

I.Đại số tuyến tính

1.Khái niệm ma trận

1.1 Định nghĩa: Một ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng số hình chữ nhật gồm

m hàng, n cột có dạng $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Với $a_{ij} \in K$ (K là trường số

thực \mathbb{R} hoặc trường số phức C).

2. Phép nhân ma trận

2.1 Định nghĩa: Giả sử A và B là 2 ma trận cỡ $m \times n$ và $n \times p$ tương ứng:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times p}.$$

Tích AB là ma trận C cỡ $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ được xác định bởi công thức

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

với phần tử c_{ij} của ma trận C.

Như vậy tích AB chỉ được xác định khi số cột của A bằng số hàng của B. phần tử c_{ij} của ma trận tích được tính bằng cách nhân tương ứng các phần tử trên hàng i của A với các phần tử trên cột j của B rồi cộng lại.

Ta có thể mô tả cách tính c_{ij} qua sơ đồ

$$\text{hang i} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{cot j} \\ \begin{bmatrix} \dots & \dots & b_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & b_{nj} & \dots \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \dots & \text{cot j} \\ \vdots & \vdots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \text{hang I}$$

3. Định thức của ma trận vuông

3.1 Định nghĩa: Cho ma trận vuông cấp n: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Định thức của A là một số kí hiệu là $\det(A)$ hay $|A|$ xác định bởi công thức:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Mỗi tích $sign(\sigma).a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$ gọi là một số hạng của định thức, định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n .

4. Khái niệm hạng của ma trận

Xét ma trận cỡ $m \times n$:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 4.1: Gọi k là số nguyên dương không vượt quá m, n . Ma trận vuông cấp k tạo bởi các phần tử nằm trên k hàng, k cột nào đó của A gọi là ma trận con cấp k , định thức của nó là định thức con cấp k của A .

Định nghĩa 4.2: Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A .

Ta kí hiệu hạng của ma trận A là $\text{rank}A$. Trường hợp $A = 0$ ta quy ước $\text{rank}A = 0$.

5. Ma trận nghịch đảo

Ta ký hiệu $M_n(K)$ là tập hợp các ma trận vuông cấp n trên trường K .

Ta gọi I là ma trận đơn vị cấp n .

Định nghĩa 5.1: Cho ma trận $A \in M_n(K)$. Nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(K)$ sao cho $AB = BA = I$ thì ta nói A khả nghịch và B là ma trận nghịch đảo của A , kí hiệu $B = A^{-1}$.

Như vậy $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Định lí 5.1: Ma trận $A \in M_n(K)$ khả nghịch khi và chỉ khi A không suy biến hay $\det(A) \neq 0$.

6. Khái niệm không gian vector

6.1 Định nghĩa không gian vector

Giả sử V là tập hợp không rỗng mà phần tử gọi là vector, K là trường số thực hoặc trường số phức C . Tập hợp V gọi là không gian vector trên K nếu:

a, Trên V có phép cộng, nghĩa là với 2 vector $x, y \in V$ có vector tổng của x, y là $x + y \in V$.

b, Trên V có phép nhân vector với một số trong K , nghĩa là với $x \in V, k \in K$ có vector tích của số k với x là $kx \in V$.

6.2 Định nghĩa không gian vector con

Cho V là không gian vector trên trường K và W là tập hợp con khác rỗng của V . Ta nói W đóng kín với các phép toán vector của V nếu:

a, Với bất kì $x, y \in W$ thì $x + y \in W$.

b, Với bất kì $x \in W, k \in K$ thì $kx \in W$.

Đôi khi người ta gọi là phép kín thay cho đóng kín.

6.3 Hệ trục giao và cơ sở trục chuẩn

Định nghĩa 6.3.1: Trong không gian có tích vô hướng, hệ vector $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ gọi là hệ vector trục giao nếu đôi một trục giao với nhau nghĩa là $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ ($\langle v_i, v_j \rangle$ là tích vô hướng của 2 vector) với mọi $i \neq j$.

