TRUONG DAI HOC KHOA HOC TU NHIEN
KHTN
TP. HO CHI MINH

Họ và tên SV: Nguyễn Hải Long .... Tên học phần: Đại số tuyến tính ....
Mã số SV: 20120049 .... Mã học phần: MTH00030 ....
Ngày thi: 24/10/2021 .. Giờ thi: 09h45 .... Số trang/Tổng số trang: ..... 1 .... / 5 ....

Câu 1:

a. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & 2 & -2 \\ m+3 & 3m & -2 \end{vmatrix} = 1.2(-2) + (-3)(-2)(m+3) + m.1.3m$
$- \left((-3).1(-2) + 1(-2).3m + m.2(m+3) \right)$

$= -4 + 6\cancel{m} + 18 + 3m^2 - 6 + 6m - 2m^2 - 6m$

$= m^2 + 6m + 8 = (m+3)^2 - 1$

Ma trận A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow (m+3)^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (m+2)(m+4) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{(m+3)^2 \neq 1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq -2 \\ m \neq -4 \end{array} \right.$

Vậy A khả nghịch khi $m \neq -2$ hoặc $m \neq -4$

(*) $|K| = |-2(A^3)(A^t)^2| = (-2)^3 |(A^3)(A^t)^2| = -8|A|^3 |A^t|^2 = -8|A|^3 . |A|^2$

$= -8|A|^5 = -8(m^2 + 6m + 8)^5$

~~Ta có $|A|$ khi $m = -3$ là $|A| = -1$~~

~~Vậy $|K| = -8(-1)^5 = 8$.~~

b. Khi $m = -3$ thì $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -9 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - d_1} \cancel{\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -2 \end{bmatrix}}$

Ta có $\cancel{C_{11} = (1) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -9 & -2 \end{vmatrix} = -22}$ $C_{11} = (-1)^0 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -9 & -2 \end{vmatrix} = -22$; $C_{21} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -9 & -2 \end{vmatrix}$

$= -21$.

$C_{31} = 12$; $C_{12} = 2$; $C_{22} = -2$; $C_{32} = -1$

$C_{13} = -9$; $C_{23} = 9$; $C_{33} = -5$.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TP. HỒ CHÍ MINH

Họ và tên SV: Nguyễn Hải Đăng
Mã số SV: 20120049
Ngày thi: 29/10/2021. Giờ thi: 07h45
Tên học phần: Đại số tuyến tính
Mã học phần: MTH00030

Câu 2:

(a) • Với V, ta có

$$\begin{cases} \ln(2x - y + 3z + 1) = 0 \\ e^{5x + 8y - 7z + 2\ln 2} = 4 = e^{2\ln(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 1 \\ 5x + 8y - 7z + 2\ln(2) = 2\ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 5x + 8y - 7z = 0 \end{cases}$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ta thấy $V = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A.X = \tilde{0}\}$.

Vậy V là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

• Với W, ta xét $u_1 = (2, -1, 1)$ ta thấy: $(2 + 4(-1) + 2.1)(3.2 - 5(-1) - 6.1) = 0$

Vậy $u_1 \in W$ (1)

Xét $u_2 = (1, -3, 3)$, ta thấy: $(1 + 4(-3) + 2.3)(3.1 - 5(-3) - 6.3) = 0$

Vậy $u_2 \in W$ (2)

Nhưng $u_1 + u_2 = (3, -4, 4)$ thì $(3 + 4(-4) + 2.4)(3.3 - 5(-4) - 6.4) \neq 0$

Vậy $u_1 + u_2 \notin W$ (3)

Từ (1)(2)(3), ta kết luận W không là không gian con của $\mathbb{R}^3$

(b) Xét $A = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 16 & -5 \\ -2 & 1 & -12 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3 - 2d_1 \\ d_4 + 2d_1}]{d_2 - 3d_1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & -5 \\ 0 & 9 & 18 & -9 \\ 0 & -7 & -14 & 7 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{9}d_3 \\ -\frac{1}{7}d_4}]{\frac{1}{5}d_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 - d_2]{d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Họ và tên SV: Nguyễn Hải Đăng
Mã số SV: 20120049
Ngày thi: 24/10/2021 Giờ thi: 7h15

Tên học phần: Đại số tuyến tính
Mã học phần:
Số trang/Tổng số trang: 3 / 5

~~Vậy~~ Ta có $u_1 = (1, -4, -1, 2)$; $u_2 = (0, 1, 2, -1)$

Vậy ta có $\beta = (u_1, u_2)$ là 1 cơ sở cho không gian $H = \langle S \rangle \le R^4$.

