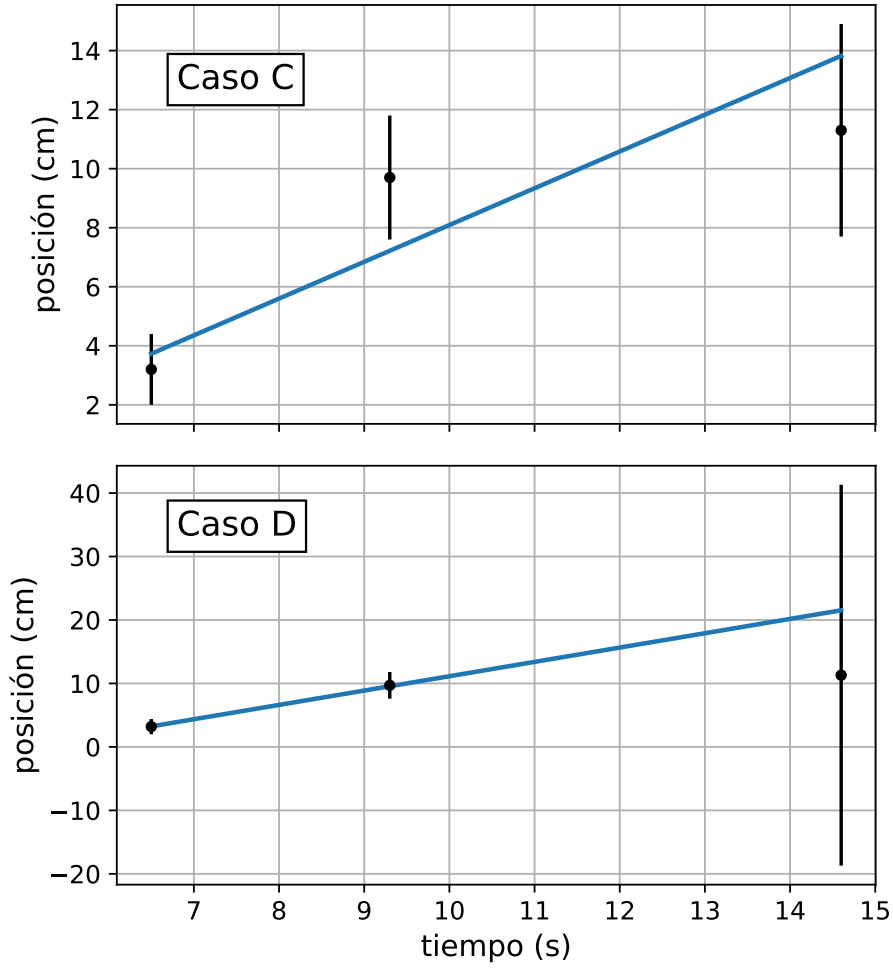


Figura 4: Desplazamiento de un objeto móvil y regresión para los casos C y D.

En la Tabla 5 se presenta el valor de los parámetros  $a_0$  y  $a_1$ , y el valor de  $\chi^2$  para los cuatro casos estudiados.

Caso	$a_0$ (cm)	$a_1$ (cm/s)	$\chi^2$
A	-11.9	2.3	8.8
B	-3.3	1.0	3.1
C	-4(5)	1.2(6)	2.1
D	-11(2)	2.3(3)	0.1

Tabla 3:  $a_0$ ,  $a_1$  y  $\chi^2$  para los 4 casos estudiados

Los casos C y D estiman el valor de los parámetros  $a_0$  y  $a_1$  minimizando el valor de  $\chi^2$ . Expandiendo la ecuación (4), se obtiene

$$\chi^2 = \left( \frac{x_0 - (a_0 + a_1 t_0)}{\sigma(x_0)} \right)^2 + \left( \frac{x_1 - (a_0 + a_1 t_1)}{\sigma(x_1)} \right)^2 + \left( \frac{x_2 - (a_0 + a_1 t_2)}{\sigma(x_2)} \right)^2,$$

con lo que se observa que un mayor valor de  $\sigma(x_2)$ , como el planteado en el caso D, reducirá el peso que tiene el tercer término de la sumatoria, llegando a ser aproximadamente nulo. Por lo tanto, minimizar el

valor de  $\chi^2$  requerirá, principalmente, minimizar los aportes del primer y segundo término de la sumatoria, y esto se logra ajustando la recta de tal forma que pase muy cerca a estos puntos.