Định nghĩa 6.3.2: Hệ vector $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ được gọi là hệ trục chuẩn nếu nó là hệ trục giao và mỗi vector là đơn vị, nghĩa là

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \text{ với } i \neq j \text{ và } \|u_i\| = 1 \text{ với } i=1, 2, \dots, m.$$

Định nghĩa 6.3.3: Trong không gian Euclid n chiều một cơ sở

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ được gọi là cơ sở trục chuẩn nếu $B = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ là hệ trục chuẩn.

II, Giải tích

1. Đạo hàm 1 biến số

1.1 Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm $c \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = A, x \neq c$$

Số A ; giới hạn của tỉ số $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}, x \neq c$, khi $x \rightarrow c$ được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ lấy tại điểm $x = c$; và kí hiệu $f'(c)$.

Nếu hàm số $f(x)$ khả vi tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói rằng $f(x)$ khả vi trong khoảng (a, b) .

2. Đạo hàm nhiều biến số

Cho hàm số $u = f(x, y)$ xác định trong 1 miền D ; $M_0(x_0, y_0)$ là 1 điểm của D . Nếu cho $y = y_0$, hàm số 1 biến số $x \rightarrow f(x, y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$,

thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của f đối với x tại M_0 và được ký hiệu là $f'_x(x_0, y_0)$ hay $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ hay $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Đặt $\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$. Biểu thức đó được gọi là số gia riêng của $f(x, y)$ theo x tại (x_0, y_0) . Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$$

Tương tự như vậy, người ta định nghĩa đạo hàm riêng của f đối với y tại M_0 , kí hiệu là

$$f'_y(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Các đạo hàm riêng của hàm số n biến số ($n > 2$) được định nghĩa tương tự. Khi tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến số nào, chỉ việc xem như hàm số chỉ phụ thuộc biến số ấy, các biến số khác được coi như không đổi, rồi áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

3. Chain Rules

Hàm f và g là các hàm phân biệt, đạo hàm của $f \circ g$ là

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Ngoài ra bằng cách cho $F = f \circ g$ (hay có thể viết $F(x) = f(g(x))$) . Như vậy đạo hàm của F là

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

III, Xác suất

1. Bernoulli

1.1 Định nghĩa: (Dãy phép thử Bernoulli) Tiến hành n phép thử độc lập. Giả sử trong mỗi phép thử chỉ có thể xảy ra một trong 2 trường hợp: hoặc sự kiện A xảy ra hoặc sự kiện A không xảy ra. Xác suất xảy ra sự kiện A trong mỗi phép thử luôn bằng p . Đó chính là dãy phép thử Bernoulli.

1.2 Công thức Bernoulli

Xác suất để sự kiện A xuất hiện đúng k lần trong n phép thử của dãy phép thử

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, q = 1 - p; k = 0, 1, \dots, n.$$

2. Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

2.1 Định nghĩa nhóm đầy đủ

Nhóm các sự kiện $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 2)$ của 1 phép thử được gọi là nhóm đầy đủ nếu thỏa mãn 2 điều kiện:

$$+ A_i A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j;$$

$$+ A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega.$$

Tính chất: $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$

2.2 Công thức xác suất đầy đủ

Giả sử A_1, A_2, \dots, A_n là một nhóm đầy đủ các sự kiện. Xét sự kiện H sao cho H chỉ xảy ra khi 1 trong các sự kiện A_1, A_2, \dots, A_n xảy ra. Nói cách khác H xảy ra thì 1 sự kiện A_i nào đó xảy ra. Khi đó ta có công thức xác suất đầy đủ

$$P(H) = \sum_{i=1}^n P(A_i).P(H | A_i).$$

2.3 Công thức Bayes

Trong công thức xác suất đầy đủ, H là sự kiện kết quả, còn các sự kiện $A_i \quad i = \overline{1, n}$ là các sự kiện nguyên nhân. Nếu biết nguyên nhân nào xảy ra thì ta xác định được xác suất xảy ra H.

