# Đề thi thử giữa kỳ môn Giải tích 2 - Học kỳ: 20203

## Nhóm ngành 1 - Thời gian: 40 phút

## (Đề thi gồm 25 câu hỏi trắc nghiệm)

**Câu 01.** Giả sử $\overrightarrow{p}(t)$, $\overrightarrow{q}(t)$, $\alpha(t)$ là các hàm khả vi. Chọn mệnh đề sai.

(A) $\dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{p}(t)\cdot\overrightarrow{q}(t)) = \overrightarrow{p}(t)\dfrac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\overrightarrow{q}(t)$

(B) $\dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{p}(t)\times\overrightarrow{q}(t)) = \overrightarrow{p}(t)\dfrac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\overrightarrow{q}(t)$

(C) $\dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{p}(t)+\overrightarrow{q}(t)) = \dfrac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt}$

(D) $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t)\overrightarrow{p}(t)) = \alpha(t)\dfrac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\overrightarrow{p}(t)$

**Câu 02.** Vecto pháp tuyến của đường $y = xe^x$ tại điểm $M(1;1)$ là:

(A) $\overrightarrow{n} = (-2e;-1)$

(B) $\overrightarrow{n} = (-e;1)$

(C) $\overrightarrow{n} = (2e;-1)$

(D) $\overrightarrow{n} = (2e;1)$

**Câu 03.** Cho hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền D. Xét tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Thực hiện được phép đổi biến $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ với các hàm $x(u,v); y(u,v)$ liên tục khả vi trên miền D khi và chỉ khi:

(A) $x = x(u,v), y = y(u,v)$ xác định một song ánh đi từ miền D′ lên miền D; định thức Jacobi $J \neq 0$

(B) $x = x(u,v), y = y(u,v)$ xác định một đơn ánh đi từ miền D′ lên miền D; định thức Jacobi $J \neq 0$

(C) $x = x(u,v), y = y(u,v)$ xác định một toàn ánh đi từ miền D′ lên miền D; định thức Jacobi $J \neq 0$

(D) Định thức Jacobi $J \neq 0$

**Câu 04.** Xét tích phân xác định phụ thuộc vào tham số: $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$, khi mới biết $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$, ta không thể kết luận được điều gì ?

(A) $I(y)$ liên tục trên $[c,d]$

(B) $I(y)$ khả vi trên $[c,d]$

(C) $I(y)$ khả tích trên $[c,d]$

(D) $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$

**Câu 05.** Đâu không phải là ứng dụng của tích phân bội hai ?

(A) Tính khối lượng của bản phẳng không đồng chất

(B) Tìm tọa độ trọng tâm của cung phẳng

(C) Tìm tọa độ trọng tâm của bản phẳng không đồng chất

(D) Tính mômen quán tính của bản phẳng

**Câu 06.** Cho $V$ là vật thể giới hạn bởi $V: z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y); (x,y) \in D$
Khi đó, thể tích của $V$ là:

(A) $V = \iint\limits_D [z_2(x,y) - z_1(x,y)]dxdy$

(B) $V = \iint\limits_D [z_1(x,y) - z_2(x,y)]dxdy$

(C) $V = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]dz$

(D) $V = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} [z_1(x,y) - z_2(x,y)]dz$

**Câu 07.** Cho họ đường cong $C: \ (x-c)^2 + y^2 = R^2,\ R > 0$. Họ đường cong này có bao nhiêu hình bao?

(A) 1 (B) 3 (C) 0 (D) 2

**Câu 08.** Tính độ cong của đường $y = -x^3$ tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{1}{2}$

(A) $\dfrac{64}{25}$ (B) $\dfrac{64}{125}$ (C) $\dfrac{192}{25}$ (D) $\dfrac{192}{125}$

**Câu 09.** Cho tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V f(x+y+z; x+2y; 2x+3y-z)dxdydz$

với $V$: $\begin{cases} 0 \le x+y+z \le 1 \\ 0 \le x+2y \le 2 \\ z \le 2x+3y \le 1+z \end{cases}$

Khi đặt $\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+2y \\ w = 2x+3y-z \end{cases}$

ta được miền $V'$. Khi đó $I$ trở thành:

