Chương 4. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

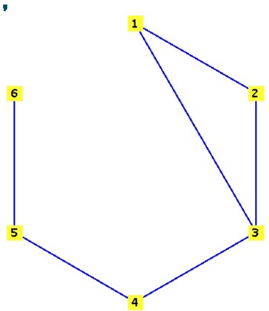
Để thực hành các bài toán liên quan tới đồ thị chúng ta sử dụng gói lệnh GraphTheory. Để gọi gói lệnh này ta dùng

```
> with(GraphTheory);
    [AcyclicPolynomial,AddArc,AddEdge,AddVertex,AdjacencyMatrix,AllPairsDistance, ...]
```

4.1 Đồ thị

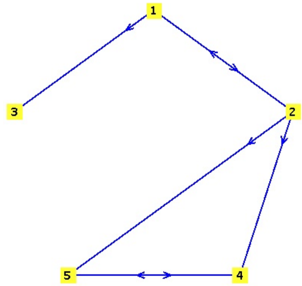
- Graph(E): Tạo ra đồ thị có tập hợp cạnh (cung) là E. Nếu E $= \{\{i,j\},\ldots\}$ thì đồ thị có được là vô hướng. Nếu E $= \{[i,j],\ldots\}$ thì đồ thị có được là có hướng và $[i,j]$ là cung từ i đến j
- Graph(n, E): Tạo ra đồ thị có n đỉnh và tập hợp cạnh E.
- CompleteGraph(n): Tạo ra đồ thị đủ với n đỉnh.
- DrawGraph(G): Vẽ đồ thị G.
- NumberOfVertices(G): Số đỉnh của đồ thị G.
- Vertices(G): Danh sách đỉnh của đồ thị G.
- NumberOfEdges(G): Số cạnh của đồ thị G.
- Edges(G): Danh sách cạnh của đồ thị G.
- IsConnected(G): Kiểm tra tính liên thông của đồ thị G.
- ConnectedComponents(G): Danh sách các thành phần liên thông của đồ thị G.

```
> G:=Graph({ {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {3, 4}, {4, 5}, {5, 6} }):
        Graph 1: an undirected unweighted graph with 6 vertices and 6 edge(s)
> DrawGraph(G);
```

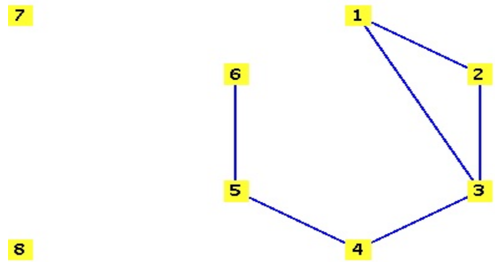



```
> H:=Graph({ [1, 2], [2, 1], [1, 3], [2, 4], [2, 5], [4, 5], [5, 4] });
        Graph 2: a directed unweighted graph with 5 vertices and 7 arc(s)
```

> **DrawGraph(H);**



> **T := Graph(8, { {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}, {5, 6} }):**
DrawGraph(T);



> **NumberOfVertices(T);**

$$8$$

> **Vertices(T);**

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$$

> **NumberOfEdges(T);**

$$6$$

> **Edges(T);**

$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$$

> **IsConnected(T);**

$$false$$

> **ConnectedComponents(T);**

$$[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]]$$

Ngoài ra để tạo ngẫu nhiên một đồ thị, ta sử dụng thêm gói lệnh RandomGraphs. Nghĩa là gọi > **with(RandomGraphs);**

- RandomGraph(n, m): Tạo ra ngẫu nhiên một đồ thị vô hướng có n đỉnh và m cạnh.
- RandomGraph(n, m, connected): Tạo ra ngẫu nhiên một đồ thị vô hướng liên thông có n đỉnh và m cạnh.
- RandomGraph(n, degree = k): Tạo ra ngẫu nhiên một đồ thị k-đều có n đỉnh.

> **with(RandomGraphs);**

[AssignEdgeWeights, RandomBipartiteGraph, RandomDigraph, RandomGraph, ...]

