KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐHQG TPHCM

BÀI THI GIỮA KÌ
MÔN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Sinh viên thực hiện: Nguyễn Hải Đăng
Mã số sinh viên: 20120049

BÀI THI GIỮA KÌ - QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

HỌC KỲ II – NĂM HỌC 2022-2023

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
227 Nguyễn Văn Cừ, Phường 4, Quận 5, TP.HCM
Điện Thoại: (08) 38.354.266 - Fax:(08) 38.350.096

4.0

THÔNG TIN BÀI THI

Loại bài tập	☑ **Bài thi giữa kì**
Ngày bắt đầu	**27/04/2023**
Ngày kết thúc	**12/05/2023**

MỤC LỤC

A. BÀI 1

I. Câu a

Gọi x là số lạc đà một bướu vận chuyển hàng hóa $(x \geq 0)$.

Gọi y là số lạc đà hai bướu vận chuyển hàng hóa $(y \geq 0)$.

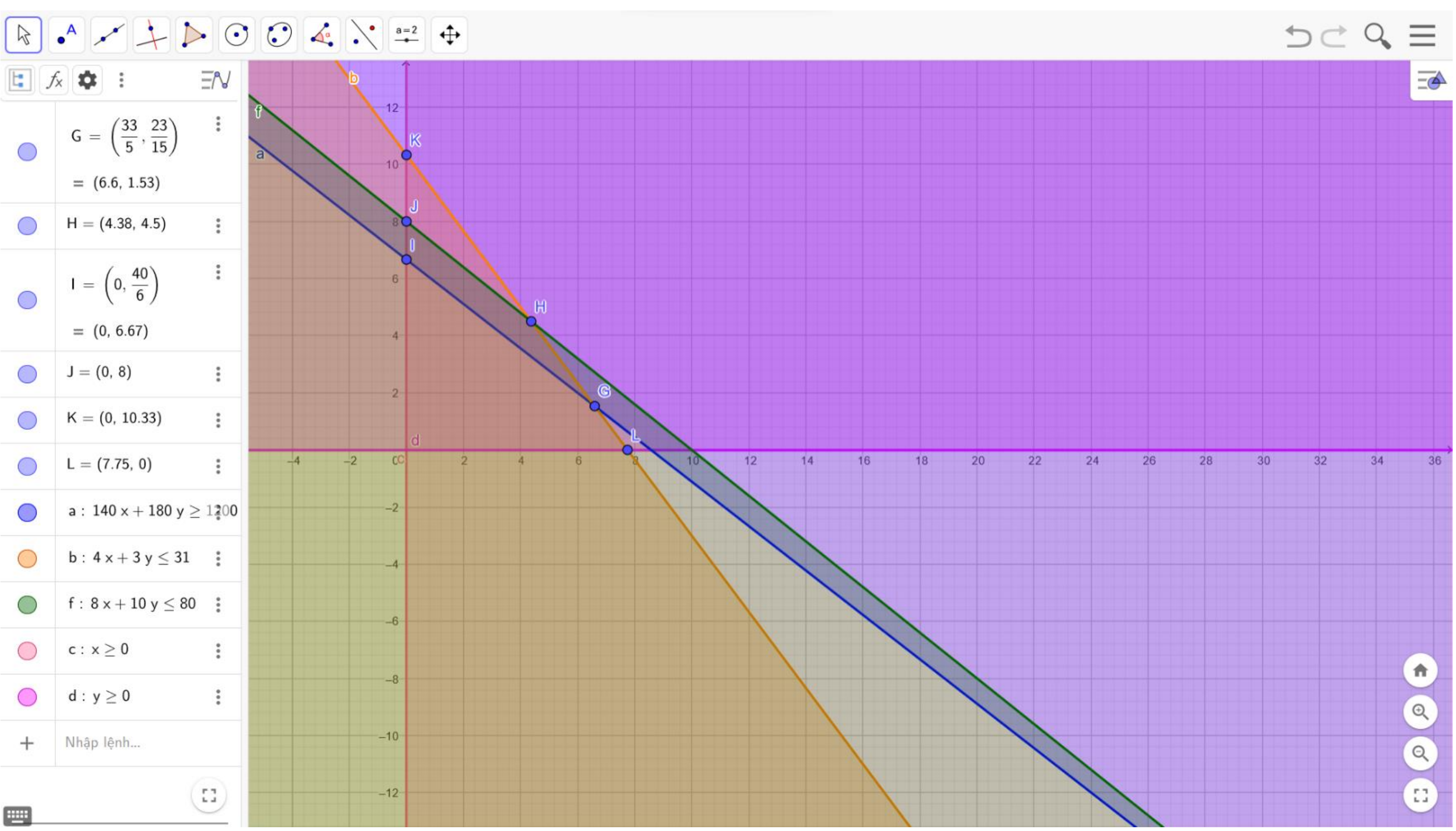
Ta có hàm mục tiêu $f = 60x + 100y \rightarrow \min$ với các ràng buộc:

