Đề thi thử cuối kỳ môn Giải tích 2 - Học kỳ: 20202

Nhóm ngành 1 - Thời gian: 60 phút

(Đề thi gồm 40 câu hỏi trắc nghiệm)

Câu 01. Tìm vecto pháp tuyến đơn vị của S là phía trên mặt phẳng x + 2y + 4z = 8

(A) $\frac{1}{\sqrt{19}}(1,-2,-4)$ (B) $\frac{1}{\sqrt{31}}(1,-2,4)$ (C) $\frac{1}{\sqrt{26}}(1,2,-4)$ (D) $\frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4)$ (E) $\frac{1}{\sqrt{23}}(-1,2,4)$

Câu 02. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = ln(4x+1)$ tại điểm A$(0;0)$

(A) $y - x = 0$ (B) $2x - y = 0$
(C) $y - 5x = 0$ (D) $y - 4x = 0$

Câu 03. Tính $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_0^{\pi} sin(x+t^2)dx$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

Câu 04. Tính tích phân $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dz \int\limits_0^2 (y+z)dy$

(A) 1 (B) 3 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$

Câu 05. Cho tích phân $I = \iint\limits_D f(x;y)dxdy$ và $I_1 = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy$ với D đối xứng qua trục Ox và f(x;y) là chẵn theo y ; $D_1 : \begin{cases} D \\ y \geq 0 \end{cases}$

Chọn đáp án đúng:

(A) $I=I_1$ (B) $I=2I_1$ (C) $I=4I_1$ (D) $I=3I_1$

Câu 06. Tính độ cong phương trình trong hệ tọa độ cực là $r = \sin 2\varphi$ tại điểm $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(A) 1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 5 (D) $\frac{1}{4}$

Câu 07. Giả sử mặt S có phương trình $z = f(x,y)$, với (x,y) $\in D \subset R^2$.Trong trường hợp nào sau đây của góc α tạo bởi Oz và vecto pháp tuyến thì $\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_D R(x,y,z(x,y))dxdy$

(A) $\alpha = 0$ (B) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (C) $\alpha = \pi$ (D) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Câu 08. Tính khối lượng bản phẳng có hàm khối lượng là $\rho(x,y) = \sin x \cdot \cos x$, nằm trong miền giới hạn bởi $x = 0, y = 0, y = \cos x$

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ (E) $\frac{1}{3}$

Câu 09. $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với miền $D \begin{cases} 2x \le x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$. Tính I bằng cách đổi biến trong hệ tọa độ cực với $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ Miền D trở thành miền D' $\begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 1 \\ a\pi \le \varphi \le b\pi \end{cases}$ Tính tổng $a+b$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{7}{12}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$

Câu 10. Tính $\int\limits_{AB} 2ydx + 3xdy$ với $A(0;0)$; $B(1;1)$

(A) 3 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 8 (D) $\frac{7}{2}$

Câu 11. Tính tích phân I $= \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ với miền $D : x^2 + y^2 \le 1; y \ge -x; y \le 0$

(A) $\frac{-1}{16}$ (B) -16 (C) 16 (D) $\frac{1}{16}$

Câu 12. Vật được ném xiên một góc α (thay đổi) từ mặt đất với vận tốc v_o (không đổi). Trong hệ tọa độ Descaster, phương trình chuyển động của đạn phụ thuộc vào α theo thời gian là:

$$\begin{cases} x = v_o\cos\alpha t \\ y = v_o\sin\alpha t - g\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

Tìm hình bao của họ quỹ đạo các viên đạn

(A) $y = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{g}{2v_o^2}x^2$ (B) $y = \frac{v_o^2}{gx} - \frac{g}{v_o^2}x$

(C) $y = \frac{v_o^2}{2gx} - \frac{g}{2v_o^2}x$ (D) $y = \frac{v_o^2}{g} - \frac{g}{v_o^2}x^2$

Câu 13. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{gradu}$ (đơn vị: radian) của các trường vô hướng sau:
$z_1 = \sqrt{x^2+y^2}$, $z_2 = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $M(3,1)$
(Chọn đáp án gần đúng nhất)

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Đổi thứ tự tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$$

(A) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$ (B) $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$

(C) $I = \int_0^{1} \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dxdy$ (D) $I = \int_0^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$

Câu 15. Tính diện tích $z = 2x^2 + 2y^2 + 2$ nằm trong $x^2 + y^2 = 4$

(A) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+4r^2}\mathrm{dr}$ (B) $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+4r^2}\mathrm{dr}$

(C) $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\sqrt{1+4r^2}\mathrm{dr}$ (D) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\sqrt{1+4r^2}\mathrm{dr}$

Câu 16. Cho $f(y) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{cos^2 2x + y^2 sin^2 2x}\, dx$. Tính $f'(1)$

(A) $\dfrac{\pi}{8}$ (B) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{8} - 1$ (D) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{32}$

Câu 17. Biết $\overrightarrow{F} = (3x^2 + yz)\overrightarrow{i} + (6y^2 + xz)\overrightarrow{j} + (z^2 + xy + e^z))\overrightarrow{k}$ là trường thế, tìm hàm thế vị.

(A) $u = x^3 + 2y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^z + xyz + C$ (B) $u = x^3 + 2y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^z + xy + C$

(C) $u = x^3 + 2y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^{xz} + xyz + C$ (D) $u = x^3 + 3y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^z + xyz + C$

Câu 18. Cho tích phân $I = \iiint\limits_V \mathrm{zdxdydz}$ với $V : \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 - x^2 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$. Biết $I = \dfrac{a}{b}$,a,b là 2 số nguyên tố cùng nhau. Nhận định nào sau đâu đúng?

(A) $a - b \leq 0$ (B) $ab \leq 200$ (C) $\dfrac{a}{b} \geq 1$ (D) $a + b \geq 100$

Câu 19. Tích phân $I = \int\limits_{0}^{+\infty} x^6.e^{-x^2} dx = \dfrac{1}{a}.\Gamma\left(\dfrac{b}{c}\right)$. Tính $a + b + c$

(A) 12 (B) 10 (C) 14 (D) 11 (E) 13

Câu 20. Tính $\int\limits_C (x^2 + ytan^2 x)dx + (tanx + y^2)dy$ với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ hướng ngược chiều kim đồng hồ

(A) 4π (B) 2π (C) 3π (D) 5π (E) π

Câu 21. Tính $\iint\limits_D (y^3 + x^2 + y + 1)\, dxdy$. Trong đó D là miền $\begin{cases} -x \leq y \leq 2 - x \\ y \leq x \leq 2 + y \end{cases}$

(A) $\dfrac{14}{3}$ (B) $\dfrac{13}{3}$ (C) $\dfrac{7}{3}$ (D) 4 (E) $\dfrac{13}{6}$

Câu 22. Tính tích phân I trên mặt S là phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ với $0 \leq z \leq 1$ của hàm số $f(x, y, z) = x + y + z$

