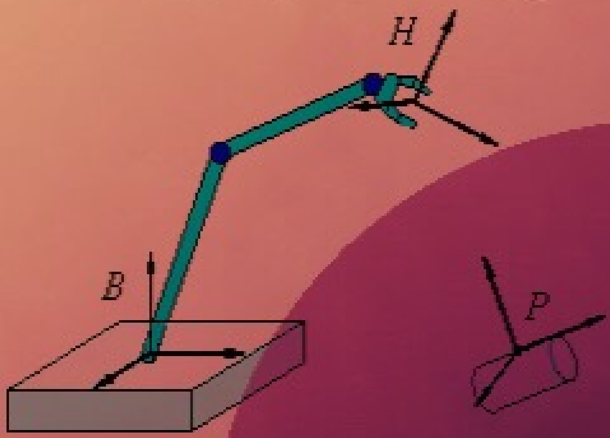
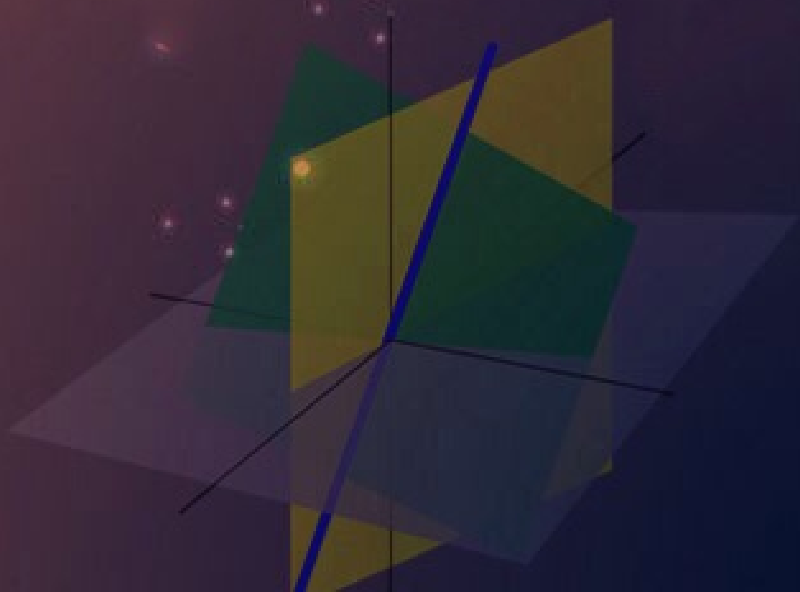


ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI

Đại số tuyến tính



LỜI MỞ ĐẦU

Bộ đề kèm lời giải này được thực hiện vì nhu cầu muốn các bạn sinh viên có nguồn tham khảo cách tư duy trong việc giải các câu trong đề thi các năm của môn đại số tuyến tính. Các đề được thu thập từ đề thi các năm của khoa Toán – Tin học, trường Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc gia TP.Hồ Chí Minh. Trong lúc thực hiện sẽ có thể có sai sót trong cách suy luận và xuất hiện các lỗi đánh máy, xin các bạn đọc bỏ qua cho.

Mọi góp ý về đề thi và lời giải xin gửi về email dpthienphu@gmail.com

Chúc các bạn có được lợi ích khi xem xét các phần trong bộ đề kèm lời giải này.

Chúng tôi hi vọng nhận được phản hồi tích cực từ các bạn.

Để ủng hộ cho công việc sản xuất các sản phẩm học tập trong tương lai, các bạn có thể ủng hộ cho chúng tôi thông qua các hình thức sau:

1) **Ngân hàng**:
   - Ngân hàng Tiên Phong (TP Bank)
   - Số tài khoản: 0347 1177 301
   - Tên: DONG PHUC THIEN PHU
2) **Ví điện tử Momo**: 0903.052.809

Trân trọng!

MỤC LỤC

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính ???? – ????

Câu 1: Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 6x_4 = -2 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 6 \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Câu 2: Giả sử A là ma trận khả nghịch. Chứng minh điều sau:

a) $A^2 \neq 0$.

b) $A^k \neq 0$ với mọi $k > 2$.

Câu 3: Tính các định thức sau:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ m-1 & 2 & 3 \\ 3 & m+1 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Câu 4: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Tìm ma trận phụ hợp $\operatorname{adj}(A)$ của A.

b) Từ đó, tính A^{-1}.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2009 – 2010

Câu 1: Cho các ma trận $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Tồn tại hay không một ma trận A sao cho $AB = C$? Nếu có hãy tìm tất cả những ma trận A như vậy.

Câu 2: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & a & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó $a \in \mathbb{R}$ là một tham số.

a) Tính định thức của A.

b) Tìm các giá trị của tham số a để ma trận A khả nghịch?

Câu 3: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = A - I_3$.

a) Hãy tính B^n, với n là số nguyên ≥ 1.

b) Áp dụng phần a) để tính $A^n, n \geq 1$.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2016 – 2017

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Xác định dạng bậc thang và tìm hạng của ma trận A.

b) Giải hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$.

Câu 2: Tìm nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 - (m-1)x_3 = -2 \end{cases}$$

Câu 4: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm một ma trận $B \neq 0$ sao cho $AB = BA = 0$.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2017 – 2018

Câu 1: Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của A.

b) Tìm ma trận X sao cho $XA = AB$.

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -7 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

a) Xác định dạng bậc thang và tìm hạng của ma trận A.

b) Giải hệ phương trình $AX = 0$.

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (1-m)x_3 = 1 \\ x_1 - mx_2 + 2x_3 = m+2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Câu 4: Cho A; $B \in M_n(\mathbb{R})$, thỏa mãn $AB = 2A - 3B$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2018 – 2019

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

a) Tính định thức của ma trận A. Suy ra giá trị của m để A khả nghịch.

b) Tìm ma trận nghịch đảo của A trong trường hợp $m = 1$.

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

a) Xác định dạng bậc thang và tìm hạng của ma trận A.

b) Giải hệ phương trình $AX = 0$.

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2mx_1 + (m-3)x_2 = 4 \\ (3m+1)x_1 + (m-5)x_2 = m+7 \end{cases}$$

Câu 4: Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 = 3A$. Chứng minh rằng $A + I_n$ là ma trận khả nghịch.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2019 – 2020

Câu 1: Kiểm tra tính khả nghịch và tìm A^{-1} nếu có với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Câu 2: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = m \end{cases}$$

Câu 3: Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 4m \\ 1 & -3 & 5 & 6m \\ m & m & -2m & m^2 \\ 0 & 1 & 1 & m \end{bmatrix}$

a) Tính định thức $\det A$.

b) Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho $\det B = \det(2A)$

Câu 4: Vết của một ma trận vuông $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $\mathrm{tr}(A)$, được định nghĩa là tổng của tất cả các hệ số trên đường chéo chính của A, nghĩa là $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Chứng minh rằng nếu $B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $\mathrm{tr}(BB^\top) = 0$ thì $B = 0$.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2020 – 2021

Câu 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - \ \ x_4 - \ \ x_5 = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 5 \end{cases}$$

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của A.

b) Tìm ma trận X sao cho $XA = AB$.

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + mx_3 = \ \ 2 \\ x_1 + mx_2 + \ \ x_3 = m + 1 \\ x_1 + 2\ x_2 + \ 2x_3 = \ \ 1 \end{cases}$$

Câu 4: Chứng minh rằng, với mọi $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ ta có $\det(A \cdot A^{\top}) = 0$, trong đó $A^{\top}$ là ma trận chuyển vị của A.

ĐỀ THI CUỐI KỲ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2009 – 2010

Câu 1:

1) Cho ma trận $A = \left(a_{kj}\right)_n$ với $a_{kj} \in \mathbb{C}$ và a_{kj} là số phức liên hợp của a_{jk} với mọi $k;\ j$. Chứng minh rằng $\det A$ là số thực.

2) Sử dụng các tính chất của định thức, chứng minh đẳng thức sau

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_1x & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 & d_3 \\ a_4 + b_4x & a_4 - b_4x & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vector $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (1;\ 0;\ -1)$; $u_2 = (0;\ -2;\ 1)$; $u_3 = (0;\ 0;\ 1)$; $v_1 = (2;\ 1;\ -1)$; $v_2 = (1;\ 1;\ 6)$; $v_3 = (-1;\ 1;\ m)$.

1) Tìm m để $\mathcal{B}'$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ ứng với $m = 1$.

Câu 3: Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các không gian con $W_1 = \langle(0;\ 0;\ 1;\ 0);\ (1;\ 2;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 1)\rangle$ và $W_2 = \langle(0;\ 1;\ 0;\ 1);\ (1;\ 1;\ 0;\ 2);\ (0;\ 1;\ 1;\ 1)\rangle$. Hãy tìm một cơ sở của không gian con $W_1 \cap W_2$.

Câu 4: Cho các ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ và $g : V \to W$ mà gf là đẳng cấu. Chứng minh rằng $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ và $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

Câu 5: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở $\mathcal{C} = \big((1;\ 1;\ 1);\ (1;\ 2;\ 0);\ (3;\ 0;\ 0)\big)$ có ma trận là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2011 – 2012

Câu 1: Gọi W là tập hợp các ma trận đối xứng thuộc $M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng W là không gian vector của $M_n(\mathbb{R})$. Tìm số chiều và một cơ sở của W.

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vector $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (1;\ 0;\ 1)$; $u_2 = (0;\ 1;\ 0)$; $u_3 = (2;\ 1;\ 0)$; $v_1 = (0;\ 0;\ 1)$; $v_2 = (0;\ 1;\ -1)$; $v_3 = (m;\ 1;\ 1)$.

1) Tìm m để $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ ứng với $m = 1$.

Câu 3: Cho toán tử tuyến tính $f: V \to V$ mà $ff = f$. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \text{ và } V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$$

Câu 4: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở $\mathcal{C} = \big((1;\ 1;\ -1);\ (1;\ 1;\ 0);\ (2;\ 0;\ 0)\big)$ có ma trận là $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2012 – 2013

Câu 1: Cho $A = \left(a_{ij}\right)_n$ là ma trận vuông cấp n $(n \geq 2)$ xác định bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{khi } (i; j) \in \{(2;\ 2);\ (3;\ 3);\ \dots;\ (n;\ n)\} \\ 1, & \text{khi } (i; j) \notin \{(2;\ 2);\ (3;\ 3);\ \dots;\ (n;\ n)\} \end{cases}$$

Tính $\det A$.

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các cơ sở $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (3;\ 2;\ 1)$; $u_2 = (0;\ 2;\ -1)$; $u_3 = (0;\ 0;\ 1)$; $v_1 = (1;\ 1;\ 0)$; $v_2 = (1;\ 0;\ -1)$; $v_3 = (1;\ 1;\ 1)$. Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Câu 3: Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các không gian con

$W_1 = \langle(0;\ 0;\ 1;\ 0);\ (1;\ 2;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 1)\rangle$ và $W_2 = \langle(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_4 = x_2 + x_1\rangle$

Hãy tìm một cơ sở của không gian con $W_1 \cap W_2$.

Câu 4: Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là toán tử tuyến tính mà $f \circ f = f$. Giả sử $\mathcal{X} = (w_1;\ w_2;\ \cdots;\ w_r)$ và $\mathcal{Y} = (w_{1+r};\ w_{2+r};\ \cdots;\ w_n)$ lần lượt là cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.

a) Chứng minh rằng $\mathcal{C} = (w_1;\ w_2;\ \cdots;\ w_n)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

b) Hãy tìm ma trận biểu diễn của toán tử f trong cơ sở $\mathcal{C}$.

Câu 5: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0 = \big((1;\ 0;\ 0);\ (0;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1)\big)$ có ma trận biểu diễn là

$$\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2013 – 2014

Câu 1: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm tất cả các ma trận 2×2 B sao cho $B \neq 0;\ B \neq I_2$ và B thỏa tính chất $AB = BA$

Câu 2:

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số a

$$\begin{cases} x + \ \ y - \qquad\qquad z = 2 \\ x + 2y + \qquad\qquad z = 3 \\ x + \ \ y + (a^2 - 5)z = a \end{cases}$$

Câu 3: Cho A là ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Tìm một cơ sở cho

a) Không gian dòng của A.

b) Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$.

Câu 4: Giả sử A là một ma trận có kích thước 4×3 và B là một ma trận có kích thước 3×4. Đặt $C = AB$. Hỏi có tồn tại ma trận A và B sao cho các cột của C độc lập tuyến tính hay không? Nếu có, hãy cho một ví dụ. Nếu không, hãy chứng minh.

Câu 5: Cho $V = \mathbb{R}_2[t]$ (không gian các đa thức thực có bậc nhỏ hơn hay bằng 2). Đặt $C = \{2 + t;\ t + t^2;\ 1 + t^2\}$ và $D = \{1;\ 1 + t;\ 1 + t + t^2\}$

a) Kiểm tra C và D là hai cơ sở của V.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở $(C \to D)$.

Câu 6: Cho ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 \quad &\to \quad \mathbb{R}^2 \\ (x_1;\ x_2;\ x_3) &\mapsto (x_1 + 2x_2 + 3x_3;\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \end{aligned}$$

Đặt $B = \{(1;\ 2;\ -1);\ (2;\ -1;\ 2);\ (3;\ 1;\ -1)\}$ và $C = \{(1;\ 2);\ (2;\ 3)\}$

a) Kiểm tra C và B là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính T theo cơ sở B và C, $[T]_{B;C}$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2014 – 2015

Câu 1: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = m \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3m \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = m + 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = m - 1 \end{cases}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vector $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (1;\ 0;\ -1)$; $u_2 = (0;\ -2;\ 1)$; $u_3 = (0;\ 1;\ 1)$; $v_1 = (2;\ 1;\ -1)$; $v_2 = (1;\ 1;\ 6)$; $v_3 = (-1;\ 1;\ m)$.

a) Tìm m để $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ ứng với $m = 1$.

Câu 3: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa điều kiện $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ với mọi i. Chứng minh rằng $\det A \neq 0$.

Câu 4: Cho các ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ và $g : V \to W$ mà gf là đẳng cấu. Chứng minh rằng $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ và $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

Câu 5: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^4$ trong cơ sở $\mathcal{B}_0 = ((1;\ 0;\ 0;\ 0);\ (0;\ 1;\ 0;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0); (0;\ 0;\ 0;\ 1))$ có ma trận là $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 12 & 2 \end{bmatrix}$. Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$. Toán tử φ có phải là đơn cấu, toàn cấu không? Tại sao?

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2015 – 2016

Câu 1: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + (3-m)x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + (m+1)x_3 = 3-m \end{cases}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vector $u_1 = (1;\ 1;\ 2)$; $u_2 = (2;\ 1;\ 3)$; $u_3 = (3;\ -1;\ 1)$ và $u = (9;\ 1;\ 9)$.

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và xác định tọa độ của vector u theo cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Xác định cơ sở $\mathcal{C} = \{v_1;\ v_2;\ v_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{C}$ sang $\mathcal{B}$ là

$$(\mathcal{C} \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Câu 3: Cho W là không gian của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vector $u_1 = (1;\ 1;\ 2;\ 1)$; $u_2 = (1;\ 2;\ 3;\ 2)$; $u_3 = (-1;\ 3;\ 1;\ 1)$; $u_4 = (5;\ -2;\ 5;\ 2)$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ là cơ sở của W và xác định tọa độ của u_4 theo cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Cho $u = (1;\ m;\ 3;\ m-2) \in \mathbb{R}^4$. Tìm m để $u \in W$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy biểu diễn vector u dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $u_1;\ u_2;\ u_3$.

Câu 4: Cho ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^4;\ \mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z;\ t) = (x + y + 2z - t;\ x + 2y - z + t;\ x + 3y - 4z + 3t)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$ và một cơ sở của không gian $\operatorname{Ker} f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$; trong đó $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathcal{B} = \{(1;\ 0;\ 1);\ (0;\ -1;\ 0);\ (0;\ 1;\ 2)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Câu 5:

a) Cho V là không gian vector trên $\mathbb{R}$, $\dim V = 3$ và $u;\ v;\ w \in V$. Chứng minh rằng $\mathcal{B} = \{u;\ v;\ w\}$ là cơ sở của V khi và chỉ khi $\mathcal{B}' = \{u + v;\ v - w;\ w + 2u\}$ là cơ sở của V.

b) Cho $A;\ B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $AB = BA$ và $A^2 = B^2 = 0$. Chứng minh rằng $(I_n + A + B)$ khả nghịch và $(A + B + AB)$ không khả nghịch.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2016 – 2017

Câu 1: Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Tìm ma trận nghịch đảo của A.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $AXA = AB$.