(A) $I = 2\iiint\limits_{V'} f(u,v,w)dudvdw$

(B) $I = \dfrac{1}{2}\iiint\limits_{V'} f(u,v,w)dudvdw$

(C) $I = 3\iiint\limits_{V'} f(u,v,w)dudvdw$

(D) $I = \dfrac{1}{3}\iiint\limits_{V'} f(u,v,w)dudvdw$

**Câu 10.** Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^2 x^4 cos(x^2y)dx$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{32}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{16}{5}$

**Câu 11.** Phát biểu nào sau đây về tích phân Gauss là đúng ?

(A) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(B) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx = ln\frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha, \beta > 0)$

(C) $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)dx = \int\limits_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(D) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

**Câu 12.** Cho 2 tích phân bội hai sau:

- $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad \neq 0$ với $f(x,y)$ chẵn với $x$ và $y$. $D$ là miền đối xứng qua $Ox, Oy$; D liên thông.
- $I_1 = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$ với $D_1$: $\begin{cases} D \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây là đúng:

(A) $I = 8I_1$ (B) $I = 2I_1$ (C) $I = 4I_1$ (D) $I = I_1$

**Câu 13.** Cho biết kết quả của giới hạn sau: $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{cos(yx)}{1+x^2}dx$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\pi$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

**Câu 14.** Phương trình tiếp diện của mặt $z = \ln(x^2+y^2)$ tại điểm $A(1;0;1)$ là:

(A) $2x - z - 3 = 0$ (B) $2x - z + 1 = 0$

(C) $2x - z - 1 = 0$ (D) $2x + z - 1 = 0$

**Câu 15.** Tìm hình bao của đường cong $c^2x + cy^2 = 2$ (giả sử đường cong không có điểm kì dị).

(A) $3y^4 - 8x = 0$ (B) $y^4 + 8x = 0$

(C) $y^4 + 4x = 0$ (D) $y^4 - 8x = 0$

**Câu 16.** Tính $I = \iint\limits_D (x+2y^2)dxdy$ với $D : x = 0, y = 0, x - y = 1$. Biết $I = \frac{a}{b}$ $\left(a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b} \text{ tối giản}\right)$.
Hỏi $a + b = ?$

(A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) 2

**Câu 17.** Tính $I = \iiint\limits_V x^2 dxdydz$ với $V: 9x^2 + y^2 + z^2 \le 9$

(A) $\dfrac{12\pi}{5}$ (B) $\dfrac{12\pi}{7}$ (C) $\dfrac{24\pi}{4}$ (D) $\dfrac{24\pi}{5}$

**Câu 18.** Độ cong của đường cong có phương trình $y = \ln(\sin x)$ lớn nhất tại điểm có hoành độ nào trong các giá trị dưới đây:

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$

**Câu 19.** Biết $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dxdydz = k\pi$ với $V: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Tìm k

(A) $\dfrac{8}{15}$ (B) $\dfrac{6}{15}$ (C) $\dfrac{2}{15}$ (D) $\dfrac{9}{15}$

**Câu 20.** Biết $I = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx.$

Tính $\alpha(2) + 2\beta(-2)$

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

**Câu 21.** Tính diện tích miền giới hạn bởi các đường $x^2 = y, x^2 = 2y, xy = 2, xy = 4$
Biết $S = \dfrac{a}{b}\ln c \quad \left(a, b, c \in \mathbb{N}^*, \dfrac{a}{b} \text{ tối giản}\right)$. Giá trị của biểu thức $T = a - b + c$ là:

(A) 3 (B) 0 (C) 1 (D) 2

**Câu 22.** Tính $I = \lim\limits_{y \to 0} \int\limits_0^1 \dfrac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$

(A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

**Câu 23.** Tính $I = \iiint\limits_V \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} dxdydz$ với $V: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{2\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{4\pi}{3}$

**Câu 24.** Tính $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ với $V \begin{cases} x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0 \\ x + y + z \le 1 \end{cases}$

Biết $I = \dfrac{a}{b}\ln b - \dfrac{c}{d} \quad \left(a, b, c, d \in N^*, \dfrac{a}{b}; \dfrac{c}{d} \text{ tối giản}\right)$. Giá trị biểu thức $T = a^4 - b^3 + c^2 - d$ là:

