ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT MÁY TÍNH

BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN HK251

ADVANCED CRYPTOGRAPHY AND CODING THEORY

Học kỳ:	251
Mã môn học:	CO3038
Thực hiện:	NHÓM 3
Giảng viên:	TS. Nguyễn An Khương
Trợ giảng:	Trịnh Cao Thắng, Đặng Dương Minh Nhật

TP. HỒ CHÍ MINH, THÁNG 12 NĂM 2025

Danh sách thành viên và Phân công nhiệm vụ

Họ và tên	**MSSV**	**Nhiệm vụ**	**Hoàn thành**
VÕ NGUYỄN ĐỨC PHÁT	2212540	Phần 2	100%
NGUYỄN TRUNG PHÚ	2212592	Phần 1	100%
NGUYỄN ĐĂNG CƯỜNG	2210432	Phần 3.1	100%
THỊNH TRẦN KHÁNH LINH	2211862	Phần 3.3	100%
TRỊNH ĐÌNH KHẢI	2211561	Phần 3.2	100%

Mục lục

1 Security and Unpredictability of PRGs **4**

2 Attacking the Vigenere Cipher **19**
2.1 Mật mã Caesar . . . 19
2.2 Mật mã Vigenere . . . 19
2.3 Ý tưởng khai thác . . . 20
2.4 Bài toán thực tế . . . 22
2.5 Chạy thử nghiệm . . . 29

3 SMC Exploitation **31**
3.1 Interception & API Analysis (Use Burp Suite) . . . 31
3.1.1 POST /session/create?userId=group-1 . . . 31
3.1.2 POST /session/exchange?userId=group-1 . . . 33
3.1.3 POST /message/send?userId=group-1 . . . 36
3.2 Re-implementation & Protocol Reconstruction . . . 43
3.2.1 Xác thực (Authentication) . . . 43
3.2.2 Trao đổi khóa (Key Exchange) . . . 46
3.2.3 Thiết lập phiên (Session Establishment) . . . 49
3.2.4 Gửi tin nhắn bảo mật (Send Message) . . . 50
3.2.5 Các hàm mật mã cơ bản . . . 53
3.2.6 Implementation Code . . . 55
3.2.7 Kết quả thử nghiệm . . . 60
3.3 Exploitation & Proof-of-Concept . . . 63
3.3.1 Xác định lỗ hổng . . . 63
3.3.2 Khai thác lỗ hổng . . . 64
3.3.3 Khắc phục lỗ hổng . . . 68

1 Security and Unpredictability of PRGs

1. (1 point). Read in BS15 and clearly define and explain the following concepts in your report: *pseudo-random generator (PRG)*, *PRG security game*, *secure PRG*, *unpredictable PRG game*, and *unpredictable PRG*. If you use additional definitions or variations from other references, include them as well and provide proper citations.

Pseudo-random Generator (PRG)

Định nghĩa

Một Bộ tạo số giả ngẫu nhiên (Pseudo-Random Generator – viết tắt là PRG) là một thuật toán xác định và hiệu quả (efficient deterministic algorithm) dùng để mở rộng một chuỗi ngắn ngẫu nhiên thành một chuỗi dài hơn trông giống như ngẫu nhiên thật.

Theo BS15, một Bộ tạo số giả ngẫu nhiên (PRG) là một thuật toán G thỏa mãn hai điều kiện:

- Tính hiệu quả (Efficient): G là một thuật toán chạy trong thời gian đa thức, nghĩa là nó phải nhanh và thực tế để tính toán.
- Tính xác định (Deterministic): G không chứa yếu tố ngẫu nhiên. Nếu cung cấp cùng một đầu vào hai lần, nó phải luôn tạo ra chính xác cùng một đầu ra.

Một PRG gồm

- Một thuật toán xác định hiệu quả G,
- Một không gian hạt giống S,
- Và một không gian đầu ra R.

Khi nhận $s \in S$, PRG xuất ra $r = G(s) \in R$.

Thông thường $S = \{0,1\}^\ell$, $R = \{0,1\}^L$, và $L > \ell$.

Mục đích chính của PRG

Mục đích chính của PRG là tạo ra một chuỗi bit dài có tính ngẫu nhiên không phân biệt được. Nó nhận một chuỗi bit đầu vào ngắn và ngẫu nhiên thật sự, gọi là hạt giống (seed) s, và tạo ra một chuỗi bit đầu ra dài hơn nhiều r, gọi là chuỗi giả ngẫu nhiên.

Ví dụ: Nếu hạt giống s có độ dài ℓ bit (ví dụ: $\ell = 256$ bit) và đầu ra r có độ dài L bit (ví dụ: $L = 1,000,000$ bit), thì ta luôn có $L > \ell$.

Ứng dụng trong Stream Cipher

PRG được dùng trong Stream Cipher (Mật mã dòng):

- Hạt giống s đóng vai trò khóa bí mật.
- PRG sinh ra chuỗi bit dài $r = G(s)$, gọi là keystream.
- Chuỗi keystream này được XOR với thông điệp m để mã hóa $c = m \oplus r$.
- Giải mã bằng cách $m = c \oplus r$.

Nếu PRG đủ mạnh, ciphertext trông hoàn toàn ngẫu nhiên – kẻ tấn công không phân biệt được ciphertext và một chuỗi ngẫu nhiên, từ đó đạt tính bảo mật ngữ nghĩa (Semantic Security).

(Tính bảo mật ngữ nghĩa yêu cầu rằng việc quan sát ciphertext không giúp kẻ tấn công rút ra bất kỳ thông tin hữu ích nào về thông điệp gốc. Nghĩa là ciphertext trông không khác gì một chuỗi ngẫu nhiên đối với đối thủ. Khi PRG đủ mạnh, mã hóa bằng XOR sẽ đạt được tính chất này, vì keystream che giấu hoàn toàn nội dung của thông điệp.)

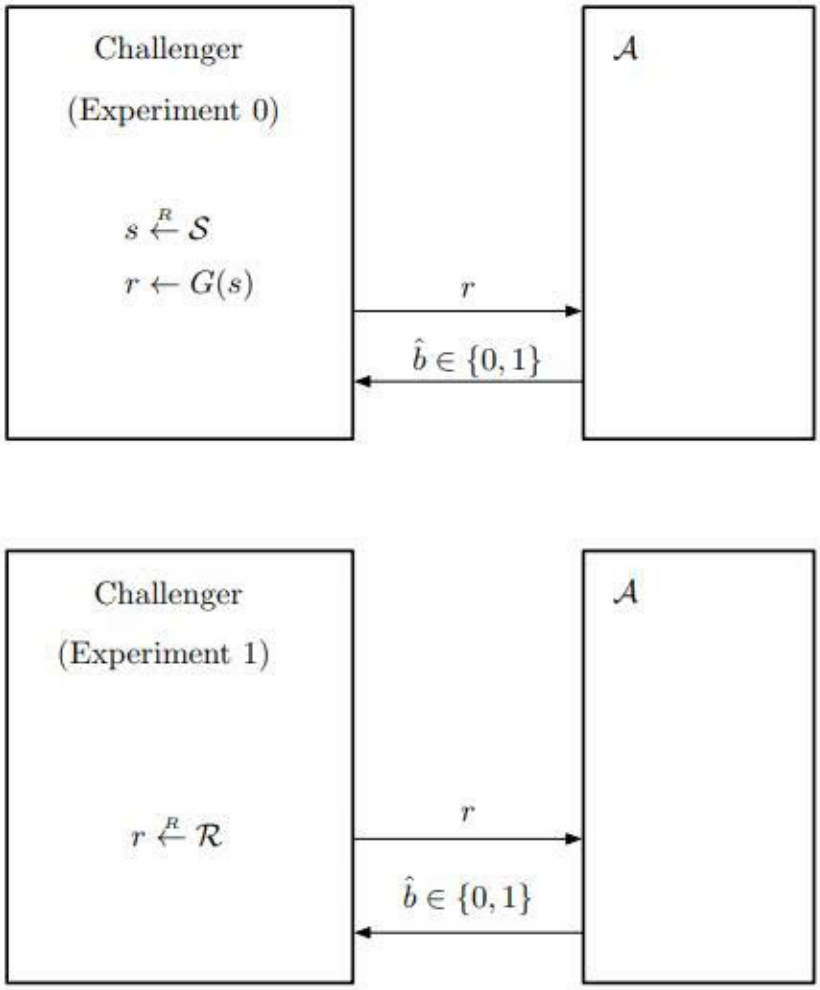
PRG security game

Trò chơi Bảo mật PRG, hay Attack Game 3.1 theo BS15, là một thí nghiệm được xây dựng để cung cấp một định nghĩa toán học chính xác cho tính "an toàn" của một Bộ tạo số giả ngẫu nhiên.

Một PRG G được coi là an toàn nếu đầu ra của nó *trông giống hệt* như một chuỗi ngẫu nhiên thật sự — nghĩa là không một thuật toán hiệu quả nào (kẻ tấn công) có thể phân biệt được hai trường hợp này.

Trò chơi diễn ra giữa hai thực thể:

- Người thách thức (Challenger): Điều hành trò chơi và nắm giữ bí mật (chuỗi là giả hay thật).
- Kẻ tấn công (Adversary) A: Một thuật toán hiệu quả (chạy trong thời gian đa thức) cố gắng xác định bí mật của Người thách thức.



Hình 1: Thí nghiệm 0 và 1 của Attack Game

Quy trình trò chơi được định nghĩa như sau:

- Bước 1: Thiết lập Bí mật

  Người thách thức bí mật chọn một bit $b \in \{0,1\}$. Bit b này quyết định thí nghiệm mà Kẻ tấn công sẽ phải đối mặt.

- Bước 2: Tạo Chuỗi Thử thách r

  Người thách thức tạo ra một chuỗi bit r độ dài L dựa trên b:

  – Nếu $b = 0$ (Thí nghiệm 0): Người thách thức chọn một hạt giống (seed) s ngẫu nhiên thật sự từ không gian hạt giống S (ký hiệu $s \leftarrow_R S$). Sau đó, Người thách thức tính toán chuỗi giả ngẫu nhiên bằng cách chạy PRG: $r := G(s)$.

  - Nếu $b = 1$ (Thí nghiệm 1): Người thách thức chọn một chuỗi r hoàn toàn ngẫu nhiên và đồng đều từ không gian đầu ra R (ký hiệu $r \leftarrow_R R$).

- Bước 3: Gửi Thử thách

  Người thách thức gửi duy nhất chuỗi r (đã được tạo ở Bước 2) cho Kẻ tấn công A. A không biết giá trị của b.

- Bước 4: Lựa chọn của Kẻ tấn công Kẻ tấn công A nhận r, thực hiện các phân tích, tính toán của mình và xuất ra một bit dự đoán $\hat{b} \in \{0, 1\}$. Mục tiêu của A là làm cho $\hat{b} = b$.

Để định lượng khả năng thành công của A, chúng ta định nghĩa "Ưu thế" (Advantage) của A.

Gọi W_b là sự kiện Kẻ tấn công A xuất ra 1 (tức $\hat{b} = 1$)..

- $\Pr[W_0]$: Xác suất A xuất ra 1 khi nhận được chuỗi Giả ngẫu nhiên ($b = 0$).
- $\Pr[W_1]$: Xác suất A xuất ra 1 khi nhận được chuỗi Ngẫu nhiên thật ($b = 1$).

Ưu thế của A trong trò chơi này, ký hiệu là $\text{PRGadv}[A, G]$, được định nghĩa là sự khác biệt tuyệt đối giữa hai xác suất này:

$$\text{PRGadv}[A, G] := |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$$

Diễn giải:

- Nếu G là một PRG an toàn: Kẻ tấn công A không thể phân biệt được hai thế giới. Do đó, hành vi của A trong cả hai thí nghiệm sẽ gần như giống hệt nhau. A sẽ xuất ra 1 (hoặc 0) với xác suất gần như tương đương, bất kể nó đang ở Thí nghiệm 0 hay 1.
  - Trong trường hợp này, $\Pr[W_0] \approx \Pr[W_1]$, và do đó ưu thế $\text{PRGadv}[A, G]$ sẽ rất gần 0 (tức là không đáng kể).
- Nếu G là một PRG không an toàn (bị lỗi): Giả sử G có một khiếm khuyết hoặc không được tốt (ví dụ: Các bit trong chuỗi đầu ra của G không độc lập với nhau mà có sự tương quan ẩn).
  - Ví dụ, nửa đầu của chuỗi r chứa thông tin cho phép suy luận về nửa sau của nó. Kẻ tấn công A có thể sử dụng nửa đầu chuỗi để kiểm tra tính hợp lệ của nửa sau. Trong khi một chuỗi ngẫu nhiên thật sự không có bất kỳ mối liên kết nào giữa các phần, chuỗi từ G sẽ bộc lộ cấu trúc nội tại này. Sự khác biệt trong cấu trúc đó chính là "dấu hiệu nhận biết" giúp A phân biệt dễ dàng hai thế giới, phá vỡ tính bảo mật của PRG.

Secure PRG

Theo định nghĩa trong BS15: "A PRG G is secure if the value PRGadv[A, G] is negligible for all efficient adversaries A."

Nghĩa là: Một bộ tạo số giả ngẫu nhiên G được xem là an toàn nếu giá trị lợi thế PRGadv[A,G] là không đáng kể, đối với mọi kẻ tấn công hiệu quả A.

"efficient adversary" có nghĩa là kẻ tấn công có khả năng tính toán trong giới hạn thực tế.

Ta chỉ xét những kẻ tấn công có thời gian hoạt động đa thức theo độ dài đầu vào, tức là các thuật toán có thể chạy được trong thời gian hợp lý.

- Thuật toán được gọi là hiệu quả nếu số bước xử lý tăng không quá nhanh khi kích thước đầu vào tăng (ví dụ tỉ lệ n^2, n^3, hoặc n^5).
- Ngược lại, các thuật toán có độ phức tạp hàm mũ (như 2^n) hoặc giai thừa (như $n!$) là không hiệu quả vì thời gian thực hiện vượt quá khả năng của mọi máy tính hiện nay.

Vì vậy, khi nói "mọi kẻ tấn công hiệu quả", ta chỉ xét đến những thuật toán có thể thực thi trong thực tế, chứ không xét các phương pháp tưởng tượng hoặc có độ phức tạp quá lớn.

Cụm "the value PRGadv$[A, G]$ is negligible" có nghĩa là lợi thế của kẻ tấn công trong việc phân biệt PRG với chuỗi ngẫu nhiên thật là cực kỳ nhỏ – đến mức có thể xem như bằng 0 trong thực tế.

Một hàm $\varepsilon(n)$ được gọi là *không đáng kể* nếu nó giảm nhanh hơn mọi hàm đa thức. Nói cách khác, với mọi số $c > 0$, tồn tại giá trị N sao cho nếu $n > N$ thì $\varepsilon(n) < \frac{1}{n^c}$.

Ví dụ:

- 2^{-n} là hàm không đáng kể.
- $\frac{1}{n}$ hoặc $\frac{1}{n^2}$ thì không, vì chúng giảm quá chậm.

Điều đó có nghĩa là, nếu ta tăng độ dài khóa n, xác suất tấn công thành công giảm nhanh đến mức vô nghĩa trong thực tế.

Giả sử PRG có độ dài khóa 128 bit. Kẻ tấn công có thể cố gắng phân biệt PRG với chuỗi ngẫu nhiên bằng cách thử mọi hạt giống có thể. Số lượng trường hợp cần thử là 2^{128} — quá lớn để thực hiện, ngay cả với các siêu máy tính hiện nay.