$$\begin{cases} 140x + 180y \geq 1200\,(1) \\ 4x + 3y \leq 31\,(2) \\ 8x + 10 \leq 80\,(3) \end{cases} \qquad (I)$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Trong đó: (1) là khối lượng hàng hóa tối thiểu phải chở; (2) là số cỏ khô còn trong kho; (3) là lượng nước dự trữ.

Dựa vào bài toán quy hoạch tuyến tính trên, ta vẽ được đồ thị cho bài toán (giải bằng phương pháp hình học như sau):



Miền thỏa mãn yêu cầu bài toán là các điểm nằm trên và trong tứ giác JHGI. Ta có các điểm cực biên:

$$J(0,8) \rightarrow f = 6\times 0 + 100\times 8 = 800;$$

$$H(4.375, 4.5) \rightarrow f = 60\times 4.375 + 100\times 4.5 = 712.5;$$

$$G\left(\frac{33}{5}, \frac{23}{15}\right) \rightarrow f = 60\times\frac{33}{5} + 100\times\frac{23}{15} = \frac{1648}{3} = 549.3333;$$

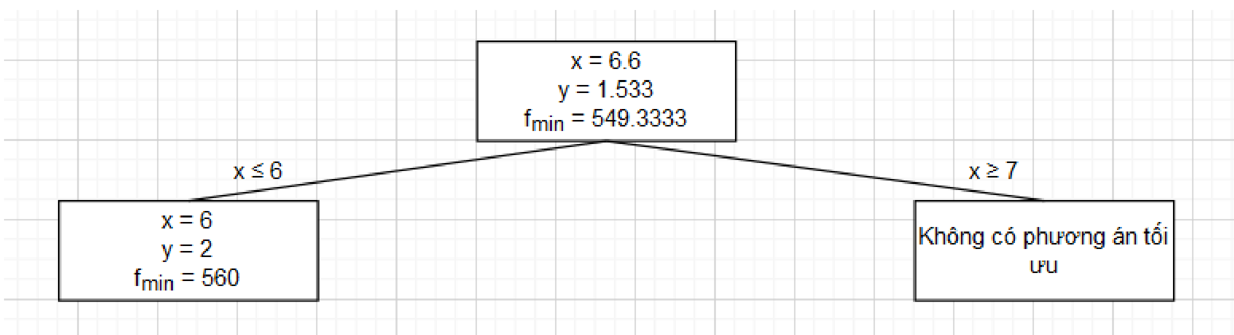
$$I\left(0, \frac{40}{6}\right) \rightarrow f = 60\times 0 + 100\times\frac{40}{6} = 666.6667$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu $f = 549.3333$ khi $x = \frac{33}{5} = 6.6; y = \frac{23}{15} = 1.5333$.

Từ đó, cần thuê 6.6 lạc đà một bướu và 1.5333 lạc đà hai bướu để tổng chi phí là ít nhất.