(A) 2 (B) 24 (C) 34 (D) $-16$

**Câu 25.** Số điểm tới hạn của hàm $I(a;b) = \int\limits_0^1 \left(x^2 - a^2x + b^2\right)^2 dx$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là:

(A) 5 (B) 7 (C) 4 (D) 6

**ĐÁP ÁN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01. B | 06. A | 11. A | 16. A | 21. C |
| 02. C | 07. D | 12. C | 17. A | 22. C |
| 03. A | 08. D | 13. A | 18. C | 23. B |
| 04. B | 09. B | 14. C | 19. A | 24. A |
| 05. B | 10. B | 15. B | 20. A | 25. D |

## ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

**Câu 01.** Giả sử $\overrightarrow{p}(t)$, $\overrightarrow{q}(t)$, $\alpha(t)$ là các hàm khả vi. Chọn mệnh đề sai.

A $\dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{p}(t)\cdot\overrightarrow{q}(t)) = \overrightarrow{p}(t)\dfrac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\overrightarrow{q}(t)$

B $\dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{p}(t)\times\overrightarrow{q}(t)) = \overrightarrow{p}(t)\dfrac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\overrightarrow{q}(t)$

C $\dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{p}(t)+\overrightarrow{q}(t)) = \dfrac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt}$

D $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t)\overrightarrow{p}(t)) = \alpha(t)\dfrac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\overrightarrow{p}(t)$

.........................................................................................................

**Lời giải.** Đáp án đúng B. □

---

**Câu 02.** Vecto pháp tuyến của đường $y = xe^x$ tại điểm $M(1;1)$ là:

A $\overrightarrow{n} = (-2e;-1)$

B $\overrightarrow{n} = (-e;1)$

C $\overrightarrow{n} = (2e;-1)$

D $\overrightarrow{n} = (2e;1)$

.........................................................................................................

**Lời giải.** Đáp án đúng C.

Ta có $F(x,y) = y - xe^x$
$\Rightarrow F'_y = 1;\quad F'_x = -e^x - xe^x \quad\Rightarrow\quad F'_x(M) = -2e$
$\Longrightarrow$ Vecto pháp tuyến cần tìm là $\overrightarrow{n} = (2e;-1)$ □

---

**Câu 03.** Cho hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền D. Xét tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Thực hiện được phép đổi biến $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ với các hàm $x(u,v); y(u,v)$ liên tục khả vi trên miền D khi và chỉ khi:

A $x = x(u,v), y = y(u,v)$ xác định một song ánh đi từ miền D′ lên miền D; định thức Jacobi $J \neq 0$
B $x = x(u,v), y = y(u,v)$ xác định một đơn ánh đi từ miền D′ lên miền D; định thức Jacobi $J \neq 0$
C $x = x(u,v), y = y(u,v)$ xác định một toàn ánh đi từ miền D′ lên miền D; định thức Jacobi $J \neq 0$
D Định thức Jacobi $J \neq 0$

.........................................................................................................

**Lời giải.** Đáp án đúng A. □

---

**Câu 04.** Xét tích phân xác định phụ thuộc vào tham số: $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, khi mới biết $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$, ta không thể kết luận được điều gì ?

- (A) $I(y)$ liên tục trên $[c,d]$
- (B) $I(y)$ khả vi trên $[c,d]$
- (C) $I(y)$ khả tích trên $[c,d]$
- (D) $\lim\limits_{y \to y_0} I(y) = I(y_0)$

.............................................................................................................

**Lời giải.** Đáp án đúng (B). □

---

**Câu 05.** Đâu không phải là ứng dụng của tích phân bội hai ?

- (A) Tính khối lượng của bản phẳng không đồng chất
- (B) Tìm tọa độ trọng tâm của cung phẳng
- (C) Tìm tọa độ trọng tâm của bản phẳng không đồng chất
- (D) Tính mômen quán tính của bản phẳng

.............................................................................................................

**Lời giải.** Đáp án đúng (B). □

---

**Câu 06.** Cho $V$ là vật thể giới hạn bởi $V : z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y); (x,y) \in D$
Khi đó, thể tích của $V$ là:

- (A) $V = \iint\limits_D [z_2(x,y) - z_1(x,y)]dxdy$
- (B) $V = \iint\limits_D [z_1(x,y) - z_2(x,y)]dxdy$
- (C) $V = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]dz$
- (D) $V = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} [z_1(x,y) - z_2(x,y)]dz$

.............................................................................................................