Vì vậy:

- Kẻ tấn công vẫn là hiệu quả nếu chỉ chạy trong thời gian đa thức, ví dụ n^3
- Nhưng việc thử toàn bộ không gian khóa là không hiệu quả, nên không được tính là "adversary" trong định nghĩa trên.

Khi đó, xác suất để một kẻ tấn công hiệu quả thành công là rất nhỏ, có thể nhỏ hơn 2^{-100}, và được xem là không đáng kể.

Định nghĩa này cho phép thay thế yêu cầu "bảo mật tuyệt đối" (perfect security) — vốn không thể đạt được nếu khóa ngắn hơn thông điệp — bằng yêu cầu "bảo mật tính toán" (computational security), tức là an toàn trước mọi kẻ tấn công có khả năng tính toán hợp lý. Một hệ thống được coi là an toàn không phải vì không thể bị phá, mà vì không thể bị phá trong thực tế.

Unpredictable PRG Game

Trò chơi PRG Không thể đoán được, hay Attack Game 3.2 theo BS15, cung cấp một định nghĩa bảo mật thay thế cho PRG. Thay vì kiểm tra khả năng phân biệt toàn bộ chuỗi (như Attack Game 3.1), trò chơi này kiểm tra xem liệu một bit cụ thể trong chuỗi có thể bị dự đoán hay không.

Ý tưởng cốt lõi là "Bài kiểm tra bit tiếp theo" (Next-Bit Test): Một PRG được coi là tốt nếu, ngay cả khi biết tất cả các bit trước đó, không ai có thể dự đoán bit tiếp theo với xác suất thành công tốt hơn đáng kể so với việc đoán mò (50/50).

Các bên tham gia vào:

- Người thách thức (Challenger): Thực thể tạo ra chuỗi giả ngẫu nhiên.
- Kẻ tấn công (Adversary, A): Một thuật toán hiệu quả cố gắng dự đoán một bit của chuỗi.

Quy trình trò chơi được định nghĩa như sau:

- Bước 1: Chọn Vị trí

  Kẻ tấn công A quyết định vị trí i (với $0 \leq i < L$, trong đó L là độ dài chuỗi đầu ra) mà nó muốn dự đoán. A gửi chỉ số i này cho Người thách thức.

- Bước 2: Tạo Chuỗi

  Người thách thức chọn một hạt giống (seed) ngẫu nhiên $s \leftarrow_R S$ và tính toán toàn bộ chuỗi giả ngẫu nhiên $r := G(s)$.

- Bước 3: Cung cấp Tiền tố (Prefix)

  Người thách thức gửi cho A tiền tố của r, tức là tất cả các bit đứng trước vị trí i. Chuỗi được gửi là: $r[0 \ldots i-1]$.

- Bước 4: Dự đoán

  Kẻ tấn công A phân tích tiền tố đã nhận và xuất ra một bit dự đoán $g \in \{0, 1\}$. Mục tiêu của A là dự đoán đúng giá trị của bit $r[i]$.

Kẻ tấn công A được coi là "thắng" nếu dự đoán của nó chính xác, tức là $g = r[i]$.

Nếu một chuỗi là ngẫu nhiên thật sự, việc biết các bit trước đó không cung cấp thông tin gì về bit tiếp theo, vì vậy xác suất đoán đúng luôn là 1/2. Ưu thế của A đo lường mức độ nó có thể làm tốt hơn việc đoán mò ngẫu nhiên.

Ưu thế dự đoán (Prediction Advantage) của A, ký hiệu là $\text{Predadv}[A, G]$, được định nghĩa là:

$$\text{Predadv}[A, G] := |\Pr[A \text{ thắng}] - \frac{1}{2}|$$

Diễn giải:

- Nếu G là một PRG tốt (không thể đoán được), thì tiền tố $r[0 \dots i-1]$ không tiết lộ thông tin hữu ích nào về $r[i]$. Do đó, A không thể làm gì tốt hơn là đoán mò, $\Pr[A \text{ thắng}] \approx 1/2$, và ưu thế Predadv sẽ là không đáng kể.
- Nếu G bị lỗi (ví dụ: G có một quy luật: "bit thứ i luôn bằng bit thứ $i-1$"), A có thể lợi dụng điều này. A sẽ chọn vị trí i đó, nhận tiền tố, và chỉ cần đoán $g = r[i-1]$. Trong trường hợp này, $\Pr[A \text{ thắng}] = 1$, và ưu thế Predadv sẽ là $|1 - 1/2| = 1/2$, là một giá trị đáng kể, cho thấy G đã bị phá vỡ.

Unpredictable PRG

Theo định nghĩa trong BS15: "A PRG G is unpredictable if the value Predadv[A, G] is negligible for all efficient adversaries A."

Nghĩa là: Một Bộ tạo số giả ngẫu nhiên (PRG) G được gọi là không thể đoán định (unpredictable) nếu giá trị ưu thế dự đoán $\text{Predadv}[A, G]$ là không đáng kể (negligible) đối với tất cả các kẻ tấn công hiệu quả (efficient adversaries) A.

Để thỏa mãn định nghĩa này, ba yếu tố sau đây phải đồng thời được đáp ứng:

- Đối tượng tấn công (A - Efficient Adversary): Định nghĩa giới hạn phạm vi đe dọa ở các "kẻ tấn công hiệu quả". Ta chỉ xét những kẻ tấn công có thời gian hoạt động đa thức. Điều này loại trừ các mô hình tấn công lý thuyết có sức mạnh tính toán vô hạn (như tấn công vét cạn không gian khóa lớn), tập trung vào tính an toàn trước các máy tính thực tế.
- Thước đo lợi thế ($\text{Predadv}[A, G]$): Thước đo khả năng chiến thắng của A trong Trò chơi 3.2 (Next-Bit Test). Giá trị này được tính bằng độ lệch tuyệt đối giữa xác suất đoán đúng của A và xác suất ngẫu nhiên

$$\text{Predadv}[A, G] = |\Pr[A \text{ đoán đúng}] - 1/2|$$

- Ngưỡng an toàn (Negligible): Ưu thế của kẻ tấn công phải là một hàm "không đáng kể". Về mặt toán học, hàm này giảm nhanh hơn nghịch đảo của bất kỳ đa thức nào khi tham số bảo mật tăng lên.
  - Xác suất A đoán đúng bit tiếp theo chỉ được phép xấp xỉ $1/2$ (ví dụ: $0.5 + 2^{-128}$). Phần dôi dư (2^{-128}) là quá nhỏ để có thể khai thác trong thực tế.

Ý nghĩa thực tế:

- Mặc dù G là một thuật toán xác định, định nghĩa này yêu cầu rằng việc nắm giữ toàn bộ lịch sử đầu ra (các bit từ 0 đến $i-1$) không cung cấp bất kỳ lợi thế tính toán nào để dự báo bit thứ i.

- Một PRG thỏa mãn định nghĩa này đảm bảo rằng mỗi bit mới được sinh ra đều mang tính "bất ngờ" đối với kẻ tấn công, tương đương với việc tung một đồng xu công bằng.

2. (1 point). Let G be a pseudo-random generator. Prove that if G is **secure**, then G is **unpredictable**. Formally, show that if there exists an adversary A that wins the *Unpredictable PRG Game* with non-negligible advantage, then there exists a reduction (adversary) B that wins the *PRG Security Game* with the same advantage as A. Provide a clear construction of B and explain how the advantage is preserved.

Giả định

Trong phần này, ta sẽ đi chứng minh một định lý nền tảng của bộ tạo số giả ngẫu nhiên (PRG): Nếu một PRG G là an toàn (secure), thì G cũng không thể dự đoán được (unpredictable).

Ta sẽ sử dụng phương pháp chứng minh mệnh đề phản đảo : "Nếu G không "không thể dự đoán được", thì G cũng không "an toàn". Có nghĩa là ta sẽ chứng minh nếu G có thể dự đoán được thì G không an toàn.

Việc G không "không thể dự đoán được" có nghĩa là tồn tại một đối thủ (bộ dự đoán) A có thể thắng Trò chơi Unpredictable PRG (Game 3.2) với một lợi thế $\epsilon > 0$ (không tầm thường).

Để đơn giản, ta giả định A có lợi thế ϵ trong việc dự đoán một bit cụ thể i (với $1 \leq i \leq L$), khi biết $i-1$ bit đứng trước. Xác suất thành công của A được định nghĩa là:

$$\Pr_{s \leftarrow \{0,1\}^s}[A(G(s)[0...i-1]) = G(s)[i]] = \frac{1}{2} + \epsilon$$

Lợi thế của A là $\text{Predadv}[A, G] = \epsilon$.

Xây dựng Đối thủ B

Từ giả định về sự tồn tại của A, chúng ta sẽ xây dựng một đối thủ mới B. Mục tiêu của B là phá vỡ tính an toàn của G bằng cách thắng PRG Security Game.

B sẽ sử dụng A như một chương trình con

Logic của B: B tham gia Trò chơi An toàn và nhận một chuỗi r. B không biết r là giả ngẫu nhiên (Exp 0) hay ngẫu nhiên thật (Exp 1). B sẽ sử dụng A để kiểm tra:

- Nếu r là giả ngẫu nhiên, A (theo giả định) có khả năng dự đoán bit $r[i]$ rất tốt (xác suất $1/2 + \epsilon$).
- Nếu r là ngẫu nhiên thật, A không có lợi thế gì, vì $r[i]$ hoàn toàn độc lập với các bit trước. A chỉ đoán đúng với xác suất $1/2$.

Do đó, B sẽ đoán rằng r là giả ngẫu nhiên nếu A dự đoán đúng, và đoán r là ngẫu nhiên thật nếu A dự đoán sai.

Thuật toán của $B(r)$: B nhận một chuỗi đầu vào r dài L bit từ bộ thách thức của mình.

1. Nhận chuỗi: B nhận $r = r_0 r_1 ... r_{L-1}$.
2. Trích xuất tiền tố: B lấy $i-1$ bit đầu tiên của r và đặt $x \leftarrow r[0...i-1]$.
3. Gọi A: B cung cấp x làm đầu vào cho A. A trả về một bit dự đoán $g \leftarrow A(x)$.
4. Quyết định: B so sánh dự đoán g của A với bit $r[i]$ thực tế trong chuỗi r:
   - Nếu $g == r[i]$ (tức là A đoán đúng): B output 1 (nghĩ rằng r là chuỗi giả ngẫu nhiên từ Exp 0).
   - Nếu $g \neq r[i]$ (tức là A đoán sai): B output 0 (nghĩ rằng r là chuỗi ngẫu nhiên thật từ Exp 1).

Phân tích Lợi thế của B

Bây giờ, chúng ta sẽ phân tích lợi thế của B (ký hiệu là $\text{PRGadv}[B, G]$). Lợi thế này được định nghĩa là:

$$\text{PRGadv}[B, G] = |\Pr[B(r) = 1|\text{Exp } 1] - \Pr[B(r) = 1|\text{Exp } 0]|$$

Lợi thế của đối thủ B trong việc phá vỡ bộ tạo số giả ngẫu nhiên G chính là trị tuyệt đối của sự chênh lệch giữa xác suất B xuất ra kết quả là 1 khi đối mặt với chuỗi ngẫu nhiên thật (trong Thí nghiệm 1) và xác suất B xuất ra kết quả là 1 khi đối mặt với chuỗi giả ngẫu nhiên (trong Thí nghiệm 0).

- Phân tích Thí nghiệm 0 (Exp 0: r là chuỗi PRG)

  Trong thí nghiệm này, r là một chuỗi giả ngẫu nhiên, $r = G(s)$ với s được chọn ngẫu nhiên.
  - Chúng ta cần tính $\Pr[B(r) = 1|\text{Exp } 0]$. Theo thuật toán của B, B output 1 khi và chỉ khi $g == r[i]$.
  - Thay thế các biến từ thuật toán, B output 1 khi $A(r[0...i-1]) == r[i]$. Vì $r = G(s)$, sự kiện này tương đương với: $A(G(s)[0...i-1]) == G(s)[i]$.
  - Đây chính xác là sự kiện A thắng Trò chơi Unpredictable PRG. Theo giả định ở Mục 1, xác suất của sự kiện này là $\frac{1}{2} + \epsilon$.

  Do đó, ta có: $\Pr[B(r) = 1|\text{Exp } 0] = \frac{1}{2} + \epsilon$
- Phân tích Thí nghiệm 1 (Exp 1: r là chuỗi Ngẫu nhiên thật)

  Trong thí nghiệm này, r là một chuỗi ngẫu nhiên thật, được chọn đồng nhất từ $\{0,1\}^L$.
  - Chúng ta cần tính $\Pr[B(r) = 1|\text{Exp } 1]$. B output 1 khi và chỉ khi $A(r[0...i-1]) == r[i]$.

- Trong một chuỗi ngẫu nhiên thật, bit $r[i]$ là một biến ngẫu nhiên độc lập, được chọn đồng nhất (xác suất 1/2 là 0, 1/2 là 1). Quan trọng nhất, $r[i]$ hoàn toàn độc lập về mặt thống kê với tất cả các bit trước nó ($r[0...i-1]$).
- Khi A nhận đầu vào $x = r[0...i-1]$, nó sẽ tính toán và đưa ra một dự đoán g (là 0 hoặc 1). Giá trị g này hoàn toàn phụ thuộc vào x.
- Vì $r[i]$ độc lập với x, nó cũng độc lập với g (là hàm của x).
- Do đó, chúng ta đang so sánh g (một giá trị đã được xác định) với $r[i]$ (một biến ngẫu nhiên 50/50). Xác suất chúng khớp nhau luôn là 1/2, bất kể g là 0 hay 1.

Do đó, ta có: $\Pr[B(r) = 1|\text{Exp } 1] = \frac{1}{2}$

Chúng ta thay hai xác suất vừa tính được vào công thức lợi thế của B:

$$\text{PRGadv}[B, G] = |\Pr[B(r) = 1|\text{Exp } 1] - \Pr[B(r) = 1|\text{Exp } 0]|$$

$$\text{PRGadv}[B, G] = |\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} + \epsilon)|$$

$$\text{PRGadv}[B, G] = |-\epsilon| = \epsilon$$

Kết quả: Chúng ta đã chỉ ra rằng $\text{PRGadv}[B, G] = \text{Predadv}[A, G] = \epsilon$.

Điều này có nghĩa là nếu tồn tại một bộ dự đoán A có lợi thế ϵ (không tầm thường) trong việc phá vỡ tính không thể dự đoán được của G, thì cũng tồn tại một bộ phân biệt B có cùng lợi thế ϵ (không tầm thường) trong việc phân biệt đầu ra của PRG với chuỗi ngẫu nhiên thật.

Nói cách khác, việc *G có thể dự đoán được* kéo theo rằng *G không an toàn*, vì tồn tại một adversary B phá vỡ định nghĩa PRG–security (một PRG an toàn yêu cầu rằng mọi đối thủ phân biệt chỉ được có lợi thế không tầm thường).

Do đó, ta đã chứng minh được mệnh đề phản đảo:

$$\neg\text{Unpredictable}(G) \Rightarrow \neg\text{Secure}(G).$$

Và vì mệnh đề phản đảo tương đương logic với mệnh đề gốc, ta kết luận rằng bất kỳ PRG G nào *an toàn* thì phải *không thể dự đoán được*.