⊛ $Y \in H$, khi Y là tổ hợp tuyến tính của H.

Xét $\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -7 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 16 & -5 & p \\ -2 & 1 & -12 & 3 & q \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{d_3 - 2d_1 \\ d_4 + 2d_1}]{d_2 - 3d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 10 & -5 & 9 \\ 0 & 9 & 18 & -9 & p+4 \\ 0 & -7 & -14 & 7 & q-4 \end{array}\right]$

Sai

~~$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{9}d_3 \\ -\frac{1}{7}d_4}]{\frac{1}{5}d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{p+4}{9} \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{q-4}{-7} \end{array}\right] \xrightarrow[d_4 - d_2]{d_3 - d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p}{9} - \frac{61}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{7} - \frac{83}{35} \end{array}\right]$~~

~~Do $Y \in H$ khi $\begin{cases} \frac{p}{9} - \frac{61}{45} = 0 \\ \frac{q}{7} - \frac{83}{35} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 12,2 \\ q = 16,6 \end{cases}$~~

~~Câu 2:~~

$\xrightarrow[d_4 + \frac{7}{5}d_2]{d_3 - \frac{9}{5}d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 10 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p - \frac{61}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q - \frac{43}{5} \end{array}\right]$

$Y \in X$ khi $\begin{cases} p = \frac{61}{5} \\ q = \frac{43}{5} \end{cases}$

Câu 3:

a. Xét $A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 - 4d_1]{d_2 + 5d_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 + d_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta thấy $r(A) = 3 =$ số vectơ nên A độc lập tuyến tính (1).

Họ và tên SV: Nguyễn Hữu Đăng
Mã số SV: 20110045
Ngày thi: .... Giờ thi ....
Tên học phần: ....
Mã học phần: ....
Số trang/Tổng số trang: 4/5

Hơn nữa số vectơ của $B = \dim \mathbb{R}^3 =$ ~~dim~~ B (2)

Từ (1) và (2), B là 1 cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(*) $[z]_B = (B \to C)\, z_{[C]}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

b. $(D \to B) = [\beta_1^T \ \beta_2^T \ \beta_3^T] = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -9 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$(D \to C) = (D \to B)\,.\,(B \to C)$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -9 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & -4 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Vậy $C = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -6 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Câu 4:

a. $\operatorname{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^3 ; f(X) = (0,0,0,0)\}$

Xét hệ phương trình (1) $\begin{cases} x + 3y - 9z = 0 \\ -3x - y + 11z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \\ 5x + 3y - 21z = 0 \end{cases}$

Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ -3 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3 - d_1 \\ d_4 - 5d_1}]{d_2 + 3d_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 0 & 8 & -16 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -12 & 24 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 + \frac{12}{8}d_2]{d_3 + \frac{1}{4}d_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 0 & 8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{8}d_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Họ và tên SV: Nguyễn Hải Đăng

Mã số SV: 21120...

Ngày thi: .... Giờ thi: ....

Tên học phần: ....

Mã học phần: ....

Số trang/Tổng số trang: 5/5

Đặt $z = t \Rightarrow y = 2t$.

$x = 9z - 3y = 9t - 6t = 3t$.

Vậy hệ (1) có nghiệm là $(3t, 2t, t)$.

Mà $u = (t(3, 2, 1))$

Vậy ta có 1 cơ sở cho Ker f là $T = \{u_1 = (3, 2, 1)\}$.

Ta thấy $\dim \text{Ker}(f) = 1 \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 2$

b. Xét $D = \{e_1 = (1, 0, 0) ; e_2 = (0, 1, 0) ; e_3 = (0, 0, 1)\}$.

$f(e_1) = (1, -3, 1, 5)$.

$f(e_2) = (3, -1, 1, 3)$

$f(e_3) = (-9, 11, -5, -21)$.

Vậy $[f]_{D,E} = \begin{bmatrix} f(e_1)^T & f(e_2)^T & f(e_3)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ -3 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & -21 \end{bmatrix}$

$[f]_{B,E} = (D \to B)^{-1} [f]_{D,E} \ (E \to E)$

Ta có: $(D \to B)^{-1} = \begin{bmatrix} -1,5 & -1,5 & 1 \\ -2,5 & -3,5 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

$[f]_{B,E} = (D \to B)^{-1} [f]_{D,E} =$