Lưu ý

- $\square$ = số dư khi chia (số lượng tất cả các chữ cái trong họ và tên của sinh viên) cho 5.
- $\blacklozenge$ = số dư khi chia (tổng các chữ số trong MSSV) cho 5.

  Ví dụ. Sinh viên có họ và tên là "Trần Nguyễn Anh Thư" và MSSV là 2017478. Khi đó

  - $\square = 1$ (vì họ và tên có 16 chữ cái, 16 chia 5 dư 1).
  - $\blacklozenge = 4$ (vì $2+0+1+7+4+7+8=29$ chia 5 dư 4).

- Máy tính **chỉ** được sử dụng để tính các phép toán số học, giải phương trình và cộng trừ nhân ma trận; **không** được dùng để giải hệ phương trình hoặc tìm ma trận nghịch đảo.

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH - MÃ HP MTH00008

Thời gian làm bài: 90 phút – Được sử dụng tài liệu

Câu 1.(2.5đ) Giải và biện luận hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer (x, y, z là các ẩn thực, m là tham số thực)

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 4x + (m+\square)y + 2z = m+\square+4 \\ mx - 3y + 3z = m \end{cases}.$$

Câu 2.(2.5đ=1đ+1.5đ)

a) Cho $H = \{X=(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 \mid 2(u-4v+\square w)^2+3\,|3u+8v-6w| \le -4(u+\blacklozenge v-7w)^4\}$ và $K=\{X=(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 \mid u^2+2v^2=(\square+1)w^2\}$. H và K có phải là các không gian con của $\mathbb{R}^3$ không? Tại sao?

b) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y + 7z + (\square-1)t = 0 \\ -2x + y - 8z + (\square+5)t = 0 \\ 3x + y + 17z + (\square-5)t = 0 \\ 2x + y + 12z + (\square-3)t = 0 \end{cases} (*)$

và $V=\{X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x,y,z,t \text{ thỏa hệ } (*)\}$. Tìm một cơ sở của không gian V.

Câu 3.(2.5đ=1đ+1.5đ) Cho $\mathcal{B}=\{\beta_1=(1,2,1),\ \beta_2=(2,3,\blacklozenge+2),\ \beta_3=(1,1,\blacklozenge)\}$ và $\mathcal{C}=\{\gamma_1=(2,1,-1),\ \gamma_2=(1,2,-1),\ \gamma_3=(3,2,-2)\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

a) Viết ma trận đổi cơ sở $P=(\mathcal{B}\to\mathcal{C})$.

b) Cho $\alpha=(-3,1,2-\blacklozenge)\in\mathbb{R}^3$ và $\beta,\gamma\in\mathbb{R}^3$ thỏa $[\beta]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$, $[\gamma]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\end{pmatrix}$.

Tìm $[\alpha]_{\mathcal{C}}, [\beta]_{\mathcal{B}}$ và γ.

Câu 4.(2.5đ=1.5đ+1đ) Cho $\mathcal{D}$ và $\mathcal{E}$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathbb{R}^3$. Xét $f\in L(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$ có biểu thức

$$f(X)=(x-2y+3z-2t,\ -2x+7y-2z+(\blacklozenge-2)t,\ 3x-9y+5z-\blacklozenge t),\ \forall X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4.$$

a) Viết $[f]_{\mathcal{D},\mathcal{E}}$. Tìm một cơ sở cho không gian $Im(f)$ và suy ra ngay $\dim Ker(f)$.

b) Cho $g\in L(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$ có $[g]_{\mathcal{D},\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2-\blacklozenge & 1\\ \blacklozenge & 1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ trong đó $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ đã cho ở **Câu 3**. Viết $[g]_{\mathcal{D},\mathcal{E}}$ rồi suy ra biểu thức của g.