3. (1 point). Prove the **converse direction**: if G is **unpredictable**, then G is **secure**. Formally, construct an adversary B that wins the *PRG Security Game* given any adversary A that wins the *Unpredictable PRG Game*, and describe the relationship between their advantages. Conclude that the two notions, *security* and *unpredictability*, are equivalent for PRGs.

   Mục tiêu của chúng ta là chứng minh theo chiều ngược lại: Nếu một PRG G là không thể dự đoán (unpredictable), thì G là an toàn (secure).

   Việc chứng minh trực tiếp rất khó khăn vì "An toàn" là một tính chất tổng quát về phân bố xác suất của toàn bộ chuỗi, trong khi "Không thể dự đoán" là tính chất cụ thể của từng bit. Do

đó, chúng ta sử dụng phương pháp chứng minh mệnh đề phản đảo: Nếu G KHÔNG an toàn thì F CÓ THỂ dự đoán

Chúng ta bắt đầu với giả định rằng G không an toàn.Điều này nghĩa là tồn tại một đối thủ A (Distinguisher) có thể phân biệt chuỗi giả ngẫu nhiên $G(s)$ với chuỗi ngẫu nhiên thật r với lợi thế đáng kể ϵ:

$$|\Pr[A(G(s)) = 1] - \Pr[A(r) = 1]| = \epsilon$$

(Với ϵ là không không đáng kể).

Vấn đề nằm ở chỗ: Đối thủ A nhìn vào toàn bộ chuỗi (ví dụ 128 bit) và nói "Đây là giả" hoặc "Đây là thật". A không chỉ ra bit nào bị lỗi, hay bit nào làm lộ tẩy tính giả ngẫu nhiên.

- Để chứng minh G "Có thể dự đoán", ta cần xây dựng một đối thủ B chỉ nhìn vào một phần chuỗi và đoán chính xác bit kế tiếp.
- Nút thắt: Làm thế nào để chuyển đổi khả năng "phân biệt toàn bộ chuỗi" của A thành khả năng "dự đoán 1 bit cụ thể" của B?

Để giải quyết vấn đề "nút thắt" đã nêu ở trên (chuyển đổi khả năng phân biệt toàn bộ chuỗi thành khả năng dự đoán một bit), chúng ta sử dụng kỹ thuật Đối số Lai (Hybrid Argument). Thay vì so sánh trực tiếp chuỗi giả ngẫu nhiên và chuỗi ngẫu nhiên thật, ta sẽ so sánh các chuỗi trung gian biến đổi dần dần.

Để làm rõ cơ chế này, ta sẽ xem xét một trường hợp cụ thể với đầu ra có độ dài 3 bit.

Giả sử bộ tạo số G tạo ra chuỗi 3 bit: $G(s) = (g_1, g_2, g_3)$. Đối thủ A phân biệt được $G(s)$ với chuỗi ngẫu nhiên thật $R = (r_1, r_2, r_3)$ với lợi thế ϵ.

Chúng ta xây dựng 4 phân bố lai (H_0 đến H_3) tạo thành một cầu nối từ "Hoàn toàn thật" đến "Hoàn toàn giả":

- H_0 (Toàn bộ là thật): (r_1, r_2, r_3)
- H_1 (Bit 1 giả): $(\mathbf{g_1}, r_2, r_3)$
- H_2 (Bit 1, 2 giả): $(\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, r_3)$
- H_3 (Toàn bộ là giả): $(\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \mathbf{g_3})$

Lợi thế tổng thể của A là sự khác biệt giữa hai đầu mút:

$$\epsilon = |\Pr[A(H_3) = 1] - \Pr[A(H_0) = 1]|$$

Biến đổi khoảng cách tổng này bằng tổng các khoảng cách nhỏ liền kề:

$$\epsilon = |(\Pr[H_3] - \Pr[H_2]) + (\Pr[H_2] - \Pr[H_1]) + (\Pr[H_1] - \Pr[H_0])|$$

(Viết tắt $\Pr[H_i]$ thay cho $\Pr[A(H_i) = 1]$ để gọn hơn).

Sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$\epsilon \leq |\Pr[H_3] - \Pr[H_2]| + |\Pr[H_2] - \Pr[H_1]| + |\Pr[H_1] - \Pr[H_0]|$$

$(\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|.)$

Tổng của 3 số hạng trên lớn hơn hoặc bằng ϵ. Do đó, theo nguyên lý trung bình, phải tồn tại ít nhất một cặp liền kề (H_i, H_{i-1}) mà sự khác biệt giữa chúng là đáng kể (ít nhất là $\epsilon/3$).

Giả sử cặp đó là H_2 và H_1:

- $H_1 = (g_1, \mathbf{r_2}, r_3)$
- $H_2 = (g_1, \mathbf{g_2}, r_3)$

Hai chuỗi này giống hệt nhau ở bit đầu (g_1) và bit cuối (r_3). Sự khác biệt duy nhất nằm ở vị trí thứ 2: một bên là ngẫu nhiên thật (r_2), một bên là giả ngẫu nhiên (g_2). $\rightarrow$ Nếu A phân biệt được H_2 và H_1, thì A đang phân biệt được bit thứ 2. Đây chính là cơ sở để ta dự đoán bit thứ 2.

Dựa trên trực giác từ mô hình 3-bit, ta mở rộng chứng minh cho độ dài $L(n)$ bất kỳ.

Gọi $L = L(n)$ là độ dài đầu ra của G. Ta định nghĩa một dãy $L + 1$ phân bố lai H_k (với $k \in \{0, \ldots, L\}$):

- H_k: Là phân bố trong đó k bit đầu tiên được lấy từ $G(s)$ (giả ngẫu nhiên), và $L - k$ bit còn lại được lấy từ phân bố thống nhất U (ngẫu nhiên thật).

$$H_k = G(s)_1 \ldots G(s)_k \,\|\, r_{k+1} \ldots r_L$$

Trong đó:

- $H_0 = r_1 r_2 \ldots r_L \quad (k = 0 \iff r_1 r_2 \ldots r_L)$
  (Phân bố Ngẫu nhiên thật — tất cả L bit đều là ngẫu nhiên.)
- $H_L = G(s)_1 G(s)_2 \ldots G(s)_L \quad (k = L \iff G(s)_1 G(s)_2 \ldots G(s)_L)$
  (Phân bố Giả ngẫu nhiên của G — toàn bộ L bit đều là đầu ra của PRG.)

Giả sử G không an toàn, tức là tồn tại đối thủ A sao cho:

$$|\Pr[A(H_L) = 1] - \Pr[A(H_0) = 1]| = \epsilon$$

Ta khai triển hiệu số này thành tổng của các bước nhảy đơn lẻ (tương tự ví dụ 3-bit):

$$\epsilon = \left| \sum_{k=1}^{L} (\Pr[A(H_k) = 1] - \Pr[A(H_{k-1}) = 1]) \right|$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác:

$$\epsilon \leq \sum_{k=1}^{L} |\Pr[A(H_k) = 1] - \Pr[A(H_{k-1}) = 1]|$$

Vì tổng của L số hạng không âm $\geq \epsilon$, tồn tại ít nhất một chỉ số $k^* \in \{1, \ldots, L\}$ sao cho sự khác biệt là lớn nhất và thỏa mãn:

$$|\Pr[A(H_{k^*}) = 1] - \Pr[A(H_{k^*-1}) = 1]| \geq \frac{\epsilon}{L}$$

(*)

Tại đây, ta thấy cấu trúc của hai phân bố liền kề này:

- $H_{k^*-1} = \text{Prefix} \,\|\, \mathbf{r_{k^*}} \,\|\, \text{Suffix}$
- $H_{k^*} \quad = \text{Prefix} \,\|\, \mathbf{G(s)_{k^*}} \,\|\, \text{Suffix}$
  (Với Prefix là k^-1 bit giả ngẫu nhiên đầu, Suffix là các bit ngẫu nhiên thật phía sau).*

Ta xây dựng thuật toán B để thắng Trò chơi Không thể dự đoán tại vị trí bit thứ k^*, sử dụng A làm công cụ phân biệt.

Thuật toán $B(y)$:

- Đầu vào: Tiền tố $y = G(s)_1 \ldots G(s)_{k^*-1}$.
- Mục tiêu: Dự đoán $G(s)_{k^*}$.

1. B chọn một bit dự đoán ngẫu nhiên $b' \leftarrow \{0, 1\}$.
2. B chọn chuỗi hậu tố ngẫu nhiên $r' \leftarrow \{0, 1\}^{L-k^*}$.
3. B ghép thành chuỗi thử thách: $w = y \,\|\, b' \,\|\, r'$.
4. B chạy $A(w)$ và nhận kết quả $out \in \{0, 1\}$.
5. Quyết định
   - Nếu $out = 1$: B dự đoán bit tiếp theo là b'.
   - Nếu $out = 0$: B dự đoán bit tiếp theo là $1 - b'$. (Giả sử A là gán 1 cho chuỗi giả ngẫu nhiên).

Ta xét xác suất B đoán đúng bit thật $b_{true} = G(s)_{k^*}$. Chuỗi w mà B tạo ra sẽ rơi vào một trong hai phân bố dựa trên giá trị của b':

- Nếu $b' = b_{true}$ (xác suất 0.5):
  - w có cấu trúc giống hệt H_{k^*} (vì vị trí k^* là bit giả đúng).
  - B đoán đúng khi $A(w) = 1$.
  - Xác suất thành phần: $\Pr[A(H_{k^*}) = 1]$.
- Nếu $b' \neq b_{true}$ (xác suất 0.5):
  - Vì b' là ngẫu nhiên và khác bit giả, b' phân bố như một bit ngẫu nhiên thật. w có cấu trúc giống hệt H_{k^*-1}.
  - B đoán đúng (đảo ngược $1 - b'$) khi $A(w) = 0$.
  - Xác suất thành phần: $\Pr[A(H_{k^*-1}) = 0] = 1 - \Pr[A(H_{k^*-1}) = 1]$.

Tổng hợp lại, xác suất thắng của B là:

$$\Pr[B \text{ thắng}] = \frac{1}{2}\Pr[A(H_{k^*}) = 1] + \frac{1}{2}(1 - \Pr[A(H_{k^*-1}) = 1])$$

Lợi thế của B (độ lệch so với 0.5):

$$\text{Adv}(B) = \left|\Pr[B \text{ thắng}] - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\Pr[A(H_{k^*}) = 1] - \Pr[A(H_{k^*-1}) = 1]\right|$$

Sử dụng kết quả từ mục (*) ta đã biết $|\Pr[A(H_{k^*}) = 1] - \Pr[A(H_{k^*-1}) = 1]| \geq \frac{\epsilon}{L}$. Thay vào phương trình trên:

$$\text{Adv}_{\text{Pred}}[B, G] \geq \frac{\epsilon}{2L} = \frac{\text{Adv}_{\text{PRG}}[A, G]}{2L}$$

Từ bất đẳng thức đã chứng minh ở trên, Chúng ta xem xét các tính chất sau:

1. Theo giả định ban đầu, G là không an toàn, nghĩa là tồn tại đối thủ A có lợi thế $\varepsilon = \text{Adv}_{\text{PRG}}[A, G]$ là không không đáng kể (non-negligible).
2. L là độ dài đầu ra của PRG, là một hàm đa thức (polynomial) theo tham số an toàn n.
3. Một hàm không không đáng kể chia cho một hàm đa thức thì kết quả vẫn là một hàm không không đáng kể.

$\Rightarrow$ Do đó, lợi thế của B ($\text{Adv}_{\text{Pred}}[B, G]$) cũng là không không đáng kể.

Điều này có nghĩa là: Nếu tồn tại một đối thủ phá vỡ tính an toàn của G, thì chắc chắn tồn tại một đối thủ B có thể dự đoán bit tiếp theo của G với xác suất tốt hơn đáng kể so với đoán mò.

Chúng ta đã chứng minh được mệnh đề phản đảo:"Nếu G không an toàn $\implies$ thì G có thể dự đoán (không 'không thể dự đoán')."

Do đó, ta có thể khẳng định:"Nếu G là không thể dự đoán (unpredictable) $\implies$ thì G là an toàn (secure)." (Điều phải chứng minh)

Kết luận

Dựa trên các phân tích và chứng minh toán học đã thực hiện trong báo cáo, chúng ta có các kết quả sau:

- Chiều thuận (Câu b): Chúng ta đã chứng minh rằng nếu một PRG thỏa mãn định nghĩa an toàn mật mã (cryptographically secure), thì nó không thể bị dự đoán bit tiếp theo (next-bit unpredictable).

$$G \text{ is Secure} \implies G \text{ is Unpredictable}$$

- Chiều ngược (Câu c): Thông qua kỹ thuật đối số lai (hybrid argument) và phương pháp chứng minh phản đảo (contrapositive), chúng ta đã chứng minh rằng nếu tồn tại một đối thủ phá vỡ tính an toàn (phân biệt được chuỗi giả ngẫu nhiên), thì tồn tại một đối thủ dự đoán được bit tiếp theo. Điều này tương đương logic với việc: Nếu G là không thể dự đoán, thì G là an toàn.

$$G \text{ is Unpredictable} \implies G \text{ is Secure}$$

Vì mối quan hệ kéo theo đúng ở cả hai chiều, chúng ta đi đến kết luận cuối cùng:

Hai khái niệm "An toàn giả ngẫu nhiên" (Indistinguishability) và "Không thể dự đoán bit tiếp theo" (Next-Bit Unpredictability) là TƯƠNG ĐƯƠNG (Equivalent) đối với các bộ tạo số giả ngẫu nhiên (PRGs).

2 Attacking the Vigenere Cipher

Mật mã Vigenere Cipher là một loại mật mã được cải thiện từ một loại mật mã rất quen thuộc, đó là Caesar Cipher. Trong quá khứ, vì sự kém bảo mật của Caesar Cipher mà Vigenere Cipher đã được ra dời để bù đắp cho khoảng bảo mật đó.

2.1 Mật mã Caesar

Nói về Mật mã Caesar... thực sự nó là một trong những kỹ thuật mật mã cổ điển và đơn giản nhất, gần như là... rất đơn giản

Về cơ bản, nó là một mật mã thay thế đơn ký tự (monoalphabetic substitution). Ý tưởng cốt lõi là ta chỉ cần chọn một khóa bí mật duy nhất, đây là một con số cố định, ví dụ như 3. Sau đó... bùm... ta chỉ việc dịch chuyển **(shift)** toàn bộ bảng chữ cái đi đúng bấy nhiêu nấc. Ví dụ, với khóa **3** thì chữ A sẽ thành chữ D. Tuy nhiên, nó có 1 điểm yếu chí mạng, đó chính là tuy thay đổi được mặt chữ nhưng không thể thay đổi tần suất xuất hiện thông thường của từ tiếng Anh. Trong tiếng Anh, chữ E có **tần suất xuất hiện** nhiều hơn so với các từ khác, nên nó hoàn toàn bị nhận ra được. Ví dụ là từ **HELLO** nếu bị dời với độ dài là 3 thì sẽ thành từ **KHOOR**, rõ ràng thấy 2 chữ O xuất hiện liền kề và ta hoàn toàn có thể sử dụng thuật toán phân tích tần suất để đoán ra được chữ O này chính là chữ E. Từ đó ta đoán ra KEY là 3

2.2 Mật mã Vigenere

Nhận thức rõ được điểm yếu chí mạng của mật mã Caesar, Mật mã Vigenere được phát triển như một giải pháp tinh vi hơn, đại diện cho một bước nhảy vọt từ thay thế đơn ký tự sang **thay thế đa ký tự**.