Câu 2: Cho tập hợp $W = \{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 2z\}$

a) Chứng minh W là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm cơ sở và xác định số chiều của không gian W.

Câu 3: Cho tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1 = (1;\ 2;\ 2);\ u_2 = (1;\ 1;\ -1)\}$ và W là không gian sinh bởi $\mathcal{B}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của W.

b) Tìm m để vector $u = (1;\ -1;\ m)$ thuộc không gian W và với giá trị đó của m, hãy xác định tọa độ của u theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Câu 4: Giả sử $\mathcal{B} = \{u;\ v\}$ là cơ sở của không gian vector V. Đặt $\mathcal{B}' = \{u - 2v;\ 3u - 5v\}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}'$ là cơ sở của V và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

b) Cho $w \in V$ thỏa mãn $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Hãy xác định tọa độ của w theo cơ sở $\mathcal{B}'$.

Câu 5: Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z) = (x + 2y - 3z;\ 2x + 3y + z;\ 3x + 4y + 5z)$$

a) Xác định cơ sở cho các không gian $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.

b) Cho $\mathcal{B} = \{u_1 = (1;\ -1;\ 0);\ u_2 = (1;\ 0;\ -1);\ u_3 = (0;\ -1;\ 0)\}$. Chứng tỏ $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2017 – 2018

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Tìm các giá trị của m để A khả nghịch.

b) Tìm nghịch đảo của A trong trường hợp $m = 1$.

Câu 2: Cho $W = \{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 2x + z\}$ và $W' = \{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 2xz\}$. Chứng minh rằng W là không gian con của $\mathbb{R}^3$ và W' không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Câu 3: Trong $\mathbb{R}^3$, cho $u_1 = (1;\ 1;\ 2);\ u_2 = (2;\ 1;\ 1);\ u_3 = (1;\ 3;\ 7)$ và $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm tọa độ của vector $u = (5;\ 4;\ 6)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Tìm m để $v = (1;\ 3;\ m)$ là tổ hợp tuyến tính của $u_1;\ u_2$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy xác định dạng biểu diễn tuyến tính của v theo u_1 và u_2.

c) Xác định cơ sở $\mathcal{B}' = \{u_1';\ u_2';\ u_3'\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$ là

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Câu 4: Cho ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^4;\ \mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z;\ t) = (x + y - z - t;\ x - y + z + 2t;\ x + 3y - 3z - 4t)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$ và một cơ sở của không gian $\operatorname{Ker} f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$; trong đó $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathcal{B} = \{(1;\ 0;\ -1);\ (0;\ 1;\ 0);\ (0;\ -1;\ 1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Câu 5: Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^3 + 3A^2 + 3A + I_n = 0$. Chứng minh rằng A khả nghịch nhưng $A + I_n$ không khả nghịch.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2018 – 2019

Câu 1: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ và W là không gian sinh bởi $\mathcal{B}$, trong đó $u_1 = (1;\ 2;\ -2);\ u_2 = (1;\ 4;\ m-4);\ u_3 = (1;\ m-2;\ -m)$.

a) Tìm các giá trị của m để $W = \mathbb{R}^3$.

b) Trong trường hợp $W \neq \mathbb{R}^3$, hãy biểu diễn u_3 theo $u_1;\ u_2$ và tìm một cơ sở cho không gian W.

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ và W là không gian sinh bởi $\mathcal{B}$, trong đó $u_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 2);\ u_2 = (1;\ 2;\ 2;\ 1);\ u_3 = (1;\ -1;\ -2;\ 1)$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của W và $u = (2;\ 6;\ 7;\ 3) \in W$.

b) Tìm m để $v = (2;\ 1;\ m;\ m) \in W$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy xác định tọa độ vector v theo cơ sở $\mathcal{B}$.

c) Xác định cơ sở $\mathcal{B}' = \{u_1';\ u_2';\ u_3'\}$ của W sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$ là

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Câu 3: Cho f là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^4$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z;\ t) = (x + y + 3z - 2t;\ x + 2y + 5z - 3t;\ x - y - z;\ x + z - t)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$ và một cơ sở của không gian $\operatorname{Ker} f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở

$\mathcal{B} = \{u_1 = (1;\ 0;\ -1;\ 0);\ u_2 = (0;\ 1;\ -1;\ 0);\ u_3 = (0;\ 1;\ 0;\ -1);\ u_4 = (1;\ -1;\ 0;\ 1)\}$ của $\mathbb{R}^4$.

Câu 4: Cho V là không gian vector hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$ và W là không gian con của V sao cho $\dim W = \dim V - 1$. Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở của V mà không có vector nào nằm trong W.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2019 – 2020

Câu 1: Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính theo tham số thực m:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 10x_4 = -5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 7x_4 = m \end{cases}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vector

$$u_1 = (1;\ 3;\ 0);\ u_2 = (2;\ 7;\ 1);\ u_3 = (3;\ 10;\ 2)$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ của $\mathbb{R}^3$.

c) Tìm tọa độ của vector $u(5;\ 16;\ 3)$ trong cơ sở $\mathcal{B}$.

d) Tìm vector $v \in \mathbb{R}^3$ biết $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Câu 3: Cho f là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x;\ y;\ z) = (6x - 2y + 4z;\ 18x - 6y + 13z;\ 6x - 2y + 3z)$$

a) Tìm số chiều và một cơ sở cho mỗi không gian $\operatorname{Im} f$; $\operatorname{Ker} f$.

b) Chứng minh $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

c) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ được cho như trong Câu 2.

Câu 4: Cho V là không gian vector n chiều, S là một tập sinh của V và $u_1;\ \cdots;\ u_{n-1} \in V$ là $n-1$ vector độc lập tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại $u \in S$ sao cho $\{u_1;\ \cdots;\ u_{n-1};\ u\}$ là một cơ sở của V.

LỜI GIẢI ĐỀ THI GIỮA KỲ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Lời giải đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính ???? – ????

Câu 1: Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 6x_4 = -2 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 6 \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Cách 1: Áp dụng Gauss ta có dạng ma trận

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 6 & -2 \\ 5 & 7 & 9 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=-d_4]{\substack{d_1:=d_1-d_2 \\ d_3:=d_3-d_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 7 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{d_2:=d_2-3d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 21 & -8 \\ 0 & 5 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 21 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{d_3:=d_3-5d_2 \\ d_4:=d_4+3d_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 21 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -11 & 27 & -14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4+d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 21 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 10 & 29 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3:=d_3-2d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -56 & 14 \\ 0 & 0 & 10 & 29 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-10d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -56 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 589 & -140 \end{array}\right]$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{8}{19} \\ x_2 = \dfrac{320}{589} \\ x_3 = \dfrac{406}{589} \\ x_4 = -\dfrac{140}{589} \end{cases}$$

Cách 2: Áp dụng quy tắc Cramer

$$A=\begin{bmatrix}4&1&2&1\\3&0&1&6\\5&7&9&8\\0&-1&3&-2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\-2\\6\\2\end{bmatrix}$$

Cách 2.1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\Delta\ =\begin{vmatrix}4&1&2&1\\3&0&1&6\\5&7&9&8\\0&-1&3&-2\end{vmatrix}\overset{\substack{d_1:=d_1-d_3\\d_2:=d_2-d_3}}{=}\begin{vmatrix}-1&-6&-7&-7\\-2&-7&-8&-2\\5&7&9&8\\0&-1&3&-2\end{vmatrix}\overset{\substack{d_2:=d_2-2d_1\\d_3:=d_3+5d_1}}{=}\begin{vmatrix}-1&-6&-7&-7\\0&5&6&12\\0&-23&-26&-27\\0&-1&3&-2\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6&12\\-23&-26&-27\\-1&3&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&6&12\\-23&-26&-27\\-1&3&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&6&12\\23&26&27\\-1&3&-2\end{vmatrix}$$

$$=589$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&1&2&1\\-2&0&1&6\\6&7&9&8\\2&-1&3&-2\end{vmatrix}\overset{\substack{d_2:=d_2+d_4\\d_3:=d_3-3d_4}}{=}\begin{vmatrix}0&1&2&1\\0&-1&4&4\\0&10&0&14\\2&-1&3&-2\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&4&4\\10&0&14\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&4&4\\10&0&14\end{vmatrix}$$

$$=-2\cdot124=-248$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4&0&2&1\\3&-2&1&6\\5&6&9&8\\0&2&3&-2\end{vmatrix}\overset{\substack{d_2:=d_2+d_4\\d_3:=d_3-3d_4}}{=}\begin{vmatrix}4&0&2&1\\3&0&4&4\\5&0&0&14\\0&2&3&-2\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}4&2&1\\3&4&4\\5&0&14\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot160=320$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}4&1&0&1\\3&0&-2&6\\5&7&6&8\\0&-1&2&-2\end{vmatrix}\overset{\substack{d_2:=d_2+d_4\\d_3:=d_3-3d_4}}{=}\begin{vmatrix}4&1&0&1\\3&-1&0&4\\5&10&0&14\\0&-1&2&-2\end{vmatrix}=2.(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}4&1&1\\3&-1&4\\5&10&14\end{vmatrix}$$

$$=-2\cdot(-203)=406$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}4&1&2&0\\3&0&1&-2\\5&7&9&6\\0&-1&3&2\end{vmatrix}\overset{\substack{d_2:=d_2+d_4\\d_3:=d_3-3d_4}}{=}\begin{vmatrix}4&1&2&0\\3&-1&4&0\\5&10&0&0\\0&-1&3&2\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}4&1&2\\3&-1&4\\5&10&0\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot(-70)=-140$$

Cách 2.2: Dùng Laplace

$$\Delta\ =\begin{vmatrix}4&1&2&1\\3&0&1&6\\5&7&9&8\\0&-1&3&-2\end{vmatrix}$$

$$=3\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2&1\\7&9&8\\-1&3&-2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4&1&1\\5&7&8\\0&-1&-2\end{vmatrix}+6\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}4&1&2\\5&7&9\\0&-1&3\end{vmatrix}$$

$$=-3\cdot0-(-19)+6\cdot95=589$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&1&2&1\\-2&0&1&6\\6&7&9&8\\2&-1&3&-2\end{vmatrix}$$

$$=(-2)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2&1\\7&9&8\\-1&3&-2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0&1&1\\6&7&8\\2&-1&-2\end{vmatrix}+6\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}0&1&2\\6&7&9\\2&-1&3\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot0-8+6\cdot(-40)=-248$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 9 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 6 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot 112 + 2 \cdot (-44) - 40 = 320$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 6 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3) \cdot (-8) + 2 \cdot (-19) + 6 \cdot 70 = 406$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 7 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-3) \cdot (-40) - 70 + (-2) \cdot 95 = -140$$

Với $\Delta = 589 \neq 0$. Vậy

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{8}{19} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{320}{589} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{406}{589} \\ x_4 = \dfrac{\Delta_4}{\Delta} = -\dfrac{140}{589} \end{cases}$$

Câu 2: Giả sử A là ma trận khả nghịch. Chứng minh điều sau:
a) $A^2 \neq 0$.
b) $A^k \neq 0$ với mọi $k > 2$.

Hướng dẫn:

a)

Cách 1: Dùng phản chứng
Giả sử tồn tại ma trận A khả nghịch sao cho $A^2 = 0$. Gọi B là ma trận khả nghịch của A

$$AB = I$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} & A^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & A^2B^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & I_n = 0 \text{ (vô lý)} \end{aligned}$$

Vậy $A^2 \neq 0$.

Cách 2: Dùng định thức

Ta có

$$\begin{aligned} & A && \neq 0 \\ \Rightarrow\ & \det(A) && \neq 0 \\ \Rightarrow\ & (\det(A))^2 && \neq 0 \\ \Rightarrow\ & \det(A^2) && \neq 0 \\ \Rightarrow\ & A^2 && \neq 0 \end{aligned}$$

Vậy $A^2 \neq 0$.

b)

Chứng minh $A^k \neq 0$ với mọi $k \geq 2$ như sau

Với $n = 2$ ta thấy $A^2 \neq 0$ đúng.

Giả sử $n = h$ đúng tức là $A^h \neq 0$

Ta cần chứng minh $n = h + 1$ cũng đúng tức là chứng minh $A^{h+1} \neq 0$

Ta giả sử $A^{h+1} = 0$. Cho B là ma trận khả nghịch của A.

$$AB = I_n$$

Ta có

$$\begin{aligned} & A^{h+1} && = 0 \\ \Rightarrow\ & A^h A && = 0 \\ \Rightarrow\ & A^h AB && = 0B \\ \Rightarrow\ & A^h I_n && = 0 \\ \Rightarrow\ & A^h && = 0 \quad (\text{mâu thuẫn}) \end{aligned}$$

Vậy $A^{h+1} \neq 0$.

Vậy ta chứng minh được $A^k \neq 0$ với mọi $k \geq 2$.

Nên suy ra $A^k \neq 0$ với mọi $k > 2$.

Câu 3: Tính các định thức sau:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ m-1 & 2 & 3 \\ 3 & m+1 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hướng dẫn:

a)

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ m-1 & 2 & 3 \\ 3 & m+1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{d_2 := d_2 - (m-1)d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 4-2m & -m^2+m+3 \\ 0 & m-5 & 3-3m \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4-2m & -m^2+m+3 \\ m-5 & 3-3m \end{vmatrix}$$

$$= (4-2m)(3-3m) - (m-5)(-m^2+m+3)$$

$$= (6m^2 - 18m + 12) - (-m^3 + 6m^2 - 2m - 15) = m^3 - 16m + 27$$

Cách 2: Dùng Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ m-1 & 2 & 3 \\ 3 & m+1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= [6 + 18 + m(m^2-1)] - [6m + 3(m+1) + 6(m-1)]$$

$$= (m^3 - m + 24) - (15m - 3) = m^3 - 16m + 27$$

b)

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{d_1:=d_1+2d_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{d_1:=d_1+3d_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-1)(-3) = 5$$

Cách 2: Dùng Laplace

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 4 - 3 = 5$$

Câu 4: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Tìm ma trận phụ hợp $\mathrm{adj}(A)$ của A.

b) Từ đó, tính A^{-1}.

Hướng dẫn:

a)

Xét ma trận phụ hợp của A bằng cách tìm các giá trị c_{ij} như sau

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i;\ j)$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 14$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42 \qquad c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Rightarrow c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -35 \qquad c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 42 & -35 \\ 0 & -21 & 14 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -35 & 14 & -3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-21}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -35 & 14 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ -2 & 1 & -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Câu 1: Cho các ma trận $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Tồn tại hay không một ma trận A sao cho $AB = C$? Nếu có hãy tìm tất cả những ma trận A như vậy.

Hướng dẫn:

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&AB = C \\
\Rightarrow &\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow &\begin{bmatrix} -2a_2 & 2a_1 - a_2 & -a_1 + 2a_2 \\ -2a_4 & 2a_3 - a_4 & -a_3 + 2a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow &\begin{cases} -2a_2 = -4 \\ 2a_1 - a_2 = 0 \\ -a_1 + 2a_2 = 3 \\ -2a_4 = -6 \\ 2a_3 - a_4 = 7 \\ -a_3 + 2a_4 = 1 \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 5 \\ a_4 = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Câu 2: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & a & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó $a \in \mathbb{R}$ là một tham số.

a) Tính định thức của A.

b) Tìm các giá trị của tham số a để ma trận A khả nghịch?

Hướng dẫn:

a)

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & a & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{d_3 := d_3 - 2d_1 \\ d_4 := d_4 - 3d_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & a & 2 & 2 \\ 0 & -16 & -6 & -6 \\ 0 & -22 & -8 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ -16 & -6 & -6 \\ -22 & -8 & -8 \end{vmatrix} \overset{\substack{d_2 := d_2 + 3d_1 \\ d_3 := d_3 + 4d_1}}{=} \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ -16 + 3a & 0 & 0 \\ -22 + 4a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} -16 + 3a & 0 \\ -22 + 4a & 0 \end{vmatrix} = 2[(-16 + 3a) \cdot 0 - (-22 + 4a) \cdot 0] = 0$$

Cách 2: Dùng Laplace

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&7&5&3\\0&a&2&2\\2&-2&4&0\\3&-1&7&1\end{vmatrix}$$

$$=a\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&5&3\\2&4&0\\3&7&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&7&3\\2&-2&0\\3&-1&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1&7&5\\2&-2&4\\3&-1&7\end{vmatrix}$$

$$=a\cdot 0-2\cdot(-4)+2\cdot(-4)=0$$

b)

Do $\det A=0,\ \forall a\in\mathbb{R}$. Nên không tồn tại giá trị a nào để ma trận A khả nghịch.