(A) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ (C) $\pi\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{4\pi\sqrt{2}}{3}$

Câu 23. Tính công của lực $\overrightarrow{F} = (5x+3y)\overrightarrow{i} + (2x+3y)\overrightarrow{j}$ làm di chuyển 1 chất điểm dọc theo 1 đoạn thẳng từ $A(1;2)$ đến $B(3;6)$

Ⓐ 106 Ⓑ 108 Ⓒ 110 Ⓓ 120 Ⓔ 105

Câu 24. Tinh tích phân $\iiint\limits_V$ zdxdydz trên miền V xác định bởi mặt $(x+2y)^2 + 4z^2 = 1$ trong góc phần tám thứ nhất và các mặt phẳng toạ độ

Ⓐ 64 Ⓑ $\frac{1}{32}$ Ⓒ $\frac{1}{64}$ Ⓓ 32

Câu 25. Tìm a để $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x;y)$ với $P = \frac{1-y^2}{(1+xy)^a}; Q = \frac{1-x^2}{(1+xy)^a}$

Ⓐ 2 Ⓑ 4 Ⓒ 1 Ⓓ 3

Câu 26. Tính $I = \int\limits_{OBCO} x\sqrt{x^2+y^2}dx + y\sqrt{x^2+y^2}dy$ với $O(0;0), B(1;0), C(0;1)$

Ⓐ 8 Ⓑ 4 Ⓒ 0 Ⓓ 2 Ⓔ 6

Câu 27. Tính $\iint\limits_S z(x^2+y^2)dxdy$ trong đó S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1, z \le 0$ hướng ra phía ngoài mặt cầu.

Ⓐ $\frac{14\pi}{15}$ Ⓑ $\frac{4\pi}{15}$ Ⓒ $\frac{8\pi}{15}$ Ⓓ $\frac{2\pi}{15}$

Câu 28. Tính $\oint\limits_C y^2z^2dx + z^2x^2dy + x^2y^2dz$ với C là đường khép kín: $x = a\cos t, y = a\cos 2t, z = a\cos 3t$ theo chiều tăng của t

Ⓐ 3 Ⓑ 0 Ⓒ 1 Ⓓ 2

Câu 29. Tính $I = \iint\limits_D (x^3 - 2xy + y^3)dxdy$ với $D \begin{cases} y \le 0 \le x \\ 0 \le x^2+y^2 \le 4 \end{cases}$

Ⓐ 4 Ⓑ 8π Ⓒ 4π Ⓓ 8

Câu 30. Cho S là mặt biên phía trong của V giới hạn bởi $x^2+y^2 \le 4, 0 \le z \le x^2+y^2$.
Tính tích phân $I = \iint\limits_S ydydz + xydzdx + zdxdy$

Ⓐ π Ⓑ 8π Ⓒ 2π Ⓓ 16π Ⓔ 4π

Câu 31. Tính diện tích miền giới hạn bởi $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$

Ⓐ π Ⓑ $\frac{a^2\pi}{2}$ Ⓒ a^2 Ⓓ $\frac{a^2\pi}{3}$ Ⓔ $\frac{a^2}{2}$

Câu 32. Tính $\int\limits_L \frac{(3x^3-4y^2)dx + (6x^3-2y^2)dy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$ với L là đường $y = 2\sqrt{1-x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$

Ⓐ $\frac{5}{7}\pi + \frac{31}{15}$ Ⓑ $\frac{4}{3}\pi + \frac{21}{15}$ Ⓒ $\frac{9}{4}\pi + \frac{151}{15}$ Ⓓ $\frac{3}{2}\pi$ Ⓔ $\frac{3}{2}\pi + 1$

Câu 33. Giá trị cực tiểu của hàm số $f(a;b) = \int\limits_0^1 (x^2 - ax + b)^2 dx$ bằng:

Ⓐ $\frac{1}{270}$ Ⓑ $\frac{1}{45}$ Ⓒ $\frac{1}{90}$ Ⓓ Không tồn tại Ⓔ $\frac{1}{180}$

Câu 34. Gọi α là góc giữa mặt phẳng Oxy và tiếp tuyến của đường cong $x = at, y = a\sin t\cos t, z = \sin t$ $(a \neq 0)$. Hỏi α đạt giá trị lớn nhất khi t nằm trong khoảng nào dưới dây:

Ⓐ $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ Ⓑ $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ Ⓒ $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$ Ⓓ $\left(\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{4}\right)$ Ⓔ $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{5}\right)$

Câu 35. Tính thông lượng Φ của trường vector: $\overrightarrow{F} = (x-y+z)\overrightarrow{i} + (y-z+x)\overrightarrow{j} + (z-x+y)\overrightarrow{k}$ qua phía ngoài mặt $S:\quad |x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$
Hỏi trong các đáp án sau, đáp án nào đúng:

Ⓐ $1 \leq \Phi < 2$ Ⓑ $0 \leq \Phi < 1$ Ⓒ $-2 \leq \Phi < -1$ Ⓓ $-1 \leq \Phi < 0$

Câu 36. Tính $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(\frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dz$

Ⓐ $\frac{\pi}{16}$ Ⓑ $\frac{\pi}{6}$ Ⓒ $\frac{\pi}{12}$ Ⓓ $\frac{\pi}{8}$ Ⓔ $\frac{\pi}{24}$

Câu 37. Tính tích phân kép $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$ với miền $D: 5x^2 + 6xy + 5y^2 \leq 4$

Ⓐ $\frac{\pi}{6}$ Ⓑ $\frac{\pi}{4}$ Ⓒ $\frac{\pi}{9}$ Ⓓ $\frac{\pi}{3}$ Ⓔ $\frac{\pi}{3}$

Câu 38. Cho $I = \iiint\limits_V \left[(x+y+z)^2 + (xy+yz+zx) + 2\right] dxdydz$

Với miền $V: (x^2+y^2+z^2) + (xy+yz+zx) - 2 \leq 0$. Biết $I = \frac{a\pi}{b}$ tính $|a-b|$

Ⓐ 29 Ⓑ 61 Ⓒ 13 Ⓓ 3 Ⓔ 0

Câu 39. Tính lưu số của trường vector: $\overrightarrow{F} = (y^2+z^2)\overrightarrow{i} + (z^2+x^2)\overrightarrow{j} + (x^2+y^2)\overrightarrow{k}$
dọc theo đường cong C: $x^2+y^2+z^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 2x$ $(z \geq 0)$, hướng dương.
Kết quả cần tìm là m. Hỏi trong các đáp án sau, đáp án nào đúng:

Ⓐ $8 \leq m \leq 11$ Ⓑ $4 \leq m \leq 7$ Ⓒ $0 \leq m \leq 3$ Ⓓ $12 \leq m \leq 15$