Cơ chế hoạt động của Vigenere không còn dựa vào một phép dịch chuyển *cố định* duy nhất. Thay vào đó, nó sử dụng một **từ khóa (keyword)**, ví dụ "KEY". Độ dài của từ khóa này (ví dụ: 3) quyết định số lượng bảng chữ cái Caesar khác nhau sẽ được sử dụng một cách luân phiên.

Quá trình mã hóa được thực hiện như sau:

- **Mở rộng khóa (Key Expansion):** Từ khóa được lặp lại để có độ dài tương ứng với bản rõ (plaintext).
- **Mã hóa (Encryption):** Mỗi ký tự của bản rõ được dịch chuyển (shift) bằng một số khác nhau, số này được xác định bởi ký tự tương ứng của khóa đã mở rộng (thường A=0, B=1, ..., K=10, ...).

Hãy xem xét ví dụ mã hóa bản rõ **ATTACKATDAWN** với từ khóa **KEY**:

```
Plaintext:  T H E Q U I C K B R O W N F O X
```

```
Keyword:    K E Y K E Y K E Y K E Y K E Y K
----------------------------------------
Ciphertext: D L G Z Y M K K K V S A D R X
```

Trong ví dụ này, cùng một chữ cái bản rõ (ví dụ: chữ **O** trong "BROWN" và "FOX") sẽ được mã hóa bằng các chữ cái khóa khác nhau (**E** và **Y**), do đó tạo ra các chữ cái bản mã khác nhau.

Chính cơ chế "đa dịch chuyển" (multiple shifts) này đã **phá vỡ** hoàn toàn phương pháp phân tích tần suất đơn giản. Tần suất xuất hiện của ngôn ngữ gốc (hay được gọi là tần suất xuất hiện ngôn ngữ) bị làm phẳng (flattened), nên ta không thể xác định được đồi núi từ vựng, không thể xác đính tần suất từ vựng một cách hiệu quả. Kẻ tấn công không thể nào nhìn vào bản mã và nói "chữ K xuất hiện nhiều nhất, nó chắc chắn là E" được nữa, vì chữ E trong bản rõ đã bị mã hóa thành nhiều ký tự khác nhau (D, G, M, V...).

Đây chính là sự cải tiến bảo mật mang tính cách mạng của Vigenere so với Caesar.

2.3 Ý tưởng khai thác

Đề bài yêu cầu ta phải khai thác, tấn công được loại mật mã học này, nên trước hết ta nên nghiên cứu về cách khả thi để khai thác.

Mặc dù Vigenere là một cải tiến vượt bậc, nó không phải là không thể bị bẻ gãy. Cuộc tấn công vào Vigenere là một trong những thành tựu vĩ đại của mật mã học thế kỷ 19. Nghịch lý nằm ở chỗ: Vigenere *che giấu* tần suất xuất hiện tần suất khi ta phân tích *toàn bộ* bản mã, nhưng nó lại *làm lộ* chính tần suất xuất hiện đó nếu ta có thể phân tách bản mã một cách chính xác.

Cuộc tấn công bao gồm hai bước chính:

(a) **Xác định Độ dài Khóa (L):** Tìm ra "nhịp điệu" lặp lại của từ khóa.

(b) **Xác định Khóa:** Khi đã biết độ dài L, chia bản mã thành L nhóm và tấn công từng nhóm như một mật mã Caesar đơn lẻ.

Bước 1: Xác định Độ dài Khóa (L)

Đây là bước đột phá quan trọng nhất. Chúng ta phải tìm ra độ dài L của từ khóa (ví dụ: "KEY" có $L = 3$) mà không hề biết bản thân từ khóa đó. Có hai phương pháp chính:

Phép thử Kasiski (Kasiski Examination)

Phương pháp này dựa trên một quan sát thông minh về **sự trùng hợp ngẫu nhiên**. Ta có thể tưởng tượng từ khóa là một từ 3 ký tự `KEY`. Người mã hóa sẽ đóng dấu `K-E-Y-K-E-Y-K-E-Y...` lặp lại liên tục trên bản rõ.

Bây giờ, hãy giả sử trong bản rõ có hai từ `THE` xuất hiện:

- Từ `THE` đầu tiên (ở vị trí 10) tình cờ được đóng dấu bởi `K-E-Y`. Kết quả mã hóa là `DLG`.
- Từ `THE` thứ hai (ở vị trí 70) cũng *tình cờ* được đóng dấu bởi đúng `K-E-Y`. Kết quả mã hóa *cũng* là `DLG`.

Kẻ tấn công không thấy bản rõ, nhưng sẽ thấy chuỗi `DLG` xuất hiện lặp lại ở vị trí 10 và 70. Họ sẽ suy luận: "Khoảng cách giữa chúng là $70 - 10 = 60$. Rất có thể 60 là một **bội số** của độ dài con dấu (độ dài khóa)."

Bằng cách tìm *nhiều* chuỗi lặp lại như vậy (ví dụ: `ABC` lặp lại cách nhau 45, `XYZ` lặp lại cách nhau 75), kẻ tấn công sẽ ghi lại tất cả các khoảng cách (60, 45, 75) và tìm **Ước chung Lớn nhất (GCD)** của chúng.

$$GCD(60, 45, 75) = 15$$

Điều này cho ta một "ứng cử viên" rất mạnh: độ dài khóa L có thể là 3, 5, hoặc 15.

Chỉ số Trùng hợp (Index of Coincidence - IC)

Đây là phương pháp thuần toán học hơn, chính là việc ứng dụng xác suất và "tần suất xuất hiện (fingerprint). Nó đo lường độ gồ ghề của tần suất văn bản. Thông thường, có quy luật như sau:

- **Tiếng Anh chuẩn:** Có tần suất xuất hiện rất gồ ghề (E, T, A nhiều). $IC \approx \mathbf{0.067}$.
- **Văn bản ngẫu nhiên:** Có tần suất xuất hiện phẳng (mọi chữ bằng nhau). $IC \approx \mathbf{0.038}$ (hay 1/26).

Bản mã Vigenere (nếu nhìn tổng thể) sẽ có IC *thấp* ≈ 0.038 vì tần suất xuất hiện đã bị san phẳng.

Tuy nhiên, đây là mấu chốt:

- Nếu ta **đoán sai** độ dài khóa (ví dụ: $L = 5$, trong khi khóa thật là 3) và chia bản mã thành 5 nhóm, mỗi nhóm vẫn là một mớ lộn xộn. IC trung bình của chúng sẽ ≈ 0.038.
- Nếu ta **đoán đúng** độ dài khóa (ví dụ: $L = 3$) và chia bản mã thành 3 nhóm (nhóm 1 gồm các chữ 1, 4, 7...; nhóm 2 gồm các chữ 2, 5, 8...; v.v.), thì **mỗi nhóm** này là một mật mã Caesar! tần suất xuất hiện của nó vẫn gồ ghề y hệt tiếng Anh, chỉ bị dịch chuyển đi.

Do đó, khi ta đo IC của từng nhóm này, chúng sẽ cho kết quả *cao* $\approx \mathbf{0.067}$.

Thuật toán: Ta chạy một vòng lặp, thử đoán L từ 2 đến 20, tức là giả sử độ dài khóa từ khoảng 2 đến 20. Với mỗi L, ta chia bản mã thành L nhóm, tính IC trung bình của các nhóm đó. Giá trị L nào cho ra IC trung bình **cao nhất** (gần 0.067 nhất) chính là độ dài khóa L mà chúng ta cần tìm.

Lý do lựa chọn Chỉ số Trùng hợp (IC) cho bài tập này: Trong khi Phép thử Kasiski rất thông minh, nó phụ thuộc rất nhiều vào *sự may mắn* – cụ thể là sự trùng hợp ngẫu nhiên của (1) từ lặp lại trong bản rõ và (2) từ đó phải thẳng hàng với cùng một đoạn khóa. Nhóm chúng em cũng đã thử sử dụng Phép thử Kasiski trong bài toán này nhưng không đoán ra được giá trị KEY Với một bản mã dài và phức tạp như trong bài tập thử thách, phương pháp IC trở nên **vượt trội** vì nó đáng tin cậy hơn, ít bị ảnh hưởng bởi sự ngẫu nhiên, và cho ta một kết quả rõ ràng dựa trên cơ sở toán học vững chắc, thay vì dựa vào sự trùng hợp may rủi.

Bước 2: Tìm Khóa (Áp dụng tần suất xuất hiện)

Khi đã có L, ta hoàn toàn tìm được ra khóa. Ta biết rằng bản mã được chia thành L nhóm, và mỗi nhóm là một mật mã Caesar độc lập.

(a) **Ta tiến hành tách nhóm (Splitting):** Chia bản mã thành L nhóm con (subgroups) một cách rõ ràng.
- Nhóm 1: Gồm các ký tự ở vị trí $1, 1+L, 1+2L, ...$
- Nhóm 2: Gồm các ký tự ở vị trí $2, 2+L, 2+2L, ...$
- ...
- Nhóm L: Gồm các ký tự ở vị trí $L, L+L, L+2L, ...$

(b) **Tấn công từng nhóm (Frequency Attack):** Ta tấn công Nhóm 1 như một mật mã Caesar. Ta có thể tìm "ngọn núi E" như đã nói, nhưng một phương pháp thống kê hiệu quả hơn là **Phép thử Chi-squared (χ^2)**.

(c) **Phép thử χ^2:** Ta thử "dịch lùi" (decrypt) Nhóm 1 với tất cả 26 khả năng (shift = 0 đến 25). Với mỗi lần thử, ta so sánh tần suất xuất hiện (phân bố tần suất) của kết quả thu được với tần suất xuất hiện chuẩn của tiếng Anh. Phép dịch lùi nào cho ra kết quả *khớp nhất* (có "độ vênh" hay χ^2 *thấp nhất*) sẽ tiết lộ chữ cái khóa.

(d) **Ví dụ:** Nếu thử dịch lùi Nhóm 1 bằng 'G' (shift=6) cho kết quả giống tiếng Anh nhất, thì ký tự khóa đầu tiên là **G**.

(e) **Tổng hợp (Combine):** Lặp lại quá trình này cho L nhóm, ta sẽ thu được L ký tự khóa, và đó chính là từ khóa Vigenere hoàn chỉnh.

2.4 Bài toán thực tế

Đề bài cho ta 1 file sample_encrypt.py để ta thử mã hóa thử, và 1 file ciphertext2.txt để ta decrypt nó, ta tiến hành phân tích file sample_encrypt.py

```
def expand_key(self, text_length: int) -> str:
    key = self.key
    idx = 0
    while True:
```

```
        if text_length > len(key):
            key += key[idx]
            idx += 1
        else:
            break
    return key
```

Phân tích hàm cụ thể:

- Hàm này nhận độ dài của bản rõ (`text_length`) làm đầu vào.
- Nó khởi tạo một biến `key` bằng với từ khóa gốc (`self.key`).
- Vòng lặp `while` sẽ chạy miễn là `key` còn ngắn hơn `text_length`.
- Bên trong vòng lặp, hai dòng code `key += key[idx]` và `idx += 1` là quan trọng để cho độ dài khóa có độ dài bằng từ vựng từ plaintext.
- **Hoạt động:** Giả sử khóa là `"KEY"` (dài 3).
  - Lần 1: `key` = `"KEYK"` (thêm `key[0]`), `idx` = 1.
  - Lần 2: `key` = `"KEYKE"` (thêm `key[1]`), `idx` = 2.
  - Lần 3: `key` = `"KEYKEY"` (thêm `key[2]`), `idx` = 3.
  - Lần 4: `key` = `"KEYKEYK"` (thêm `key[3]`, là 'K'), `idx` = 4.
- **Kết luận:**: Ta thấy rõ độ dài khóa sẽ được mở rộng sao cho ngang với độ dài plaintext.

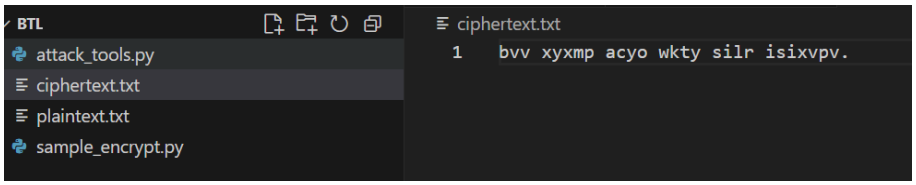
Phân tích hàm `encrypt` Đây là hàm thực hiện logic mã hóa.

```
def encrypt(self, plaintext: str) -> str:
    key = self.expand_key(len(plaintext))
    ciphertext = ""
    idx = 0
    for char in plaintext:
        if char in self.alphabet:
            shift = self.alphabet.index(key[idx])
            ciphertext += self.alphabet[(self.alphabet.index(char) + shift) %
    26]
            idx += 1
        else:
            if char in ALPHABET_UPPER:
                shift = self.alphabet.index(key[idx])
                ciphertext += self.alphabet[
                    (self.alphabet.index(char.lower()) + shift) % 26
                ].upper()
                idx += 1
            else:
                ciphertext += char
    return ciphertext
```

Phân tích:

- Hàm nhận bản rõ (`plaintext`) và lấy về khóa đã mở rộng (`key`).
- Nó sử dụng một biến `idx` riêng biệt để theo dõi vị trí trên `key`.
- **Logic chính (dòng 10-12):** Nếu ký tự là chữ thường, nó thực hiện chính xác phép toán Vigenere chuẩn: $C = (P + K) \pmod{26}$. Quan trọng nhất, nó `idx += 1` để di chuyển đến ký tự khóa tiếp theo.
- **Xử lý chữ hoa (dòng 15-18):** Logic tương tự được áp dụng, chỉ khác là nó bảo toàn việc viết hoa. Nó cũng `idx += 1`.
- **Chi tiết của dòng else (dòng 20):** Nếu ký tự là bất cứ thứ gì khác (khoảng trắng, dấu chấm, số...), nó được thêm thẳng vào bản mã.
- **Kết luận:** Sau khi đưa input và key vào hàm này, đầu ra ta sẽ có được bản ciphertext.

Cùng nhau chạy thử đối với một câu đơn giản, với khóa là "undertale" và ta có ciphertext là "his theme will stay here forever.".



Hình 2: Kết quả ciphertext khi mã hóa thử

Được rồi, sau khi đã chạy thử và hiểu được cách thức hoạt động của Vigenere Cipher, cùng nhau viết script để tấn công dựa trên những gì đã nghiên cứu trên.

Khởi tạo và Cơ sở dữ liệu Trước tiên, ta cần import các thư viện và định nghĩa tần suất xuất hiện tiếng Anh. Dựa trên tài liệu trên mạng, ta có bảng tần suất như sau:

```
import math
from collections import Counter


ENGLISH_FREQUENCIES = { ... } # 'a': 0.08167, ...
ALPHABET = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
IC_ENGLISH = 0.067
IC_RANDOM = 0.038
```

- `from collections import Counter`: Thư viện dùng để giúp ta đếm các kí tự nhanh hơn
- `ENGLISH_FREQUENCIES`: Đây là tần suất tiếng Anh được lấy từ bảng trên. Toàn bộ Bước 2 (Phép thử χ^2) đều dựa trên việc so sánh với cơ sở dữ liệu này.