### 3. Decaimiento nuclear del $\text{Cs}^{137}$

La gráfica, en escala semilog, de la actividad de decaimiento de los núcleos de Cesio-137 ( $\text{Cs}^{137}$ ) en función del tiempo  $t$  medido en años se presenta en la Fig. 5, donde su incertidumbre se debe únicamente a la incertidumbre estadística

$$\sigma(A) = \sqrt{A}. \quad (5)$$

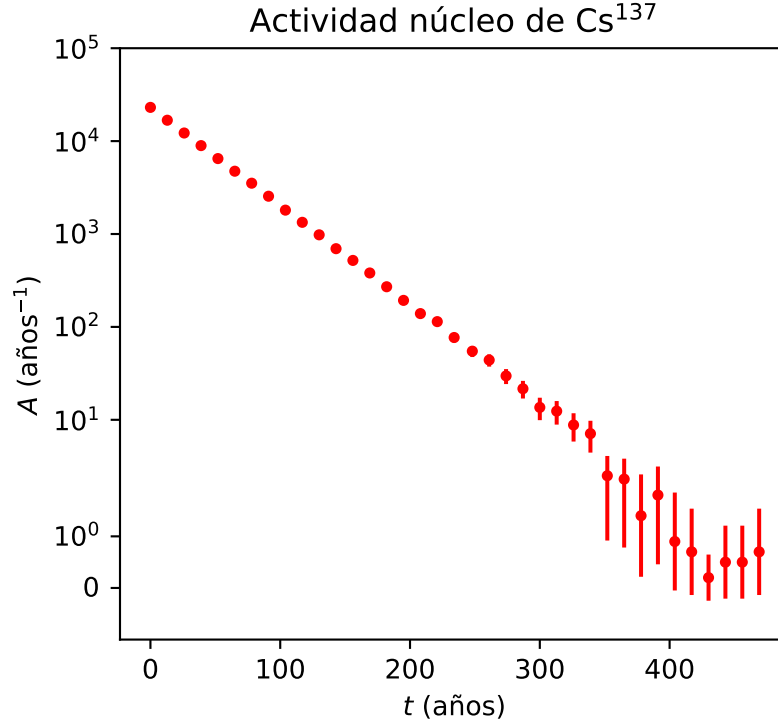


Figura 5: Actividad del Cesio en función del tiempo medido en años, en escala semilog.

Posteriormente, realizamos el ajuste de la curva y obtenemos los parámetros de actividad inicial  $A_0$  y el tiempo de vida del núcleo  $\tau$ , los cuales se muestran en la Tabla 4.

$A \text{ (años}^{-1}) \times 10^5$	$\tau \text{ (años)}$
2.305(1)	41.12(3)

Tabla 4:  $A_0$  y  $\tau$  obtenidos del ajuste.

Así, con estos valores, tenemos el ajuste de la curva que se muestra en la Fig. 6, donde tanto para la gráfica semilog como para la gráfica lineal se tiene el mismo rango de valores en el eje de  $A$  y en el eje de  $t$ . Ahora, puesto que la actividad mide el número de núcleos decaídos por unidad de tiempo, con lo que el número de total de núcleos al inicio de la simulación debe ser aproximadamente la integral de la curva ajustada desde 0 hasta  $\infty$ . Así, integrando la expresión dada en el enunciado

