

Họ và tên SV: Nguyễn Hải Đăng.....
Mã số SV: 20120049.....
Ngày thi: 11/01/2022 Giờ thi: 15:40.....

Tên học phần: Toán học tổ hợp.....
Mã học phần: MT.H00050.....
Số trang/Tổng số trang: ...1.../...9....

Câu 1:

Hàm sinh $F(x)$ của dãy $\{a_k \mid k \geq 0\}$ là:

$$F(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2 (x^3 + x^4 + x^5 + \dots) (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^2 (x^2 + x^5 + x^{10})$$

Ta có:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2 \cdot x^3 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \cdot x^4 (1 + x + x^2 + \dots)^2 (x^2 + x^5 + x^{10}) \\ &= x^9 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^5 (1 + x^3 + x^8) \\ &= x^9 \frac{1}{(1-x)^5} (1 + x^3 + x^8) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \cdot (x^9 + x^{12} + x^{17})$$

$$\text{Đặt } F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k; \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = x^9 + x^{12} + x^{17}$$

Dùng tích Cauchy:

$$\text{Ta có: } \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

$$\begin{aligned} \text{Và } a_{24} &= \sum_{i=0}^{24} b_i c_{24-i} = b_7 c_{17} + b_{12} c_{12} + b_{15} c_9 \\ &= c_{11} + c_{16} + c_{19} = 6026 \end{aligned}$$

Câu 2:

Hàm sinh mũ $E(x)$ của dãy $\{b_k \mid k \geq 0\}$ và $\forall k \geq 0$ là:

$$E(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)^2 \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

Ta có:

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots\right) (e^x - 1) \\ &= \frac{1}{2} (e^{2x} - e^x) (e^x - 1) = \frac{1}{2} (e^{4x} - e^{3x} - e^{2x} - e^x) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4^k - 3^k - 2^k - 1)}{k!} x^k \quad (*)$$

Họ và tên SV: Nguyễn Hải Đăng.....
Mã số SV: 20120049.....
Ngày thi: 11/01/2020 Giờ thi: 15:40...

Tên học phần: Tính học tập.....
Mã học phần: MTHT00050.....
Số trang/Tổng số trang: 2 / 4...

Từ (1) (2), ta có:

$$\frac{b_k}{k!} = \frac{1}{2} \frac{4^k - 3^k - 2^k - 1}{k!}$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{2} (4^k - 3^k - 2^k - 1) \quad \forall k \geq 0$$

Câu 3:

A_1 là tập hợp dãy các dãy số dương hệ thập phân vào cho không có chữ số 1.

A_2 là tập hợp dãy các dãy số dương hệ thập phân vào cho không có chữ số 2.

A_3 là tập hợp dãy các dãy số dương hệ thập phân vào cho không có chữ số 3.

U là tập hợp dãy các dãy số dương hệ thập phân vào cho

$$|U| = 10^5 = 100.000$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 9^5 = 59049$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 8^5 = 32.768$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 7^5 = 16.807$$

$$\text{Ta có } S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 172.197$$

$$S_2 = 2 \cdot |A_1 \cap A_2| = 98.304$$

$$S_3 = 16.807$$

$$\text{Ta có: } |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |U| - (S_1 - S_2 + S_3) =$$

$$= 100.000 - (172.197 - 98.304 + 16.807) = 95.500$$

$$b. |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 100.000 - 95.500 = 4.500$$

c. Theo đề bài, cần tính:

$$N_1 = S_1 - S_2 \cdot C_2^1 + S_3 \cdot C_3^2 = 172.197 - 98.304 \cdot 2 + 16.807 \cdot 3 = 30.960$$

d. Theo đề bài, cần tính

$$N_2 = S_2 - S_3 \cdot C_2^1 = 98.304 - 16.807 \cdot 2 = 64.690$$

Họ và tên SV: Nguyễn Hữu Bằng.....

Mã số SV: 20.12.0049.....

Ngày thi: 11/01/2022 Giờ thi: 15:40.....

Tên học phần: Toán học tổ hợp.....

Mã học phần: MTH00450.....

Số trang/Tổng số trang: 3/4.....

Câu 4.

~~Đa thức~~ quân xe theo đề bài (thêm 1 người đi f sao cho f thích tất cả các quân).

	1	2	3	4	5	6
a		X	X			
b	X		X			
c		X	X			
d					X	X
e				X	X	X
f						

Đa thức quân xe dựa trên các ô cấm là:



A



A



B

B



C



D



E

Ta có: $R(A, x) = R(B, x) \times R(C, x)$ (vì B và C rời nhau)

$$= (xR(D, x) + R(F, x)) \times R(C, x)$$

$$= (x(1 + 4x + 2x^2) + (1 + 5x + 4x^2)) \times (1 + 5x + 4x^2)$$

$$= (x + 4x^2 + 2x^3 + 1 + 5x + 4x^2) \times (1 + 5x + 4x^2)$$

$$= (1 + 6x + 8x^2 + 2x^3) \times (1 + 5x + 4x^2)$$

$$= 1 + 5x + 4x^2 + 6x + 30x^2 + 24x^3 + 8x^2 + 40x^3 + 32x^4 + 2x^3 + 10x^4 + 8x^5$$

$$= 1 + 11x + 42x^2 + 66x^3 + 42x^4 + 8x^5$$

Cách để các bạn trẻ chọn nhà:

$$\sum_{i=0}^6 (-1)^i (6-i)! \tilde{\lambda}_i(A) = 6! - 5! \cdot 11 + 4! \cdot 42 - 3! \cdot 66 + 2! \cdot 42 + 1! \cdot 8 = 104$$

Họ và tên SV: Nguyễn Hải Đăng

Tên học phần: Toán học tổ hợp

Mã số SV: 20120049

Mã học phần: MTH00050

Ngày thi: 11/01/2022 Giờ thi: 15:40

Số trang/Tổng số trang: 4/4

Câu 5:

a. Số phép phân hoạch tam giác 1 đơn giác lại 1 cạnh là:

$$C_{10} = \frac{1}{10+1} C_{20}^{10} = \frac{1}{11} C_{20}^{10} = 16296$$

b. Số cách chia 2 cuộn thành 5 đũa là:

$$S_5^5 = 5S_6^5 + S_6^4 = 5S_6^5 + 4S_5^4 + S_5^3 = 5S_5^5 + 4S_5^4 + 3S_4^3 + S_4^2$$

$$= 5C_6^2 + 4C_5^2 + 3C_4^2 + 2^{4-1} - 1 = 140$$

c. Phép phân hoạch thành các tập con khác nhau từng đôi 1 là:

$$B_6 = \sum_{k=0}^5 B_{5-k} C_5^k = B_5 C_5^0 + B_4 C_5^1 + B_3 C_5^2 + B_2 C_5^3 + B_1 C_5^4 + B_0 C_5^5$$

$$= 52 + 15 \cdot 5 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1$$

$$= 203$$