Table 1.1 Relative letter frequencies of the English language

Letter	Frequency	Letter	Frequency
A	0.0817	N	0.0675
B	0.0150	O	0.0751
C	0.0278	P	0.0193
D	0.0425	Q	0.0010
E	0.1270	R	0.0599
F	0.0223	S	0.0633
G	0.0202	T	0.0906
H	0.0609	U	0.0276
I	0.0697	V	0.0098
J	0.0015	W	0.0236
K	0.0077	X	0.0015
L	0.0403	Y	0.0197
M	0.0241	Z	0.0007

Hình 3: Bảng tần suất xuất hiện của ký tự tiếng Anh

- `IC_ENGLISH`: Đây là điểm chuẩn cho Bước 1. Chúng ta tìm độ dài khóa L nào cho ra IC trung bình gần với con số này nhất.

Hàm `clean_text` Dựa trên phân tích `encrypt` (bỏ qua dấu câu), ta cần một hàm "dọn dẹp" để chuẩn bị dữ liệu cho phân tích thống kê.

```
def clean_text(text: str) -> str:
    return "".join(filter(str.isalpha, text)).lower()
```

- **Tại sao:** Hàm `encrypt` chỉ tăng `idx` của khóa khi gặp chữ cái. Điều này có nghĩa là `ciphertext[0]` được mã hóa bởi `key[0]`, nhưng `ciphertext[5]` (nếu có 2 dấu cách) có thể mới được mã hóa bởi `key[3]`.
- Nếu chúng ta chia nhóm (splitting) mà không dọn dẹp, các nhóm sẽ bị *lệch* (misaligned) so với khóa.
- Bằng cách loại bỏ mọi thứ không phải chữ cái, ta đảm bảo `cleaned_text[0]` khớp `key[0]`, `cleaned_text[1]` khớp `key[1]`, v.v.

Hàm `calculate_ic` Đây là hàm để tính IC

```
def calculate_ic(text: str) -> float:
    N = len(text)
    if N <= 1: return 0.0
    counts = Counter(text)
    numerator = 0.0
```

```
    for char in ALPHABET:
        count = counts.get(char, 0)
        numerator += count * (count - 1)
    denominator = N * (N - 1)
    return numerator / denominator if denominator > 0 else 0.0
```

- **Phân tích:** Hàm này nó đang triển khai định nghĩa xác suất của Chỉ số Trùng hợp (IC), tức là: "Xác suất để chọn ngẫu nhiên hai ký tự trong văn bản và chúng giống hệt nhau."
  - **Mẫu số (Denominator):** `denominator = N * (N - 1)`. Với một văn bản dài N, tổng số cách để chọn 2 ký tự (có thứ tự, ví dụ: (ký tự 1, ký tự 5) và (ký tự 5, ký tự 1)) là $P(N, 2) = N \times (N - 1)$.
  - **Tử số (Numerator):** `numerator += count * (count - 1)`. Đây là tổng số cách để chọn 2 ký tự *giống hệt nhau*. Ví dụ: Nếu văn bản có 5 chữ 'A' (`count = 5`), số cách chọn 2 chữ 'A' (có thứ tự) là $P(5, 2) = 5 \times 4 = 20$. Vòng lặp `for char in ALPHABET` sẽ tính tổng tất cả các khả năng này (số cách chọn 2 chữ 'A', cộng số cách chọn 2 chữ 'B', v.v.).
  - **Kết luận:** Phép chia `numerator / denominator` chính xác là $\frac{\sum_{i=A}^{Z} P(f_i,2)}{P(N,2)}$ (với f_i là tần suất của chữ i), đây chính là công thức chuẩn để tính xác suất trùng hợp (IC). Hàm này trả về một con số duy nhất để cho hàm `find_key_length_ic` biết được "phép đoán" của nó đúng hay sai (gần 0.067 hay 0.038).

Hàm `find_key_length_ic` (Bước 1) Đây là "Nhà khoa học" tự động, thực hiện lần chạy tìm độ dài khóa L.

```
def find_key_length_ic(ciphertext: str, max_key_len=20) -> int:
    cleaned_text = clean_text(ciphertext)
    key_lens_sorted = []
    for key_length in range(2, max_key_len + 1):
        total_ic = 0.0
        for i in range(key_length):
            subgroup = cleaned_text[i::key_length]
            total_ic += calculate_ic(subgroup)

        average_ic = total_ic / key_length
        key_lens_sorted.append((key_length, average_ic, abs(average_ic -
    IC_ENGLISH)))

    key_lens_sorted.sort(key=lambda x: x[2])
    best_key_len = key_lens_sorted[0][0]
    return best_key_len
```

- **Tại sao:** Đây là sự tự động hóa của Bước 1. Thay vì làm thủ công, nó lặp qua tất cả các độ dài L khả thi.

- **Cơ chế:** Dòng `subgroup = cleaned_text[i::key_length]` chính là hành động "chia xô" (sàng lọc) mà ta đã thảo luận.
- **Phân tích `average_ic`:** Đây là logic quan trọng nhất. Ta phải trả lời: "Tại sao lại lấy `total_ic / key_length`?"
  - `total_ic` là *tổng* điểm "gồ ghề" của tất cả các "xô" cộng lại.
  - **Ví dụ:** Giả sử ta đoán $L = 3$ (đoán đúng). Ta sẽ có 3 "xô", mỗi xô đều "gồ ghề" (IC ≈ 0.067). Vậy, `total_ic` $\approx 3 \times 0.067 =$ **0.201**.
  - **Ví dụ:** Giả sử ta đoán $L = 5$ (đoán sai). Ta sẽ có 5 "xô", mỗi xô đều "phẳng" (IC ≈ 0.038). Vậy, `total_ic` $\approx 5 \times 0.038 =$ **0.190**.
  - Vấn đề là: chỉ so sánh hai giá trị `total_ic` (0.201 và 0.190) là rất rủi ro, không rõ ràng và bị sai lệch bởi số lượng "xô".
  - Phép chia `average_ic = total_ic / key_length` là một bước **chuẩn hóa (normalization)**. Nó thay đổi câu hỏi từ "Tổng điểm là bao nhiêu?" (vốn phụ thuộc L) thành "Điểm trung bình *cho mỗi xô* là bao nhiêu?" (độc lập với L).
  - Với phép chia này, kết quả trở nên cực kỳ rõ ràng:
    - Đoán đúng ($L = 3$): `average_ic` $\approx (3 \times 0.067)/3 =$ **0.067** (gần chuẩn).
    - Đoán sai ($L = 5$): `average_ic` $\approx (5 \times 0.038)/5 =$ **0.038** (gần rác).
- **Quyết định:** Dòng `key_lens_sorted.sort(key=lambda x: x[2])` là bộ não. Nó so sánh tất cả các "điểm trung bình" (các giá trị `average_ic` đã được chuẩn hóa) và chọn ra Lần chạy nào (giá trị L nào) có kết quả gần với `IC_ENGLISH` (0.067) nhất.

Hàm `find_best_caesar_shift` (Bước 2) Đây là Hàm phá mã Caesar, công cụ cốt lõi của Bước 2.

```
def find_best_caesar_shift(subgroup_text: str) -> str:
    best_shift = 0
    min_chi_squared = float('inf')
    text_len = len(subgroup_text)

    for shift in range(26):
        chi_squared_sum = 0.0


        shifted_counts = Counter()
        for char in subgroup_text:
            shifted_index = (ALPHABET.index(char) - shift) % 26
            shifted_counts[ALPHABET[shifted_index]] += 1


        for i in range(26):
            char = ALPHABET[i]
            expected_count = ENGLISH_FREQUENCIES[char] * text_len
```

```
            observed_count = shifted_counts.get(char, 0)
            if expected_count == 0: continue
            difference = observed_count - expected_count
            # Calculate (Chi-squared)
            chi_squared_sum += (difference * difference) / expected_count


        if chi_squared_sum < min_chi_squared:
            min_chi_squared = chi_squared_sum
            best_shift = shift

    return ALPHABET[best_shift]
```

- **Tại sao:** Hàm này được gọi L lần (một lần cho mỗi "xô"). Nó phải trả lời: "Chìa khóa Caesar (ký tự) nào đã mã hóa cái xô này?"
- **Cơ chế & Quyết định (Chi-squared):** Hàm này tiến hành bruteforce 26 shifts (từ 'shift = 0' đến 'shift = 25') và so sánh kết quả.

  Hãy tưởng tượng nó nhận được một "xô" (subgroup) là `"XGXA"` (đây là Nhóm 2 từ ví dụ `ATTACKATDAWN` của chúng ta, với khóa thật là 'E' (shift=4)).

  (a) **Lần chạy 1 (shift=0, 'A'):**
  - *"Giả thuyết: Khóa là 'A'."*
  - Dịch lùi `"XGXA"` với shift 0 → `"XGXA"`.
  - **Đo "độ vênh" χ^2:** So sánh "dấu vân tay" của `"XGXA"` (Tần suất: X=50%, G=25%, A=25%) với tiếng Anh chuẩn (E=12.7%, T=9.1%...).
  - **Kết quả:** "Độ vênh" RẤT CAO (ví dụ: $\chi^2 = 500.0$).

  (b) **Lần chạy 2 (shift=1, 'B'):**
  - *"Giả thuyết: Khóa là 'B'."*
  - Dịch lùi `"XGXA"` với shift 1 → `"WFWA"`.
  - **Đo "độ vênh" χ^2:** So sánh "dấu vân tay" của `"WFWA"` (W=50%, F=25%, A=25%) với tiếng Anh chuẩn.
  - **Kết quả:** "Độ vênh" RẤT CAO (ví dụ: $\chi^2 = 480.0$).

  (c) **... (Thử các shift 2, 3) ...**

  (d) **Lần chạy 5 (shift=4, 'E'):**
  - *"Giả thuyết: Khóa là 'E'."*
  - Dịch lùi `"XGXA"` với shift 4 → `"TCTW"`.
  - **Đo "độ vênh" χ^2:** So sánh "dấu vân tay" của `"TCTW"` (T=50%, C=25%, W=25%) với tiếng Anh chuẩn.
  - **Phân tích:** Trong tiếng Anh, **T** là chữ phổ biến thứ 2 (9.1%), C và W cũng khá phổ biến. "Dấu vân tay" này, mặc dù không hoàn hảo (vì mẫu quá ngắn), nhưng trông *hợp lý* hơn nhiều so với `"XGXA"` hay `"WFWA"`.

  - **Kết quả:** Phép toán `(thực tế - kỳ vọng)`^{2} `/ kỳ vọng` cho ra "độ vênh" RẤT THẤP (ví dụ: $\chi^2 = 12.5$).

(e) **... (Tiếp tục thử các shift 5 đến 25) ...**

(f) **Lần chạy 21 (shift=20, 'U'):**

  - *"Giả thuyết: Khóa là 'U'."*
  - Dịch lùi `"XGXA"` với shift 20 → `"DQDP"`.
  - **Đo "độ vênh" χ^2:** So sánh `"DQDP"` (D=50%, Q=25%, P=25%) với tiếng Anh chuẩn (trong đó 'Q' siêu hiếm 0.1%).
  - **Kết quả:** "Độ vênh" CỰC KỲ CAO (ví dụ: $\chi^2 = 1000.0$).

- **Quyết định cuối cùng:** Sau khi chạy 26 Lần chạy, hàm so sánh 26 giá trị "độ vênh" (500.0, 480.0, ..., 12.5, ..., 1000.0). Nó thấy rằng `12.5` là giá trị *nhỏ nhất* (`min_chi_squared`). Giá trị này tương ứng với `best_shift = 4`.
- **Trả về:** Hàm trả về `ALPHABET[4]`, chính là ký tự khóa **'e'**.

Sau khi tìm được khóa, việc decrypt là vô cùng đơn giản, ta thay nhìn logic encrypt là + shifts, decrypt ta sẽ tiến hành - shifts, hoàn tất. Giờ hãy tiến hành chạy thử nghiệm nào

2.5 Chạy thử nghiệm

```
PS D:\Study\Cryptography\BTL> & C:/Users/Phat/AppData/Local/Programs/Python/Python313/python.exe d:/Study/Cryptography/BTL/
attack_tools.py
--- Thử độ dài khóa (Phương pháp IC) ---
Độ dài  2: IC trung bình = 0.04517
Độ dài  3: IC trung bình = 0.04292
Độ dài  4: IC trung bình = 0.04512
Độ dài  5: IC trung bình = 0.05190
Độ dài  6: IC trung bình = 0.04511
Độ dài  7: IC trung bình = 0.04275
Độ dài  8: IC trung bình = 0.04488
Độ dài  9: IC trung bình = 0.04255
Độ dài 10: IC trung bình = 0.06756
Độ dài 11: IC trung bình = 0.04268
Độ dài 12: IC trung bình = 0.04491
Độ dài 13: IC trung bình = 0.04236
Độ dài 14: IC trung bình = 0.04474
Độ dài 15: IC trung bình = 0.05212
Độ dài 16: IC trung bình = 0.04419
Độ dài 17: IC trung bình = 0.04253
Độ dài 18: IC trung bình = 0.04425
Độ dài 19: IC trung bình = 0.04281
Độ dài 20: IC trung bình = 0.06797
Độ dài 21: IC trung bình = 0.04218
Độ dài 22: IC trung bình = 0.04467
Độ dài 23: IC trung bình = 0.04306
Độ dài 24: IC trung bình = 0.04453
Độ dài 25: IC trung bình = 0.05128

--- Xếp hạng độ dài khóa tiềm năng ---
Hạng 24: Độ dài = 10 (IC: 0.06756, cách IC chuẩn: 0.00056)
Hạng 23: Độ dài = 20 (IC: 0.06797, cách IC chuẩn: 0.00097)
Hạng 22: Độ dài = 15 (IC: 0.05212, cách IC chuẩn: 0.01488)
Hạng 21: Độ dài =  5 (IC: 0.05190, cách IC chuẩn: 0.01510)
Hạng 20: Độ dài = 25 (IC: 0.05128, cách IC chuẩn: 0.01572)

==> Độ dài khóa tiềm năng nhất là: 10
```

Hình 4: Kết quả việc tìm độ dài khóa

```
--- Bước 2: Tìm Khóa (Phân tích Tần suất) ---
Nhóm  1/10: Chữ cái khóa tìm được = 'h'
Nhóm  2/10: Chữ cái khóa tìm được = 'e'
Nhóm  3/10: Chữ cái khóa tìm được = 'a'
Nhóm  4/10: Chữ cái khóa tìm được = 'v'
Nhóm  5/10: Chữ cái khóa tìm được = 'e'
Nhóm  6/10: Chữ cái khóa tìm được = 'n'
Nhóm  7/10: Chữ cái khóa tìm được = 'h'
Nhóm  8/10: Chữ cái khóa tìm được = 'e'
Nhóm  9/10: Chữ cái khóa tìm được = 'l'
Nhóm 10/10: Chữ cái khóa tìm được = 'l'

==> Khóa bí mật tìm được (dự đoán): 'heavenhell'
```

Hình 5: Kết quả việc tìm khóa

Sau khi thấy độ dài khóa là 10, tiến hành chạy hàm để chia nhỏ ra thành 10 nhóm, tiến hành brute-force từng ký tự để tìm ra từ giống tiếng Anh nhất, và sau đó, ta dùng hàm decrypt kết hợp với khóa tìm được để giải lại mã như hình dưới đây

```
    The concept of the afterlife has fascinated humanity for millennia, shaping cultures, religions, and philosophies acros
s civilizations. At its core, the afterlife refers to the belief that some form of existence continues after physical death
—a realm or state where the soul, spirit, or consciousness transcends the limitations of the mortal body. Throughout histor
y, human beings have sought answers to the profound questions of what happens after death, and these reflections have given
 rise to a rich diversity of interpretations. From ancient mythologies to modern spiritual movements, the afterlife remains
 a central theme in understanding the nature of existence, morality, and the ultimate destiny of the human soul. In many an
cient civilizations, the afterlife was viewed as a continuation of earthly life, governed by divine or cosmic justice. The
ancient Egyptians, for example, believed in the eternal journey of the soul through the underworld, where the heart of the
deceased was weighed against the feather of Ma’at—the goddess of truth and justice. A pure heart would enter the blissful F
ield of Reeds, while a corrupt one would face annihilation. Similarly, in Greek mythology, souls were judged by the gods of
 dhe underworld and sent to one of three realms: the Elysian Fields for the virtuous, the Asphodel Meadows for ordinary sou
ls, and Tartarus for the wicked. These beliefs reflected not only an attempt to explain death but also to promote moral con
duct in life, reinforcing the idea that actions had consequences beyond the grave. In contrast, Eastern philosophies such a
s Hinduism and Buddhism view the afterlife through the lens of reincarnation—a cyclical process where the soul is reborn in
```

Hình 6: Kết quả đáp án

Và khóa ở đây chính là **heavenhell**, tiến hành decrypt ta ra được 1 đoạn văn liên quan gì đó đến thế giới bên kia (isekai?).
Sau khi xong, nhóm bọn em có thử đưa đoạn văn trên vào lại hàm Encrypt sau đó đối chiếu với ciphertext2.txt được gửi và nhận thấy kết quả trùng khớp. Kết luận **key** là chính xác.