**Lời giải.** Đáp án đúng (A). □

---

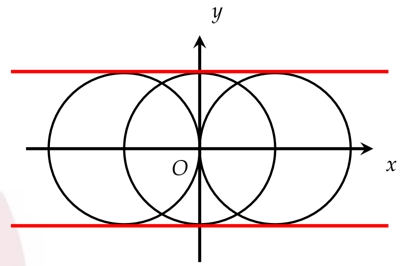
**Câu 07.** Cho họ đường cong $C : (x-c)^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$. Họ đường cong này có bao nhiêu hình bao?

(A) 1 (B) 3 (C) 0 (D) 2

.............................................................................................................

**Lời giải.** Đáp án đúng (D).

Dễ thấy họ đường cong là họ các đường tròn bán kính $R$ tâm nằm trên trục $Ox$ vậy nó sẽ nhận 2 đường thẳng $y = R$ và $y = -R$ làm hình bao.




□

---

**Câu 08.** Tính độ cong của đường $y = -x^3$ tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{1}{2}$

(A) $\dfrac{64}{25}$ (B) $\dfrac{64}{125}$ (C) $\dfrac{192}{25}$ (D) $\dfrac{192}{125}$

**Lời giải.** Đáp án đúng (D).

$y = -x^3$ tại $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{8}\right)$

Ta có: $y'(M) = \dfrac{-3}{4}$, $y''(M) = -3$. Từ đó có

$$C(M) = \frac{|y''(M)|}{[1 + (y'(M))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{192}{125}$$

□

---

**Câu 09.** Cho tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V f(x+y+z; x+2y; 2x+3y-z)dxdydz$

với $V$: $\begin{cases} 0 \le x+y+z \le 1 \\ 0 \le x+2y \le 2 \\ z \le 2x+3y \le 1+z \end{cases}$

Khi đặt $\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+2y \\ w = 2x+3y-z \end{cases}$

ta được miền $V'$. Khi đó $I$ trở thành:

(A) $I = 2\iiint\limits_{V'} f(u,v,w)dudvdw$

(B) $I = \dfrac{1}{2}\iiint\limits_{V'} f(u,v,w)dudvdw$

(C) $I = 3\iiint\limits_{V'} f(u,v,w)dudvdw$

(D) $I = \dfrac{1}{3}\iiint\limits_{V'} f(u,v,w)dudvdw$

**Lời giải.** Đáp án đúng (B). □

**Câu 10.** Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^2 x^4 cos(x^2y)dx$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{32}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{16}{5}$

**Lời giải.** Đáp án đúng (B).
Gọi $[c,d]$ là đoạn bất kì chứa $y = 0$
$\Rightarrow f(x,y) = x^4cos(x^2y)$ liên tục trong hình chữ nhật $D = [0,2]\times[c,d]$
$\Rightarrow I(y) = \int\limits_0^2 x^4cos(x^2y)$ là hàm liên tục trên đoạn $[c,d]$
$\Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} I(y) = I(0) = \int\limits_0^2 x^4dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{32}{5}$
□

**Câu 11.** Phát biểu nào sau đây về tích phân Gauss là đúng ?

(A) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(B) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx = ln\frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha,\beta>0)$

(C) $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)dx = \int\limits_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(D) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

**Lời giải.** Đáp án đúng (A). □

**Câu 12.** Cho 2 tích phân bội hai sau:

- $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad \neq 0$ với $f(x,y)$ chẵn với $x$ và $y$. $D$ là miền đối xứng qua $Ox, Oy$; D liên thông.
- $I_1 = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$ với $D_1$: $\begin{cases} D \\ x,y\geq 0\end{cases}$

Khẳng định nào sau đây là đúng:

(A) $I = 8I_1$ (B) $I = 2I_1$ (C) $I = 4I_1$ (D) $I = I_1$

**Lời giải.** Đáp án đúng (C). □

**Câu 13.** Cho biết kết quả của giới hạn sau: $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{cos(yx)}{1+x^2}dx$

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\pi$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$

**Lời giải.** Đáp án đúng (A).

Ta thấy $\dfrac{cos(yx)}{1+x^2}dx$ liên tục với $\forall x,y$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}\int\limits_0^{\infty}\frac{cos(yx)}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{\infty}\frac{cos(0.x)}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = arctan(x)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$ □