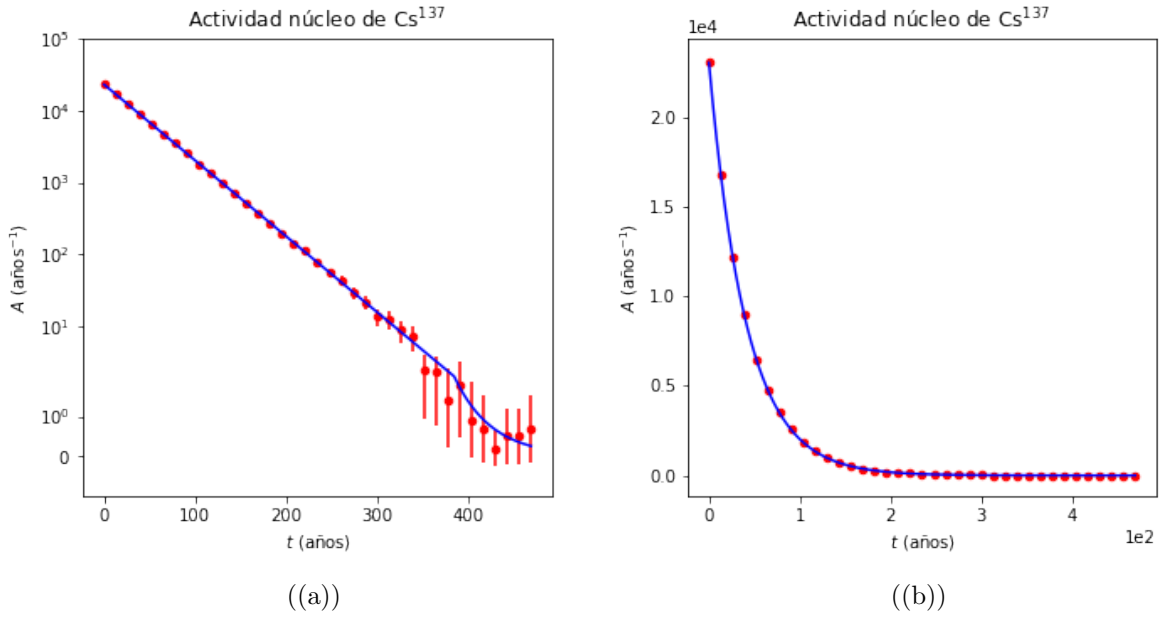


Figura 6: Ajuste de la curva de Actividad del Cesio en función del tiempo medido en años sobre los datos obtenidos. (a) Escala semilog. (b) Escala lineal.

$$\begin{aligned}
 N(t=0) = N_0 &= \int_0^\infty A_0 \exp(-t/\tau) dt \\
 &= A_0 \int_0^\infty \exp(-t/\tau) dt,
 \end{aligned}$$

y haciendo la sustitución

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-t}{\tau}, \\
 dx &= -\frac{dt}{\tau}, \\
 dt &= -\tau dx,
 \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
 N_0 &= -A_0 \tau \int_0^{-\infty} \exp(x) dx \\
 &= -A_0 \tau \left[ \exp(x) \right]_0^{-\infty} \\
 &= A_0 \tau.
 \end{aligned}$$

Con lo que el valor del número de núcleos en el tiempo  $t = 0$  es

$$N_0 = 9.48(1) \times 10^5 \text{ núcleos}.$$

## 4. Ajuste de la Gaussiana

Los datos de  $y$  vs  $x$  se disponen como se muestra en la Fig. 7.