3 SMC Exploitation

3.1 Interception & API Analysis (Use Burp Suite)

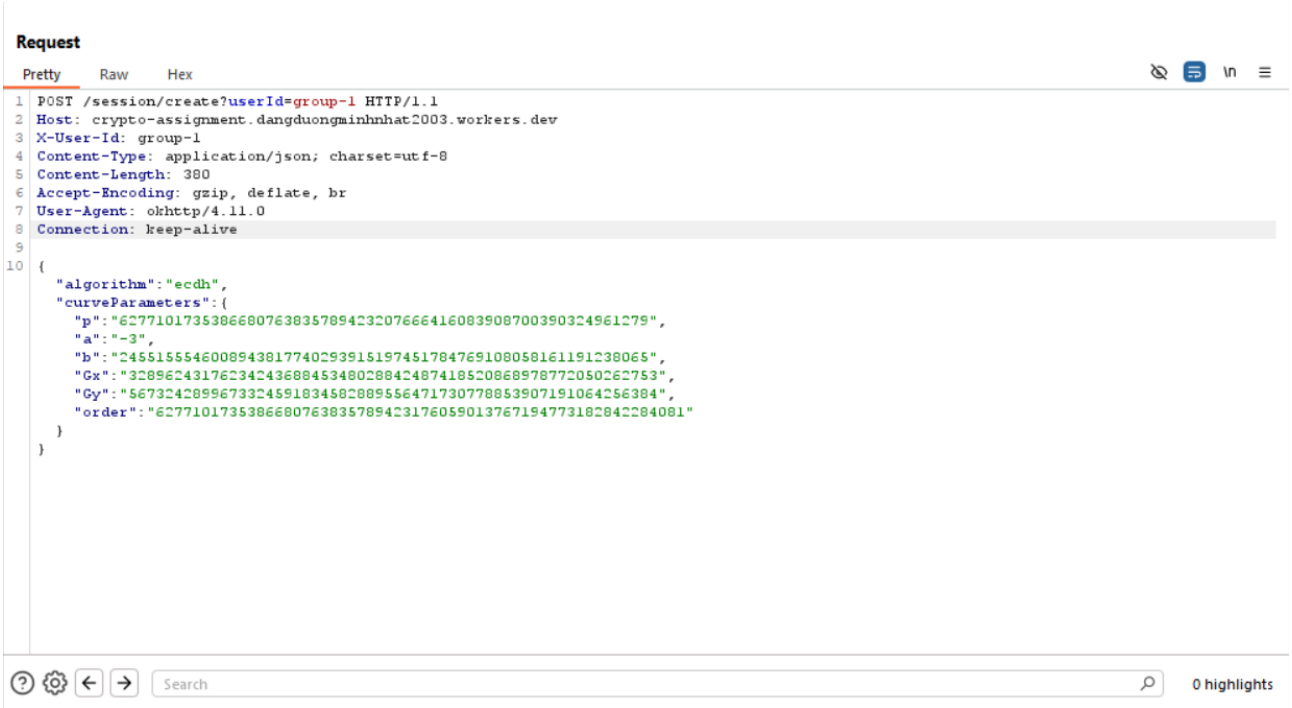
Bảng tổng hợp các API endpoints

API Endpoint	Method	Chức năng	Code Location
/session/create	POST	Tao phiên ECDH	LoginActivity.java
/session/exchange	POST	Trao đổi khóa	LoginActivity.java
/message/send	POST	Gửi tin nhắn mã hóa	ChatActivity.java

Bảng 1: API Endpoints

3.1.1 POST /session/create?userId=group-1

Phần Request



Hình 7: Request create session

userId=group-1: Định danh người dùng/nhóm

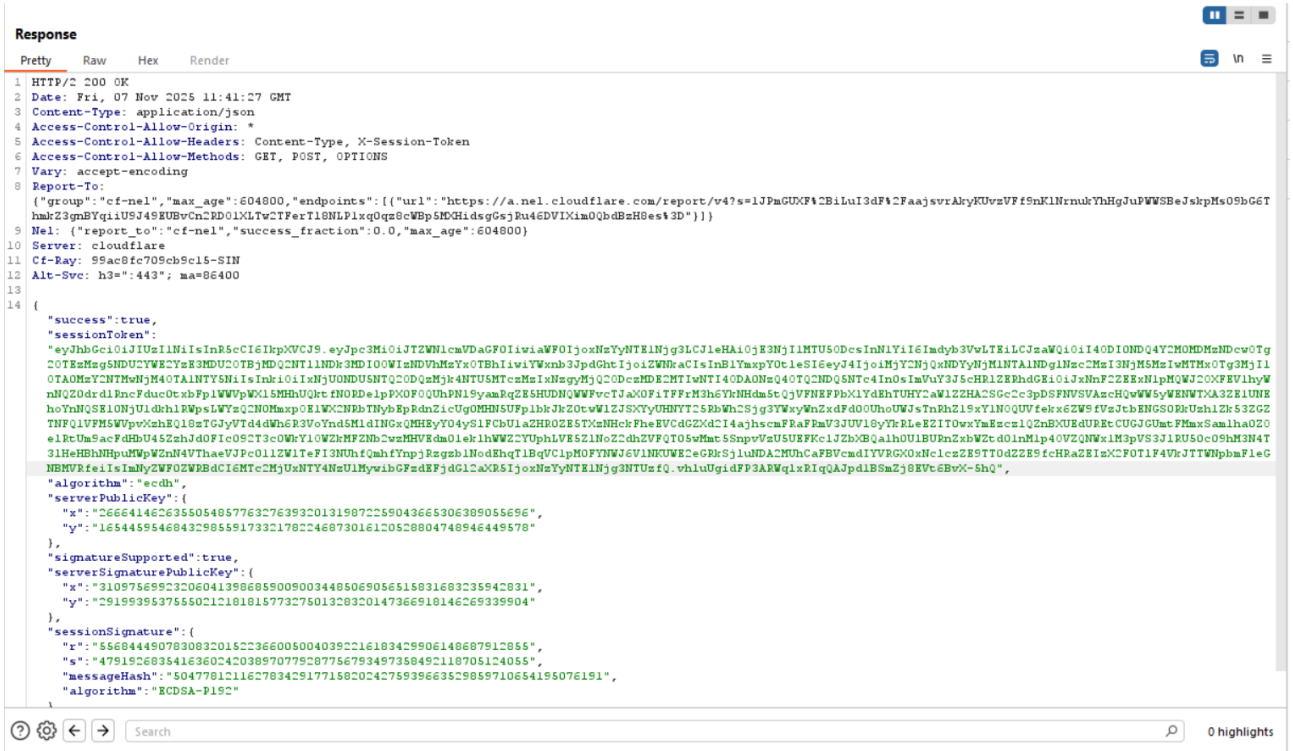
X-User-Id: group-1: Header tùy chỉnh chứa ID người dùng

Content-Type: application/json: Định dạng dữ liệu gửi lên

Content-Length: 380: Kích thước body

```
Body Parameters:
{
  "algorithm": "ecdh",       // Thuật toán trao đổi khóa (Elliptic Curve Diffie-Hellman)
  "curveParameters": {         // Tham số đường cong elliptic
    "p": "62771017353866...",   // Số nguyên tố định nghĩa trường hữu hạn
    "a": "-3",                     // Hệ số a trong phương trình đường cong
    "b": "24551555460089...",      // Hệ số b trong phương trình đường cong
    "Gx": "32896243176234...",    // Tọa độ x của điểm cơ sở (generator)
    "Gy": "56732428996733...",   // Tọa độ y của điểm cơ sở
    "order": "62771017353866..."  // Bậc của điểm cơ sở (số điểm trên đường cong)
  }
}
```

Phần Respone



Hình 8: Respone create session

```
{
  "success": true,                        // Trạng thái thành công
  "sessionToken": "eyJhbGciOiJIUzI...", // JWT token cho phiên làm việc
  "algorithm": "ecdh",                    // Thuật toán được sử dụng
```

```
  "serverPublicKey": {                    // Public key của server
    "x": "26664146263550...",             // Tọa độ x của public key
    "y": "16544595468432..."              // Tọa độ y của public key
  },
  "signatureSupported": true,             // Hỗ trợ chữ ký số
  "serverSignaturePublicKey": {           // Public key dùng cho chữ ký
    "x": "31097569923206...",
    "y": "29199395375550..."
  },
  "sessionSignature": {                   // Chữ ký số cho phiên
    "r": "55684449078308...",             // Thành phần r của chữ ký ECDSA
    "s": "47919268354163...",             // Thành phần s của chữ ký ECDSA
    "messageHash": "50477812116278...",   // Hash của thông điệp được ký
    "algorithm": "ECDSA-P192"             // Thuật toán chữ ký
  },
  "signatureAlgorithm": "ECDSA-P192"      // Thuật toán chữ ký được sử dụng
}
```

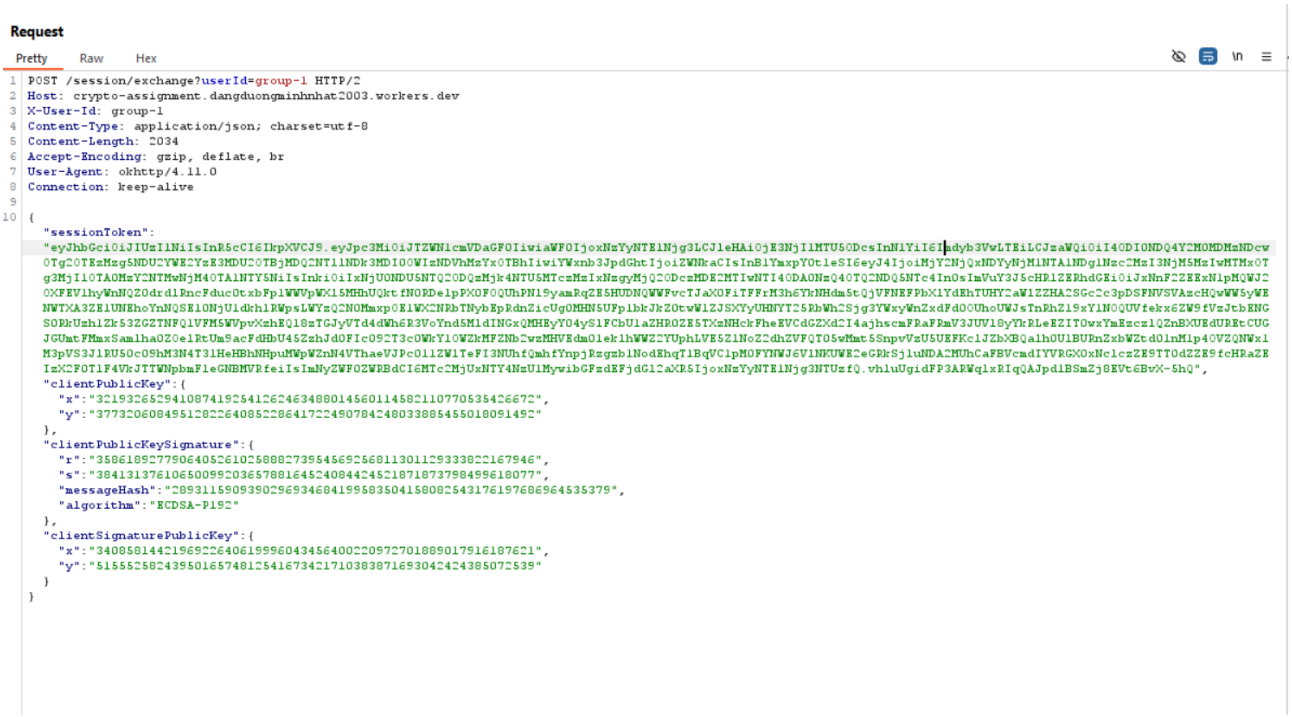
Luồng giao thức: Client gửi tham số ECDH → Server trả về public key + session token + chữ ký → Hai bên tính toán shared secret → Dùng shared secret để mã hóa tin nhắn.