---

**Câu 14.** Phương trình tiếp diện của mặt $z=\ln(x^2+y^2)$ tại điểm $A(1;0;1)$ là:

(A) $2x-z-3=0$ (B) $2x-z+1=0$

(C) $2x-z-1=0$ (D) $2x+z-1=0$

**Lời giải.** Đáp án đúng (C).

Ta có $F(x,y,z)=\ln x^2+y^2-z$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ F'_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \\ F'_z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x(A)=2 \\ F'_y(A)=0 \\ F'_z(A)=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp diện cần tìm là: $2x-z-1=0$ □

---

**Câu 15.** Tìm hình bao của đường cong $c^2x+cy^2=2$ (giả sử đường cong không có điểm kì dị).

(A) $3y^4-8x=0$ (B) $y^4+8x=0$

(C) $y^4+4x=0$ (D) $y^4-8x=0$

**Lời giải.** Đáp án đúng (B).

Xét $\begin{cases} F'_c = 2cx+y^2=0 \\ F(x,y,c)=c^2x+cy^2-2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow c=\dfrac{-y^2}{2x} \Rightarrow$ thay vào phương trình $F(x,y,c)=0$ ta có

$$\frac{y^4}{4x}-\frac{y^4}{2x}-2=0 \quad\Rightarrow\quad y^4=-8x$$

□

---

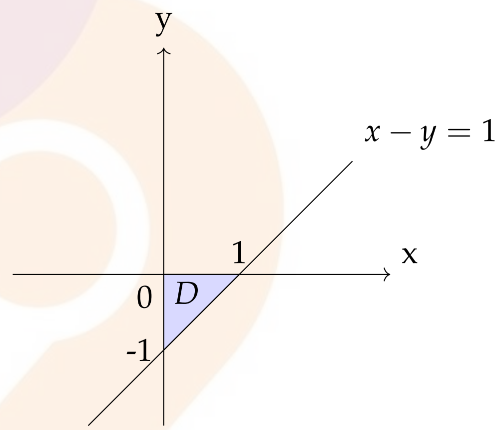
**Câu 16.** Tính $I = \iint\limits_D (x+2y^2)dxdy$ với $D: x=0, y=0, x-y=1$. Biết $I = \frac{a}{b}$ $\left(a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b} \text{ tối giản}\right)$. Hỏi $a+b=?$

(A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) 2

**Lời giải.** Đáp án đúng (A).

$D: \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ 0 \le x \le y+1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{y+1} (x+2y^2)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left( \frac{x^2}{2} + 2y^2 x \Bigg|_{x=0}^{x=y+1} \right) dy \\
&= \int_{-1}^{0} \left[ \frac{(y+1)^2}{2} + 2y^2(y+1) \right] dy \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$




$$\Rightarrow a+b = 1+3 = 4$$

□

**Câu 17.** Tính $I = \iiint\limits_V x^2 dxdydz$ với $V: 9x^2+y^2+z^2 \le 9$

(A) $\frac{12\pi}{5}$ (B) $\frac{12\pi}{7}$ (C) $\frac{24\pi}{4}$ (D) $\frac{24\pi}{5}$

**Lời giải.** Đáp án đúng (A).

Có $9x^2+y^2+z^2 \le 9 \iff x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} \le 1$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta\cos\phi \\ z = 3r\sin\theta\sin\phi \end{cases}$ $, |J| = 9r^2\sin\phi$

$\Rightarrow V' \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot \cos^2\theta \cdot 9r^2 \sin\theta dr$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 9r^4 \cdot \cos^2\theta \sin\theta dr$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\theta \cdot \sin\theta d\theta \cdot \int_0^1 9r^4 dr$$
$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12\pi}{5}$$

□

---

**Câu 18.** Độ cong của đường cong có phương trình $y = \ln(\sin x)$ lớn nhất tại điểm có hoành độ nào trong các giá trị dưới đây:

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

**Lời giải.** Đáp án đúng (C).

Có: $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\Rightarrow \quad C = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sin(x^2)} \cdot \frac{1}{(1+\cot^2 x)^{\frac{3}{2}}} = |\sin x|$