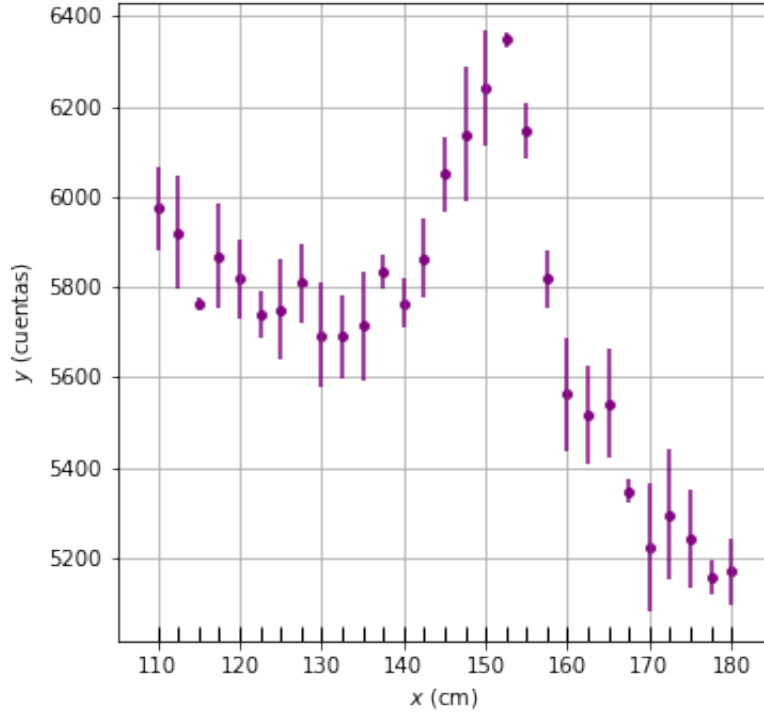


Figura 7: Datos  $x$  en centímetros y  $y$  con su valor de incertidumbre.

Para realizar el ajuste de la gaussiana experimental, es necesario escoger un valor de inicialización de los parámetros apropiado. Recordemos que la función tiene la forma

$$f(x) = M \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] + b_0 + b_1(x - \mu). \quad (6)$$

Los valores que hallemos los haremos sin tener en cuenta la incertidumbre puesto que no es necesaria al ser un valor de inicialización que no propaga su incertidumbre al ajuste realizado.

Según la grilla tenemos que la media es cercana al valor

$$\mu' = 152.5 \text{ cm}, \quad (7)$$

Ahora, para determinar los parámetros de la función recta de fondo de la gaussiana tomamos dos puntos de los extremos de la gráfica para los cuales la influencia de la función gaussiana sería reducida,

$$(x_0, y_0) = (110 \text{ cm}, 5975 \text{ cuentas}), \quad (x_1, y_1) = (180 \text{ cm}, 5170 \text{ cuentas}), \quad (8)$$

y calculamos a partir de ellos calculamos un valor aproximado de la pendiente de la recta

$$\begin{aligned} b'_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \\ &= -12 \text{ cuentas cm}^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$



Con esto, tenemos que, para un valor conocido como en el valor extremo utilizado para hallar la pendiente, junto con la ecuación (7)

$$\begin{aligned} y_1 &\approx r(x_1) = b'_0 + b'_1(x_1 - \mu), \\ b'_0 &= y_1 - b'_1(x_1 - \mu), \\ b'_0 &= 5486 \text{ cuentas.} \end{aligned} \tag{10}$$

Ahora, la altura desde la base gaussiana hasta su máximo está dada como

$$M' = f(\mu) - b_0, = 862 \text{ cuentas}, \tag{11}$$

Luego, sabemos que para  $M/2$  el ancho de la función de gauss es de  $2\sigma$ , luego, tomando la base de la recta tal que la mitad de la gaussiana se encuentre en

$$r_{1/2} = \left( \frac{M'}{2} + b'_0 \right) + b'_1(x - \mu'), \tag{12}$$

tal que los datos más cercanos a esta recta serán los tomados para calcula “a ojo” el valor de  $\sigma$ , como se ve en la Fig. 8. Estos valores son

$$\begin{aligned} x_3 &= 157.5 \text{ cm}, \\ x_4 &= 145.0 \text{ cm}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \sigma' &= \frac{|x_3 - x_4|}{2}, \\ &= 6.25 \text{ cm.} \end{aligned} \tag{13}$$

Así, usando los parámetros de inicialización en las ecuaciones (7), (11), (13), (10), (9), realizamos el ajuste gaussiano experimental a los datos tal que se obtienen los parámetros

$\mu$ (cm)	150.6(5)
$\sigma$ (cm)	6.6(4)
$M$ (cuentas) $\times 10^2$	9.3(3)
$b_0$ (cuentas) $\times 10^3$	5.45(2)
$b_1$ (cuentas $\text{cm}^{-1}$ )	-9.4(6)

Tabla 5: Valores obtenidos del ajuste gaussiano para  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $M$ ,  $b_0$  y  $b_1$ .