II. Câu b

Ta có sơ đồ thực hiện thuật toán nhánh – cận để giải bài toán quy hoạch nguyên trên như sau:



Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu nếu $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}$ là $f = 560$ khi $x = 6; y = 2$.

Từ đó, cần thuê 6 lạc đà một bướu và 2 lạc đà hai bước để tổng chi phí là ít nhất.

III. Câu c

Welcome   B1.py ×

B1.py > ...

```python
from scipy.optimize import linprog
import numpy as np

# Tạo ma trận A và vector b
A = np.array([[-140, -180], [4, 3], [8, 10]])
b = np.array([-1200, 31, 80])

# Tạo vector hệ số của hàm mục tiêu f
c = np.array([60, 100])

# Định nghĩa ràng buộc bên dưới và bên trên của x
bnd = [(0, float("inf")),(0, float("inf"))]

# Sử dụng hàm linprog để giải bài toán
result = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=bnd)

# In kết quả
print('Giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) là:', result.fun)
print('Giá trị của x1 và x2 tương ứng là:', result.x)
```

PROBLEMS   OUTPUT   DEBUG CONSOLE   TERMINAL

```
PS C:\Users\HAI DANG\OneDrive - VNU-HCMUS\Năm 3\2. Quy hoạch tuyến tính\Lý thuyết\GIữa kỳ> & "C:/Users/
DANG/OneDrive - VNU-HCMUS/Năm 3/2. Quy hoạch tuyến tính/Lý thuyết/GIữa kỳ/B1.py"
Giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) là: 549.3333333333333
Giá trị của x1 và x2 tương ứng là: [6.6        1.53333333]
```

Hình 1. Thử nghiệm lại bài toán quy hoạch tuyến tính.

Trong đoạn code trên:

- Vector A chứa hệ số các biến x, y bên vế trái của các bất phương trình (1), (2), (3) của hệ bất phương trình (*I*) câu a.
- Vector b chứa hệ số bên vế phải của các bất phương trình (1), (2), (3) của hệ bất phương trình (*I*) câu a.
- Vector c chứa hệ số các biến x, y của hàm mục tiêu.
- Vector bnd là điều kiện ràng buộc $x \ge 0; y \ge 0$.

Kết quả khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng thư viện scipy của Python giống với kết quả câu a.

Nếu như số lạc đà phải là số nguyên (bài toán quy hoạch nguyên):

B1-int.py > ...

```python
import pulp

# Khai báo bài toán
problem = pulp.LpProblem("Integer Linear Programming", pulp.LpMinimize)

# Khai báo biến
x = pulp.LpVariable('x', 0, None, cat='Integer')
y = pulp.LpVariable('y', 0, None, cat='Integer')

# Hàm mục tiêu
problem += 60 * x + 100 * y
# Ràng buộc bất phương trình
problem += 140 * x + 180 * y >= 1200
problem += 4 * x + 3 * y <= 31
problem += 8 * x + 10 * y <= 80

# Giải bài toán
status = problem.solve()

# Kết quả
print("Giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu: ", pulp.value(problem.objective))
print("x = ", pulp.value(x))
print("y = ", pulp.value(y))
```

PROBLEMS OUTPUT DEBUG CONSOLE TERMINAL

```
Objective value:                560.00000000
Enumerated nodes:               0
Total iterations:               0
Time (CPU seconds):             0.01
Time (Wallclock seconds):       0.01

Option for printingOptions changed from normal to all
Total time (CPU seconds):       0.02   (Wallclock seconds):       0.02

Giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu:  560.0
x =  6.0
y =  2.0
PS C:\Users\HAI DANG\OneDrive - VNU-HCMUS\Năm 3\2. Quy hoạch tuyến tính\Lý thuyết\GIữa kỳ>
```

Hình 2. Thử nghiệm lại bài toán quy hoạch nguyên bằng Python.