Câu 40. Tính tích phân $\iiint\limits_V \frac{|xyz|}{x^2+y^2}$ với V là miền giới hạn bởi $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2 - y^2$

Ⓐ $\frac{2}{15}$ Ⓑ $\frac{\pi}{24}$ Ⓒ $\frac{1}{36}$ Ⓓ $\frac{\pi}{16}$ Ⓔ $\frac{3}{35}$

ĐÁP ÁN

01. D	09. C	17. A	25. A	33. E
02. D	10. B	18. A	26. C	34. E
03. A	11. A	19. D	27. B	35. A
04. D	12. A	20. E	28. B	36. C
05. B	13. B	21. B	29. A	37. B
06. C	14. B	22. B	30. B	38. A
07. B	15. C	23. B	31. C	39. D
08. E	16. A	24. C	32. C	40. C

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

Câu 01. Tìm vecto pháp tuyến đơn vị của S là phía trên mặt phẳng x + 2y + 4z = 8

(A) $\frac{1}{\sqrt{19}}(1,-2,-4)$ (B) $\frac{1}{\sqrt{31}}(1,-2,4)$ (C) $\frac{1}{\sqrt{26}}(1,2,-4)$ (D) $\frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4)$ (E) $\frac{1}{\sqrt{23}}(-1,2,4)$

Lời giải. Đáp án đúng (D). Đặt: $F(x,y,z) = x + 2y + 4z - 8 \Rightarrow \vec{u} = (1,2,4)$

$(Oz,\vec{u}) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{1^2+2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4)$ □

Câu 02. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = ln(4x+1)$ tại điểm $A(0;0)$

(A) $y - x = 0$ (B) $2x - y = 0$

(C) $y - 5x = 0$ (D) $y - 4x = 0$

Lời giải. Đáp án đúng (D). Ta có $y'(x) = \frac{4}{1+4x} \Rightarrow y'(0) = 4 \Rightarrow y - 4x = 0$ □

Câu 03. Tính $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^{\pi} sin(x+t^2)dx$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

Lời giải. Đáp án đúng (A). $I(t) = \int_0^{\pi} sin(x+t^2)dx$ liên tục tại $t = 0$

$\Longrightarrow \lim_{t\to 0}\int_0^{\pi} sin(x+t^2)dx = I(0) = \int_0^{\pi} sinxdx = 2$ □

Câu 04. Tính tích phân $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^2 (y+z)dy$

(A) 1 (B) 3 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$

Lời giải. Đáp án đúng (D).

$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^2 (y+z)dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2+2z)dz = \int_0^1 2(1-x) + (1-x)^2dx = \frac{4}{3}$ □

Câu 05. Cho tích phân $I = \iint\limits_D f(x;y)dxdy$ và $I_1 = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy$ với D đối xứng qua trục Ox và f(x;y) là chẵn theo y ; $D_1 : \begin{cases} D \\ y \geq 0 \end{cases}$

Chọn đáp án đúng:

A I=I_1 B I=$2I_1$ C I=$4I_1$ D I=$3I_1$

Lời giải. Đáp án đúng B. Từ lý thuyết ta dễ dàng suy ra được đáp án . □

Câu 06. Tính độ cong phương trình trong hệ tọa độ cực là $r = \sin 2\varphi$ tại điểm $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

A 1 B $\frac{1}{3}$ C 5 D $\frac{1}{4}$

Lời giải. Đáp án đúng C.

Có $r = \sin 2\varphi$, tại điểm $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ thì $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} r' = 2\cos 2\varphi \\ r'' = -4\sin 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(M) = 1 \\ r'(M) = 0 \\ r''(M) = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(M) = \frac{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|}{\sqrt{r^2 + r'^2}^3} = 5$$ □

Câu 07. Giả sử mặt S có phương trình $z = f(x, y)$, với (x,y) $\in D \subset R^2$.Trong trường hợp nào sau đây của góc α tạo bởi Oz và vecto pháp tuyến thì $\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy = -\iint\limits_D R(x, y, z(x, y))dxdy$

A $\alpha = 0$ B $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ C $\alpha = \pi$ D $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Lời giải. Đáp án đúng B. □

Câu 08. Tính khối lượng bản phẳng có hàm khối lượng là $\rho(x, y) = \sin x \cdot \cos x$, nằm trong miền giới hạn bởi $x = 0, y = 0, y = \cos x$

A $\frac{\pi}{5}$ B $\frac{1}{9}$ C $\frac{\pi}{4}$ D $\frac{\pi}{3}$ E $\frac{1}{3}$

Lời giải. Đáp án đúng E.

$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = \cos x \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\cos x} \sin x \cdot \cos x dydx \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□

Câu 09. $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với miền $D \begin{cases} 2x \le x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$. Tính I bằng cách đổi biến trong hệ tọa độ cực với $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ Miền D trở thành miền D' $\begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 1 \\ a\pi \le \varphi \le b\pi \end{cases}$ Tính tổng $a + b$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{7}{12}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$

Lời giải. Đáp án đúng (C). Ta có $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 2x \le x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 1 \\ 0 \le r\cos\varphi \le r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 1 \\ \frac{\pi}{3} \le r \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{5}{6}$ □

Câu 10. Tính $\int\limits_{AB} 2ydx + 3xdy$ với $A(0;0)$; $B(1;1)$

(A) 3 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 8 (D) $\frac{7}{2}$

Lời giải. Đáp án đúng (B). Phương trình đoạn AB: $\begin{cases} y = x \\ x \in [0;1] \end{cases}$

$\Longrightarrow \int\limits_{AB} 2ydx + 3xdy = \int\limits_0^1 (2x + 3x)dx = \frac{5}{2}$ □

Câu 11. Tính tích phân $I = \iint\limits_D xydxdy$ với miền $D : x^2 + y^2 \le 1; y \ge -x; y \le 0$

(A) $\frac{-1}{16}$ (B) -16 (C) 16 (D) $\frac{1}{16}$

Lời giải. Đáp án đúng (A).

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow D' \begin{cases} \dfrac{-\pi}{4} \le \varphi \le 0 \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}, |J| = r \Rightarrow I = \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} d\varphi \int_{0}^{1} \frac{r^2 \sin 2\varphi}{2} r\mathrm{dr} = \frac{-1}{16}$ □

Câu 12. Vật được ném xiên một góc α (thay đổi) từ mặt đất với vận tốc v_o (không đổi). Trong hệ tọa độ Descaster, phương trình chuyển động của đạn phụ thuộc vào α theo thời gian là:

$$\begin{cases} x = v_o \cos\alpha t \\ y = v_o \sin\alpha t - g\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

Tìm hình bao của họ quỹ đạo các viên đạn

(A) $y = \dfrac{v_o^2}{2g} - \dfrac{g}{2v_o^2}x^2$

(B) $y = \dfrac{v_o^2}{gx} - \dfrac{g}{v_o^2}x$

(C) $y = \dfrac{v_o^2}{2gx} - \dfrac{g}{2v_o^2}x$

(D) $y = \dfrac{v_o^2}{g} - \dfrac{g}{v_o^2}x^2$

Lời giải. Đáp án đúng (A).