Câu 3: Cho $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$ và $B=A-I_3$.

a) Hãy tính B^n, với n là số nguyên ≥ 1.

b) Áp dụng phần a) để tính $A^n, n\geq 1$.

Hướng dẫn:

a)

$$B=A-I_3=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^n=\begin{cases}\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix} &, n=1\\ \begin{bmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} &, n=2\\ \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0_3, & n\geq 3\end{cases}$$

b)

$$A=B+I_3$$

$$\Rightarrow A^n=(I_3+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kI_3^{n-k}B^k=C_n^0I_3^nB^0+C_n^1I_3^{n-1}B^1+C_n^2I_3^{n-2}B^2+\sum_{k=3}^{n}C_n^kI_3^{n-k}B^k$$

$$=C_n^0I_3^nB^0+C_n^1I_3^{n-1}B^1+C_n^2I_3^{n-2}B^2+\sum_{k=3}^{n}C_n^kI_3^{n-k}0_3=C_n^0I_3^nB^0+C_n^1I_3^{n-1}B^1+C_n^2I_3^{n-2}B^2$$

$$=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{bmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2n&0\\0&0&3n\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&3n(n-1)\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2n&3n(n-1)\\0&1&3n\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Lưu ý: Với $A\in M_n(\mathbb{R})$ thì có các tính chất sau

$$I_nA=AI_n=A$$
$$I_n^k=I_n$$
$$A^0=I_n$$
$$0_nA=A0_n=0_n$$

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Xác định dạng bậc thang và tìm hạng của ma trận A.

b) Giải hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$.

Hướng dẫn:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_4:=d_4-2d_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3-d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\operatorname{rank}(A) = 3$

b)

Áp dụng quy tắc Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=d_4-d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_3]{d_1:=d_1-d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3:=d_3-d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3:=-d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1-d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy ta có nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = -8\alpha \\ x_2 = 3\alpha \\ x_3 = 3\alpha \\ x_4 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Câu 2: Tìm nghịch đảo của ma trận $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}$.

Hướng dẫn:

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\3&1&2&0&1&0\\2&3&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[d_3:=d_3-2d_1]{d_2:=d_2-3d_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-5&-7&-3&1&0\\0&-1&-5&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[d_3:=-d_3]{d_2:=-d_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&5&7&3&-1&0\\0&1&5&2&0&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3\leftrightarrow d_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&5&2&0&-1\\0&5&7&3&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow[d_3:=d_3-5d_2]{d_1:=d_1-2d_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-7&-3&0&2\\0&1&5&2&0&-1\\0&0&-18&-7&-1&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3:=-\frac{1}{18}d_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-7&-3&0&2\\0&1&5&2&0&-1\\0&0&1&\frac{7}{18}&\frac{1}{18}&-\frac{5}{18}\end{array}\right]\xrightarrow[d_2:=d_2-5d_3]{d_1:=d_1+7d_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{5}{18}&\frac{7}{18}&\frac{1}{18}\\0&1&0&\frac{1}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{7}{18}\\0&0&1&\frac{7}{18}&\frac{1}{18}&-\frac{5}{18}\end{array}\right]$$

Vậy

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{18}&\frac{7}{18}&\frac{1}{18}\\\frac{1}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{7}{18}\\\frac{7}{18}&\frac{1}{18}&-\frac{5}{18}\end{bmatrix}$$

Cách 2: Dùng định thức

Xác định định thức của A

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}=18$$

Do $\det(A)=18\neq 0$ nên ma trận A có ma trận nghịch đảo.

Xét ma trận phụ hợp của A bằng cách tìm các giá trị c_{ij} như sau

$$c_{ij}=(-1)^{i+j}\det A(i;\,j)$$

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=-5\qquad c_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=1$$

$$c_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}=1\qquad c_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1$$

$$\Rightarrow c_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}=7\qquad c_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix}=7$$

$$c_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=7\qquad c_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=-5$$

$$c_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=-5$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}-5&1&7\\7&-5&1\\1&7&-5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A)=C^{\top}=\begin{bmatrix}-5&7&1\\1&-5&7\\7&1&-5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-5&7&1\\1&-5&7\\7&1&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{18}&\frac{7}{18}&\frac{1}{18}\\\frac{1}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{7}{18}\\\frac{7}{18}&\frac{1}{18}&-\frac{5}{18}\end{bmatrix}$$

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \qquad mx_3 = \quad 1 \\ x_1 + mx_2 + \qquad\quad x_3 = \quad m \\ x_1 + \quad x_2 - (m-1)x_3 = -2 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Áp dụng quy tắc Cramer
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -(m-1) \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -(m-1) \end{vmatrix} = -2m^2 + 3m - 1 = -(2m-1)(m-1)$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ -2 & 1 & -(m-1) \end{vmatrix} = 3(m^2-1) = (3m+3)(m-1)$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & -2 & -(m-1) \end{vmatrix} = -2m^2 - m + 2 = -(2m+2)(m-1)$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3m + 3 = -3(m-1)$$
Với $m \neq 1$ và $m \neq \frac{1}{2}$: $\Delta \neq 0$ nên hệ phương trình có duy nhất một nghiệm
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{3m+3}{2m-1} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{2m+2}{2m-1} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{3}{2m-1} \end{cases}$$
Với $m = 1$: $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta = 0$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm.
Thế $m = 1$ vào hệ phương trình để kiểm tra
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \ \ 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \ \ 1 \\ x_1 + x_2 \qquad\ = -2 \end{cases}$$
Áp dụng Gauss-Jordan ta có
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 - d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2 := -d_2]{d_1 := d_1 + d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Vậy ta có nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x_1 = -2 - \alpha \\ x_2 = \qquad\ \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \ \ 3 \end{cases}$$
Với $m = \frac{1}{2}$: $\Delta_1 = -\frac{9}{4}$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 4: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm một ma trận $B \neq 0$ sao cho $AB = BA = 0$.

Hướng dẫn:

Dựa trên câu 2 ta thấy rằng ma trận A là ma trận khả nghịch. Gọi C là ma trận nghịch đảo của A. Vậy ta có
$$AC = CA = I_n$$

Xét $AB = BA = 0$
Ta có

$$\begin{aligned} & AB && = 0 \\ \Rightarrow\ & C(AB) && = 0 \\ \Rightarrow\ & (CA)B && = 0 \\ \Rightarrow\ & I_n B && = 0 \\ \Rightarrow\ & B && = 0 \end{aligned}$$

Vậy ta không thể tìm được ma trận $B \neq 0$ nào thỏa $AB = BA = 0$.

Câu 1: Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của A.

b) Tìm ma trận X sao cho $XA = AB$.

Hướng dẫn:

a)

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2:=d_2-d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-4d_2]{d_1:=d_1+2d_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1:=d_1-d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right]$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Cách 2: Dùng định thức

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Do $\det(A) = 1 \neq 0$ nên ma trận A có ma trận nghịch đảo.
Xét ma trận phụ hợp của A bằng cách tìm các giá trị c_{ij} như sau

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i;\ j)$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\Rightarrow c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \\ -7 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A) = C^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -4 & 6 & -7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}
&XA &&= AB\\
\Rightarrow\ &XAA^{-1} &&= ABA^{-1}\\
\Rightarrow\ &X &&= ABA^{-1}\\
\Rightarrow\ &X &&= \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 6 & -7\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & -4 & 5\end{bmatrix}\\
\Rightarrow\ &X &&= \begin{bmatrix}-2 & 4 & -2\\ 0 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 6 & -7\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & -4 & 5\end{bmatrix}\\
\Rightarrow\ &X &&= \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 6\\ 4 & -5 & 7\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -7 & 5\\ 1 & 3 & -4 & 3\end{bmatrix}$

a) Xác định dạng bậc thang và tìm hạng của ma trận A.

b) Giải hệ phương trình $AX = 0$.

Hướng dẫn:

a)

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -7 & 5\\ 1 & 3 & -4 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-d_1\\ d_4:=d_4-d_1}]{d_2:=d_2-d_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 3 & -9 & 6\\ 0 & 2 & -6 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[d_4:=\frac{1}{2}d_4]{d_3:=\frac{1}{3}d_3} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -3 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-d_2]{d_3:=d_3-d_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy $\operatorname{rank}(A) = 2$

b)

Áp dụng Gauss-Jordan ta có được

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & -7 & 5 & 0\\ 1 & 3 & -4 & 3 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-d_1\\ d_4:=d_4-d_1}]{d_2:=d_2-d_1} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -9 & 6 & 0\\ 0 & 2 & -6 & 4 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=\frac{1}{2}d_4]{d_3:=\frac{1}{3}d_3} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-d_2]{d_3:=d_3-d_2} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{d_1:=d_1-d_2} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 5 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Vậy

$$\begin{cases}x_1 = -5\alpha + 3\beta\\ x_2 = 3\alpha - 2\beta\\ x_3 = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R}\\ x_4 = \beta, & \beta \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + (1-m)x_3 = \quad 1 \\ x_1 - mx_2 + \qquad 2x_3 = m+2 \\ x_1 + \ 2x_2 + \qquad 3x_3 = \quad 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Áp dụng quy tắc Cramer ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1 & -m & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ m+2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1 & -m & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -m^2 - 4m - 3 = -(m+1)(m+3)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ m+2 & -m & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4m^2 - 6m - 2 = -(4m+2)(m+1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1 & m+2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & m+2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2m - 2 = -2(m+1)$$

$m \neq -1$; $m \neq -3$: $\Delta \neq 0$ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{4m+2}{m+3} \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -\dfrac{m+1}{m+3} \\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{2}{m+3} \end{cases}$$

$m = -1$: $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta = 0$. Ta kiểm tra hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + \quad x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Dùng phương pháp Gauss-Jordan, ta có

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 - d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 := d_1 - d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm. Nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x_1 = \quad -\alpha \\ x_2 = 1 - \alpha \\ x_3 = \qquad \alpha, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$m = -3$: $\Delta_1 = -20 \neq 0$. Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 4: Cho A; $B \in M_n(\mathbb{R})$, thỏa mãn $AB = 2A - 3B$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

Hướng dẫn:

Ta có 1 số định nghĩa sau

$$I_n^2 = I_n, \qquad AI_n = I_nA = A$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& AB && = 2A - 3B \\
\Rightarrow\ & 2A - 3B - AB && = 0 \\
\Rightarrow\ & 2A - 3B - AB + 6I_n^2 && = 6I_n^2 \\
\Rightarrow\ & 2AI_n - 3BI_n - AB + 6I_n^2 && = 6I_n \\
\Rightarrow\ & A(2I_n - B) + 3I_n(2I_n - B) && = 6I_n \\
\Rightarrow\ & (A + 3I_n)(2I_n - B) && = 6I_n \\
\Rightarrow\ & \left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{2}I_n\right)(2I_n - B) && = I_n
\end{aligned}$$

Suy ra $\left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{2}I_n\right)$ và $(2I_n - B)$ khả nghịch với nhau.

Vậy ta có

$$\begin{aligned}
& (2I_n - B)\left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{2}I_n\right) && = I_n \\
\Rightarrow\ & (2I_n - B)\left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{2}I_n\right) && = I_n^2 \\
\Rightarrow\ & (2I_n - B)(A + 3I_n) && = 6I_n^2 \\
\Rightarrow\ & (2AI_n - 3BI_n) - BA + 6I_n^2 && = 6I_n^2 \\
\Rightarrow\ & AB - BA && = 0 \\
\Rightarrow\ & AB && = BA \text{ (đpcm)}
\end{aligned}$$

Mở rộng: Cho A; $B \in M_n(\mathbb{R})$ và α; $\beta \in \mathbb{R}$, thỏa mãn $AB = \alpha A + \beta B$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& AB && = \alpha A + \beta B \\
\Rightarrow\ & \alpha A + \beta B - AB - \alpha\beta I_n^2 && = -\alpha\beta I_n^2 \\
\Rightarrow\ & A(\alpha I_n - B) - \beta I_n(\alpha I_n - B) && = -\alpha\beta I_n \\
\Rightarrow\ & (A - \beta I_n)(\alpha I_n - B) && = -\alpha\beta I_n \\
\Rightarrow\ & \left(-\frac{1}{\alpha\beta}A + \frac{1}{\alpha}I_n\right)(\alpha I_n - B) && = I_n
\end{aligned}$$

Suy ra $\left(-\frac{1}{\alpha\beta}A + \frac{1}{\alpha}I_n\right)$ và $\left(\frac{1}{\alpha}I_n - B\right)$ khả nghịch với nhau. Vậy ta có

$$\begin{aligned}
& (\alpha I_n - B)\left(-\frac{1}{\alpha\beta}A + \frac{1}{\alpha}I_n\right) = I_n \\
\Rightarrow\ & (\alpha I_n - B)(A - \beta I_n) && = -\alpha\beta I_n \\
\Rightarrow\ & \alpha A - \alpha\beta I_n^2 - BA + \beta B && = -\alpha\beta I_n \\
\Rightarrow\ & (\alpha A + \beta B) - BA && = 0 \\
\Rightarrow\ & AB - BA && = 0 \\
\Rightarrow\ & AB && = BA
\end{aligned}$$

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

a) Tính định thức của ma trận A. Suy ra giá trị của m để A khả nghịch.

b) Tìm ma trận nghịch đảo của A trong trường hợp $m = 1$.

Hướng dẫn:

a)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 7m + 6$$

Ma trận A khả nghịch

$$\begin{aligned} &\det(A) \neq 0 \\ \Rightarrow\ & 2m^2 - 7m + 6 \neq 0 \\ \Rightarrow\ & m \neq 2 \wedge m \neq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b)

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

Với $m = 1$, ta có

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 - d_1]{d_2 := d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 := d_2 - d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3 := d_3 - 4d_2]{d_1 := d_1 + 2d_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 := d_1 - d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right]$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Cách 2: Dùng định thức

$$m = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Nên

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Xét ma trận phụ hợp của A bằng cách tìm các giá trị c_{ij} như sau

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i;\ j)$$

$$\begin{aligned}
& c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{vmatrix} = -4 \quad && c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\1 & 2\end{vmatrix} = -4\\
& c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix} = -1 && c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} = -7\\
\Rightarrow\ & c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} = 3 && c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} = -1\\
& c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\2 & 2\end{vmatrix} = 6 && c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{vmatrix} = 5\\
& c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} = 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix}-4 & -1 & 3\\6 & 1 & -4\\-7 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix}-4 & 6 & -7\\-1 & 1 & -1\\3 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}-4 & 6 & -7\\-1 & 1 & -1\\3 & -4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 6 & -7\\-1 & 1 & -1\\3 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 3\\1 & 2 & 1 & 3 & 4\\1 & -1 & 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$

a) Xác định dạng bậc thang và tìm hạng của ma trận A.

b) Giải hệ phương trình $AX = 0$.

Hướng dẫn:

a)

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 3\\1 & 2 & 1 & 3 & 4\\1 & -1 & 4 & -3 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-d_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 3\\0 & 1 & -1 & 2 & 1\\0 & -2 & 2 & -4 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3+2d_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 3\\0 & 1 & -1 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy $\operatorname{rank}(A) = 2$.

b)

Áp dụng Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0\\1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 0\\1 & -1 & 4 & -3 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-d_1} \left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0\\0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\0 & -2 & 2 & -4 & -2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{d_3:=d_3+2d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0\\0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1-d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0\\0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Vậy ta có nghiệm

$$\begin{cases}x_1 = -3\alpha + \beta - 2\gamma\\x_2 = \alpha - 2\beta - \gamma\\x_3 = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R}\\x_4 = \beta, & \beta \in \mathbb{R}\\x_5 = \gamma, & \gamma \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2mx_1 + (m-3)x_2 = 4 \\ (3m+1)x_1 + (m-5)x_2 = m+7 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Áp dụng quy tắc Cramer

$$A = \begin{bmatrix} 2m & m-3 \\ 3m+1 & m-5 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 4 \\ m+7 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m & m-3 \\ 3m+1 & m-5 \end{vmatrix} = -m^2 - 2m + 3 = -(m+3)(m-1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & m-3 \\ m+7 & m-5 \end{vmatrix} = -m^2 + 1 = -(m+1)(m-1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2m & 4 \\ 3m+1 & m+7 \end{vmatrix} = 2m^2 + 2m - 4 = 2(m-1)(m+2)$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow m \neq -3 \wedge m \neq 1$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m+1}{m+3} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -\dfrac{2(m+2)}{m+3} \end{cases}$$

$m = 1$: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Ta kiểm tra hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 4 \\ 4x_1 - 4x_2 = 8 \end{cases}$$

Dùng phương pháp Gauss-Jordan, ta có

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 := d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 := \frac{1}{2}d_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm. Nghiệm của hệ phương trình là:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \alpha \\ x_2 = \alpha, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$m = -3$: $\Delta_1 = -8 \neq 0$. Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 4: Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 = 3A$. Chứng minh rằng $A + I_n$ là ma trận khả nghịch.