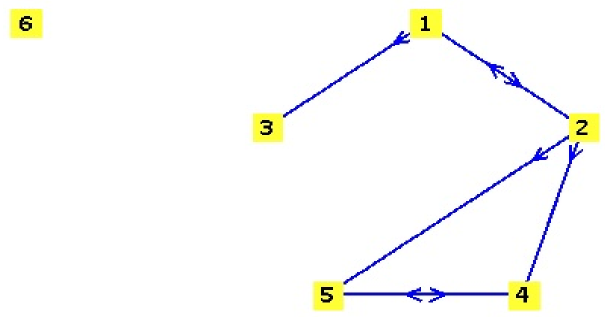
> **G := RandomGraph(6, 8);**

```
DrawGraph(G);
> H := RandomGraph(10, 11, connected);
DrawGraph(H);
> T := RandomGraph(8, degree = 4);
DrawGraph(T);
```

4.2 Bậc của đỉnh

- Degree(G, i): Bậc của đỉnh i trong đồ thị G.
- InDegree(G, i): Nửa bậc trong của đỉnh i trong đồ thị G.
- OutDegree(G, i): Nửa bậc ngoài của đỉnh i trong đồ thị G.
- DegreeSequence(G): Danh sách bậc của các đỉnh trong G.

```
> G := Graph(6, {[1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 4], [2, 5], [4, 5], [5, 4]}):
DrawGraph(G);
```




```
> DegreeSequence(G);
```

$$[3, 4, 1, 3, 3, 0]$$

```
> Degree(G, 2);
```

$$4$$

```
> InDegree(G, 2);
```

$$1$$

```
> OutDegree(G, 2);
```

$$2$$

4.3 Ma trận kề

- AdjacencyMatrix(G): Ma trận kề của đồ thị G.
- Graph(A): Tạo ra đồ thị có ma trận kề A.

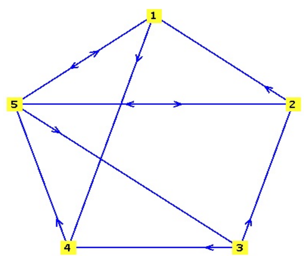
```
> G := Graph(6, {[1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 4], [2, 5], [4, 5], [5, 4]}):
AdjacencyMatrix(G);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A := Matrix([ [0, 0, 1, 1], [1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 0] ]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> G := Graph(A):
  DrawGraph(G);
```



▷ Bài tập thực hành

Xem ma trận như là mảng hai chiều. Hãy viết chương trình để thực hiện những yêu cầu của những bài sau.

Bài 1. Cho ma trận kề của đồ thị G. Hãy kiểm tra

a) G là đồ thị vô hướng.

b) G là đồ thị có hướng.

c) G có khuyên.

d) G có cạnh song song.

Bài 2. Cho ma trận kề của đồ thị G. Hãy tính số cạnh và bậc của các đỉnh của G.

Bài 3. Cho danh sách các cặp đỉnh (không thứ tự) tương ứng với các cạnh của đồ thị vô hướng G. Hãy tính số bậc của các đỉnh của G.

Bài 4. Cho danh sách các cặp đỉnh (có thứ tự) tương ứng với các cạnh của đồ thị có hướng G. Hãy tính số nửa bậc ngoài, nửa bậc trong của các đỉnh của G.

Bài 5. Cho danh sách các cạnh của đồ thị vô hướng G. Hãy kiểm tra xem đồ thị đó có phải là đồ thị lưỡng phân không? Nếu có, hãy phân hoạch tập đỉnh của G thành 2 phần.

Bài 6. Cho danh sách các cạnh của đồ thị vô hướng G. Hãy xây dựng ma trận kề cho G. (Làm tương tự cho đồ thị có hướng)

Bài 7. Cho ma trận kề của đồ thị G. Hãy liệt kê danh sách các cạnh của G.

Bài 8. Cho danh sách các cạnh của hai đồ thị có không quá 6 đỉnh. Hãy xác định xem hai đồ thị này có đẳng cấu không? Nếu có, hãy tìm song ánh tương ứng.

Bài 9. Cho ma trận kề của đồ thị G, hai đỉnh u, v của G và số nguyên k. Hãy tìm tất cả những đường đi có độ dài k giữa hai đỉnh u, v.

Bài 10. Cho danh sách các cạnh của đồ thị vô hướng G. Hãy xác định xem đồ thị có liên thông không? Nếu không hãy tìm các thành phần liên thông của G.