Ta có $\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_o\cos\alpha} \\ y = xv_o\tan\alpha - x^2\dfrac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha} \end{cases} \Rightarrow y = xv_o\tan\alpha - x^2\dfrac{g}{2v_o^2}(\tan^2\alpha + 1)$

$\Rightarrow \mathbf{F}(x, y, \alpha) = y - xv_o\tan\alpha + x^2\dfrac{g}{2v_o^2}(\tan^2\alpha + 1)$

Coi $\tan\alpha = c(\alpha)$

$\begin{cases} \mathbf{F} = 0 \\ \mathbf{F}'_\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - xv_oc + x^2\dfrac{g}{2v_o^2}(c^2+1) = 0 \\ -xv_oc' + x^2\dfrac{g}{2v_o^2}2cc' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{v_o^2}{2g} - \dfrac{g}{2v_o^2}x^2 \\ c = \dfrac{v_o^2}{xg} \end{cases}$ □

Câu 13. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{gradu}$ (đơn vị: radian) của các trường vô hướng sau:
$z_1 = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z_2 = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $M(3,1)$
(Chọn đáp án gần đúng nhất)

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Lời giải. Đáp án đúng (B).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{grad}z_1 &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}; \frac{\partial z_1}{y}\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x; y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{gradz_2} &= \left(\frac{z_2}{\partial x};\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)\\ &= \left(1+\frac{3y}{2\sqrt{3xy}};-3+\frac{3x}{2\sqrt{3xy}}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3xy}}\left(2\sqrt{3xy}+3y;-6\sqrt{3xy}+3x\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \angle\left(\overrightarrow{gradz_1},\overrightarrow{gradz_2}\right) = \angle\left((x,y);(2\sqrt{3xy}+3y,-6\sqrt{3xy}+3x)\right)$

Tại $M(3,1)$

$$\begin{aligned}u &= \angle\left((3,1);(9,-9)\right)\\ &= \angle\left((3,1);(1,-1)\right)\end{aligned}$$

$\cos u = \dfrac{3.1+1.(-1)}{\sqrt{3^2+1^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow u = 1.107(rad)$ □

Câu 14. Đổi thứ tự tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$$

Ⓐ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$

Ⓑ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$

Ⓒ $I = \displaystyle\int_0^{1}\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dxdy$

Ⓓ $I = \displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$

....

Lời giải. Đáp án đúng Ⓑ.

Ta có $I = I_1 + I_2$

D_1 có $\begin{cases}0\le y\le 1-\sqrt{1-x^2}\\ 0\le x\le \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(y-1)^2+x^2\ge 1\\ 0\le x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

D_2 có $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\le x\le 1\end{cases}$

Ta thấy $D_1\cap D_2 = \varnothing \Rightarrow D = D_1\cup D_2$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$ □

Câu 15. Tính diện tích $z = 2x^2 + 2y^2 + 2$ nằm trong $x^2 + y^2 = 4$

(A) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+4r^2}\text{dr}$

(B) $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+4r^2}\text{dr}$

(C) $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\sqrt{1+4r^2}\text{dr}$

(D) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\sqrt{1+4r^2}\text{dr}$

Lời giải. Đáp án đúng (C).

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy \text{ với } D: x^2+y^2 \le 4$$
$$= \iint\limits_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)dxdy}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $, |J| = r \Longrightarrow S = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\sqrt{1+4r^2}\text{dr}$ □

Câu 16. Cho $f(y) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{cos^2 2x + y^2 sin^2 2x}\, dx$. Tính $f'(1)$

(A) $\dfrac{\pi}{8}$ (B) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{8} - 1$ (D) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{32}$

Lời giải. Đáp án đúng (A). $f(y)$ khả vi trên [1;2]

$$f'(y) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{ysin^2 2x}{\sqrt{cos^2 2x + y^2 sin^2 2x}} dx$$

$$\Longrightarrow f'(1) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} sin^2(2x)dx = \frac{\pi}{8}$$ □

Câu 17. Biết $\overrightarrow{F} = (3x^2+yz)\overrightarrow{i} + (6y^2+xz)\overrightarrow{j} + (z^2+xy+e^z))\overrightarrow{k}$ là trường thế, tìm hàm thế vị.

(A) $u = x^3 + 2y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^z + xyz + C$

(B) $u = x^3 + 2y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^z + xy + C$

(C) $u = x^3 + 2y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^{xz} + xyz + C$

(D) $u = x^3 + 3y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^z + xyz + C$

Lời giải. Đáp án đúng A. $\begin{cases} P = 3x^2 + yz \\ Q = 6y^2 + xz \\ R = z^2 + xy + e^z \end{cases}$

Nhận thấy: $\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} = x \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = z \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{F}$ là trường thế.
Khi đó, hàm thế vị là:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x P(x,0,0)dx + \int_0^y Q(x,y,0)dy + \int_0^z R(x,y,z)dz + C \\ &= \int_0^x 3x^2dx + \int 6y^2dy + \int_0^z z^3 + xy + e^z dz + C \\ &= x^3 + 2y^3 + \frac{z^3}{3} + xyz + e^z + C \end{aligned}$$

□

Câu 18. Cho tích phân $I = \iiint\limits_V$ zdxdydz với $V : \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 - x^2 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$. Biết $I = \dfrac{a}{b}$,a,b là 2 số nguyên tố cùng nhau. Nhận định nào sau đâu đúng?

A $a - b \leq 0$ B $ab \leq 200$ C $\dfrac{a}{b} \geq 1$ D $a + b \geq 100$

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng A.

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy là D$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$

$\Rightarrow I = \iint\limits_D \int\limits_0^{1-x^2} \text{zdzdxdy} = \iint_D \dfrac{(1-x^2)^2}{2}\text{dxdy} = \int\limits_0^1 \text{dx} \int\limits_0^{1-x} \dfrac{(1-x^2)^2}{2}\text{dy} = \dfrac{11}{60}$

$\Rightarrow a = 11; b = 60 \Rightarrow a - b = -49 < 0$ □

Câu 19. Tích phân $I = \int\limits_0^{+\infty} x^6.e^{-x^2}dx = \dfrac{1}{a}.\Gamma\left(\dfrac{b}{c}\right)$. Tính $a + b + c$

A 12 B 10 C 14 D 11 E 13

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (D). Đặt $t = x^2 \implies dt = 2xdx$

$$\implies I = \int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}}.e^{-t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$$

$\implies a = 2; b = 7; c = 2$

$\implies a + b + c = 11$ □

Câu 20. Tính $\int\limits_C (x^2 + ytan^2x)dx + (tanx + y^2)dy$ với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ hướng ngược chiều kim đồng hồ