Mapping to Source Code

```java
// File: LoginActivity.java
Request request = new Request.Builder()
    .url("https://crypto-assignment.../session/create?userId=" + this.userId)
    .addHeader("x-user-id", this.userId)
    .addHeader("Content-Type", "application/json")
    .post(RequestBody.create(requestBody.toString(),
    ↪  MediaType.parse("application/json")))
    .build();
```

3.1.2 POST /session/exchange?userId=group-1

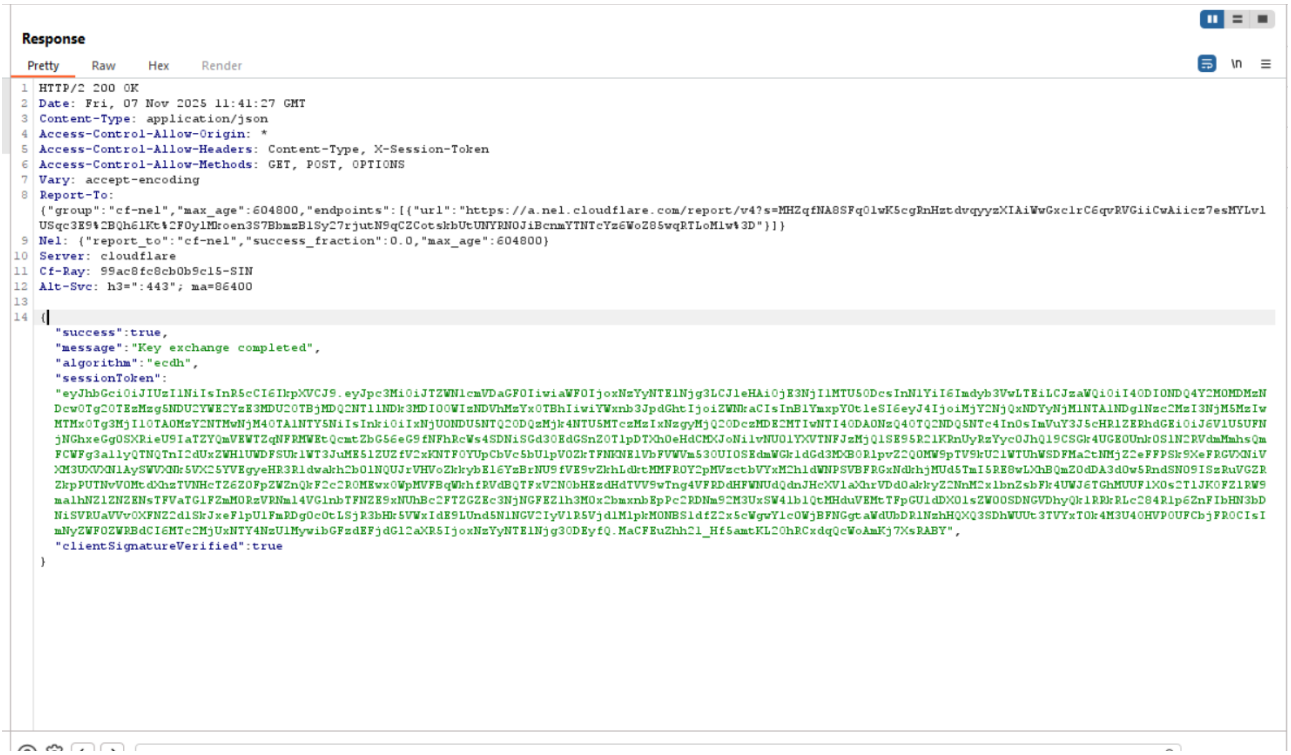
Phần Request



Hình 9: Request exchange session

```
{
  "sessionToken": "...",           // Token phiên từ bước trước, dùng để nhận diện phiên
  "clientPublicKey": {             // Khóa công khai của client cho ECDH
    "x": "...", "y": "..."         // Tọa độ điểm trên đường cong elliptic
  },
  "clientPublicKeySignature": {    // Chữ ký số xác thực clientPublicKey
    "r": "...", "s": "...",        // Thành phần chữ ký ECDSA
    "messageHash": "...",          // Hash của clientPublicKey
    "algorithm": "ECDSA-P192"      // Thuật toán ký
  },
  "clientSignaturePublicKey": {    // Khóa công khai dùng để verify chữ ký
    "x": "...", "y": "..."         // Tọa độ điểm
  }
}
```

Phần Respone



Hình 10: Respone exchange session

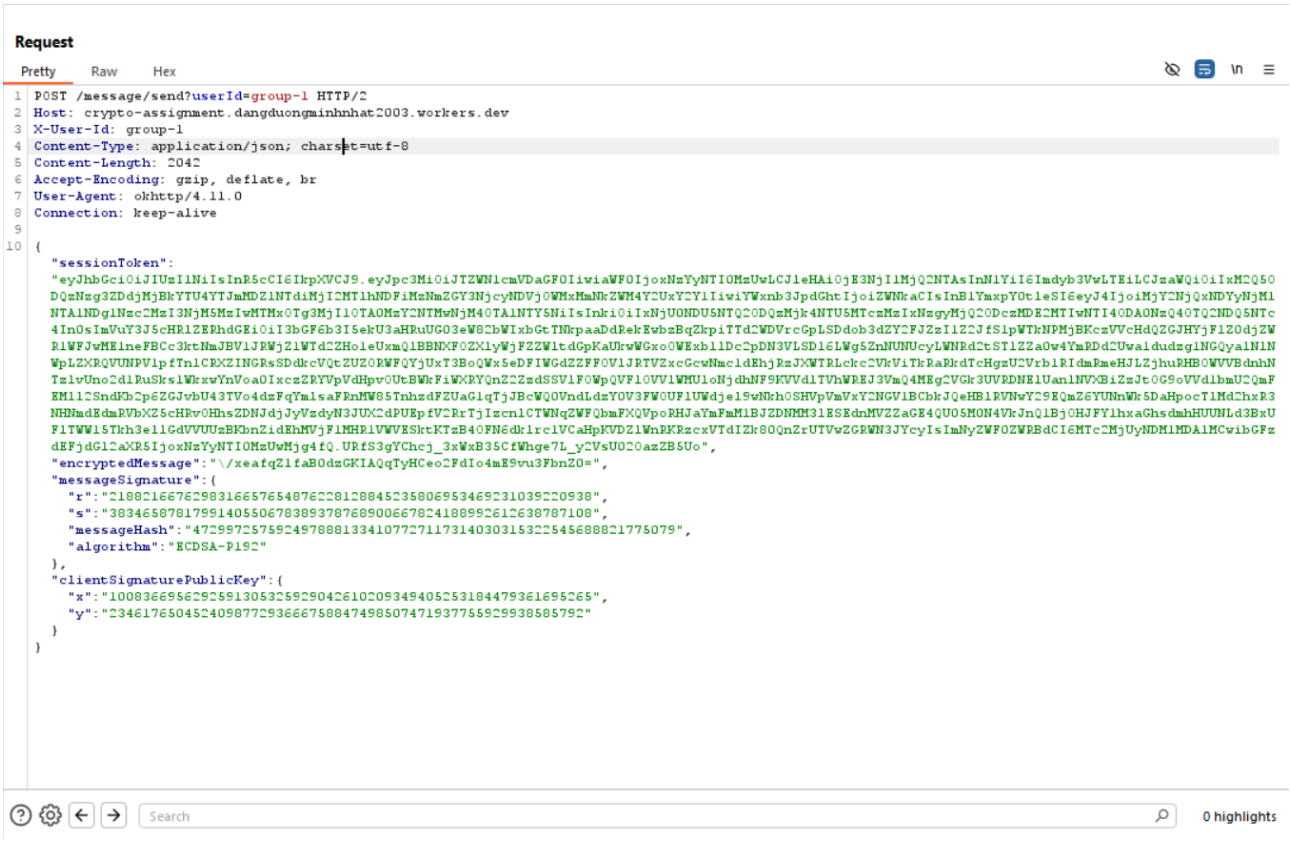
```
{
  "success": true,                  // Trao đổi khóa thành công
  "message": "Key exchange completed", // Thông báo trạng thái
  "algorithm": "ecdh",              // Thuật toán đang sử dụng
  "sessionToken": "...",            // Token phiên (có thể được cập nhật)
  "clientSignatureVerified": true  // Xác nhận chữ ký client hợp lệ
}
```

Mapping to Source Code

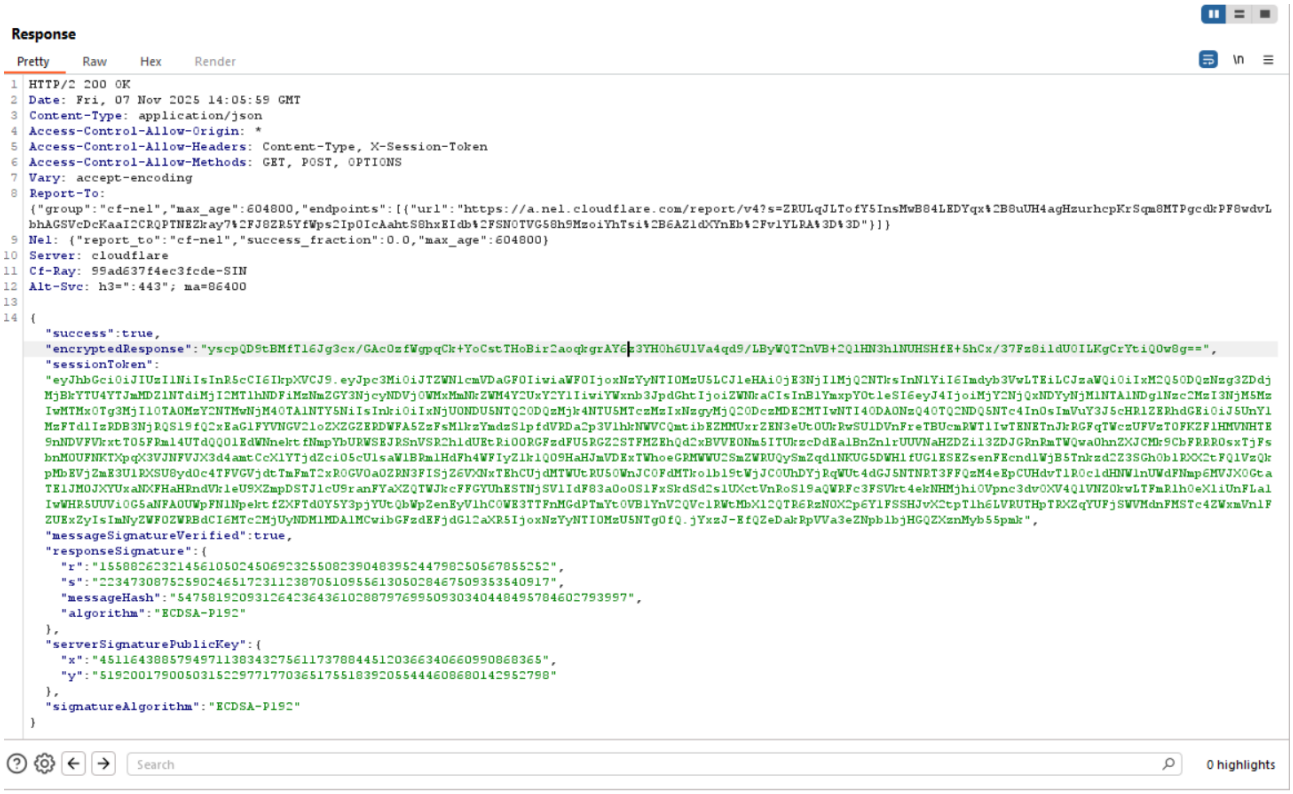
```
// File: LoginActivity.java
this.client.newCall(new Request.Builder()
    .url("https://crypto-assignment.../session/exchange?userId=" + this.userId)
    .addHeader("x-user-id", this.userId)
    .post(RequestBody.create(requestBody.toString(),
    ↪  MediaType.parse("application/json")))
    .build()).enqueue(new Callback() { ... });

// Crypto operations
CryptoManager.SignatureWithPublicKey signResult =
    this.cryptoManager.signMessageEphemeral(publicKeyString);
requestBody.put("clientPublicKeySignature", signResult.signature.toJSON());
```

3.1.3 POST /message/send?userId=group-1

Message: name

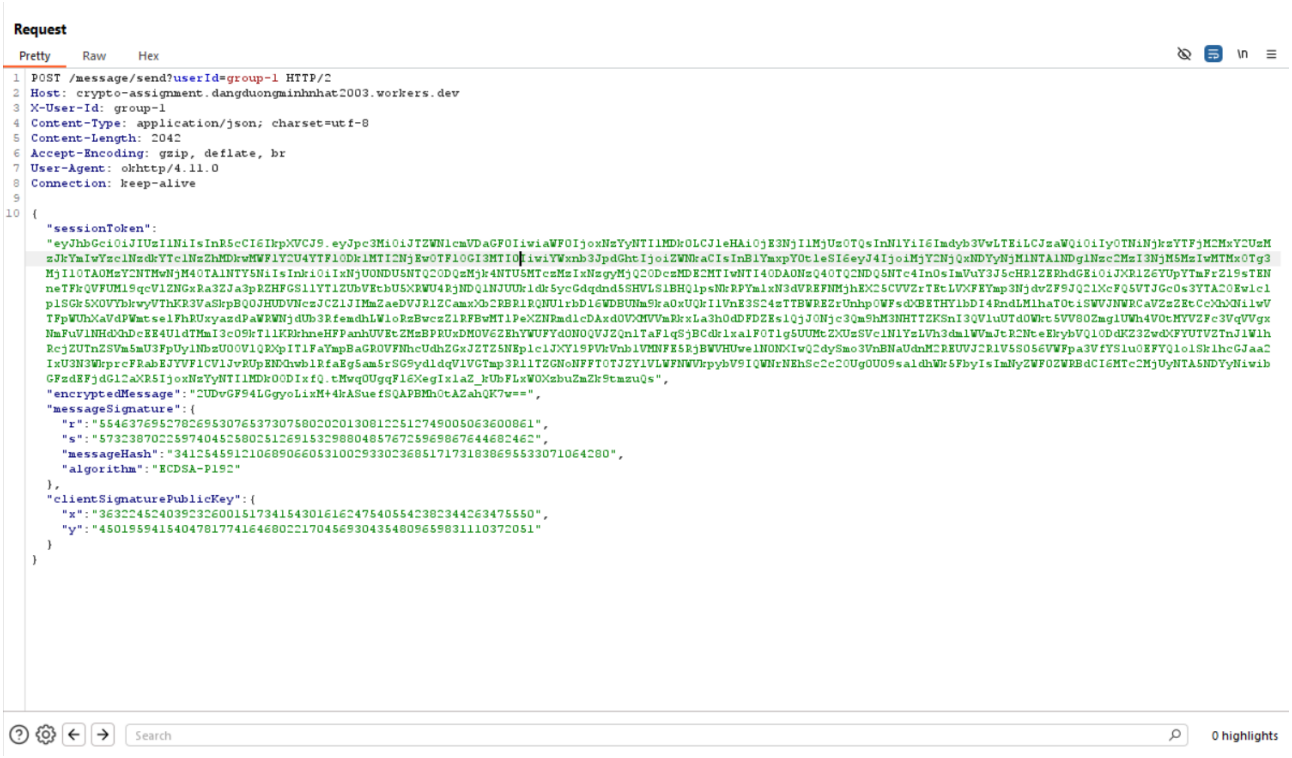


Hình 11: Request Message "name"

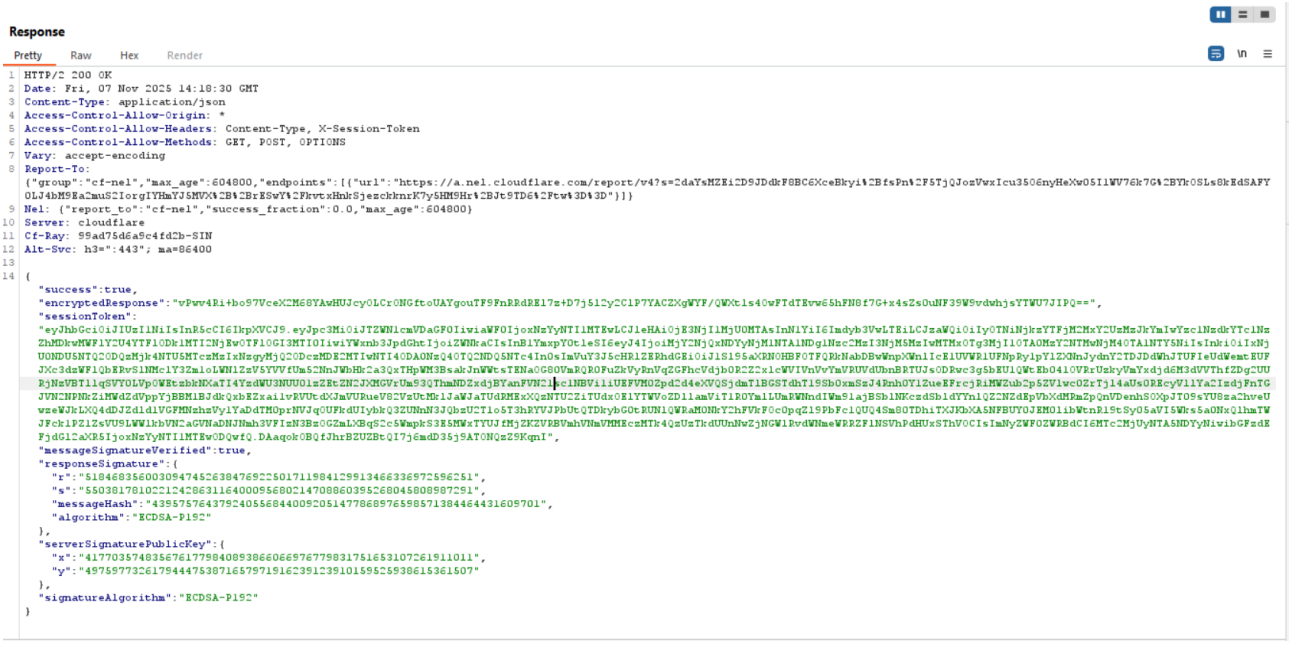


Hình 12: Respone Message "name"