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} & A^2 && = 3A \\ \Rightarrow\ & 3A - A^2 && = 0 \\ \Rightarrow\ & 4AI_n - A^2 - AI_n + 4I_n^2 - 4I_n^2 && = 0 \\ \Rightarrow\ & A(4I_n - A) + I(4I_n - A) && = 4I_n^2 \\ \Rightarrow\ & (A + I_n)(4I_n - A) && = 4I_n^2 \\ \Rightarrow\ & (A + I_n)\left(I_n - \frac{1}{4}A\right) && = I_n \end{aligned}$$

Vậy ma trận $(A + I_n)$ và ma trận $\left(I_n - \frac{1}{4}A\right)$ khả nghịch với nhau.

Suy ra $A + I_n$ là ma trận khả nghịch.

Cách suy luận:

Ta muốn tìm ma trận C sao cho $(A+I_n)C=I_n$. Ta nhận thấy trong giả thiết có A^2 và ta muốn triệt tiêu I_n nên ta xét C có dạng $C=\alpha A+I_n$. Ta kiểm tra giá trị α

$$\begin{aligned}(A+I_n)(\alpha A+I_n) &= I_n\\ \Rightarrow \alpha A^2+A+\alpha A+I_n &= I_n\\ \Rightarrow \alpha A^2+(\alpha+1)A &= 0\\ \Rightarrow A^2 &= -\frac{\alpha+1}{\alpha}A\end{aligned}$$

Vậy suy ra

$$\begin{aligned}-\frac{\alpha+1}{\alpha} &= 3\\ \Rightarrow -\alpha-1 &= 3\alpha\\ \Rightarrow \alpha &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Từ đó ta có kết luận: ma trận C cần tìm là $C=-\frac{1}{4}A+I_n$.

Lời giải đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2019 – 2020

Câu 1: Kiểm tra tính khả nghịch và tìm A^{-1} nếu có với

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

Hướng dẫn:

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

Xét

$$[A|I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{d_3:=d_3-d_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[d_2:=d_2-d_3]{d_1:=d_1-d_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&2&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3:=d_3-d_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&2&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&-2&-1&2\end{array}\right]\xrightarrow{d_1:=d_1-d_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&1&-3\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&-2&-1&2\end{array}\right]$$

Vậy

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4&1&-3\\1&1&-1\\-2&-1&2\end{bmatrix}$$

Cách 2: Dùng định thức

Ta có

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&2&1\\1&2&3\end{vmatrix}=1$$

Vậy $\det A\neq 0$. Nên ma trận A khả nghịch.

Xét ma trận phụ hợp của A bằng cách tìm các giá trị c_{ij} như sau

$$c_{ij}=(-1)^{i+j}\det A(i;\,j)$$

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\2&3\end{vmatrix}=4 \qquad c_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1$$

$$c_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}=1 \qquad c_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3$$

$$\Rightarrow c_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&2\\1&2\end{vmatrix}=-2 \qquad c_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1$$

$$c_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=1 \qquad c_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2$$

$$c_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&1&-1\\-3&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A)=C^{\top}=\begin{bmatrix}4&1&-3\\1&1&-1\\-2&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}4&1&-3\\1&1&-1\\-2&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&-3\\1&1&-1\\-2&-1&2\end{bmatrix}$$

Câu 2: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = m \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Cách 1: Dùng phương pháp Gauss-Jordan

Xét

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & m \end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-d_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & m-14 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=d_4+d_2]{\substack{d_1:=d_1-d_2 \\ d_3:=d_3-2d_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & m-13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+\frac{3}{4}d_3]{\substack{d_1:=d_1-\frac{1}{4}d_3 \\ d_2:=d_2+\frac{1}{2}d_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-13 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3:=-\frac{1}{4}d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-13 \end{array}\right]$$

Với $m - 13 = 0 \Leftrightarrow m = 13$: Hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 6 - \alpha \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Với $m - 13 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 13$: Hệ phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Dùng quy tắc Cramer

Cách 2.1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_4 := c_4 - c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \\ m & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1 \\ d_4 := d_4 - 2d_1}}{=} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ m-14 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ m-14 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4m + 52) = 4m - 52$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & m & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_4 := c_4 - c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & m & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & m & 2 \end{vmatrix} \overset{c_4 := c_4 - c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & m \end{vmatrix} \overset{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1 \\ d_4 := d_4 - 2d_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & m-14 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & m-14 \end{vmatrix} = -4m + 52$$

Cách 2.2: Dùng Laplace

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -9 - 0 + 0 - (-9) = 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \\ m & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = m \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+3 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4m - 52$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & m & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} + m \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+3 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot (-4) + m \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & m & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+m \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot 0 + 0 - m \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & m \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$+3 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} + m \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot (-24) + 4 - 3 \cdot 0 + m \cdot (-4) = -4m + 52$$

Xét $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow m = 13$: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 13 \end{cases}$$

Áp dụng phương pháp Gauss-Jordan, ta có

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&7\\1&2&3&1&8\\1&3&1&1&9\\2&1&3&2&13\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-d_1\\d_4:=d_4-2d_1}]{d_2:=d_2-d_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&7\\0&1&2&0&1\\0&2&0&0&2\\0&-1&1&0&-1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-2d_2\\d_4:=d_4+d_2}]{d_1:=d_1-d_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&1&6\\0&1&2&0&1\\0&0&-4&0&0\\0&0&3&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{d_2:=d_2+\frac{1}{2}d_3\\d_4:=d_4+\frac{3}{4}d_3}]{d_1:=d_1-\frac{1}{4}d_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&6\\0&1&0&0&1\\0&0&-4&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{d_3:=-\frac{1}{4}d_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&6\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases}x_1=6-\alpha\\x_2=1\\x_3=0\\x_4=\alpha, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Xét $\Delta_1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 13$: Hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 3: Cho hai ma trận $A=\begin{bmatrix}2&0&-5&4\\1&-3&5&6\\1&1&-2&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2&0&-5&4m\\1&-3&5&6m\\m&m&-2m&m^2\\0&1&1&m\end{bmatrix}$

a) Tính định thức $\det A$.

b) Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho $\det B=\det(2A)$

Hướng dẫn:

a)

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\det A=\begin{vmatrix}2&0&-5&4\\1&-3&5&6\\1&1&-2&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\overset{\substack{d_1:=d_1-2d_3\\d_2:=d_2-d_3}}{=}\begin{vmatrix}0&-2&-1&2\\0&-4&7&5\\1&1&-2&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2&-1&2\\-4&7&5\\1&1&1\end{vmatrix}=-35$$

Cách 2: Dùng Laplace

$$\det A=\begin{vmatrix}2&0&-5&4\\1&-3&5&6\\1&1&-2&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3&5&6\\1&-2&1\\1&1&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&-5&4\\1&-2&1\\1&1&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&-5&4\\-3&5&6\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot 27-12-77=-35$$

b)

Ta có

$$\det(2A) = 2^4 \det(A) = 16 \cdot (-35) = -560$$

Ta tính định thức ma trận B như sau

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 4m \\ 1 & -3 & 5 & 6m \\ m & m & -2m & m^2 \\ 0 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} \overset{\substack{d_1:=d_1-2d_2 \\ d_3:=d_3-md_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 6 & -15 & -8m \\ 1 & -3 & 5 & 6m \\ 0 & 4m & -7m & -5m^2 \\ 0 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & -15 & -8m \\ 4m & -7m & -5m^2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -35m^2$$

Cách 2: Dùng Laplace

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 4m \\ 1 & -3 & 5 & 6m \\ m & m & -2m & m^2 \\ 0 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 5 & 6m \\ m & -2m & m^2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 4m \\ m & -2m & m^2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} + m \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 4m \\ -3 & 5 & 6m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot 27m^2 - 12m^2 + m \cdot (-77m) = -35m^2$$

Xét

$$\begin{aligned} \det B &= \det(2A) \\ \Rightarrow -35m^2 &= -560 \\ \Rightarrow m^2 &= 16 \\ \Rightarrow m &= \pm 4 \end{aligned}$$

Cách 3: Rút gọn định thức

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 4m \\ 1 & -3 & 5 & 6m \\ m & m & -2m & m^2 \\ 0 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 4m \\ 1 & -3 & 5 & 6m \\ 1 & 1 & -2 & m \\ 0 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 \det A$$

Ta có

$$\begin{aligned} \det B &= \det(2A) \\ \Rightarrow m^2 \det A &= 2^4 \det A \\ \Rightarrow m^2 &= 2^4 \\ \Rightarrow m &= \pm 2^2 = \pm 4 \end{aligned}$$

Câu 4: Vết của một ma trận vuông $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $\mathrm{tr}(A)$, được định nghĩa là tổng của tất cả các hệ số trên đường chéo chính của A, nghĩa là $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Chứng minh rằng nếu $B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $\mathrm{tr}(BB^\top) = 0$ thì $B = 0$.

Hướng dẫn:

Ta có

$$B^\top = (b'_{ij}) = (b_{ji})$$

Xét đường chéo chính của $C = BB^\top$ ta có

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{n} b_{1k} b'_{k1} = \sum_{k=1}^{n} b_{1k} b_{1k} = \sum_{k=1}^{n} b_{1k}^2$$
$$\Rightarrow c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2\,, \qquad i = \overline{1,n}$$

Vậy

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2$$

Với $\operatorname{tr}(C) = 0$ ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(C) &= 0 \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2 &= 0 \\
\Rightarrow b_{ij}^2 &= 0, \qquad \forall i;\ j = \overline{1;\ n} \\
\Rightarrow b_{ij} &= 0, \qquad \forall i;\ j = \overline{1;\ n} \\
\Rightarrow B &= 0
\end{aligned}$$

Lời giải đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2020 – 2021

Câu 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 5 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Áp dụng Gauss-Jordan ta có dạng ma trận

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-d_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=d_4-d_3]{d_1:=d_1-2d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3:=d_3+d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2:=d_2+2d_3]{d_1:=d_1-5d_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \alpha - 5\beta \\ x_2 = -1 - \alpha + 2\beta \\ x_3 = \alpha \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của A.

b) Tìm ma trận X sao cho $XA = AB$.

Hướng dẫn:

a)

Cách 1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_1]{d_2:=d_2-d_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3:=d_3+d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_2:=d_2-d_3]{d_1:=d_1-d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cách 2: Dùng định thức

Ta có

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy $\det A \neq 0$. Nên ma trận A khả nghịch.

Xét ma trận phụ hợp của A bằng cách tìm các giá trị c_{ij} như sau

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(i;\ j)$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{vmatrix} = 5 \qquad c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{vmatrix} = 1$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix} = 2 \qquad c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix} = -3 \qquad c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} = -1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{vmatrix} = -2 \qquad c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} = 1$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix}5 & 2 & -3\\-2 & 0 & 1\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\2 & 0 & -1\\-3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\2 & 0 & -1\\-3 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\2 & 0 & -1\\-3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}
XA &= AB\\
\Rightarrow XAA^{-1} &= ABA^{-1}\\
\Rightarrow X &= ABA^{-1}\\
\Rightarrow X &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\2 & 0 & -1\\-3 & 1 & 1\end{bmatrix}\\
\Rightarrow X &= \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\-1 & -1 & 2\\1 & -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\2 & 0 & -1\\-3 & 1 & 1\end{bmatrix}\\
\Rightarrow X &= \begin{bmatrix}-5 & 1 & 2\\-13 & 4 & 4\\-7 & 0 & 4\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + mx_3 = \ \ 2 \\ x_1 + mx_2 + \ \ x_3 = m+1 \\ x_1 + 2\,x_2 + \ 2x_3 = \ \ 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Cách 1: Dùng phương pháp Gauss

Xét

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 1 & m & 1 & m+1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-1 \\ 0 & 1 & 2-m & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_2:=d_2-(m-1)d_3]{d_1:=d_1-d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2(m-1) & 3 \\ 0 & 0 & (m-1)(m-3) & 2(m-1) \\ 0 & 1 & 2-m & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2(m-1) & 3 \\ 0 & 1 & 2-m & -1 \\ 0 & 0 & (m-1)(m-3) & 2(m-1) \end{array}\right]$$

Với $m-1=0 \Rightarrow m=1$: Hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 3 \\ x_2 = -1-\alpha \\ x_3 = \ \ \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Với $m-3=0 \Rightarrow m=3$: Hệ phương trình vô nghiệm

Với $m \neq 1 \wedge m \neq 3$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{m+5}{m-3} \\ x_2 = \dfrac{m-1}{m-3} \\ x_3 = \dfrac{2}{m-3} \end{cases}$$

Cách 2: Dùng quy tắc Cramer

Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1 & 2-m \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ m+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cách 2.1: Dùng biến đổi sơ cấp

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1 & 2-m \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m-1 & 1-m \\ 1 & 2-m \end{vmatrix}$$
$$= -m^2 + 4m - 3 = -(m-1)(m-3)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ m+1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{d_1 := d_1 - 2d_3 \\ d_2 := d_2 - (m+1)d_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & m-4 \\ 0 & -m-2 & -2m-1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & m-4 \\ -m-2 & -2m-1 \end{vmatrix}$$
$$= m^2 + 4m - 5 = (m-1)(m+5)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m-1 & 1-m \\ -1 & 2-m \end{vmatrix}$$
$$= -m^2 + 2m - 1 = -(m-1)^2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & m+1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m-1 & m-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -2m + 2 = -2(m-1)$$

Cách 2.2: Dùng Sarrus

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m + 1 + 2m - (m^2 + 2 + 2) = -m^2 + 4m - 3 = -(m-1)(m-3)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ m+1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4m + 1 + 2m^2 + 2m - (m^2 + 4 + 2m + 2) = m^2 + 4m - 5 = (m-1)(m+5)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + 2 + 2 + m - (m^2 + m + 1 + 4) = -m^2 + 2m - 1 = -(m-1)^2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & m+1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m + m + 1 + 4 - (2m + 2m + 2 + 1) = -2m + 2 = -2(m-1)$$

Với $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \wedge m \neq 3$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{m+5}{m-3} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{m-1}{m-3} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{2}{m-3} \end{cases}$$

Với $m = 1$: Áp dụng phương pháp Gauss-Jordan, ta có

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 - d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 := d_1 - d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 - \alpha \\ x_3 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Với $m = 3$ thì $\Delta_1 = -16 \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 4: Chứng minh rằng, với mọi $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ ta có $\det(A\cdot A^{\top})=0$, trong đó $A^{\top}$ là ma trận chuyển vị của A.

Hướng dẫn:

Cách 1:

Gọi

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix};\ A^{\top}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\end{bmatrix}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned}
\text{VT}=\det(A\cdot A^{\top}) &= \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\end{bmatrix}\right)\\
&=\det\begin{bmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2 & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22} & a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}\\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12} & a_{21}^2+a_{22}^2 & a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}\\ a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12} & a_{31}a_{21}+a_{32}a_{22} & a_{31}^2+a_{32}^2\end{bmatrix}\\
&=\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&=\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & 0\end{bmatrix}\right)\cdot\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&=0\cdot 0=0=\text{VP (đpcm)}
\end{aligned}$$

Cách 2:

Ta có

$$\operatorname{rank}(A\cdot B)\le\min\{\operatorname{rank}(A);\ \operatorname{rank}(B)\}$$

Vậy nên

$$\operatorname{rank}(A\cdot A^{\top})\le\min\{\operatorname{rank}(A);\ \operatorname{rank}(A^{\top})]$$

Do $A\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ nên $\operatorname{rank}(A)\le 3$ và do $A^{\top}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ nên $\operatorname{rank}(A^{\top})\le 2$

Vậy suy ra

$$\operatorname{rank}(A\cdot A^{\top})\le 2$$

Với $A\cdot A^{\top}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ nên $\det(A\cdot A^{\top})\ne 0$ thì $\operatorname{rank}(A\cdot A^{\top})=3$. Mà do $\operatorname{rank}(A\cdot A^{\top})\le 2$ nên suy ra

$$\det(A\cdot A^{\top})=0$$

LỜI GIẢI ĐỀ THI CUỐI KỲ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Lời giải đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2009 – 2010

Câu 1:

1) Cho ma trận $A = \left(a_{kj}\right)_n$ với $a_{kj} \in \mathbb{C}$ và a_{kj} là số phức liên hợp của a_{jk} với mọi $k;\ j$. Chứng minh rằng $\det A$ là số thực.