Phần II. Bài tập

4.1 Chứng minh rằng tại mọi thời điểm của một giải đấu cờ với n kỳ thủ ($n \geq 2$) tham dự theo thể thức thi đấu vòng tròn một lượt, luôn luôn có ít nhất hai kỳ thủ có số ván đã thi đấu là bằng nhau.

4.2 Chứng minh rằng trong một nhóm 6 người bất kỳ luôn luôn có ít nhất 3 người có quen biết nhau hay có ít nhất 3 người không quen biết nhau.

4.3 Một nhóm gồm n người ($n \geq 4$) thỏa tính chất "cứ chọn ra 4 người bất kỳ trong nhóm thì luôn luôn có ít nhất một người quen biết với cả ba người còn lại". Chứng minh rằng có ít nhất một người trong nhóm quen biết với tất cả $(n-1)$ người còn lại.

4.4 Cho đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ và $\emptyset \neq A \subset X$. Đặt h là số đỉnh bậc lẻ trong A. Đặt k là số cạnh của G thỏa tính chất "cạnh có một đỉnh thuộc A và một đỉnh không thuộc A". Chứng minh $(h-k)$ là một số nguyên chẵn.

4.5 Giả sử trong một giải bóng đá có n đội tham dự ($n \geq 4$) theo thể thức đá vòng tròn một lượt, đã có $(n+1)$ trận đấu được tiến hành. Chứng minh rằng có ít nhất một đội bóng đã thi đấu được ít nhất 3 trận.

4.6 Tìm số đỉnh của một đồ thị có

a) 12 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng 3.

b) 10 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng 4.

c) 21 cạnh với 3 đỉnh bậc 4 và các đỉnh còn lại đều có bậc bằng 3.

d) 24 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng nhau.

4.7 Đồ thị G có tối đa bao nhiêu đỉnh nếu G có 19 cạnh và mọi đỉnh có bậc ≥ 3 ?

4.8 Chứng minh rằng một đồ thị đủ m cạnh có $\dfrac{1+\sqrt{1+8m}}{2}$ đỉnh?

4.9 Cho đồ thị vô hướng G có m cạnh và n đỉnh. Chứng minh

a) Nếu $m < n$ thì G có ít nhất một đỉnh cô lập hay một đỉnh treo.

b) Nếu $m \geq n$ thì G có ít nhất một chu trình (dùng quy nạp theo $n \geq 1$).

4.10 G là một đồ thị liên thông có ít nhất 2 đỉnh. Chứng minh G có ít nhất 2 đỉnh không phải là đỉnh khớp.

4.11 Cho G là đồ thị đơn gồm n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông. Chứng minh rằng

$$n - p \leq m \leq \frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$$

Suy ra rằng, nếu $2m > (n-1)(n-2)$ thì G liên thông.

4.12 Có $2k$ trạm điện thoại ($k \geq 1$) sao cho mỗi trạm được nối trực tiếp với ít nhất k trạm khác. Chứng minh bất kỳ hai trạm nào cũng liên lạc được trực tiếp với nhau hoặc liên lạc được với nhau qua trung gian một trạm khác.

4.13 Cho đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ có đỉnh bậc lẻ. Chứng minh có ít nhất hai đỉnh bậc lẻ của G sao cho có một đường trong G nối hai đỉnh đó.

4.14 Cho G là đồ thị đơn vô hướng. Khi đó đồ thị bù $\overline{G}$ của G là một đồ thị có cùng tập đỉnh như G, hai đỉnh kề trong $\overline{G}$ khi và chỉ khi chúng không kề trong G. Cho G là đồ thị đơn, chứng minh rằng G hay $\overline{G}$ liên thông.

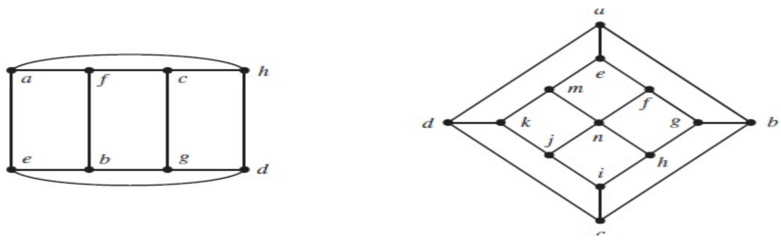
4.15 Cho đồ thị đơn vô hướng G có 15 cạnh và $\overline{G}$ có 13 cạnh. Khi đó G có bao nhiêu đỉnh?