(A) 4π (B) 2π (C) 3π (D) 5π (E) π

Lời giải. Đáp án đúng (E). Áp dụng công thức Green ta có:

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{1}{cos^2x} - tan^2x\right) dxdy \qquad \text{với } D : x^2 + y^2 \leqslant 2x$$
$$= \iint\limits_D dxdy$$
$$= S_D \quad \text{(diện tích miền } D\text{)}$$
$$= \pi$$

□

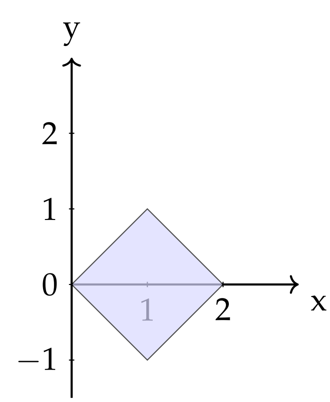
Câu 21. Tính $\iint\limits_D (y^3 + x^2 + y + 1)\, dxdy$. Trong đó D là miền $\begin{cases} -x \le y \le 2 - x \\ y \le x \le 2 + y \end{cases}$

(A) $\frac{14}{3}$ (B) $\frac{13}{3}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) 4 (E) $\frac{13}{6}$

Lời giải. Đáp án đúng (B).

Với D là miền $\begin{cases} -x \le y \le 2 - x \\ y \le x \le 2 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x + y \le 2 \\ 0 \le x - y \le 2 \end{cases}$ ta có:

$$I = \iint\limits_D (y^3 + x^2 + y + 1)\, dxdy$$
$$= \iint\limits_D (x^2 + 1)\, dxdy \quad \text{(vì } D \text{ là miền đối xứng qua } Ox\text{)}$$



Đổi biến $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$, $D' \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 2 \end{cases}$ và tính được $|J| = \dfrac{1}{2}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D'} \left[\left(\frac{u+v}{2} \right)^2 + 1 \right] \cdot \frac{1}{2}\, dudv \\ &= \int_0^2 du \int_0^2 \left[\left(\frac{u+v}{2} \right)^2 + 1 \right] \cdot \frac{1}{2}\, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{4} \left(2u^2 + 4u + \frac{8}{3} \right) + 2\, du \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

□

Câu 22. Tính tích phân I trên mặt S là phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ với $0 \le z \le 1$ của hàm số $f(x,y,z) = x + y + z$

(A) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ (C) $\pi\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{4\pi\sqrt{2}}{3}$

Lời giải. Đáp án đúng (B).
Hình chiếu của S xuống Oxy là D: $0 \le x^2 + y^2 \le 1$

$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z_{,y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow$dS = $\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$

$\Rightarrow$I = $\iint_S (x+y+z)dS = \iint_D (x + y + \sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}dxdy$

Đổi sang tọa độ cực ta được:

$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (\cos\varphi + \sin\varphi + r) r\sqrt{2} dr = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ □

Câu 23. Tính công của lực $\overrightarrow{F} = (5x + 3y)\overrightarrow{i} + (2x + 3y)\overrightarrow{j}$ làm di chuyển 1 chất điểm dọc theo 1 đoạn thẳng từ $A(1;2)$ đến $B(3;6)$

(A) 106 (B) 108 (C) 110 (D) 120 (E) 105

Lời giải. Đáp án đúng (B). Phương trình đoạn thẳng AB: $\begin{cases} y = 2x \\ x \in [1;3] \end{cases} \Longrightarrow dy = 2dx$

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_{A(1;2)}^{B(3;6)} (5x+3y)dx + (2x+3y)dy \\ &= \int\limits_{1}^{3} [5x+6x+(2x+6x).2]dx \\ &= 108 \end{aligned}$$

□

Câu 24. Tinh tích phân $\iiint\limits_V$ zdxdydz trên miền V xác định bởi mặt $(x+2y)^2+4z^2=1$ trong góc phần tám thứ nhất và các mặt phẳng toạ độ

(A) 64 (B) $\dfrac{1}{32}$ (C) $\dfrac{1}{64}$ (D) 32

Lời giải. Đáp án đúng (C).

Đặt $\begin{cases} u = x+2y \\ v = 2z \\ w = x \end{cases}$ $|J|^{-1} = 4 \Rightarrow I = \iiint\limits_{V'} \dfrac{v}{8} \mathrm{dV}', V' : \begin{cases} u^2+v^2 \le 1 \\ v \ge 0 \\ 0 \le w \le u \end{cases}$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{8} \iint\limits_{D'} uv\mathrm{dudv}$ với D' $\begin{cases} u^2+v^2 \le 1 \\ v \ge 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{cases}$ $, |J| = r \Rightarrow D'' \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $\longrightarrow I = \dfrac{1}{8} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^1 r^3 \mathrm{dr} = \dfrac{1}{64}$ □

Câu 25. Tìm a để $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x;y)$ với $P = \dfrac{1-y^2}{(1+xy)^a}; Q = \dfrac{1-x^2}{(1+xy)^a}$

(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Lời giải. Đáp án đúng (A). $Pdx = Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x;y)$

$\Leftrightarrow P'_y = Q'_x \qquad ,\forall x;y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2y(1+xy)^a - (1-y^2)ax(1+xy)^{a-1}}{(1+xy)^{2a}} = \dfrac{-2x(1+xy)^a - (1-x^2)ay(1+xy)^{a-1}}{(1+xy)^{2a}} \qquad ,\forall x;y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -2y(1+xy) - (1-y^2)ax = -2x(1+xy) - (1-x^2)ay \qquad ,\forall x;y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -2y - 2xy^2 - ax + ay^2x = -2x - 2x^2y - ay + ax^2y \qquad ,\forall x;y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y(-2+a) - x(a-2) + xy^2(-2+a) + yx^2(2-a) = 0 \qquad ,\forall x;y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a = 2$ □

Câu 26. Tính $I = \int\limits_{OBCO} x\sqrt{x^2+y^2}dx + y\sqrt{x^2+y^2}dy$ với $O(0;0), B(1;0), C(0;1)$

(A) 8 (B) 4 (C) 0 (D) 2 (E) 6

Lời giải. Đáp án đúng (C). $\begin{cases} P = x\sqrt{x^2+y^2} \\ Q = y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

Ta thấy: $P'_y = Q'_x$

Theo định lý Green: $I = \int\limits_{OBCO} x\sqrt{x^2+y^2}dx + y\sqrt{x^2+y^2}dy = \iint\limits_{(OBCO)} (Q'_x - P'_y)dxdy = 0$ □

Câu 27. Tính $\iint\limits_S z(x^2+y^2)dxdy$ trong đó S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1, z \leq 0$ hướng ra phía ngoài mặt cầu.

(A) $\dfrac{14\pi}{15}$ (B) $\dfrac{4\pi}{15}$ (C) $\dfrac{8\pi}{15}$ (D) $\dfrac{2\pi}{15}$

Lời giải. Đáp án đúng (B).