2) Sử dụng các tính chất của định thức, chứng minh đẳng thức sau

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 & d_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_1x & c_2 & d_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 & d_3 \\ a_4+b_4x & a_4-b_4x & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn:

1)

Ta có

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\imath=1}^{n} a_{\sigma(\imath)\imath}} = \overline{\det A^{\top}} = \overline{\det A}$$

$\Rightarrow \det A \in \mathbb{R}$, $(z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R})$

2)

Ta có

$$\text{VT} = \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 & d_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 & d_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 & d_3 \\ a_4+b_4x & a_4-b_4x & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_1x & c_1 & d_1 \\ a_2 & a_2-b_2x & c_2 & d_2 \\ a_3 & a_3-b_3x & c_3 & d_3 \\ a_4 & a_4-b_4x & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1-b_1x & c_1 & d_1 \\ b_2x & a_2-b_2x & c_2 & d_2 \\ b_3x & a_3-b_3x & c_3 & d_3 \\ b_4x & a_4-b_4x & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -b_1x & c_1 & d_1 \\ a_2 & -b_2x & c_2 & d_2 \\ a_3 & -b_3x & c_3 & d_3 \\ a_4 & -b_4x & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} b_1x & a_1 & c_1 & d_1 \\ b_2x & a_2 & c_2 & d_2 \\ b_3x & a_3 & c_3 & d_3 \\ b_4x & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & -b_1x & c_1 & d_1 \\ b_2x & -b_2x & c_2 & d_2 \\ b_3x & -b_3x & c_3 & d_3 \\ b_4x & -b_4x & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(0 - x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \right) + \left(x \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + 0 \right)$$

$$= -x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \text{VP (đpcm)}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vector $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (1;\ 0;\ -1)$; $u_2 = (0;\ -2;\ 1)$; $u_3 = (0;\ 0;\ 1)$; $v_1 = (2;\ 1;\ -1)$; $v_2 = (1;\ 1;\ 6)$; $v_3 = (-1;\ 1;\ m)$.

1) Tìm m để $\mathcal{B}'$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ ứng với $m = 1$.

Hướng dẫn:

1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

Để $\mathcal{B}'$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì $\det(A) \neq 0$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} &\neq 0 \\ \Rightarrow m - 20 &\neq 0 \\ \Rightarrow m &\neq 20 \end{aligned}$$

2)

Với $m = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}') = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}')$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Câu 3: Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các không gian con $W_1 = \langle (0;\ 0;\ 1;\ 0);\ (1;\ 2;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 1) \rangle$ và $W_2 = \langle (0;\ 1;\ 0;\ 1);\ (1;\ 1;\ 0;\ 2);\ (0;\ 1;\ 1;\ 1) \rangle$. Hãy tìm một cơ sở của không gian con $W_1 \cap W_2$.

Hướng dẫn:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_1 := d_1 - d_2]{d_3 := d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W_1 có số chiều là 3 và một cơ sở là $\{(1;\ 2;\ 0;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 0;\ 1)\}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 - d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

W_2 có số chiều là 3 và một cơ sở là $\{(1;\ 0;\ 0;\ 1);\ (0;\ 1;\ 0;\ 1);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0)\}$

Ta có: $u \in W_1 \cap W_2$ thì

$$\begin{cases} u = \alpha_1(1;\ 2;\ 0;\ 0) + \alpha_2(0;\ 0;\ 1;\ 0) + \alpha_3(0;\ 0;\ 0;\ 1) \\ u = \alpha_4(1;\ 0;\ 0;\ 1) + \alpha_5(0;\ 1;\ 0;\ 1) + \alpha_6(0;\ 0;\ 1;\ 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u \ = \alpha_4(1;\ 0;\ 0;\ 1) + \alpha_5(0;\ 1;\ 0;\ 1) + \alpha_6(0;\ 0;\ 1;\ 0) \\ \alpha_1 = \alpha_4 \\ 2\alpha_1 = \alpha_5 \\ \alpha_2 = \alpha_6 \\ \alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u \ = \alpha_4(1;\ 0;\ 0;\ 1) + \alpha_5(0;\ 1;\ 0;\ 1) + \alpha_6(0;\ 0;\ 1;\ 0) \\ \alpha_1 = \frac{1}{3}\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha_5 \in \mathbb{R} \\ \alpha_2 = \alpha_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = \alpha(1;\ 2;\ 0;\ 3) + \beta(0;\ 0;\ 1;\ 0) \text{ với } \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}$$

Suy ra $W_1 \cap W_2 = \{\alpha(1;\ 2;\ 0;\ 3) + \beta(0;\ 0;\ 1;\ 0) | \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}\} = \langle(1;\ 2;\ 0;\ 3);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0)\rangle$. Vậy $W_1 \cap W_2$ có số chiều là 2 và một cơ sở là $\{(1;\ 2;\ 0;\ 2);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0)\}$.

Câu 4: Cho các ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ và $g : V \to W$ mà gf là đẳng cấu. Chứng minh rằng $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ và $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

Hướng dẫn:

Lấy $v \in V$, ta có $v = \underbrace{f[(gf)^{-1}g(v)]}_{x} + \underbrace{v - f[(gf)^{-1}g(v)]}_{y}$

Ta có $x \in \operatorname{Im} f$; $y \in \operatorname{Ker} f$, vì $g(y) = g(v - f[(gf)^{-1}g(v)]) = g(v) - (gf)([(gf)^{-1}g(v)])$

$= g(v) - g(v) = 0$

Vậy $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

Lấy $z \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, vì $z \in \operatorname{Im} f$ nên tồn tại $t \in V$ sao cho $z = f(t)$

Vì $z \in \operatorname{Ker} g$ nên

$$\begin{aligned} & g(z) &&= 0 \\ \Rightarrow\ & g\big(f(t)\big) &&= 0 \\ \Rightarrow\ & gf(t) &&= 0 \\ \Rightarrow\ & t &&= 0 \\ \Rightarrow\ & z &&= 0 \end{aligned}$$

Vậy $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$

Câu 5: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở $\mathcal{C} = \big((1;\ 1;\ 1);\ (1;\ 2;\ 0);\ (3;\ 0;\ 0)\big)$ có ma trận là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$.

Hướng dẫn:

Với

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$[\varphi]_{\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[\varphi]_{\mathcal{C}}(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0) = (\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})[\varphi]_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 10 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{29}{6} & -\frac{49}{6} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

Với

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{29}{6} & -\frac{49}{6} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

Cơ sở $\operatorname{Im} f$ là cơ sở dòng của $A^{\top}$

$$A^{\top} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{29}{6} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{49}{6} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3:=d_3+\frac{49}{2}d_1]{d_2:=d_2-\frac{29}{2}d_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{21}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{35}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3+\frac{5}{3}d_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2:=\frac{2}{3}d_2]{d_1:=3d_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\dim \operatorname{Im} f = 2$ và một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ là $\{(1;\ 0;\ 2);\ (0;\ 1;\ -7)\}$.

Cơ sở $\operatorname{Ker} f$ là cơ sở nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{29}{6} & -\frac{49}{6} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3-2d_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{29}{6} & -\frac{49}{6} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{21}{2} & \frac{35}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3+7d_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{29}{6} & -\frac{49}{6} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2:=2d_2]{d_1:=6d_1} \begin{bmatrix} 2 & 29 & -49 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 29x_2 - 49x_3 = 0 \\ \qquad\quad 3x_2 - 5\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}\alpha \\ x_2 = \frac{5}{3}\alpha \\ x_3 = \quad \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ và một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ là

$$\left\{\left(\frac{1}{3};\ \frac{5}{3};\ 1\right)\right\}$$

Lời giải đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2011 – 2012

Câu 1: Gọi W là tập hợp các ma trận đối xứng thuộc $M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng W là không gian vector của $M_n(\mathbb{R})$. Tìm số chiều và một cơ sở của W.

Hướng dẫn:

Lấy $\alpha \in \mathbb{R},\ A;\ B \in W$ (tức ta có $A^\top = A;\ B^\top = B$). Ta có

$$(\alpha A + B)^\top = (\alpha A)^\top + B^\top = \alpha A^\top + B^\top = \alpha A + B$$

Suy ra $\alpha A + B \in W$. Hiển nhiên $\emptyset \neq W \subset M_n(\mathbb{R})$. Vậy W là một không gian vector của $M_n(\mathbb{R})$.

Vì mọi ma trận đối xứng hoàn toàn xác định khi ta xác định được $\dfrac{n(n+1)}{2}$ phần tử của ma trận tam giác trên nên $\dim W = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Và do đó hệ $\left\{\dfrac{1}{2}\left(E_{ij} + E_{ji}\right)\right\}_{1\le i\le j\le n}$ là cơ sở của W.

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vector $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (1;\ 0;\ 1)$; $u_2 = (0;\ 1;\ 0)$; $u_3 = (2;\ 1;\ 0)$; $v_1 = (0;\ 0;\ 1)$; $v_2 = (0;\ 1;\ -1)$; $v_3 = (m;\ 1;\ 1)$.
1) Tìm m để $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ứng với $m = 1$.

Hướng dẫn:

1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Để $\mathcal{B}'$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì $\det(A) \neq 0$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} &\neq 0 \\ \Rightarrow -m \quad &\neq 0 \\ \Rightarrow m \quad &\neq 0 \end{aligned}$$

2)
Ta có

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}') = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}')$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Câu 3: Cho toán tử tuyến tính $f: V \to V$ mà $ff = f$. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \text{ và } V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$$

Hướng dẫn:

Lấy $v \in V$, ta có $v = \underbrace{f(v)}_{x} + \underbrace{v - f(v)}_{y}$

Ta có $x \in \operatorname{Im} f$; $y \in \operatorname{Ker} f$, vì $f(y) = f\big(v - f(v)\big) = f(v) - f\big(f(v)\big) = f(v) - f(v) = 0$

Vậy $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.

Lấy $z \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, vì $z \in \operatorname{Im} f$ nên tồn tại $t \in V$ sao cho $z = f(t)$

Vì $z \in \operatorname{Ker} f$ nên

$$\begin{aligned} & f(z) &&= 0 \\ \Rightarrow\ & f\big(f(t)\big) &&= 0 \\ \Rightarrow\ & f(t) &&= 0 \\ \Rightarrow\ & z &&= 0 \end{aligned}$$

Vậy $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

Câu 4: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở $\mathcal{C} = \big((1;\ 1;\ -1);\ (1;\ 1;\ 0);\ (2;\ 0;\ 0)\big)$ có ma trận là $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$.

Hướng dẫn:

Với

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$[\varphi]_{\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[\varphi]_{\mathcal{C}}(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0) = (\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})[\varphi]_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Với

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Cơ sở $\operatorname{Im}\varphi$ là cơ sở dòng của $A^{\top}$

$$A^{\top}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 9 & 3 & -\frac{1}{2}\\ 12 & 4 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[d_3:=d_3-\frac{4}{3}d_2]{d_1:=-2d_1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 9 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{d_3:=d_3+\frac{1}{3}d_1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 9 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy $\dim\operatorname{Im}\varphi=2$ và một cơ sở của $\operatorname{Im}\varphi$ là $\{(0;\ 0;\ 1);\ (9;\ 3;\ 4)\}$

Cơ sở $\operatorname{Ker}\varphi$ là cơ sở nghiệm của hệ phương trình $AX=0$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 9 & 12\\ 0 & 3 & 4\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[d_3:=-2d_3]{d_1:=d_1-3d_2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \quad\ \ 3x_2+4x_3=0\\ x_1+\ \ x_2+2x_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1=-\frac{2}{3}\alpha\\ x_2=-\frac{4}{3}\alpha\\ x_3=\qquad\alpha, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Vậy $\dim\operatorname{Ker}\varphi=1$ và một cơ sở của $\operatorname{Ker}\varphi$ là

$$\left\{\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{4}{3};\ 1\right)\right\}$$

Câu 1: Cho $A = (a_{ij})_n$ là ma trận vuông cấp n $(n \geq 2)$ xác định bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{khi } (i; j) \in \{(2;\ 2);\ (3;\ 3);\ \dots;\ (n;\ n)\} \\ 1, & \text{khi } (i; j) \notin \{(2;\ 2);\ (3;\ 3);\ \dots;\ (n;\ n)\} \end{cases}$$

Tính $\det A$.

Hướng dẫn:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}_n$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các cơ sở $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (3;\ 2;\ 1)$; $u_2 = (0;\ 2;\ -1)$; $u_3 = (0;\ 0;\ 1)$; $v_1 = (1;\ 1;\ 0)$; $v_2 = (1;\ 0;\ -1)$; $v_3 = (1;\ 1;\ 1)$. Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Hướng dẫn:

Ta có

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}') = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}')$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Câu 3: Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các không gian con

$W_1 = \langle (0;\ 0;\ 1;\ 0);\ (1;\ 2;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 1) \rangle$ và $W_2 = \langle (x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_4 = x_2 + x_1 \rangle$

Hãy tìm một cơ sở của không gian con $W_1 \cap W_2$.

Hướng dẫn:

Cơ sở của không gian dòng W_1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_1 := d_1 - d_2]{d_3 := d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W_1 có số chiều là 3 và một cơ sở là $\{(1;\ 2;\ 0;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 0;\ 1)\}$

Cơ sở của không gian dòng W_2

$$W_2 = \{\alpha(1;\ 0;\ 0;\ 1) + \beta(0;\ 1;\ 0;\ 1) + \gamma(0;\ 0;\ 1;\ 0)\} = \langle (1;\ 0;\ 0;\ 1);\ (0;\ 1;\ 0;\ 1);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0) \rangle$$

W_2 có số chiều là 3 và một cơ sở là

$$\{(1;\ 0;\ 0;\ 1);\ (0;\ 1;\ 0;\ 1);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0)\}$$

Ta có $u \in W_1 \cap W_2$ thì

$$\begin{cases} u = \alpha_1(1;\ 2;\ 0;\ 0) + \alpha_2(0;\ 0;\ 1;\ 0) + \alpha_3(0;\ 0;\ 0;\ 1) \\ u = \alpha_4(1;\ 0;\ 0;\ 1) + \alpha_5(0;\ 1;\ 0;\ 1) + \alpha_6(0;\ 0;\ 1;\ 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u &= \alpha_4(1;\ 0;\ 0;\ 1) + \alpha_5(0;\ 1;\ 0;\ 1) + \alpha_6(0;\ 0;\ 1;\ 0) \\ \alpha_1 &= \alpha_4 \\ 2\alpha_1 &= \alpha_5 \\ \alpha_2 &= \alpha_6 \\ \alpha_3 &= \alpha_4 + \alpha_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \alpha_4(1;\ 0;\ 0;\ 1) + \alpha_5(0;\ 1;\ 0;\ 1) + \alpha_6(0;\ 0;\ 1;\ 0) \\ \alpha_1 = \dfrac{1}{3}\alpha_3 = \alpha_4 = \dfrac{1}{2}\alpha_5 \in \mathbb{R} \\ \alpha_2 = \alpha_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = \alpha(1;\ 1;\ 1;\ 1) + \beta(0;\ 0;\ 1;\ 0) \text{ với } \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}$$

Suy ra $W_1 \cap W_2 = \{\alpha(1;\ 1;\ 1;\ 1) + \beta(0;\ 0;\ 1;\ 0) | \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}\} = \langle(1;\ 1;\ 1;\ 1);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0)\rangle$.

Vậy $W_1 \cap W_2$ có số chiều là 2 và một cơ sở là

$$\{(1;\ 1;\ 1;\ 1);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0)\}$$

Câu 4: Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là toán tử tuyến tính mà $f \circ f = f$. Giả sử $\mathcal{X} = (w_1;\ w_2;\ \cdots;\ w_r)$ và $\mathcal{Y} = (w_{1+r};\ w_{2+r};\ \cdots;\ w_n)$ lần lượt là cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.
a) Chứng minh rằng $\mathcal{C} = (w_1;\ w_2;\ \cdots;\ w_n)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$.
b) Hãy tìm ma trận biểu diễn của toán tử f trong cơ sở $\mathcal{C}$.