$\Rightarrow C \max \quad \Leftrightarrow \quad |\sin x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ □

---

**Câu 19.** Biết $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz = k\pi$ với $V : x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Tìm k

(A) $\frac{8}{15}$ (B) $\frac{6}{15}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{9}{15}$

**Lời giải.** Đáp án đúng (A).

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta$

$V' : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \sin^2\theta^2 \sin\theta dr$$
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3}$$
$$= \frac{8}{15}$$

□

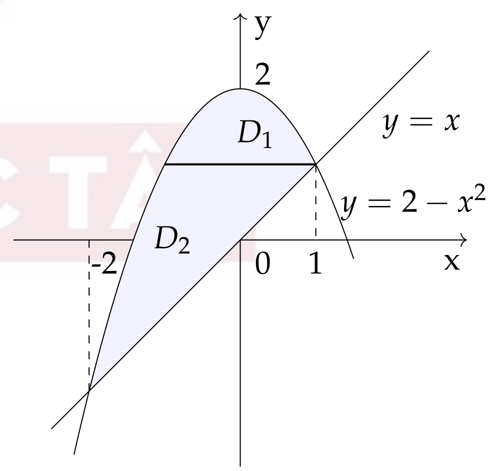
---

**Câu 20.** Biết $I = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int_{-2}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx.$

Tính $\alpha(2) + 2\beta(-2)$

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

**Lời giải.** Đáp án đúng (A).




$D = D_1 \cup D_2$ với

$D_1 : \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ -\sqrt{2-y} \le x \le \sqrt{2-y} \end{cases}$ $D_2 : \begin{cases} -2 \le y \le 1 \\ -\sqrt{2-y} \le x \le \sqrt{2-y} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(y) = -\sqrt{2-y} \\ \beta(y) = \sqrt{(2-y)} \end{cases} \Rightarrow \alpha(2) + 2.\beta(-2) = 4$$

□

---

**Câu 21.** Tính diện tích miền giới hạn bởi các đường $x^2 = y, x^2 = 2y, xy = 2, xy = 4$

Biết $S = \frac{a}{b}\ln c \quad \left(a, b, c \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{b} \text{ tối giản}\right)$. Giá trị của biểu thức $T = a - b + c$ là:

(A) 3 (B) 0 (C) 1 (D) 2

**Lời giải.** Đáp án đúng (C).

$$D : \begin{cases} x^2 = y, x^2 = 2y \\ xy = 2, xy = 4 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{y} \\ v = xy \end{cases} \Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & \dfrac{-x^2}{y^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \dfrac{2x^2}{y} + \dfrac{x^2}{y} = \dfrac{3x^2}{y} = 3u$

$\Rightarrow |J| = \dfrac{1}{3u}$

$D' : \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 2 \leq v \leq 4 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \iint\limits_{D'} \frac{1}{3u} du dv \\ &= \int_2^4 dv \int_1^2 \frac{du}{3u} \\ &= \frac{1}{3} \int_2^4 \left( \ln u \Big|_{u=1}^{u=2} \right) dv \\ &= \frac{1}{3} \int_2^4 \ln 2 dv \\ &= \frac{1}{3}.(4\ln 2 - 2\ln 2) \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = a - b + c = 2 - 3 + 2 = 1$$

□

---

**Câu 22.** Tính $I = \lim\limits_{y \to 0} \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$

(A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Lời giải.** Đáp án đúng (C).

Đặt $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$

Hàm $f(x,y)$ gián đoạn tại điểm $(0;0) \in D = \{(x;y) : x \in [0;1], y \in [-\epsilon;\epsilon]\}, \forall \epsilon > 0$.

Ta có: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}} d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right) = H$

$\Rightarrow I = \lim\limits_{y \to 0} H = \dfrac{1}{2}$ □

---

**Câu 23.** Tính $I = \displaystyle\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} dx dy dz$ với $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{2\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{4\pi}{3}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Lời giải.** Đáp án đúng (B).