Ta sử dụng thư viện Pulp để giải bài toán quy hoạch nguyên như sau:

- Dùng biến problem khai báo bài toán với tên bài toán là "Integer Linear Programming" và khai báo pulp.LpMinimize vì ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu f.
- Khai báo biến $x, y \geq 0$ với ràng buộc (0, None) và cat = "Integer" để tìm $x, y \in \mathbb{Z}$
- Khai báo hàm mục tiêu và các bất phương trình (1), (2), (3) của hệ bất phương trình (*I*) của bài toán bằng toán tử +=.
- Sau đó giải bài toán bằng staus = problem.solve và in kết quả.

Kết quả khi giải bài toán quy hoạch nguyên bằng thư viện pulp của Python giống với kết quả câu b.

B. BÀI 2

I. Câu a

Vì bài toán chưa phải là dạng chuẩn tắc nên ta tiến hành thêm 3 biến x_7, x_5, x_6 để trở thành bài toán (P) như sau:

$$f = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \quad \boxed{+x_7} = 25 \\ -x_2 + x_3 + x_4 \quad \boxed{+x_5} = 10 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 \boxed{+x_6} = 16 \end{cases}$$

CS	Hệ số	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			2	-3	4	1	0	0	-M
x_7	-M	25	1	1	**3**	0	0	0	1
x_5	0	10	0	-1	1	1	1	0	0
x_6	0	16	0	2	1	5	0	1	0
max		-25M	-M - 2	-M + 3	-3M - 4	-1	0	0	0

x_3 vào, x_7 ra, 3 là phần tử xoay vì $\Delta_3 < 0$, tồn tại $a_{iv} > 0$, $b_1 = 25, a_{13} = 3$ và $\frac{b_1}{a_{13}}$ là min khi tìm cột xoay.

CS	Hệ số	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			2	-3	4	1	0	0	-M
x_3	4	$\frac{25}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$
x_5	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	1	1	0	$-\frac{1}{3}$
x_6	0	$\frac{23}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	**5**	0	1	$-\frac{1}{3}$
max		$\frac{100}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	0	-1	0	0	M + $\frac{4}{3}$

x_4 vào, x_6 ra, 5 là phần tử xoay vì $\Delta_4 < 0$, tồn tại $a_{iv} > 0$, $b_3 = \frac{23}{3}, a_{34} = \frac{5}{3}$ và $\frac{b_3}{a_{34}}$ là min khi tìm cột xoay.

CS	Hệ số	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			2	-3	4	1	0	0	-M
x_3	4	$\frac{25}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$
x_5	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{-25}{15}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{15}$
x_4	1	$\frac{23}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{15}$
max		$\frac{523}{15}$	$-\frac{11}{15}$	$\frac{14}{3}$	0	0	0	0.2	M + $\frac{19}{15}$

x_1 vào, x_3 ra, $\frac{1}{3}$ là phần tử xoay vì duy nhất $\Delta_1 < 0$, tồn tại duy nhất $a_{11} > 0$.

CS	Hệ số	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			2	-3	4	1	0	0	-M
x_1	2	25	1	1	3	0	0	0	1
x_5	0	$\frac{34}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	0

x_4	1	$\frac{16}{5}=3.2$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0
max		53.2	0	$\frac{27}{5}$	$\frac{11}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	M+2

Ta thấy rằng: $f_{\max} = 53.2$ khi $x_1 = 25, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 3.2$.

Vậy phương án tối ưu của bài toán là: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (25, 0, 0, 3.2)$ với giá trị nhỏ nhất của f là 53.2 .