Ta có: $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Hình chiếu của S lên Oxy là D: $x^2+y^2 \leq 1$

Do tạo với Oz góc nhọn

$\Rightarrow$I = $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}(x^2+y^2)dxdy$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$

I = $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr = \dfrac{4\pi}{15}$ □

Câu 28. Tính $\oint_C y^2z^2dx + z^2x^2dy + x^2y^2dz$ với C là đường khép kín: $x = a\cos t, y = a\cos 2t, z = a\cos 3t$ theo chiều tăng của t

(A) 3 (B) 0 (C) 1 (D) 2

Lời giải. Đáp án đúng (B). Nhận thấy $\begin{cases} x(t) = x(2\pi - t) \\ y(t) = y(2\pi - t) \\ z(t) = z(2\pi - t) \end{cases}$

Do đó.

Khi $0 \leq t \leq \pi, M(x,y,z)$ vẽ đường C tại $A(a,a,a)$ đến $B(-a,-a,-a)$
Khi $\pi \leq t \leq 2\pi$, M vẫn vẽ đường C nhưng theo hướng ngược lại từ $B(-a,-a,-a)$ đến $A(a,a,a)$
$\Rightarrow$ C là đường khép kín nhưng không giới hạn mặt nào.
$\Rightarrow$ Theo Stoke: $I = 0$ □

Câu 29. Tính $I = \iint\limits_D (x^3 - 2xy + y^3)dxdy$ với $D \begin{cases} y \leq 0 \leq x \\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

(A) 4 (B) 8π (C) 4π (D) 8

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (A).
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\Rightarrow$ Miền D' $\begin{cases} \dfrac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$

$$I = \iint\limits_D \left[(x+y)^3 - 3xy(x+y)\right] dxdy - \iint\limits_D 2xydxdy$$

$$I = \iint\limits_{D'} r^4 \left[2\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right] drd\varphi - \iint\limits_{D'} r^3 \sin 2\varphi drd\varphi$$

Coi $\varphi + \dfrac{\pi}{4} = \alpha \Rightarrow \dfrac{-\pi}{4} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{4}$
Mà $2\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)^3 - \dfrac{3}{2}\sin 2\varphi\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin(\alpha)^3 - \dfrac{3}{2}\cos 2\alpha\sqrt{2}\sin\alpha$ là hàm lẻ với $\dfrac{-\pi}{4} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{4}$
$\Rightarrow I = \iint\limits_{D'} r^2 \sin 2\varphi drd\varphi = 4$ □

Câu 30. Cho S là mặt biên phía trong của V giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$.
Tính tích phân $I = \iint\limits_S ydydz + xydzdx + zdxdy$

(A) π (B) 8π (C) 2π (D) 16π (E) 4π

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (B).
Mặt S kín $\Rightarrow$Theo CT Ostrogradsky - Gauss ta có:
I = -$\iiint\limits_V (x-1)dxdydz$ với V:$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \end{cases}$
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}$
I = -$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_0^{r^2} (r\cos\varphi - 1)rdz = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (r^4\cos\varphi - r^3)dr = 8\pi$ □

Câu 31. Tính diện tích miền giới hạn bởi $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$

(A) π (B) $\dfrac{a^2\pi}{2}$ (C) a^2 (D) $\dfrac{a^2\pi}{3}$ (E) $\dfrac{a^2}{2}$

Lời giải. Đáp án đúng (C).

$S = \iint\limits_D dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$

$S = 4\iint\limits_{D'} dxdy$ với D' là phần nằm trong miền $x, y \geq 0$ của D (do tính đối xứng của miền qua Ox, Oy và hàm chẵn với các biến).

Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$$\begin{aligned} &\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right) \\ &\Rightarrow r^4 = a^2r^2\cos 2\varphi \\ &\Rightarrow r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S &= 4\iint\limits_{D''} r\,drd\varphi \quad \text{với} \quad D'' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} & (\text{vì } \cos 2\varphi \geq 0) \\ 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\varphi} \end{cases} \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi \\ &= a^2 \end{aligned}$$

□

Câu 32. Tính $\displaystyle\int\limits_L \frac{(3x^3-4y^2)dx + (6x^3-2y^2)dy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$ với L là đường $y = 2\sqrt{1-x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$

(A) $\dfrac{5}{7}\pi + \dfrac{31}{15}$ (B) $\dfrac{4}{3}\pi + \dfrac{21}{15}$ (C) $\dfrac{9}{4}\pi + \dfrac{151}{15}$ (D) $\dfrac{3}{2}\pi$ (E) $\dfrac{3}{2}\pi + 1$

Lời giải. Đáp án đúng (C). Đặt $\begin{cases} x = cost \\ y = 2sint \end{cases} ; t \in [0; \pi]$

$$\Longrightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(3cos^4t - 4.4sin^2t).(-sint) + (6cos^3t - 2.8sin^3t).2cost}{2} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{-3}{2} cos^4t.sint + 8sin^3t + 6cos^4t - 16sin^3t.cost \right) dt$$

$$= \frac{-3}{5} + \frac{32}{3} + \frac{9}{4}\pi$$

$$= \frac{9}{4}\pi + \frac{151}{15}$$

□

Câu 33. Giá trị cực tiểu của hàm số $f(a;b) = \int_0^1 (x^2 - ax + b)^2 dx$ bằng:

(A) $\frac{1}{270}$ (B) $\frac{1}{45}$ (C) $\frac{1}{90}$ (D) Không tồn tại (E) $\frac{1}{180}$

Lời giải. Đáp án đúng (E).

$$f(a;b) = \int_0^1 (x^2 - ax + b)^2 dx = \int_0^1 (x^4 + a^2x^2 + b^2 - 2ax^3 + 2bx^2 - 2abx) dx$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3}a^2 + b^2 - \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b - ab$$

Ta có $\begin{cases} f'_a = \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} - b = 0 \\ f'_b = 2b + \frac{2}{3} - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(1; \frac{1}{6}\right)$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(a;b)$

Ta lại có: $\begin{cases} f'_{aa} = \frac{2}{3} = A \\ f'_{ba} = -1 = B \\ f'_{bb} = 2 = C \end{cases} \Rightarrow B^2 - 4AC < 0$

$$\Rightarrow f(M) = \frac{1}{180}$$

□

Câu 34. Gọi α là góc giữa mặt phẳng Oxy và tiếp tuyến của đường cong $x = at, y = a\sin t \cos t, z = \sin t$ $(a \neq 0)$. Hỏi α đạt giá trị lớn nhất khi t nằm trong khoảng nào dưới dây:

(A) $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{4}\right)$ (E) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{5}\right)$

Lời giải. Đáp án đúng (E).