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$\Rightarrow V' \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{1-z^2} \\ -1 \le z \le 1 \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \iiint\limits_{V'} \frac{r}{\sqrt{r^2+(z-2)^2}} drdzd\phi \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{d(r^2+(z-2)^2}{2\sqrt{r^2+(z-2)^2}} \\
&= 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2+(z-2)^2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} dz \\
&= 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-z^2+(z-2)^2} - \sqrt{(z-2)^2}\right) dz \\
&= 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{5-4z} - (2-z)\right) dz \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

□

---

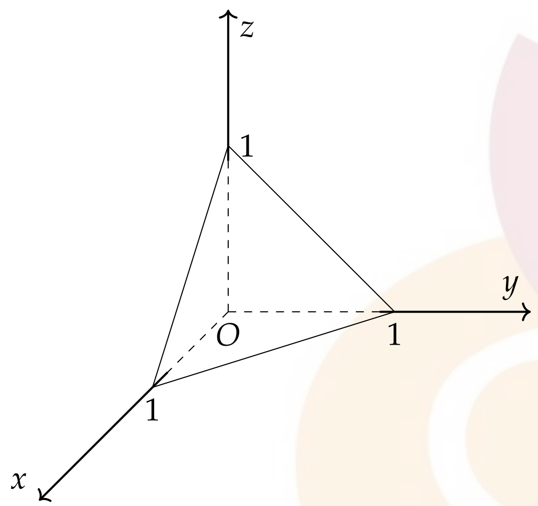
**Câu 24.** Tính $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ với $V \begin{cases} x \ge 0;\, y \ge 0; z \ge 0 \\ x+y+z \le 1 \end{cases}$

Biết $I = \frac{a}{b}\ln b - \frac{c}{d}$ $\left(a, b, c, d \in N^*, \frac{a}{b}; \frac{c}{d}\text{ tối giản}\right)$. Giá trị biểu thức $T = a^4 - b^3 + c^2 - d$ là:

(A) 2 (B) 24 (C) 34 (D) $-16$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Lời giải.** Đáp án đúng (A).




$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( -\frac{1}{2(x+y+z+1)^2} \Big|_0^{1-x-y} \right) dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2(x+y+1)^2} - \frac{1}{8}\, dy \\
&= \int_0^1 \left( -\frac{1}{2(x+y+1)} - \frac{y}{8} \Big|_0^{1-x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1-x}{8} - \frac{1}{4} dx \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}
\end{aligned}
$$

Do đó $a = 1; b = 2; c = 5; d = 16 \Rightarrow a^4 - b^3 + c^2 - d = 2$

□

---

**Câu 25.** Số điểm tới hạn của hàm $I(a;b) = \int_0^1 (x^2 - a^2x + b^2)^2 dx$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là:

(A) 5 (B) 7 (C) 4 (D) 6

.............................................................................................

**Lời giải.** Đáp án đúng (D).

+) Điểm tới hạn:

$$
\begin{cases} I'_a = 0 \\ I'_b = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} \int_0^1 2(x^2 - a^2x + b^2)(-2ax)dx = 0 \\ \int_0^1 2(x^2 - a^2x + b^2)(2b)dx = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} -4a\left(\frac{x^4}{4} - \frac{a^2x^3}{3} + \frac{b^2x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \\ 4b\left(\frac{x^3}{3} - \frac{a^2x^2}{2} + b^2x\right)\Big|_0^1 = 0 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases} -4a\left(\frac{1}{4} - \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{2}\right) = 0 \\ 4b\left(\frac{1}{3} - \frac{a^2}{2} + b^2\right) = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} \left[\begin{array}{ll} a & = 0 \\ \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2} & = \frac{1}{4} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{ll} b & = 0 \\ \frac{a^2}{2} - b^2 & = \frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l} a = 0, \quad b = 0 \\ a = 0, \quad \frac{a^2}{2} - b^2 = \frac{1}{3} \\ \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4}, \quad b = 0 \\ \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{a^2}{2} - b^2 = \frac{1}{3} \end{array}\right.
$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, \quad b=0 \\ a=0, \quad b^2=-\dfrac{1}{3} \\ a^2=\dfrac{3}{4}, \quad b=0 \\ a^2=1, \quad b^2=\dfrac{1}{6} \end{array}\right. \text{ Vì } a^2+b^2 \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=\dfrac{3}{4}, \quad b=0 \quad \textbf{(2 điểm)} \\ a^2=1, \quad b^2=\dfrac{1}{6} \quad \textbf{(4 điểm)} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ **Có 6 điểm thỏa mãn** $\square$

---