II. Câu b

Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P) trên là:

$(D): f = 25y_1 + 10y_2 + 16y_3 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 \ge 2 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 \ge -3 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 4 \\ y_2 + 5y_3 \ge 1 \\ y_2, y_3 \ge 0; y_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ta có các cặp ràng buộc đối ngẫu cho bài toán đối ngẫu (P) và (D) như sau:

$-x_2 + x_3 + x_4 \le 10 \leftrightarrow y_2 \ge 0$

$2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 16 \leftrightarrow y_3 \ge 0$

$x_1 \ge 0 \leftrightarrow y_1 \ge 2$

$x_2 \ge 0 \leftrightarrow y_1 - y_2 + 2y_3 \ge -3$

$x_3 \ge 0 \leftrightarrow 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 4$

$x_4 \ge 0 \leftrightarrow y_2 + 5y_3 \ge 1$

Do phương án tối ưu của bài toán (P) là $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (25, 0, 0, 3.2)$ có thành phần:

$x_1 = 25 \ne 0$ nên $y_1 = 2$;

$x_4 = 3.2 \ne 0$ nên $y_2 + 5y_3 = 1$

Mặt khác, thay $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (25, 0, 0, 3.2)$ vào ràng buộc $-x_2 + x_3 + x_4 \le 10$ thì ta thấy $3.2 \ne 10$ nên $y_2 = 0$.

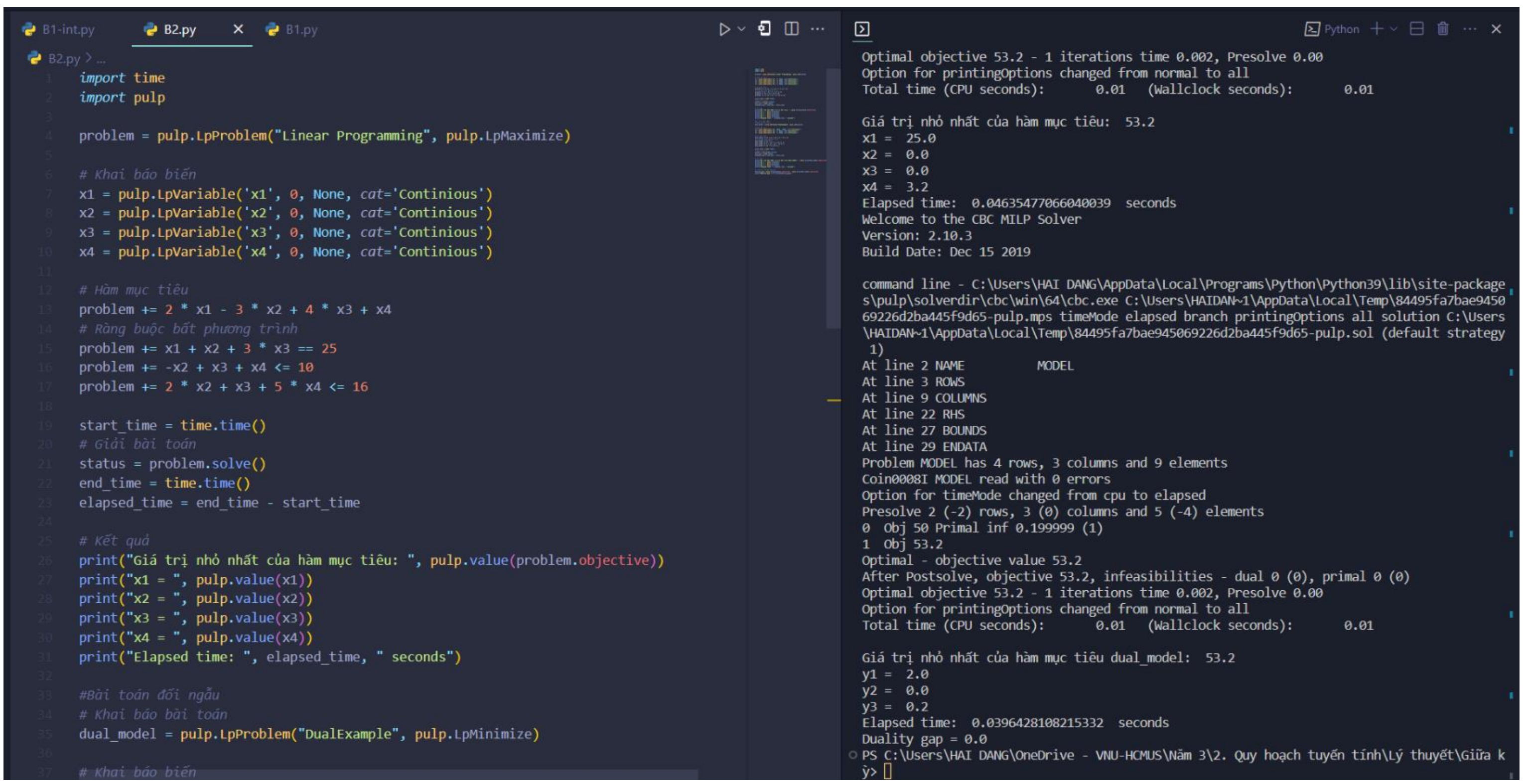
Ta không xét ràng buộc $2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 16$ vì khi thay $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (25, 0, 0, 3.2)$ thì 16 = 16 nên không xét.