Bây giờ ngược lại, người ta biết được kết quả xảy ra H, muốn tính xác suất để nguyên nhân thứ i xảy ra là bao nhiêu, tức là đi tính $P(A_i | H).P(A_i)$ được gọi là xác suất tiên nghiệm, còn $P(A_i | H)$ được gọi là hậu nghiệm. Ta có công thức Bayes:

$$P(A_i | H) = \frac{P(A_i)P(H | A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j).P(H | A_j)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

3. Biến ngẫu nhiên rời rạc

3.1 Định nghĩa bảng phân phối xác suất

Phân bố xác suất của 1 biến ngẫu nhiên rời rạc X là bảng trên đó ta ghi cả giá trị mà X có thể nhận kèm theo xác suất để nó nhận các giá trị đó

$X = x$	x_1	x_2	\dots	x_n	\dots
$P(X = x)$	p_1	p_1	\dots	p_n	\dots

Trong đó tập các giá trị của X là $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Các xác suất p_i thỏa mãn

$$+ p_i = P(X = x_i) > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots;$$

$$+ \sum_i p_i = 1.$$

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i: x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{i: x_i < x} p_i$$

3.2 Các tham số đặc trưng

3.2.1 Kỳ vọng

Kỳ vọng là đại lượng đặc trưng cho giá trị trung bình. (đôi khi người ta gọi nó là giá trị trung bình bởi công thức tính của nó chính là tính giá trị trung bình cho trường hợp thu được vô hạn số liệu)

Kí hiệu: $E(X)$ hoặc EX

Công thức tính: với X rời rạc ta có: $EX = \sum_i x_i \cdot p_i$

3.2.2 Phương sai

Phương sai : trung bình của bình phương sai số.

Kí hiệu: $V(X)$ hoặc VX

Công thức tính : $VX = E(X - EX)^2$

Với $(X - EX)$ là sai số, hoặc là độ lệch khỏi giá trị trung bình. Người ta thường biến đổi để đưa công thức tính phương sai về dễ tính hơn:

$$VX = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

Với X là biến ngẫu nhiên rời rạc:

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$$

3.2.3 Độ lệch chuẩn

Đơn vị đo của phương sai bằng bình phương đơn vị đo của biến ngẫu nhiên. Để dễ đánh giá mức độ phân tán hơn, người ta đưa ra khái niệm độ lệch chuẩn.

Ý nghĩa: dùng để đo độ phân tán dữ liệu xung quanh giá trị trung bình EX .

Ký hiệu: $\sigma(X)$ hoặc σ

Công thức tính: $\sigma = \sqrt{VX}$

3.2.4 Mode

Khái niệm: Mode của biến ngẫu nhiên X , kí hiệu là $\text{mod}(X)$, là giá trị của biến ngẫu nhiên X có khả năng xuất hiện lớn nhất trong một lần cận nào đó của nó. Đối với biến ngẫu nhiên rời rạc, $\text{mod}(X)$ là giá trị của X ứng với xác suất lớn nhất. Như vậy một biến ngẫu nhiên có thể có một mode hoặc nhiều mode.

Ký hiệu: $\text{mod}(X)$

3.3 Entropy

Nếu một sự kiện ngẫu nhiên rời rạc x , có thể nhận các giá trị là $1..n$, thì entropy của nó là:

$$H(x) = \sum_{i=1}^n p(i) \log_2 \left(\frac{1}{p(i)} \right) = - \sum_{i=1}^n p(i) \log_2 p(i) .$$

với $p(i)$ là xác suất xảy ra của giá trị i . Như vậy, entropy của x cũng là giá trị kì vọng của các độ ngạc nhiên của các giá trị mà x có thể nhận. Entropy càng nhỏ thì càng dễ đoán (nhỏ nhất bằng 0), càng lớn thì càng khó đoán.

3.4 Phân phối chuẩn (phân phối Gauss)

3.4.1 Định nghĩa: Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo phân phối chuẩn với 2 tham số μ và σ^2 (với $\sigma > 0$) nếu hàm mật độ xác suất có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Trong đó : $EX = \mu$

$$VX = \sigma^2$$

$$\text{mod}(x) = \mu$$

3.4.2 Phân phối chuẩn tổng quát

Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ta có $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;1)$. Từ đó ta xây dựng công thức tính:

$$+ P(X < a) = 0.5 + \phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$+ P(X > a) = 0.5 - \phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$+ P(a \leq X \leq b) = \phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$+ P(|X - \mu| < \varepsilon) = 2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

(có hàm Laplace: $\sigma(x) = \int_0^x \phi(t)dt$ và hàm mật độ xác suất hay hàm mật độ

$$\text{Gauss là: } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$