Hướng dẫn:

a)

Vì $f \circ f = f \Rightarrow \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Với $\mathcal{X}$ là cơ sở của $\operatorname{Ker} f$, $\mathcal{Y}$ là cơ sở của $\operatorname{Im} f$ nên suy ra $C = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$

b)

Ta có

$$\begin{aligned} f(w_j) &= \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_k w_k \qquad , \qquad j \in \overline{r+1;\ n} \\ \Rightarrow f\left(f(w_j)\right) &= \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_k f(w_k) \\ \Rightarrow f\left(f(w_j)\right) &= \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_k f(w_k) \\ \Rightarrow f(w_j) &= \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_k f(w_k) \\ \Rightarrow \alpha_k &= \delta_{jk} \\ \Rightarrow [f(w_j)]_C &= \Big(\underbrace{0;\ \cdots 0}_{r};\ 0;\ \cdots;\ 0;\ \overset{\text{vị trí } r+j}{\overbrace{1}};\ 0;\ \cdots;\ 0\Big) \end{aligned}$$

Vậy

$$[f]_C = \begin{bmatrix} 0_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

Câu 5: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0 = \big((1;\ 0;\ 0);\ (0;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1)\big)$ có ma trận biểu diễn là

$$\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm một cơ sở và số chiều của Ker φ và Im φ.

Hướng dẫn:

Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Cơ sở Im φ là cơ sở dòng của $A^\top$

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -18 & -22 & 4 \\ 15 & 15 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3:=d_3-15d_1]{d_2:=d_2+18d_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -40 & 40 \\ 0 & 30 & -30 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3+\frac{3}{4}d_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -40 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy dim Im $\varphi = 2$ và một cơ sở của Im φ là $\{(1;\ -1;\ 2);\ (0;\ -40;\ 40)\}$

Cơ sở Ker φ là cơ sở nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_1]{d_2:=d_2+d_1} \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ 0 & -40 & 30 \\ 0 & 40 & -30 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3+d_2} \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ 0 & -40 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 18x_2 + 15x_3 = 0 \\ \quad\;\; - 40x_2 + 30x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}\alpha \\ x_2 = \dfrac{3}{4}\alpha \\ x_3 = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy dim Ker $\varphi = 1$ và một cơ sở của Ker φ là

$$\left\{\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3}{4};\ 1\right)\right\}$$

Câu 1: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm tất cả các ma trận 2×2 B sao cho $B \neq 0$; $B \neq I_2$ và B thỏa tính chất $AB = BA$

Hướng dẫn:

Đặt

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & AB = BA \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 2b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & 2b_{21} + b_{22} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{cases} b_{11} + 2b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + 2b_{22} = 2b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = 2b_{21} + b_{22} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{22} = b_{11} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} b_{11} = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R} \\ b_{12} = \beta, & \beta \in \mathbb{R} \\ b_{21} = 0 \\ b_{22} = \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ma trận $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ với $\beta \neq 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Câu 2:

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số a

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2-5 \end{vmatrix} = a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & a^2-5 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 10 = (a-2)(a+5)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & a^2-5 \end{vmatrix} = a^2 - 2a = a(a-2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a - 2$$

$a \neq \pm 2 \Rightarrow \Delta \neq 0$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{a+5}{a+2} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{a}{a+2} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = 1 \end{cases}$$

$a = -2 \Rightarrow \Delta = 0$: $\Delta_z = -4 \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

$a = 2 \Rightarrow \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$: Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = \qquad \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Câu 3: Cho A là ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Tìm một cơ sở cho

a) Không gian dòng của A.

b) Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$.

Hướng dẫn:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 := d_4 - 2d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 := d_4 + d_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Một cơ sở của W_A là $\{(1;\ 1;\ 0;\ 1;\ 4);\ (0;\ 1;\ 1;\ 0;\ 2);\ (0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 1)\}$

b)

$$\begin{bmatrix}1&1&0&1&4\\1&2&1&1&6\\0&1&1&1&3\\2&2&0&1&7\end{bmatrix}\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{d_2:=d_2-d_1}\begin{bmatrix}1&1&0&1&4\\0&1&1&0&2\\0&1&1&1&3\\0&0&0&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{d_3:=d_3-d_2}\begin{bmatrix}1&1&0&1&4\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_1:=d_1-d_2]{d_4:=d_4+d_3}\begin{bmatrix}1&0&-1&1&2\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Chọn $x_3=\alpha;\ x_5=\beta$ với mọi $\alpha;\ \beta\in\mathbb{R}$, ta tính được

$$\begin{cases}x_1=\alpha-\beta\\x_2=-\alpha-2\beta\\x_4=-\beta\end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}W&=\{(\alpha-\beta;\ -\alpha-2\beta;\ \alpha;\ -\beta;\ \beta))|\alpha;\ \beta\in\mathbb{R}\}\\&=\{(\alpha;\ -\alpha;\ \alpha;\ 0;\ 0)+(-\beta;\ -2\beta;\ 0;\ -\beta;\ \beta)|\alpha;\ \beta\in\mathbb{R}\}\\&=\{\alpha(1;\ -1;\ 1;\ 0;\ 0)+\beta(-1;\ -2;\ 0;\ -1;\ 1)|\alpha;\ \beta\in\mathbb{R}\}\\&=\langle(1;\ -1;\ 1;\ 0;\ 0);\ (-1;\ -2;\ 0;\ -1;\ 1)\rangle\end{aligned}$$

Vậy ta có một cơ sở của không gian nghiệm W là

$$\langle(1;\ -1;\ 1;\ 0;\ 0);\ (-1;\ -2;\ 0;\ -1;\ 1)\rangle$$

Câu 4: Giả sử A là một ma trận có kích thước 4×3 và B là một ma trận có kích thước 3×4. Đặt $C=AB$. Hỏi có tồn tại ma trận A và B sao cho các cột của C độc lập tuyến tính hay không? Nếu có, hãy cho một ví dụ. Nếu không, hãy chứng minh.

Hướng dẫn:

Ta có $C_{4\times4}$, mà $\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(AB)\le\min\{\operatorname{rank}(A);\ \operatorname{rank}(B)\}=3<4$

Vậy không tồn tại hai ma trận $A;\ B$ sao cho $C=AB$ thỏa các côt của C độc lập tuyến tính.

Câu 5: Cho $V=\mathbb{R}_2[t]$ (không gian các đa thức thực có bậc nhỏ hơn hay bằng 2). Đặt $C=\{2+t;\ t+t^2;\ 1+t^2\}$ và $D=\{1;\ 1+t;\ 1+t+t^2\}$
a) Kiểm tra C và D là hai cơ sở của V.
b) Tìm ma trận chuyển cơ sở $(C\to D)$.

Hướng dẫn:

a)

Với

$$C=\{2+t;\ t+t^2;\ 1+t^2\}=\{p_1(t);\ p_2(t);\ p_3(t)\}$$

Ta có

$$\begin{aligned}p(t)&=\alpha_1p_1(t)+\beta_1p_2(t)+\gamma_1p_3(t)\\&=\alpha_1(2+t)+\beta_1(t+t^2)+\gamma_1(1+t^2)\\&=(\beta_1+\gamma_1)t^2+(\alpha_1+\beta_1)t+(2\alpha_1+\gamma_1)\in\mathbb{R}_2[t]\end{aligned}$$

Vậy C là cơ sở của V.

Với

$$D = \{1;\ 1+t;\ 1+t+t^2\} = \{q_1(t);\ q_2(t);\ q_3(t)\}$$

Ta có

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha_2 q_1(t) + \beta_2 q_2(t) + \gamma_2 q_3(t) \\ &= \alpha_2 + \beta_2(1+t) + \gamma_2(1+t+t^2) \\ &= \gamma_2 t^2 + (\beta_2+\gamma_2)t + (\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) \in \mathbb{R}_2[t] \end{aligned}$$

Vậy D là cơ sở của V.

b)

Với

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (C \to D) &= (C \to E_0)(E_0 \to D) = (E_0 \to C)^{-1}(E_0 \to D) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Câu 6: Cho ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned} T:\ &\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x_1;\ x_2;\ x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2 + 3x_3;\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \end{aligned}$$

Đặt $B = \{(1;\ 2;\ -1);\ (2;\ -1;\ 2);\ (3;\ 1;\ -1)\}$ và $C = \{(1;\ 2);\ (2;\ 3)\}$

a) Kiểm tra C và B là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính T theo cơ sở B và C, $[T]_{B;\,C}$.

Hướng dẫn:

a)

Với

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix};\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Vậy C là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

Ta có

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Vậy B là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b)

Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\begin{aligned} [T]_{B;\,C} &= (C_0 \to C)^{-1}[T]_{B_0;\,C_0}(B_0 \to B) = {A_1^{\top}}^{-1} A A_2^{\top} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 3 & 0 \\ 20 & 5 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Câu 1: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = m \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3m \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = m+1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = m-1 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Ta có

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & m \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3m \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -1 & m+1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & m-1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{d_4:=d_4-2d_1}]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -4 & m \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -4 & -2m+1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -m-1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{d_2:=d_2+5d_4 \\ d_3:=d_3+4d_4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 & -4m-5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 & -6m-3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -m-1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -m-1 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 & -6m-3 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 & -4m-5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{d_2:=-d_2 \\ d_4:=d_4-d_3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & m+1 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 & -6m-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-2 \end{array}\right]$$

$2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{8} - \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta \\ x_2 = \dfrac{7}{8} - \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta \\ x_3 = \dfrac{9}{8} + \dfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{1}{2}\beta \\ x_4 = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R} \\ x_5 = \beta, & \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$2m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vector $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (1;\ 0;\ -1)$; $u_2 = (0;\ -2;\ 1)$; $u_3 = (0;\ 1;\ 1)$; $v_1 = (2;\ 1;\ -1)$; $v_2 = (1;\ 1;\ 6)$; $v_3 = (-1;\ 1;\ m)$.

a) Tìm m để $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ ứng với $m = 1$.

Hướng dẫn:

a)

Với

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

Để $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì $\det(A) \neq 0$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} &\neq 0 \\ \Rightarrow m - 20 &\neq 0 \\ \Rightarrow m &\neq 20 \end{aligned}$$

b)

Với $m = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}') &= (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}') = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}') \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 5 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Câu 3: Cho $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa điều kiện $a_{ii} > \sum_{j \neq i} \left|a_{ij}\right|$ với mọi i. Chứng minh rằng $\det A \neq 0$.

Hướng dẫn:

Giả sử $\det A = 0$. Khi đó hệ phương trình $AX = 0$ có nghiệm $X \neq 0$.

Do $X = (x_1;\ x_2;\ \cdots;\ x_n) \neq 0$ nên $\exists i \in \{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}$ sao cho $x_i \neq 0$

Đặt $\alpha = \max\left\{|x_i|;\ i \in \{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}\right\}$ và giả sử $\alpha = |x_k| > 0$ với $k \in \{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}$

Xét phương trình thứ k, ta có

$$\begin{aligned}
& a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \\
\Rightarrow\ & -a_{kk}x_k = \sum_{j\neq k} a_{kj}x_j \\
\Rightarrow\ & |a_{kk}||x_k| = \left|\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j\right| \le \sum_{j\neq k}|a_{kj}||x_j| \le |x_k|\sum_{j\neq k}|a_{kj}| \\
\Rightarrow\ & |a_{kk}| \le \sum_{j\neq k}|a_{kj}| \qquad \text{(vô lý)}
\end{aligned}$$

Vậy suy ra $\det A \neq 0$

Câu 4: Cho các ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ và $g : V \to W$ mà gf là đẳng cấu. Chứng minh rằng $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ và $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

Hướng dẫn:

Lấy $v \in V$, ta có $v = \underbrace{f[(gf)^{-1}g(v)]}_{x} + \underbrace{v - f[(gf)^{-1}g(v)]}_{y}$

Ta có $x \in \operatorname{Im} f$; $y \in \operatorname{Ker} f$, vì $g(y) = g(v - f[(gf)^{-1}g(v)]) = g(v) - (gf)([(gf)^{-1}g(v)])$

$= g(v) - g(v) = 0$

Vậy $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

Lấy $z \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, vì $z \in \operatorname{Im} f$ nên tồn tại $t \in V$ sao cho $z = f(t)$

Vì $z \in \operatorname{Ker} g$ nên

$$\begin{aligned}
& g(z) &= 0 \\
\Rightarrow\ & g\big(f(t)\big) &= 0 \\
\Rightarrow\ & gf(t) &= 0 \\
\Rightarrow\ & t &= 0 \\
\Rightarrow\ & z &= 0
\end{aligned}$$

Vậy $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$

Câu 5: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^4$ trong cơ sở $\mathcal{B}_0 = \big((1;\ 0;\ 0;\ 0);\ (0;\ 1;\ 0;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0);(0;\ 0;\ 0;\ 1)\big)$ có ma trận là $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 12 & 2 \end{bmatrix}$. Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$. Toán tử φ có phải là đơn cấu, toàn cấu không? Tại sao?

Hướng dẫn:

Với

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

Cơ sở $\operatorname{Im}\varphi$ là cơ sở dòng của $A^{\top}$

$$A^{\top}=\begin{bmatrix}-1&4&2&1\\2&7&1&8\\2&13&3&12\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[d_3:=d_3+2d_1]{d_2:=d_2+2d_1}\begin{bmatrix}-1&4&2&1\\0&15&5&10\\0&21&7&14\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[d_4:=d_4-\frac{1}{5}d_2]{d_3:=d_3-\frac{7}{5}d_2}\begin{bmatrix}-1&4&2&1\\0&15&5&10\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Vậy $\dim\operatorname{Im}\varphi=2$ và một cơ sở của $\operatorname{Im}\varphi$ là

$$\{(-1;\ 4;\ 2;\ 1);\ (0;\ 15;\ 5;\ 10)\}$$

Cơ sở $\operatorname{Ker}\varphi$ là cơ sở nghiệm của hệ phương trình $AX=0$

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&2&0\\4&7&13&3\\2&1&3&1\\1&8&12&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3+2d_1\\ d_4:=d_4+d_1}]{d_2:=d_2+4d_1}\begin{bmatrix}-1&2&2&0\\0&15&21&3\\0&5&7&1\\0&10&14&2\end{bmatrix}\xrightarrow[d_4:=d_4-\frac{2}{3}d_2]{d_3:=d_3-\frac{1}{3}d_2}\begin{bmatrix}-1&2&2&0\\0&15&21&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x_1+\ \ 2x_2-2\ x_3 \qquad =0\\ \qquad 15x_2+21x_3+3x_4=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{24}{5}\alpha-\dfrac{2}{5}\beta\\ x_2=-\ \dfrac{7}{5}\alpha-\dfrac{1}{5}\beta\\ x_3=\qquad\alpha\qquad, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\\ x_4=\qquad\qquad\beta, \qquad \beta\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Vậy $\dim\operatorname{Ker}\varphi=2$ và một cơ sở của $\operatorname{Ker}\varphi$ là

$$\left\{\left(-\frac{24}{5};\ -\frac{7}{5};\ 1;\ 0\right);\ \left(-\frac{2}{5};\ -\frac{1}{5};\ 0;\ 1\right)\right\}$$

Do $\dim\operatorname{Ker}f=2\neq 0$. Vì vậy f không đơn cấu.

Giải tìm nghiệm hệ phương trình $AX=Y$. Cho $Y=(y_1;\ y_2;\ y_3;\ y_4)$, $\forall y_1;\ y_2;\ y_3;\ y_4\in\mathbb{R}$, tìm X để hệ có nghiệm

$$\left[\begin{array}{cccc|c}-1&2&2&0&y_1\\4&7&13&3&y_2\\2&1&3&1&y_3\\1&8&12&2&y_4\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3+2d_1\\ d_4:=d_4+d_1}]{d_2:=d_2+4d_1}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&2&2&0&y_1\\0&15&21&3&4y_1+y_2\\0&5&7&1&2y_1+y_3\\0&10&14&2&y_1+y_4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-\frac{2}{3}d_2]{d_3:=d_3-\frac{1}{3}d_2}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&2&2&0&y_1\\0&15&21&3&4y_1+y_2\\0&0&0&0&\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+y_3\\0&0&0&0&-\frac{5}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2+y_4\end{array}\right]$$

Với $y_4\neq\dfrac{5}{3}y_1+\dfrac{2}{3}y_2$ thì hệ vô nghiệm. Vậy f không toàn cấu.