Từ đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 + 5y_3 = 1 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu của bài toán (D) là $(y_1, y_2, y_3) = \left(2, 0, \frac{1}{5}\right)$ và giá trị min của hàm *f* là 53.2.

III. Câu c



Hình 3. Đo thời gian thực thi giải bài toán quy hoạch tuyến tính gốc và bài toán đối ngẫu.

```python
import time
import pulp

problem = pulp.LpProblem("Linear Programming", pulp.LpMaximize)

# Khai báo biến
x1 = pulp.LpVariable('x1', 0, None, cat='Continious')
x2 = pulp.LpVariable('x2', 0, None, cat='Continious')
x3 = pulp.LpVariable('x3', 0, None, cat='Continious')
x4 = pulp.LpVariable('x4', 0, None, cat='Continious')

# Hàm mục tiêu
problem += 2 * x1 - 3 * x2 + 4 * x3 + x4
# Ràng buộc bất phương trình
problem += x1 + x2 + 3 * x3 == 25
problem += -x2 + x3 + x4 <= 10
problem += 2 * x2 + x3 + 5 * x4 <= 16

start_time = time.time()
# Giải bài toán
status = problem.solve()
end_time = time.time()
elapsed_time = end_time - start_time

# Kết quả
print("Giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu: ", pulp.value(problem.objective))
print("x1 = ", pulp.value(x1))
print("x2 = ", pulp.value(x2))
print("x3 = ", pulp.value(x3))
print("x4 = ", pulp.value(x4))
print("Elapsed time: ", elapsed_time, " seconds")

#Bài toán đối ngẫu
# Khai báo bài toán
dual_model = pulp.LpProblem("DualExample", pulp.LpMinimize)

# Khai báo biến
y1 = pulp.LpVariable('y1', None , None, cat='Continuous')
y2 = pulp.LpVariable('y2', 0, None, cat='Continuous')
y3 = pulp.LpVariable('y3', 0, None, cat='Continious')

# Hàm mục tiêu
dual_model += 25 * y1 + 10 * y2 + 16 * y3
# Ràng buộc bất phương trình
dual_model += y1 >= 2
dual_model += y1 - y2 + 2 * y3 >= -3
dual_model += 3 * y1 + y2 +  y3 >= 4
dual_model += y2 + 5 * y3 >= 1

start_time = time.time()
# Giải bài toán
status = dual_model.solve()
end_time = time.time()
elapsed_time = end_time - start_time

# Kết quả
print("Giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu dual_model: ", pulp.value(dual_model.objective))
print("y1 = ", pulp.value(y1))
print("y2 = ", pulp.value(y2))
print("y3 = ", pulp.value(y3))
print("Elapsed time: ", elapsed_time, " seconds")

# Tính giá trị độ lệch bù
duality_gap = pulp.value(problem.objective) - pulp.value(dual_model.objective)
print("Duality gap = {}".format(duality_gap))
```

Hình 4. Source code hai bài toán.