4.16 Cho G là đồ thị vô hướng liên thông có 2 đường đi sơ cấp dài nhất và khác nhau. Chứng minh hai đường đó có ít nhất một đỉnh chung

4.17 Cho G là đồ thị đơn vô hướng và có n đỉnh. Nếu G đẳng cấu với $\overline{G}$ thì G có bao nhiêu cạnh?

4.18 Cho G là đồ thị không khuyên và mỗi đỉnh đều có bậc ≥ 3. Chứng minh G có một chu trình đơn với độ dài chẵn.

4.19 Hai đồ thị sau có lưỡng phân không? Nếu có thì phân hoạch lại tập đỉnh thành hai phần.



4.20 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị liên thông và $a \in X$. Chứng minh rằng a là điểm khớp nếu và chỉ nếu có 2 đỉnh x, y sao cho mọi dây chuyền nối x và y đều qua a.

4.21 Có bao nhiêu đơn đồ thị vô hướng không đẳng cấu với số đỉnh lần lượt là 2, 3 và 4 ?

4.22* Có bao nhiêu đơn đồ thị có hướng không đẳng cấu với số đỉnh lần lượt là 2, 3 và 4 ?

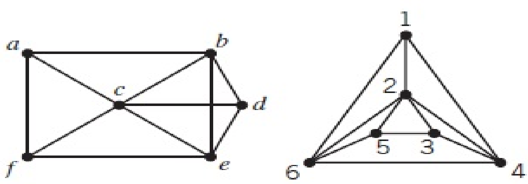
4.23 Có bao nhiêu đơn đồ thị vô hướng không đẳng cấu có 5 đỉnh và 4 hoặc 6 cạnh ?

4.24 Có bao nhiêu đồ thị đơn vô hướng không đẳng cấu có

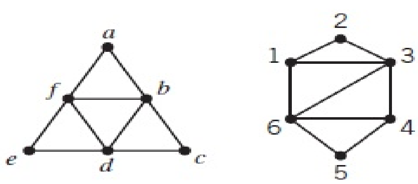
a) 5 đỉnh và 3 cạnh? b) 6 đỉnh 4 cạnh?

4.25 Những cặp đồ thị sau có đẳng cấu không? Tại sao?

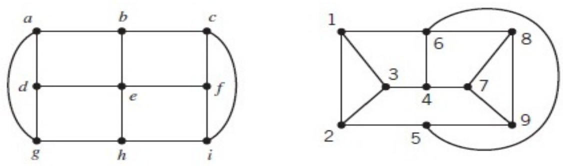
(a)



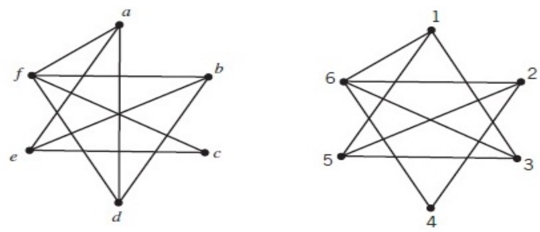
(b)



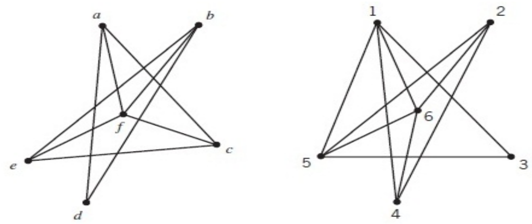
c)



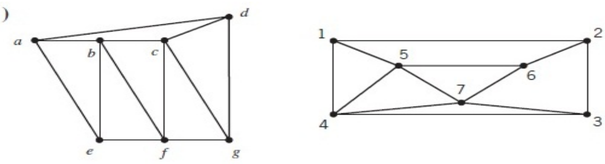
d)



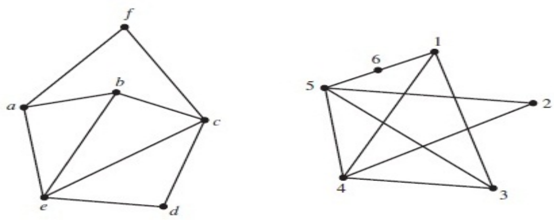
e)