Câu 1: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + (3-m)x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + (m+1)x_3 = 3-m \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Dùng quy tắc Cramer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3-m & 2 \\ 1 & 2 & m+1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3-m \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3-m & 2 \\ 1 & 2 & m+1 \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = -(m-1)(m-3)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3-m & 2 \\ 3-m & 2 & m+1 \end{vmatrix} = -6m^2 + 20m - 14 = -(m-1)(6m-14)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3-m & m+1 \end{vmatrix} = -2m + 2 = -2(m-1)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3-m & 2 \\ 1 & 2 & 3-m \end{vmatrix} = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

$m \neq 1, m \neq 3$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{6m-14}{m-3} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{2}{m-3} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -\dfrac{m-1}{m-3} \end{cases}$$

$m = 1$: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Ta dễ dàng thấy được hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 4\alpha \\ x_2 = -1 + \alpha \\ x_3 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$m = 3$: $\Delta_2 = -4 \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vector $u_1 = (1;\ 1;\ 2)$; $u_2 = (2;\ 1;\ 3)$; $u_3 = (3;\ -1;\ 1)$ và $u = (9;\ 1;\ 9)$.

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và xác định tọa độ của vector u theo cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Xác định cơ sở $\mathcal{C} = \{v_1;\ v_2;\ v_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{C}$ sang $\mathcal{B}$ là

$$(\mathcal{C} \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Hướng dẫn:

a)

Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nên

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ta có

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 1 & 1 & -1 & x_2 \\ 2 & 3 & 1 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & -1 & -4 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & -5 & -2x_1 + x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & -1 & -4 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -1 & -x_1 - x_2 + x_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3 := -d_3]{d_2 := -d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 4 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 - x_3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2 := d_2 - 4d_3]{d_1 := d_1 - 3d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ 0 & 1 & 0 & -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 - x_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_1 := d_1 - 2d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 \\ 0 & 1 & 0 & -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 - x_3 \end{array}\right]$$

Với $u = (x_1;\ x_2;\ x_3) = (9;\ 1;\ 9)$, ta có

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

Ta có

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{C} \to \mathcal{B}) = (\mathcal{C} \to \mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{C})^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) \\
&\Rightarrow (\mathcal{C} \to \mathcal{B})(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{C})^{-1} \\
&\Rightarrow \left((\mathcal{C} \to \mathcal{B})(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}\right)^{-1} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{C}) \\
&\Rightarrow (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{C}) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})(\mathcal{C} \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & -5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vậy

$$v_1 = (12;\ 1;\ 10);\ v_2 = (3;\ 0;\ 2);\ v_3 = (-7;\ 0;\ -5)$$

Câu 3: Cho W là không gian của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vector $u_1 = (1;\ 1;\ 2;\ 1)$; $u_2 = (1;\ 2;\ 3;\ 2)$; $u_3 = (-1;\ 3;\ 1;\ 1)$; $u_4 = (5;\ -2;\ 5;\ 2)$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ là cơ sở của W và xác định tọa độ của u_4 theo cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Cho $u = (1;\ m;\ 3;\ m-2) \in \mathbb{R}^4$. Tìm m để $u \in W$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy biểu diễn vector u dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $u_1;\ u_2;\ u_3$.

Hướng dẫn:

a)

Ta kiểm tra

$$\begin{aligned}
&u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3 = 0\\
&\Rightarrow (1;\ 1;\ 2;\ 1)\alpha_1 + (1;\ 2;\ 3;\ 2)\alpha_2 + (-1;\ 3;\ 1;\ 1)\alpha_3 = 0\\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0\\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0\\ \alpha_2 = 0\\ \alpha_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $u_1;\ u_2;\ u_3$ độc lập tuyến tính. Suy ra $\mathcal{B}$ là cơ sở của W

b)

Ta có

$$\begin{aligned}
[u_1^\top \quad u_2^\top \quad u_3^\top | u^\top] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & m\\ 2 & 3 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1 & m-2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4 := d_4 - d_1]{\substack{d_2 := d_2 - d_1\\ d_3 := d_3 - 2d_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & m-1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & m-3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4 := d_4 - d_2]{d_3 := d_3 - d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & m-1\\ 0 & 0 & -1 & -m+2\\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]\\
&\xrightarrow{\substack{d_3 := -d_3\\ d_4 := -\frac{1}{2}d_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & m-1\\ 0 & 0 & 1 & m-2\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_4 := d_4 - d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & m-1\\ 0 & 0 & 1 & m-2\\ 0 & 0 & 0 & -m+3 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Để u là tổ hợp tuyến tính $u_1;\ u_2;\ u_3$ thì

$$\begin{aligned}
&-m + 3 = 0\\
&\Rightarrow m \quad = 3
\end{aligned}$$

Câu 4: Cho ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^4;\ \mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z;\ t) = (x + y + 2z - t;\ x + 2y - z + t;\ x + 3y - 4z + 3t)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$ và một cơ sở của không gian $\operatorname{Ker} f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$; trong đó $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathcal{B} = \{(1;\ 0;\ 1);\ (0;\ -1;\ 0);\ (0;\ 1;\ 2)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Hướng dẫn:

a)

Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Cơ sở $\operatorname{Im} f$ là cơ sở dòng của $A^\top$

$$A^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3 := d_3 + 4d_1 \\ d_4 := d_4 - 3d_1}]{d_2 := d_2 - 3d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 := d_4 - 2d_2]{d_3 := d_3 + 3d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\dim \operatorname{Im} f = 2$ và một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ là

$$\{(1;\ 1;\ 1);\ (0;\ -1;\ -2)\}$$

Cơ sở $\operatorname{Ker} f$ là cơ sở nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 - d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 - 2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5\alpha + 3\beta \\ x_2 = 3\alpha - 2\beta \\ x_3 = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = \beta, & \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ và một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ là

$$\{(-5;\ 3;\ 1;\ 0);\ (3;\ -2;\ 0;\ 1)\}$$

b)

Đặt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0;\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}_0} = (B^{\top})^{-1} \cdot A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{\top} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Câu 5:
a) Cho V là không gian vector trên $\mathbb{R}$, $\dim V = 3$ và $u;\ v;\ w \in V$. Chứng minh rằng $\mathcal{B} = \{u;\ v;\ w\}$ là cơ sở của V khi và chỉ khi $\mathcal{B}' = \{u+v;\ v-w;\ w+2u\}$ là cơ sở của V.
b) Cho $A;\ B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $AB = BA$ và $A^2 = B^2 = 0$. Chứng minh rằng $(I_n + A + B)$ khả nghịch và $(A + B + AB)$ không khả nghịch.

Hướng dẫn:

a)

Chiều thuận:

Với $\mathcal{B} = \{u;\ v;\ w\}$ là cơ sở của V hay $\{u;\ v;\ w\}$ độc lập tuyến tính. Ta cần chứng minh $\{u+v;\ v-w;\ w+2u\}$ cũng độc lập tuyến tính.

Cho

$$\begin{aligned}
&a(u+v) + b(v-w) + c(w+2u) = 0\\
&\Rightarrow (a+2c)u + (a+b)v + (c-b)w = 0\\
&\Rightarrow \begin{cases} a \quad\quad + 2c = 0\\ a + b \quad\quad = 0\\ \quad -b + \quad c = 0\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} b = \quad 0\\ a = -b\\ c = \quad b\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} a = 0\\ b = 0\\ c = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $\{u+v;\ v-w;\ w+2u\}$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}' = \{u+v;\ v-w;\ w+2u\}$ là cơ sở của V

Chiều đảo:

$\mathcal{B}' = \{u+v;\ v-w;\ w+2u\}$ là cơ sở của V hay $\{u+v;\ v-w;\ w+2u\}$ độc lập tuyến tính. Ta cần chứng minh $\{u;\ v;\ w\}$ cũng độc lập tuyến tính

Cho

$$\begin{aligned}
&\alpha u + \beta v + \gamma w = 0\\
&\Rightarrow (-\alpha - 2\beta + 2\gamma)(u+v) + (\alpha - \beta - 2\gamma)(v-w) + (\alpha - \beta - \gamma)(w+2u) = 0\\
&\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0\\ \quad \alpha - \quad \beta - 2\gamma = 0\\ \quad \alpha - \quad \beta - \quad \gamma = 0\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0\\ \beta = 0\\ \gamma = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $\{u;\ v;\ w\}$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B} = \{u;\ v;\ w\}$ là cơ sở của V.

b)

Ta có

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = 0$$

Vậy

$$\begin{aligned} I_n^3 + (A+B)^3 &= I_n \\ \Rightarrow (I_n + A + B)[(A+B)^2 + I_n(A+B) + I_n^2] &= I_n \\ \Rightarrow (I_n + A + B)(2AB + A + B + I_n) &= I_n \end{aligned}$$

Vậy $(I_n + A + B)$ khả ngịch.

Ta có

$$\begin{aligned} (A+B+AB)^2 &= A^2 + B^2 + A^2B^2 + 2AB + 2A^2B + 2AB^2 = 2AB \\ \Rightarrow (A+B+AB)^3 &= (A+B+AB)^2(A+B+AB) = 2AB(A+B+AB) \\ &= 2A^2B + 2AB^2 + 2A^2B^2 = 2\cdot 0\cdot B + 2A\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Vậy nên suy ra

$$\begin{aligned} \det(A+B+AB)^3 &= 0 \\ \Rightarrow (\det(A+B+AB))^3 &= 0 \\ \Rightarrow \det(A+B+AB) &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $(A + B + AB)$ không khả nghịch.

Câu 1: Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Tìm ma trận nghịch đảo của A.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $AXA = AB$.

Hướng dẫn:

a)

Ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Do $\det(A) = -1 \neq 0$ nên ma trận A có ma trận nghịch đảo.
Xét ma trận phụ hợp của A

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} AXA &= AB \\ \Rightarrow X &= BA^{-1} \\ \Rightarrow X &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow X &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Câu 2: Cho tập hợp $W = \{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 2z\}$

a) Chứng minh W là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm cơ sở và xác định số chiều của không gian W.

Hướng dẫn:

a)

Ta cần chứng minh: với $u, v \in W$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\alpha u + v \in W$

Đặt $u = (x_1;\ y_1;\ z_1) \in W$ sao cho $x_1 - y_1 = 2z_1$.

Đặt $v = (x_2;\ y_2;\ z_2) \in W$ sao cho $x_2 - y_2 = 2z_2$.

Ta viết lại $\alpha u + v$

$$\alpha u + v = \alpha(x_1;\ y_1;\ z_1) + (x_2;\ y_2;\ z_2) = (\alpha x_1 + x_2;\ \alpha y_1 + y_2;\ \alpha z_1 + z_2)$$

Ta chứng minh $\alpha u + v \in W$

$$(\alpha x_1 + x_2) - (\alpha y_1 + y_2) = 2(\alpha z_1 + z_2)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \text{VT} &= (\alpha x_1 + x_2) - (\alpha y_1 + y_2) = \alpha x_1 + x_2 - \alpha y_1 - y_2 \\ &= \alpha(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 2\alpha z_1 + 2z_2 \\ &= 2(\alpha z_1 + z_2) = \text{VP (đpcm)} \end{aligned}$$

Vậy W là không gian con của vector $\mathbb{R}^3$.

b)

Chọn $x = \alpha;\ z = \beta$ với $\alpha;\ \beta \in \mathbb{R}$ nên $y = x - 2z = \alpha - 2\beta$. Ta có:

$$(x;\ y;\ z) = (\alpha;\ \alpha - 2\beta;\ \beta), \qquad \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} W &= \{(\alpha;\ \alpha - 2\beta;\ \beta) | \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha;\ \alpha;\ 0) + (0;\ -2\beta;\ \beta) | \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1;\ 1;\ 0) + \beta(0;\ -2;\ 1) | \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1;\ 1;\ 0);\ (0;\ -2;\ 1) \rangle \end{aligned}$$

Vậy W có số chiều là 2 và một cơ sở của W là

$$\{(1;\ 1;\ 0);\ (0;\ -2;\ 1)\}$$

Câu 3: Cho tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1 = (1;\ 2;\ 2);\ u_2 = (1;\ 1;\ -1)\}$ và W là không gian sinh bởi $\mathcal{B}$.
a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của W.
b) Tìm m để vector $u = (1;\ -1;\ m)$ thuộc không gian W và với giá trị đó của m, hãy xác định tọa độ của u theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Hướng dẫn:

a)

Ta chứng minh $u_1;\ u_2$ độc lập tuyến tính hay phương trình $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$ thì $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Ta có

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Vì $u_1;\ u_2$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}$ là cơ sở của W.

b)

Ta có

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & m \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & m - 2 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 := d_3 - 3d_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & m + 7 \end{array}\right]$$

Để u thuộc W thì

$$\begin{aligned} m + 7 &= 0 \\ \Rightarrow m &= -7 \end{aligned}$$

Với $m = -7$ ta có

$$\left[\begin{array}{cc|c|} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 := d_1 + d_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 := -d_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Câu 4: Giả sử $\mathcal{B} = \{u;\ v\}$ là cơ sở của không gian vector V. Đặt $\mathcal{B}' = \{u - 2v;\ 3u - 5v\}$.
a) Chứng minh $\mathcal{B}'$ là cơ sở của V và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.
b) Cho $w \in V$ thỏa mãn $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Hãy xác định tọa độ của w theo cơ sở $\mathcal{B}'$.

Hướng dẫn:

a)

Ta có

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \det B' = 1 \neq 0$$

Vậy $\mathcal{B}'$ là cơ sở của V.

Ta có

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nên

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$[w]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) \cdot [w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Câu 5: Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z) = (x + 2y - 3z;\ 2x + 3y + z;\ 3x + 4y + 5z)$$

a) Xác định cơ sở cho các không gian $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.
b) Cho $\mathcal{B} = \{u_1 = (1;\ -1;\ 0);\ u_2 = (1;\ 0;\ -1);\ u_3 = (0;\ -1;\ 0)\}$. Chứng tỏ $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Hướng dẫn:

a)

Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Cơ sở $\operatorname{Im} f$ là cơ sở dòng của $A^\top$

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3:=d_3+3d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3+7d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\dim \operatorname{Im} f = 2$ và một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ là

$$\{(1;\ 2;\ 3);\ (0;\ -1;\ -2)\}$$

Cơ sở $\operatorname{Ker} f$ là cơ sở nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3:=d_3-3d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3-2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \quad\ - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -11\alpha \\ x_2 = \quad 7\alpha \\ x_3 = \quad\ \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ và một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ là

$$\{(-11;\ 7;\ 1)\}$$

b)

Đặt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\det B = -1 \neq 0$$

Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = {B^\top}^{-1} \cdot A \cdot B^\top$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{\top -1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Lời giải đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2017 – 2018

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Tìm các giá trị của m để A khả nghịch.

b) Tìm nghịch đảo của A trong trường hợp $m = 1$.

Hướng dẫn:

a)

Ta có

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2m^2 + 3m + 5$$

Để ma trận khả nghịch

$$\begin{aligned} &\det A \neq 0 \\ \Rightarrow\ & -2m^2 + 3m + 5 \neq 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

b)

Với $m = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \det A = 6$$

Ta có ma trận phụ hợp

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \operatorname{adj} A = C^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Câu 2: Cho $W = \{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 2x + z\}$ và $W' = \{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 2xz\}$. Chứng minh rằng W là không gian con của $\mathbb{R}^3$ và W' không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Hướng dẫn:

a)

Gọi $u;\ v \in W$, với $u = (x_1;\ y_1;\ z_1)$; $v = (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Ta chứng minh $\alpha u + v \in W$ hay $\alpha u + v$ thỏa

$x + y = 2x + z$.

Ta có

$$x_1 + y_1 = 2x_1 + z_1;\ x_2 + y_2 = 2x_2 + z_2$$

Vậy ta kiểm tra $\alpha u + v = (\alpha x_1 + x_2;\ \alpha y_1 + y_2;\ \alpha z_1 + z_2)$

Ta chứng minh

$$\alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2 = 2(\alpha x_1 + x_2) + \alpha z_1 + z_2$$

Ta có

$$\begin{aligned} \text{VT} &= \alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2 = \alpha(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ &= \alpha(2x_1 + z_1) + 2x_2 + z_2 \\ &= 2(\alpha x_1 + x_2) + \alpha z_1 + z_2 = \text{VP (đpcm)} \end{aligned}$$

Vậy W là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Gọi $u;\ v \in W'$, với $u = (x_1;\ y_1;\ z_1);\ v = (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Ta chứng minh $\alpha u + v \notin W$ hay $\alpha u + v$ không thỏa $xy = 2xz$.