Finalmente, tenemos que el área bajo la curva de una gaussiana está dada por

$$I = \sqrt{2\pi} M \sigma. \tag{14}$$

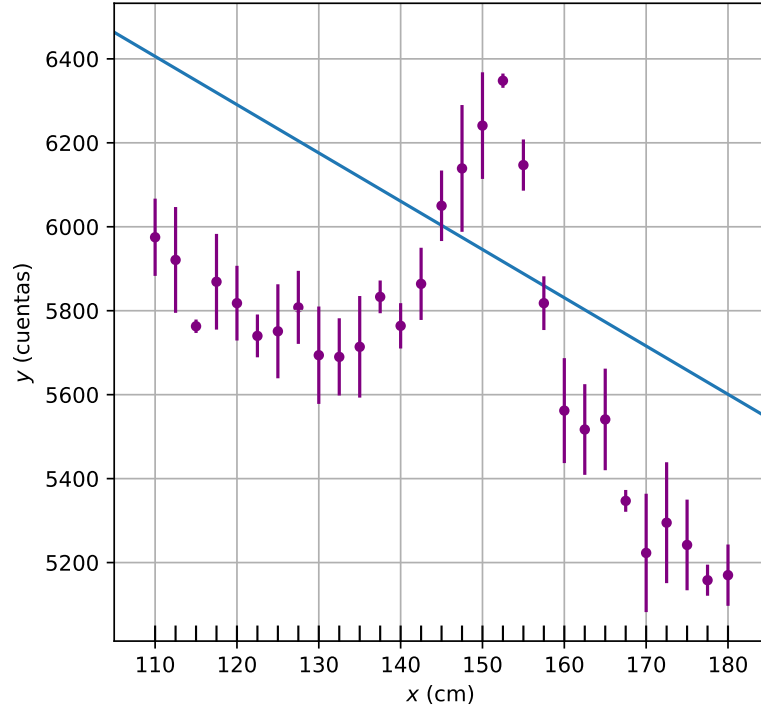


Figura 8: Línea recta en la mitad de la gaussiana para los parámetros calculados “a ojo” hasta el momento.

Luego, haciendo uso de la propagación de incertidumbres

$$\sigma(I) = \sqrt{2\pi} \left( \frac{\sigma(M)}{|M|} + \frac{\sigma}{|\sigma|} \right) M\sigma, \approx 1428 \text{ cm}, \quad (15)$$

tenemos que la integral en la ecuación (14) con su incertidumbre (15) es

$$I = 1,5(1) \times 10^4 \text{ cuentas.}$$

## 5. Interferencia óptica

En la Fig. 9 se presenta el diagrama del montaje del interferómetro, usado por el “Comité Consultor para Longitud” del SI para explicar una de las realizaciones experimentales del metro [1].