Tiếp tuyến của một điểm bất kì trên đường cong có vecto chỉ phương là: $\overrightarrow{u} = (x'_t, y'_t, z'_t) = (a, a\cos 2t, \cos t)$

Góc giữa tiếp tuyến và mặt phẳng Oxy là α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Góc giữa tiếp tuyến và tia $\overrightarrow{Oz}$ là $(\dfrac{\pi}{2} - \alpha)$

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{|\cos t|}{\sqrt{a^2 + a^2\cos^2 2t + \cos^2 t}} \\
\sin\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{a^2}{\cos^2 t} + a^2\dfrac{\cos^2 2t}{\cos^2 t} + 1}} \\
\sin\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2a^2}{\cos^2 t} + 4a^2\cos^2 t - 4a^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{(4\sqrt{2} - 4)a^2 + 1}} \text{ (Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz)}
\end{aligned}$$

Ta thấy $\sin\alpha$ đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên α lớn nhất khi dấu '=' xảy ra. Khi đó $\dfrac{2a^2}{\cos^2 t} = 4a^2\cos^2 t$

$\Rightarrow \cos^4 t = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow t \in \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{5}\right)$ □

Câu 35. Tính thông lượng Φ của trường vector: $\overrightarrow{F} = (x - y + z)\,\overrightarrow{i} + (y - z + x)\,\overrightarrow{j} + (z - x + y)\,\overrightarrow{k}$ qua phía ngoài mặt S : $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$

Hỏi trong các đáp án sau, đáp án nào đúng:

(A) $1 \leq \Phi < 2$ (B) $0 \leq \Phi < 1$ (C) $-2 \leq \Phi < -1$ (D) $-1 \leq \Phi < 0$

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (A). Thông lượng của trường vector $\overrightarrow{F}$ qua phía ngoài mặt S là:

$\Phi = \displaystyle\iint\limits_S (x - y + z)dydz + (y - z + x)dzdx + (z - x + y)dxdy$ Do mặt S kín, trơn.

$\begin{cases} P = x - y + z \\ Q = y - z + x \\ R = z - x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1 \end{cases}$ Áp dụng công thức Ostrogradsky, ta được:

$\Phi = \displaystyle\iiint\limits_V 1 + 1 + 1dxdydz = 3\iiint\limits_V dxdydz$

Trong đó V là phần không gian giới hạn bởi S.

Đặt $\begin{cases} u = x - y + z \\ v = y - z + x \\ w = z - x + y \end{cases}$

$\Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow J = \dfrac{1}{4}$

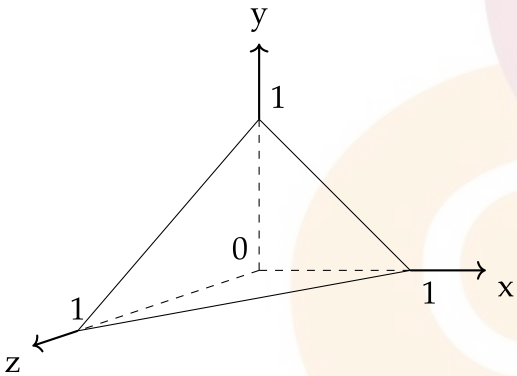
Khi đó: $V' : |u| + |v| + |w| \leq 1$

$$\Phi = \frac{3}{4}\iiint\limits_{V'} dudvdw$$

Nhận thấy V' đối xứng qua $0xy, 0yz, 0xz$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{3}{4}.8.\iiint\limits_{V_1} dxdydz = 6 \cdot V_{V_1}$$

Trong đó: $V_1 \begin{cases} |x|+|y|+|z| \leq 1 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z \leq 1 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases}$



Do đó: $\Phi = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$ □

Câu 36. Tính $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(\frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dz$

A $\frac{\pi}{16}$ B $\frac{\pi}{6}$ C $\frac{\pi}{12}$ D $\frac{\pi}{8}$ E $\frac{\pi}{24}$

Lời giải. Đáp án đúng C. Ta có:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(\frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dz = \iiint\limits_V \left(\frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dxdydz, V \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{8}\iiint\limits_{V'} \left(\frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dxdydz, V' : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \left(\text{Do} \frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}, \text{và miền} V \text{chẵn đối với} x,y,z\right)$$

$$= \frac{1}{16}\iiint\limits_{V'} \left(\frac{2y^2+2z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dxdydz = \frac{1}{16}\iiint\limits_{V'} \left(\frac{2y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dxdydz + \frac{1}{16}\iiint\limits_{V'} \left(\frac{z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dxdydz$$

$$= \frac{1}{16}\iiint\limits_{V'} \left(\frac{2y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dxdydz + \frac{1}{16}\iiint\limits_{V'} \left(\frac{x^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dxdydz \left(\text{Vì vai trò của x và z là như nhau}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\iiint\limits_{V'} \left(\frac{x^2+2y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right) dxdydz = \frac{1}{16}\iiint\limits_{V'} dxdydz = \frac{1}{16}.\frac{4\pi}{3} \quad \left(\text{vì} \quad R_{V'} = 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

Cách 2: Hoàng Văn An

Ta có:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left(\frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right)dz=\iiint_V\left(\frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right)dxdydz, V\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leq 1\\ x,y,z\geq 0\end{cases}$$

Do vai trò của x và z là như nhau: $I=\iiint_V\left(\frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right)dxdydz=\iiint_V\left(\frac{y^2+x^2}{x^2+2y^2+z^2}\right)dxdydz$

$$\Rightarrow 2I=\iiint_V\left(\frac{y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right)dxdydz+\iiint_V\left(\frac{y^2+x^2}{x^2+2y^2+z^2}\right)dxdydz=\iiint_V\left(\frac{x^2+2y^2+z^2}{x^2+2y^2+z^2}\right)dxdydz$$
$$=\iiint_V dxdydz=\frac{1}{8}.\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{6}\quad\left(\text{Do}\quad R_{V'}=1\right)$$

$\Rightarrow I=\frac{\pi}{12}$ □

Câu 37. Tính tích phân kép $\iint_D (x+y)^2dxdy$ với miền $D: 5x^2+6xy+5y^2\leq 4$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{9}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ (E) $\frac{\pi}{3}$

....