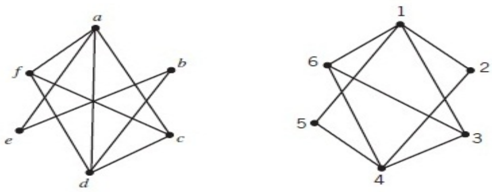
f)



i)



j)



4.26 Có hay không đơn đồ thị vô hướng có 5 đỉnh với bậc lần lượt như dưới đây ? Nếu có thì vẽ minh họa mỗi trường hợp. Nếu không thì giải thich tại sao ?

a) 3, 3, 3, 3, 2

b) 5, 4, 3, 2, 1

c) 4, 4, 3, 2, 1

d) 4, 4, 3, 3, 3

e) 3, 2, 2, 1, 0

f) 4, 3, 3, 2, 2

4.27 Có hay không đơn đồ thị vô hướng có 6 đỉnh với bậc lần lượt như dưới đây ? Nếu có thì vẽ minh họa mỗi trường hợp. Nếu không thì giải thich tại sao ?

a) 5, 4, 3, 2, 1, 0

b) 6, 5, 4, 3, 2, 1

c) 2, 2, 2, 2, 2, 2

d) 3, 3, 3, 2, 2, 2

e) 3, 3, 2, 2, 2, 2

f) 1, 1, 1, 1, 1, 1

g) 5, 3, 3, 3, 3, 3

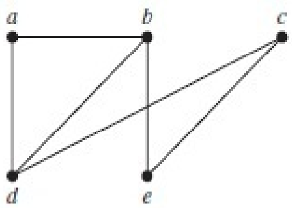
h) 5, 5, 4, 3, 2, 1

i) 5, 2, 2, 2, 2, 1

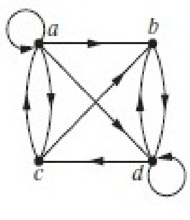
4.28 Viết ma trận kề và ma trận liên kết của các đồ thị dưới đây :

a)

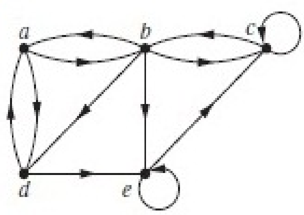
b)



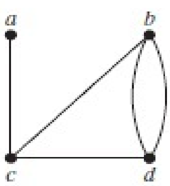
c)



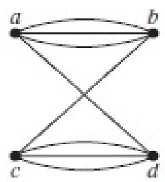
d)



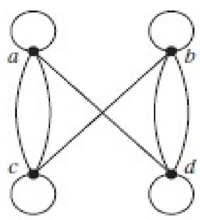
e)



f)



g)



4.29 Vẽ đồ thị G nếu G có ma trận kề lần lượt như sau :

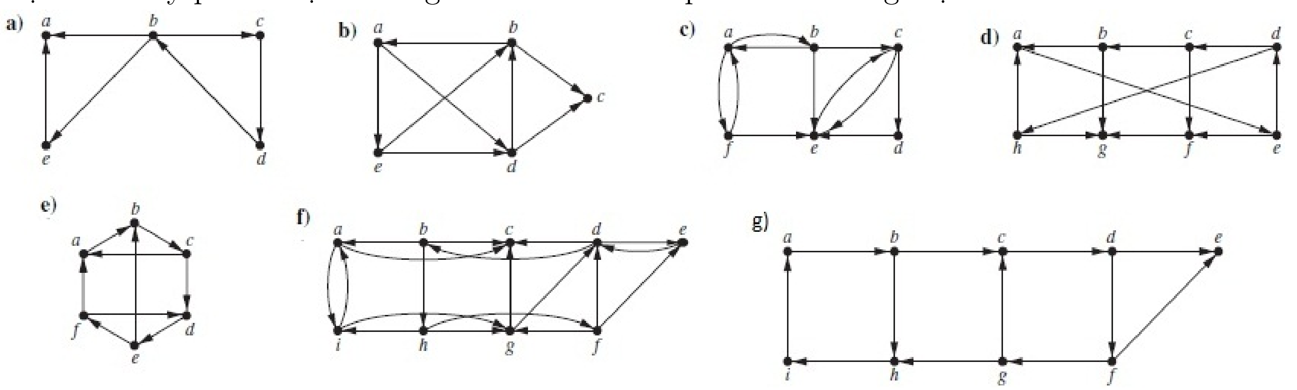
$$\begin{bmatrix}2&0&1\\0&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&0\\0&2&2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2&3&2\\3&0&4\\2&4&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&2&3&0\\1&2&2&1\\2&1&1&0\\1&0&0&2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2&2&0&1\\2&0&3&0\\0&3&2&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&3&0&4\\1&4&1&3&0\\3&1&1&0&1\\0&3&0&0&2\\4&0&1&2&2\end{bmatrix}$$