Ta có

$$x_1 y_1 = 2x_1 z_1;\ x_2 y_2 = 2x_2 z_2$$

Vậy ta kiểm tra $\alpha u + v = (\alpha x_1 + x_2;\ \alpha y_1 + y_2;\ \alpha z_1 + z_2)$

Ta chứng minh

$$(\alpha x_1 + x_2)(\alpha y_1 + y_2) \neq 2(\alpha x_1 + x_2)(\ \alpha z_1 + z_2)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \text{VT} &= (\alpha x_1 + x_2)(\alpha y_1 + y_2) \\ &= \alpha^2 x_1 y_1 + \alpha x_2 y_1 + \alpha x_1 y_2 + x_2 y_2 \\ &= 2\alpha^2 x_1 z_1 + \alpha x_2 y_1 + \alpha x_1 y_2 + 2x_2 z_2 \end{aligned}$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} \text{VP} &= 2(\alpha x_1 + x_2)(\ \alpha z_1 + z_2) \\ &= 2\alpha^2 x_1 z_1 + 2\alpha x_2 z_1 + 2\alpha x_1 z_2 + 2x_2 z_2 \neq \text{VT} \end{aligned}$$

Vậy W' không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Câu 3: Trong $\mathbb{R}^3$, cho $u_1 = (1;\ 1;\ 2)$; $u_2 = (2;\ 1;\ 1)$; $u_3 = (1;\ 3;\ 7)$ và $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$.
a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm tọa độ của vector $u = (5;\ 4;\ 6)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.
b) Tìm m để $v = (1;\ 3;\ m)$ là tổ hợp tuyến tính của $u_1;\ u_2$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy xác định dạng biểu diễn tuyến tính của v theo u_1 và u_2.
c) Xác định cơ sở $\mathcal{B}' = \{u_1';\ u_2';\ u_3'\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$ là

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hướng dẫn:

a)

Cho

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \det B = 1 \neq 0$$

Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Cách 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 - 3d_2]{d_1 := d_1 + 2d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[d_3 := -d_3]{d_2 := -d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2 := d_2 + 2d_3]{d_1 := d_1 - 5d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Nên

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cách 2:

$$[u]_B = B^{\top^{-1}} u^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}^{\top^{-1}} [5 \quad 4 \quad 6]^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -13 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

Ta tính hệ phương trình theo Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & m \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & m - 2 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 := d_3 - 3d_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & m - 8 \end{array}\right]$$

Vậy v là tổ hợp tuyến tính của $u_1;\ u_2$

$$m - 8 = 0$$
$$\Rightarrow m \quad = 8$$

Với $m = 8$ ta có

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 := d_1 + 2d_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 := -d_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy

$$v = 5u_1 - 2u_2 = 5(1;\ 1;\ 2) - 2(2;\ 1;\ 1)$$

c)

Với

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B}' \to \mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}')^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

$$\Rightarrow (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}') = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 9 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Vậy $\mathcal{B}' = \{u_1';\ u_2';\ u_3'\} = \{(2;\ 4;\ 9);\ (4;\ 5;\ 10);\ (1;\ 1;\ 2)\}$.

Câu 4: Cho ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^4;\ \mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z;\ t) = (x + y - z - t;\ x - y + z + 2t;\ x + 3y - 3z - 4t)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$ và một cơ sở của không gian $\operatorname{Ker} f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$; trong đó $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathcal{B} = \{(1;\ 0;\ -1);\ (0;\ 1;\ 0);\ (0;\ -1;\ 1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Hướng dẫn:

a)

Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Cơ sở $\operatorname{Im} f$ là cơ sở dòng của $A^\top$

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 := d_4 + d_1]{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 + d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2 := -\frac{1}{2}d_2 \\ d_3 := \frac{1}{2}d_3 \\ d_4 := \frac{1}{3}d_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 := d_4 - d_2]{d_3 := d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\dim \operatorname{Im} f = 2$ và một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ là

$$\{(1;\ 1;\ 1);\ (0;\ 1;\ -1)\}$$

Cơ sở Ker f là cơ sở nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3:=d_3+d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ \quad -2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \quad -\dfrac{1}{2}\beta \\ x_2 = \alpha + \dfrac{3}{2}\beta \\ x_3 = \alpha \quad\quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = \quad\quad \beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy dim Ker $f = 2$ và một cơ sở của Ker f là

$$\left\{(0;\ 1;\ 1;\ 0);\ \left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ 0;\ 1\right)\right\}$$

b)

Đặt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0;\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}_0} = (B^\top)^{-1} \cdot A$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Câu 5: Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^3 + 3A^2 + 3A + I_n = 0$. Chứng minh rằng A khả nghịch nhưng $A + I_n$ không khả nghịch.

Hướng dẫn:

Ta có

$$\begin{aligned} A^3 + 3A^2 + 3A + I_n &= 0 \\ \Rightarrow -A^3 - 3A^2 - 3A &= I_n \\ \Rightarrow A(-A^2 - 3A - 3I_n) &= I_n \end{aligned}$$

Vậy A khả nghịch.

Ta có

$$\begin{aligned} A^3 + 3A^2 + 3A + I_n &= 0 \\ \Rightarrow A^3 + 3A^2 I_n + 3A I_n^2 + I_n^3 &= 0 \\ \Rightarrow (A + I_n)^3 &= 0 \end{aligned}$$

Do $(A+I_n)^3=0$ nên ta có

$$\begin{aligned} \det(A+I_n)^3 &= 0 \\ \Rightarrow (\det(A+I_n))^3 &= 0 \\ \Rightarrow \det(A+I_n) &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $(A+I_n)$ không khả nghịch.

Lời giải đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2018 – 2019

Câu 1: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ và W là không gian sinh bởi $\mathcal{B}$, trong đó $u_1 = (1;\ 2;\ -2);\ u_2 = (1;\ 4;\ m-4);\ u_3 = (1;\ m-2;\ -m)$.
a) Tìm các giá trị của m để $W = \mathbb{R}^3$.
b) Trong trường hợp $W \neq \mathbb{R}^3$, hãy biểu diễn u_3 theo $u_1;\ u_2$ và tìm một cơ sở cho không gian W.

Hướng dẫn:

a)

Đặt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & m-4 \\ 1 & m-2 & -m \end{bmatrix}$$

Để $W = \mathbb{R}^3$ thì B phải độc lập tuyến tính tức là

$$\begin{aligned} &\det B && \neq 0 \\ \Rightarrow &\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & m-4 \\ 1 & m-2 & -m \end{vmatrix} && \neq 0 \\ \Rightarrow &-m^2 + 4m - 4 && \neq 0 \\ \Rightarrow &m && \neq 2 \end{aligned}$$

b)

Khi $W \neq \mathbb{R}^3$ thì $m = 2$, ta tìm $\alpha;\ \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$. Ta xét ma trận

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := d_3 + 2d_1]{d_2 := d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 := \frac{1}{2}d_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 := d_1 - d_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy nên

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Vậy suy ra $u_3 = 2u_1 - u_2$.

Với $m = 2$, ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 - d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 + d_2]{d_1 := d_1 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy một cơ sở của W là

$$\{(1;\ 0;\ -2);\ (0;\ 2;\ 0)\}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ và W là không gian sinh bởi $\mathcal{B}$, trong đó $u_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 2);\ u_2 = (1;\ 2;\ 2;\ 1);\ u_3 = (1;\ -1;\ -2;\ 1)$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của W và $u = (2;\ 6;\ 7;\ 3) \in W$.

b) Tìm m để $v = (2;\ 1;\ m;\ m) \in W$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy xác định tọa độ vector v theo cơ sở $\mathcal{B}$.

c) Xác định cơ sở $\mathcal{B}' = \{u_1';\ u_2';\ u_3'\}$ của W sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$ là

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hướng dẫn:

a)

Ta kiểm tra

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Vì $u_1;\ u_2;\ u_3$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Để $u \in W$ thì tồn tại $\alpha;\ \beta;\ \gamma \in \mathbb{R}$ sao cho $u = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$. Ta xét ma trận sau

$$[u_1^{\mathsf{T}} \quad u_2^{\mathsf{T}} \quad u_3^{\mathsf{T}} | u^T] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4 := d_4 - 2d_1]{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4 := d_4 + d_2]{\substack{d_1 := d_1 - d_2 \\ d_3 := d_3 - d_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[d_4 := d_4 - 3d_3]{\substack{d_1 := d_1 + 3d_3 \\ d_2 := d_2 - 2d_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 := -d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy ta suy ra

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Vậy nên $u = u_1 + 2u_2 - u_3$ nên suy ra $u \in W$.

b)

Ta có

$$[u_1^\top \quad u_2^\top \quad u_3^\top | v^T] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & m \\ 2 & 1 & 1 & m \end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-d_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & m-2 \\ 0 & -1 & -1 & m-4 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4:=d_4+d_2]{\substack{d_1:=d_1-d_2 \\ d_3:=d_3-d_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & m-1 \\ 0 & 0 & -3 & m-5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-3d_3]{\substack{d_1:=d_1+3d_3 \\ d_2:=d_2-2d_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3m \\ 0 & 1 & 0 & -2m+1 \\ 0 & 0 & -1 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & -2m-2 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3:=-d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3m \\ 0 & 1 & 0 & -2m+1 \\ 0 & 0 & 1 & -m+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2m-2 \end{array}\right]$$

Để $v \in W$ thì

$$\begin{aligned} -2m - 2 &= 0 \\ \Rightarrow m &= -1 \end{aligned}$$

Khi $m = -1$ thì

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c)

Đặt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}') &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = B^\top \cdot (\mathcal{B}' \to \mathcal{B})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy cơ sở $\mathcal{B}' = \{u_1';\ u_2';\ u_3'\}$ là

$$\{(0;\ -3;\ -4;\ 0);\ (0;\ 1;\ 1;\ -1);\ (1;\ 1;\ 1;\ 2)\}$$

Câu 3: Cho f là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^4$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z;\ t) = (x + y + 3z - 2t;\ x + 2y + 5z - 3t;\ x - y - z;\ x + z - t)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$ và một cơ sở của không gian $\operatorname{Ker} f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1;\ 0;\ -1;\ 0);\ u_2 = (0;\ 1;\ -1;\ 0);\ u_3 = (0;\ 1;\ 0;\ -1);\ u_4 = (1;\ -1;\ 0;\ 1)\}$ của $\mathbb{R}^4$.

Hướng dẫn:

a)

Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cơ sở $\operatorname{Im} f$ là cơ sở dòng của $A^\top$

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 := d_4 + 2d_1]{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 := d_4 + d_2]{d_3 := d_3 - 2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\dim \operatorname{Im} f = 2$ và một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ là

$$\{(1;\ 1;\ 1;\ 1);\ (0;\ 1;\ -2;\ -1)\}$$

Cơ sở $\operatorname{Ker} f$ là cơ sở nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 := d_4 - d_1]{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 := d_4 + d_1]{d_3 := d_3 + 2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ \qquad\ \ x_2 + 2x_3 - \ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\ \alpha + \beta \\ x_2 = -2\alpha + \beta \\ x_3 = \quad \alpha \quad , & \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = \qquad\quad \beta, & \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ và một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ là

$$\{(-1;\ -2;\ 1;\ 0);\ (1;\ 1;\ 0;\ 1)\}$$

b)

Đặt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = {B^{\top}}^{-1} \cdot A \cdot B^{\top}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 & 2 \\ -4 & -4 & 6 & -4 \\ -4 & -5 & 7 & -4 \\ -4 & -6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Câu 4: Cho V là không gian vector hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$ và W là không gian con của V sao cho $\dim W = \dim V - 1$. Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở của V mà không có vector nào nằm trong W.

Hướng dẫn:

Xét $\{w_1;\ \cdots;\ w_{n-1}\}$ là một cơ sở của W với $n = \dim V$.

Do $\{w_1;\ \cdots;\ w_{n-1}\}$ không là cơ sở của V nên $\exists w_n \notin \langle w_1;\ \cdots;\ w_{n-1} \rangle = w$

Đặt $v_1 = w_1 + w_n;\ v_2 = w_2 + w_n;\ \cdots;\ v_{n-1} = w_{n-1} + w_n;\ v_n = w_n$.

Ta cần chứng minh hệ này độc lập tuyến tính. Xét phương trình

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i + \alpha_n v_n &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (w_i + w_n) + \alpha_n w_n &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) w_n &= 0 \end{aligned}$$

Ta thấy rằng $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ vì nếu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ thì suy ra $w_n \in \langle w_1;\ \cdots;\ w_{n-1} \rangle$.

Nên suy ra $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_i = 0$ hay $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ dẫn tới $\alpha_n = 0$.

Vậy hệ $\{v_1;\ \cdots;\ v_n\}$ độc lập tuyến tính và do đó là cơ sở của V.

Ta có $v_n = w_n \notin W$, ta chứng minh $v_i \notin W$ với mọi $i \in \{1;\ \cdots;\ n-1\}$.

Thật vậy, giả sử $v_i \in W \Rightarrow w_n + w_i \in W \Rightarrow w_n \in W$ (vô lý)

Vậy $\{v_1;\ \cdots;\ v_n\} \not\subset W$

Câu 1: Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính theo tham số thực m:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 10x_4 = -5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 7x_4 = m \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Áp dụng phương pháp Gauss ta có

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 10 & -5 \\ 4 & 5 & -6 & 7 & m \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1 \\ d_4:=d_4-4d_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & m-4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{d_3:=d_3+2d_2 \\ d_4:=d_4-d_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$

Với $m \neq 7$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Với $m = 7$ thì ta có hệ phương trình

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \alpha \\ x_2 = 2 + 2\alpha \\ x_3 = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vector

$$u_1 = (1;\ 3;\ 0);\ u_2 = (2;\ 7;\ 1);\ u_3 = (3;\ 10;\ 2)$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ của $\mathbb{R}^3$.

c) Tìm tọa độ của vector $u = (5;\ 16;\ 3)$ trong cơ sở $\mathcal{B}$.

d) Tìm vector $v \in \mathbb{R}^3$ biết $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Hướng dẫn:

a)

Đặt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Nên

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b)

Ta có

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = {A^{\top}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[u]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

d)

Ta có

$$[v]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vậy $v = (1;\ 3;\ -1)$

Câu 3: Cho f là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x;\ y;\ z) = (6x - 2y + 4z;\ 18x - 6y + 13z;\ 6x - 2y + 3z)$$

a) Tìm số chiều và một cơ sở cho mỗi không gian $\operatorname{Im} f$; $\operatorname{Ker} f$.

b) Chứng minh $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

c) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ được cho như trong Câu 2.

Hướng dẫn:

a)

Với

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 18 & -6 & 13 \\ 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Cơ sở $\operatorname{Im} f$ là cơ sở dòng của $A^{\top}$

$$A^{\top} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & 6 \\ -2 & -6 & -2 \\ 4 & 13 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 - \frac{2}{3}d_1]{d_2 := d_2 + \frac{1}{3}d_1} \begin{bmatrix} 6 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{d_1 := \frac{1}{6}d_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\dim \operatorname{Im} f = 2$ và một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ là

$$\{(1;\ 3;\ 1);\ (0;\ 1;\ -1)\}$$

Cơ sở $\operatorname{Ker} f$ là cơ sở nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 18 & -6 & 13 \\ 6 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-3d_1} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3:=d_3+d_2]{d_1:=\frac{1}{2}d_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R} \\ x_2 = 3\alpha \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ và một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ là

$$\{(1;\ 3;\ 0)\}$$

b)

Lấy $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ nên tồn tại $a;\ b;\ c \in \mathbb{R}$ sao cho

$$x = a(1;\ 3;\ 0) = b(1;\ 3;\ 1) + c(0;\ 1;\ -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 3a + 3b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = -6b \\ c = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 0$$

Vậy nên $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$

c)

Đặt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \cdot [f]_{\mathcal{B}_0} \cdot (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = B^{-1} \cdot A \cdot B$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 18 & -6 & 13 \\ 6 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 72 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Câu 4: Cho V là không gian vector n chiều, S là một tập sinh của V và $u_1;\ \cdots;\ u_{n-1} \in V$ là $n-1$ vector độc lập tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại $u \in S$ sao cho $\{u_1;\ \cdots;\ u_{n-1};\ u\}$ là một cơ sở của V.

Hướng dẫn:

Vì $\{u_1;\ \cdots;\ u_{n-1}\}$ không là cơ sở nên $\exists u \in S$ sao cho $u \notin \langle u_1;\ \cdots;\ u_{n-1}\rangle$

Vì nếu $\forall u \in S,\ u \in \langle u_1;\ \cdots;\ u_{n-1}\rangle \Rightarrow \langle u_1;\ \cdots;\ u_{n-1}\rangle \supset S = V$ (vô lý)

Xét họ $\{u_1;\ \cdots;\ u_{n-1};\ u\}$. Hệ phương trình tạo nên từ họ này độc lập tuyến tính và có số vector bằng $\dim V = n$.

Vậy họ $\{u_1;\ \cdots;\ u_{n-1};\ u\}$ là cơ sở của V.