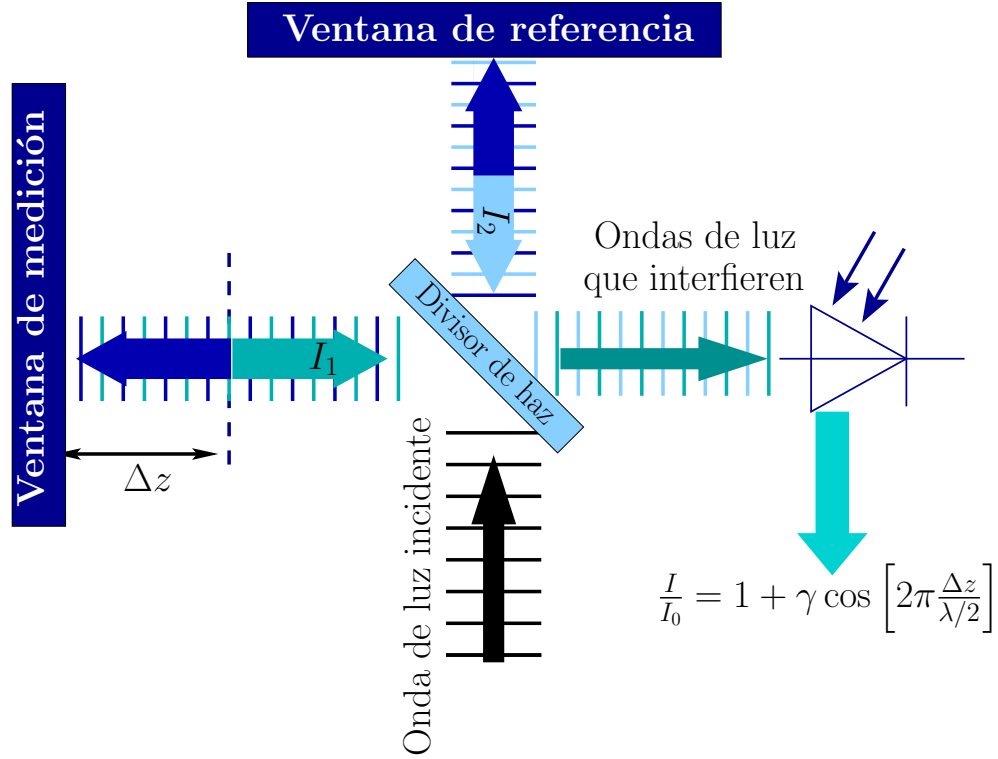


Figura 9: Diagrama del método interferométrico para la realización experimental del metro [1].

En la Fig. 10 se presenta la cantidad

$$\frac{I}{I_0} = 1 + \gamma \cos \left( 2\pi \frac{\Delta z}{\lambda/2} \right), \quad (16)$$

donde  $I_0 = I_1 + I_2$  y  $\gamma = 2(\sqrt{I_1/I_2})/(I_1/I_2 + 1)$ , para los casos en los cuales  $I_1/I_2 = \{10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1\}$ . Esta expresión describe el patrón de interferencia.

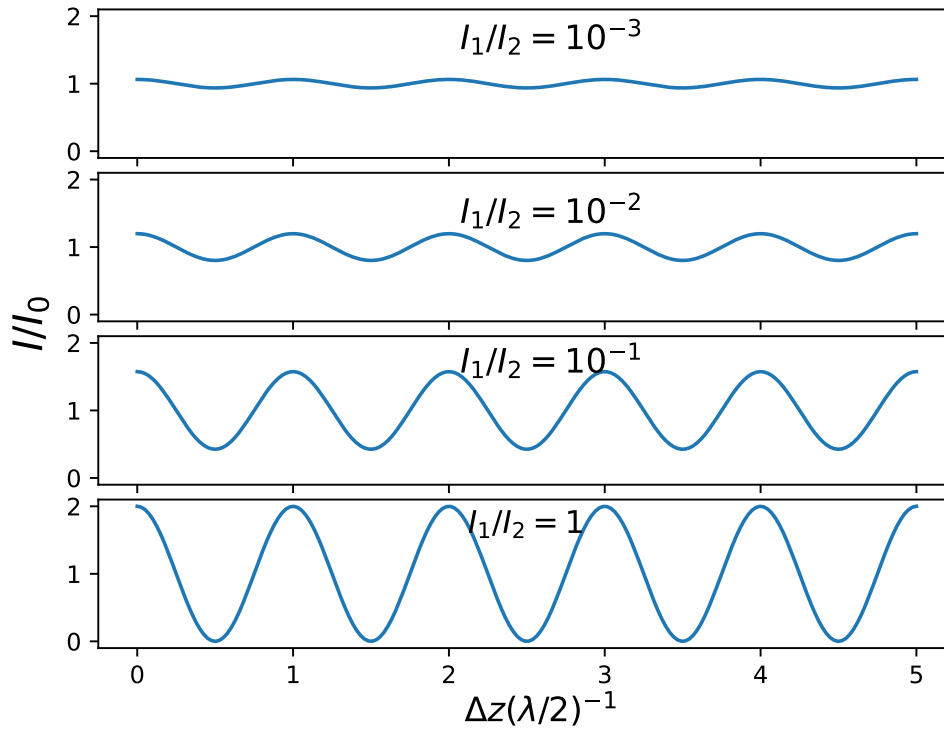


Figura 10: Patrón de interferencia para los casos  $I_1/I_2 = \{10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1\}$

## Repositorio

El código desarrollado en la realización de este taller se encuentran en el repositorio <https://github.com/dangarciahe/ProblemasExperimental>

## Referencias

- [1] The international system of units. appendix 2: Mise en pratique for the definition of the metre in the si. *BIPM. Consultative Committee for Length.*, 9th ed., 2019.