Về mặt bằng chung, khi giải bài toán (D) sẽ nhanh hơn giải bài toán quy hoạch tuyến tính (P) nếu bài toán lớn vì bài toán đối ngẫu có thể được giải bằng thuật toán đơn hình, giải thuật này có khả năng tối ưu với thời gian chạy tuyến tính với kích thước đầu vào lớn. Trong khi đó, bài toán gốc phải được giải bằng thuật toán đơn hình hoặc thuật toán khác như Integer Linear Programming (ILP) hoặc Mixed-Integer Linear Programming (MILP) tùy thuộc vào tính chất của bài toán. Những thuật toán này thường có thời gian chạy khá lớn và có thể trở nên rất chậm nếu kích thước đầu vào của bài toán lớn.

Nhưng nếu như giải một bài toán đối ngẫu của một bài toán đã đối ngẫu thì có thể giải bài toán đối ngẫu không thể nhanh bằng bài toán quy hoạch tuyến tính.

C. Bài 3

I. Câu a

Bài toán khi sử dụng kỹ thuật big-M là:

$$f = x_1 + 2x_2 + mx_3 - Mx_4 - Mx_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + \boxed{x_4} = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \boxed{x_5} = 7 \end{cases} v\grave{a}\ x_i \geq 0, \forall i = \overline{1,5}$$

II. Câu b

Trước hết, $x^T = (1,2,0)$ là một phương án của bài toán vì nó thỏa các rảng buộc của bài toán.

Hệ vector cột của ma trận hệ số ứng với các thành phần dương của phương án $x^T = x_1^T = (1,2,0)$ là $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v\grave{a}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Do $\det([A_1 \ \ A_2]) = 1 \neq 0$ nên nên hệ vector $[A_1 \ \ A_2]$ độc lập tuyến tính. Suy ra $x^T = (1,2,0)$ là một phương án cực biên của bài toán.

Ràng buộc gốc tương đương với hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} v\grave{a}\ x_i \geq 0, \forall i = \overline{1,5}$$

CS	Hệ số	PACB	x_1	x_2	x_3
			1	2	m
x_1	1	1	1	0	-1
x_2	2	2	0	1	3
min		0	0	0	$-m + 5$

Để $x^T = (1,2,0)$ là một phương án tối ưu của bài toán thì $-m+5 \le 0 \Leftrightarrow m \ge 5$ **(1)**.

Vậy $x^T = (1,2,0)$ là một phương án tối ưu của bài toán khi $m \ge 5$.

III. Câu c

Trường hợp 1: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}; x_3 = \frac{2}{3}$. Vậy một PACB của bài toán là $x_2^T = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.

Ta đưa ràng buộc về dạng chính tắc với biến cơ sở x_1, x_3, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{2}{3} \end{cases} và\, x_i \ge 0, \forall i = \overline{1,5}$$

Bảng đơn hình tương ứng với hàm mục tiêu và hệ phương trình trên là:

CS	Hệ số	PACB	x_1	x_2	x_3
			1	2	m
x_1	1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
x_3	m	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
min		0	0	$-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}m$	0

Vậy để $x_2^T = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$ là một phương án tối ưu của bài toán thì $-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}m \le 0 \Leftrightarrow m \le 5$ **<u>(2)</u>**.

Từ **<u>(1)</u>** và **<u>(2)</u>**, ta thấy rằng khi $m = 5$ thì bài toán min tại 2 phương án tối ưu là $x_1^T = (1, 2, 0)$ và $x_2^T = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.

<u>Trường hợp 2</u>: $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5; x_3 = -1$. Vậy một PACB của bài toán là $x_3^T = (0, 5, -1)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ -x_1 + x_3 = -1 \end{cases} và\, x_i \ge 0, \forall i = \overline{1,5}$$

Đây không phải là một PACB của bài toán.

⇨ **Vậy khi $m = 5$ thì bài toán đạt min tại 2 phương án tối ưu là $x_1^T = (1, 2, 0)$ và $x_2^T = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.**