Lời giải. Đáp án đúng (B).
Ta có $D: 4(x+y)^2+(x-y)^2\leq 4$
Đặt $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\Rightarrow\quad |J|=\frac{1}{2}$
Miền D trở thành:$4u^2+v^2\leq 4$
$\Rightarrow\iint_D (x+y)^2dxdy=\iint_D\frac{u^2}{2}dudv$
Đặt $\begin{cases}u=r\cos\varphi\\ v=2r\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow\quad |J|=2r$
Miền D trở thành: $\begin{cases}0\leq r\leq 1\\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\end{cases}$
$\Rightarrow\iint_D\frac{u^2}{2}dudv=\iint_D r^3(\cos\varphi)^2drd\varphi=\int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^2d\varphi\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{4}$ □

Câu 38. Cho $I=\iiint_V\left[(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)+2\right]dxdydz$

Với miền $V: (x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)-2\leq 0$. Biết $I=\frac{a\pi}{b}$ tính $|a-b|$

(A) 29 (B) 61 (C) 13 (D) 3 (E) 0

Lời giải. Đáp án đúng (A).

$$\begin{aligned} \text{Có} \quad & (x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)-2 \le 0 \\ & \Rightarrow (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \le 4 \\ \text{Lại có} \quad & (x+y+z)^2(xy+yz+zx) \\ & = (x^2+y^2+z^2)+3(xy+yz+zx) \\ & = (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y) \end{aligned}$$

Coi $\begin{cases} x+y=u \\ y+z=v \\ z+x=w \end{cases} \Rightarrow |J| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Miền $V' : u^2+v^2+w^2 \le 4$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{2} \iiint\limits_{V'} (uv+vw+wu+2)dudvdw$ Do $f(u,v,w) = uv+vw+wu$ là hàm lẻ với các biến u, v, w.

Mà miền V' đối xứng. $\Rightarrow I = \dfrac{1}{2} \iiint\limits_{V'} 2dudvdw$

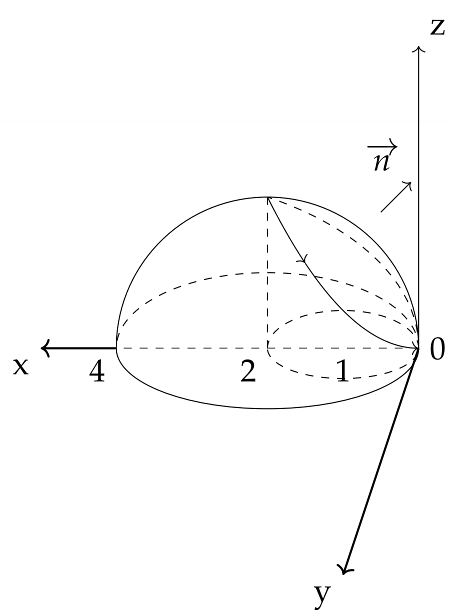
Coi $\begin{cases} u = r\cos\varphi\sin\theta \\ v = r\sin\varphi\sin\theta \\ w = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta \Rightarrow$ Miền $V'' \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

$\Rightarrow I = \iiint\limits_{V''} r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = \dfrac{32\pi}{3}$

$\Rightarrow |a-b| = 29$ □

Câu 39. Tính lưu số của trường vector: $\overrightarrow{F} = (y^2+z^2)\overrightarrow{i} + (z^2+x^2)\overrightarrow{j} + (x^2+y^2)\overrightarrow{k}$ dọc theo đường cong C: $x^2+y^2+z^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 2x$ $(z \ge 0)$, hướng dương.
Kết quả cần tìm là m. Hỏi trong các đáp án sau, đáp án nào đúng:

(A) $8 \le m \le 11$ (B) $4 \le m \le 7$ (C) $0 \le m \le 3$ (D) $12 \le m \le 15$



Lời giải. Đáp án đúng (D).

Lưu số của trường vector dọc theo C là:

$$I = \oint_C (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz$$

Do C kín, trơn.

$$\begin{cases} P = y^2+z^2 \\ Q = z^2+x^2 \\ R = x^2+y^2 \end{cases}$$

Áp dụng công thức Stoke, ta được:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\ &= \iint_S 2(y-z)dydz + 2(z-x)dzdx + 2(x-y)dxdy \end{aligned}$$

Với S là phần mặt cầu giới hạn bởi C, có hướng như hình vẽ.
Phương trình của S:

$$z = \sqrt{4-(x-2)^2-y^2}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{n} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right)$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x-2}{z} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{z} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x-2}{z}\cos\theta \\ \cos\beta = \dfrac{y}{z}\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= 2\iint_S \left[(y-z)\cdot\frac{x-2}{z} + (z-x)\cdot\frac{y}{z} + (x-y)\right]\cos\theta dS \\ &= 2\cdot\iint_S 2 - \frac{2y}{z}dxdy \\ &= 4\cdot\iint_S 1 - \frac{y}{z}dxdy \\ &= 4\cdot\iint_D 1 - \frac{y}{z}dxdy \end{aligned}$$

Với D là hình chiếu của S lên mặt phẳng $0xy$
$\Rightarrow D : (x-1)^2 + y^2 \le 1$

Do D đối xứng qua $0y$, $\dfrac{y}{z}$ là hàm lẻ đối với y. $\Rightarrow \displaystyle\iint\limits_D \frac{y}{z} dxdy = 0$

Do đó: $I = 4 \cdot \displaystyle\iint\limits_D dxdy = 4 \cdot S_D = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 4\pi \approx 12.57$ $\square$

Câu 40. Tính tích phân $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{|xyz|}{x^2+y^2}$ với V là miền giới hạn bởi $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2 - y^2$

(A) $\dfrac{2}{15}$ (B) $\dfrac{\pi}{24}$ (C) $\dfrac{1}{36}$ (D) $\dfrac{\pi}{16}$ (E) $\dfrac{3}{35}$

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (C).

$I = \displaystyle\iiint\limits_V \frac{|xyz|}{x^2+y^2}$ với V là miền giới hạn bởi

$\Rightarrow I = 8 \displaystyle\iiint\limits_{V'} \frac{xyz}{x^2+y^2}$ với V' là phần V nằm ở miền $x, y, z \geq 0$ (vì tính đối xứng của miền V và hàm chẵn với các biến)

Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, $|J| = r$

$$\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2 - y^2 \\ &\Rightarrow (r^2+z^2)^2 = r^2\cos 2\varphi \\ &\Rightarrow r^2 + z^2 = r\sqrt{\cos 2\varphi} \\ &\Rightarrow z = \sqrt{r\sqrt{\cos 2\varphi} - r^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow V''$, hình chiếu của V'' lên Oxy là D giới hạn bởi $\begin{cases} r = \sqrt{\cos 2\varphi} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} & (\text{vì } \cos 2\varphi \geq 0) \\ 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\varphi} \end{cases}$

Khi đó

$$
\begin{aligned}
I &= 4\iiint\limits_{V''} \frac{r^2 \sin 2\varphi \cdot z}{r^2} \cdot r\, dz dr d\varphi \\
&= 4\iint\limits_{D} dr d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{r\sqrt{\cos 2\varphi} - r^2}} r \sin 2\varphi \cdot z\, dz \\
&= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} dr \int\limits_0^{\sqrt{r\sqrt{\cos 2\varphi} - r^2}} r \sin 2\varphi \cdot z\, dz \\
&= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r \sin 2\varphi \left(r\sqrt{\cos 2\varphi} - r^2 \right) dr \\
&= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi \cdot \frac{\cos^2 2\varphi}{12}\, d\varphi \\
&= \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

□