4.30 Mỗi cặp đồ thị vô hướng có ma trận kề như dưới đây có đẳng cấu với nhau không ? Tại sao ?

a) $\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$

4.31 Các đồ thị nào dưới đây là liên thông mạnh ? Tại sao ? Nếu đồ thị nào không liên thông mạnh thì hãy phân hoạch chúng thành các thành phần liên thông mạnh.



4.32 Cho đồ thị đơn vô hướng $G = (V, E)$ gồm 10 đỉnh được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như sau:

Ke(1) = 2, 9, 10	Ke(6) = 4, 5, 7
Ke(2) = 1, 3, 4, 8, 9, 10	Ke(7) = 4, 6, 8
Ke(3) = 2, 4, 5, 10	Ke(8) = 2, 4, 7, 9
Ke(4) = 2, 3, 5, 6, 7, 8	Ke(9) = 1, 2, 8, 10
Ke(5) = 3, 4, 6	Ke(10) = 1, 2, 3, 9

a) Hãy tìm $deg(u)$ với mọi $u \in V$?

b) Hãy tìm ma trận kề của G?

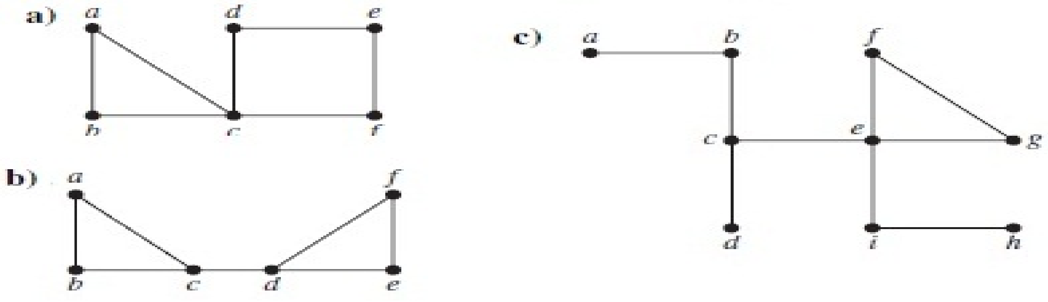
4.33 Cho đồ thị đơn vô hướng $G = (V, E)$ gồm 10 đỉnh được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như sau:

Ke(1) = 4, 10	Ke(6) = 1, 4, 7
Ke(2) = 4, 5, 6	Ke(7) = 3, 9
Ke(3) = 8	Ke(8) = 7, 9
Ke(4) = 2, 10	Ke(9) = 8
Ke (5) = 7, 8	Ke(10) = 1, 2

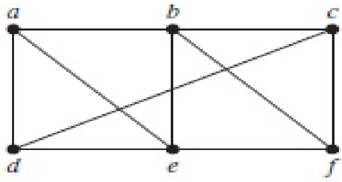
a) Hãy tìm $deg(u)$ với mọi $u \in V$?

b) Hãy tìm ma trận kề của G?

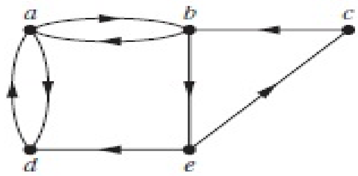
4.34 Xác định số liên thông đỉnh và liên thông cạnh của những đồ thị sau:



4.35 Cho đồ thị G_1 và G_2 như sau:



G_1



G_2

Hãy tìm số đường đi từ c đến d trong đồ thị G_1 và đường đi từ a đến e trong đồ thị G_2 có độ dài lần lượt là 2, 3, 4, 5, 6 và 7.