Message: age



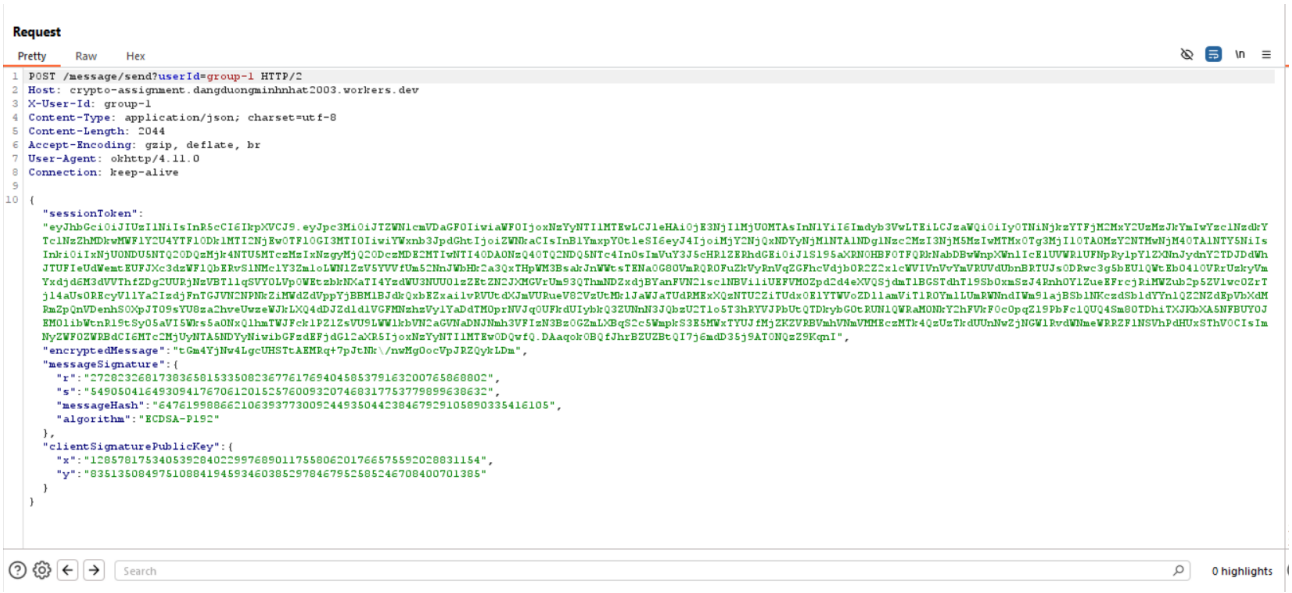
Hình 13: Request Message "age"



Hình 14: Respone Message "age"

Message: location

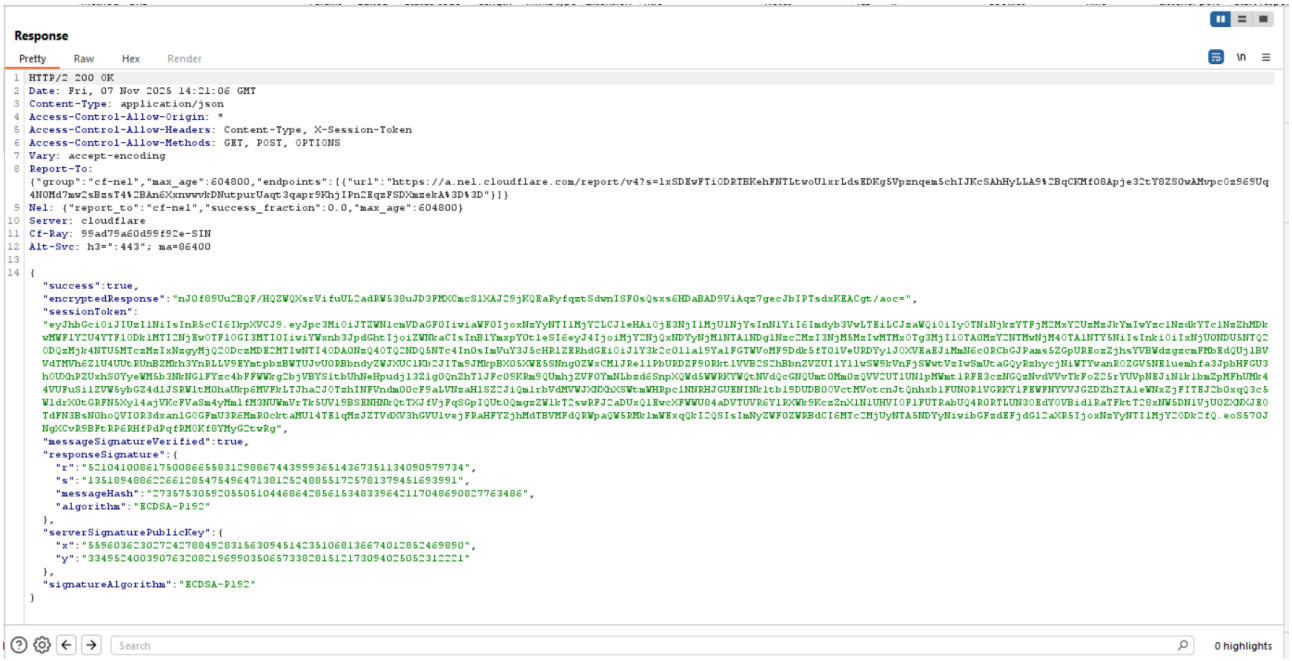
Phần Request



Hình 15: Request Message "location"

```
{
  "sessionToken": "...",            // Token phiên
  "encryptedMessage": "tGm4YjNw4...",  // "location" đã mã hóa
  "messageSignature": {...},        // Chữ ký số cho "location"
  "clientSignaturePublicKey": {...} // Khóa verify chữ ký
}
```

Phần Respone



Hình 16: Respone Message "location"

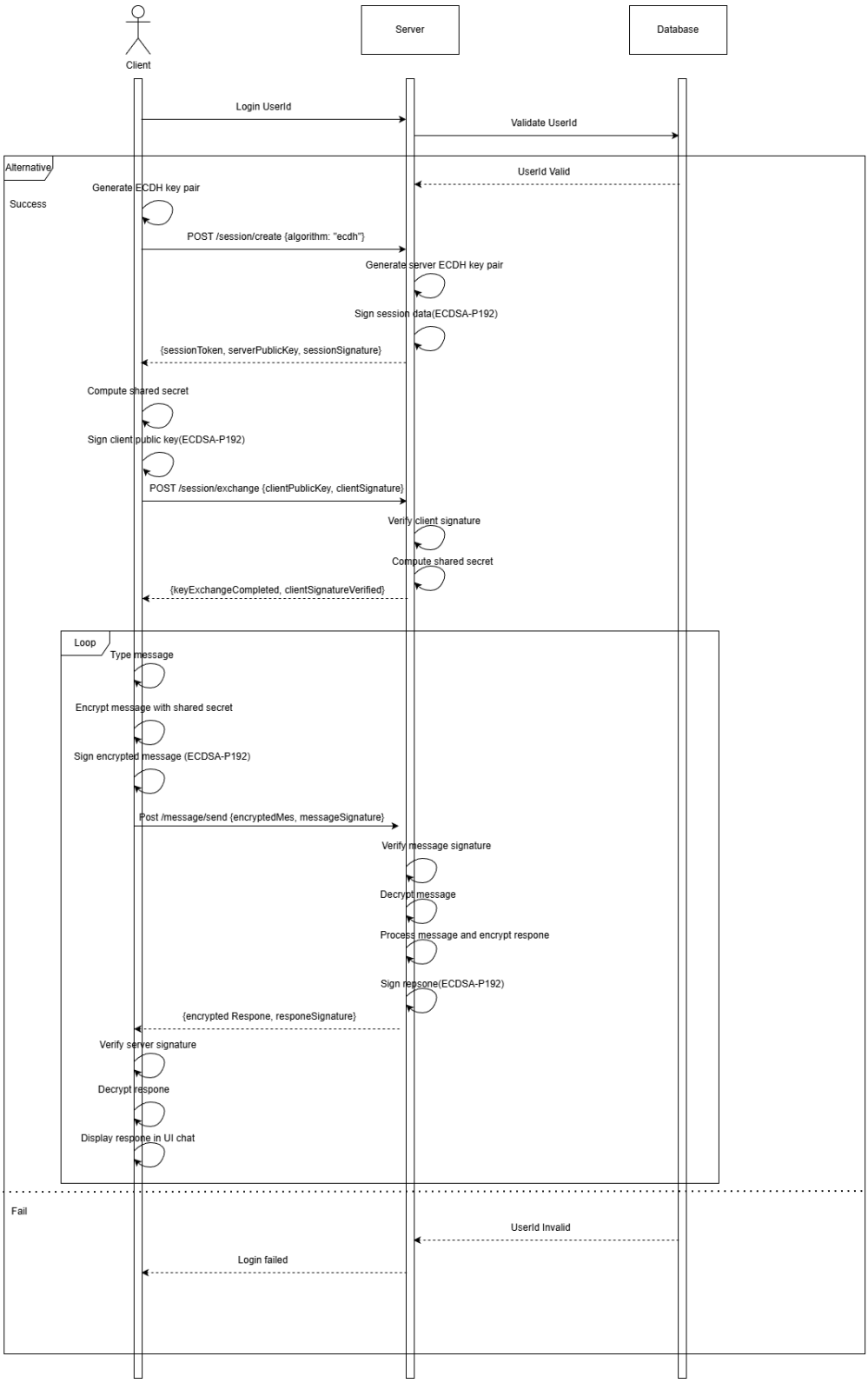
```
{
  "success": true,                    // Thành công
  "encryptedResponse": "nJ0f89Uu2BQF/HQZWQXsrV...", // Phản hồi đã mã hóa
  "sessionToken": "...",              // Token mới
  "messageSignatureVerified": true, // Xác nhận chữ ký "location" hợp lệ
  "responseSignature": {...},       // Chữ ký số phản hồi
  "serverSignaturePublicKey": {...}
}
```

Mapping to Source Code

```
// File: ChatActivity.java
Request request = new Request.Builder()
    .url("https://crypto-assignment.../message/send?userId=" + this.userId)
    .addHeader("x-user-id", this.userId)
    .post(RequestBody.create(requestBody.toString(),
    ↪  MediaType.parse("application/json")))
    .build();

// Crypto operations
CryptoManager.SignatureWithPublicKey signResult =
    this.cryptoManager.signMessageEphemeral(encryptedMessage);
requestBody.put("messageSignature", signResult.signature.toJSON());
```

Sơ đồ hóa luồng giao thức

Diagram: https://drive.google.com/file/d/1TtPYCVfeUdlvLpeXV0XQ0btbYFC8L7RY/view?usp=sharing



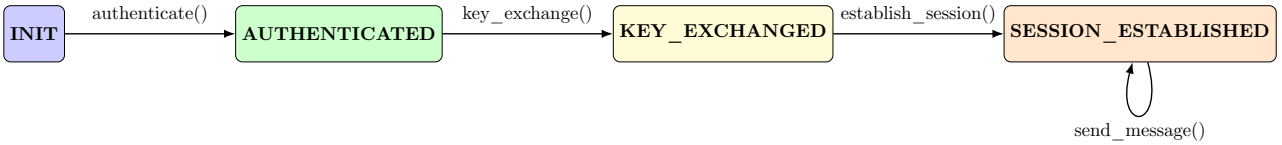
Hình 17: Secure Chat Protocol Sequence Diagram

3.2 Re-implementation & Protocol Reconstruction

Giao thức Secure Messaging Component (SMC) được thiết kế để tạo ra một kênh truyền thông an toàn giữa client và server thông qua mạng không tin cậy. Giao thức này sử dụng các công nghệ mật mã hiện đại bao gồm:

- **ECDH** (Elliptic Curve Diffie-Hellman) cho việc trao đổi khóa
- **ECDSA** (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm) để xác thực
- **AES-256-GCM** để mã hóa tin nhắn
- **PBKDF2-HMAC-SHA256** để dẫn xuất khóa phiên

Dựa trên phân tích Burp Suite ở phần 3.1, nhóm đã tái tạo giao thức thành bốn giai đoạn chính như mô tả trong Hình 18.



Hình 18: Sơ đồ chuyển trạng thái của giao thức SMC

3.2.1 Xác thực (Authentication)

Giai đoạn xác thực là bước đầu tiên và rất quan trọng trong giao thức. Mục đích chính của giai đoạn này là để client xác nhận danh tính với server và tạo một phiên làm việc mới. Ngoài ra, đây cũng là lúc server cung cấp tham số của đường cong elliptic P-192 mà cả hai bên sẽ sử dụng cho tất cả các phép tính mật mã trong phiên này.

Khi giai đoạn xác thực bắt đầu, client phải kiểm tra xem trạng thái hiện tại có phải là INIT không. Nếu không, điều này có nghĩa là client đã gửi yêu cầu xác thực trước đó và không nên gửi lại. Tiếp theo, client khởi tạo đường cong elliptic P-192. Đây là một đường cong được NIST chứng nhận, có modulus nguyên tố p dài 192 bit (tương đương 24 bytes), một điểm sinh G, và một hạng mục order xác định số điểm trên đường cong.

Sau khi tạo đường cong, client tạo một cặp khóa ECDSA dài hạn. Khóa riêng (sk_sign) sẽ được giữ bí mật trên client, trong khi khóa công khai (pk_sign) có thể được gửi cho server. Cặp khóa này sẽ được sử dụng để ký tất cả các tin nhắn từ client, cho phép server xác minh rằng tin nhắn thực sự đến từ client này.

Tiếp theo, client chuẩn bị một payload JSON chứa các tham số đường cong P-192. Payload này bao gồm modulus nguyên tố p, các hệ số a và b của phương trình đường cong, tọa độ của điểm sinh G (Gx và Gy), và hạng mục order của điểm sinh. Tất cả những thông tin này đều được chuyển đổi thành dạng chuỗi để gửi dưới dạng JSON.

Client sau đó gửi một yêu cầu HTTP POST tới điểm cuối /session/create trên server, kèm theo user ID trong tham số truy vấn. Server sẽ nhận yêu cầu này, xác minh các tham số đường cong, và tạo một phiên mới. Server cũng tạo một cặp khóa ECDH cho nó và gửi công khai khóa này cùng với một session token duy nhất trở lại client.

Khi client nhận được phản hồi, trước tiên nó kiểm tra mã trạng thái HTTP. Nếu không phải 200, có nghĩa là server gặp lỗi. Tiếp theo, client phân tích JSON từ phản hồi. Nếu trường success không phải true, có nghĩa là server từ chối yêu cầu vì một lý do nào đó. Nếu tất cả đều ổn, client lưu session token và khóa công khai ECDH của server để sử dụng sau này.

Cuối cùng, client cập nhật trạng thái thành AUTHENTICATED, cho biết rằng nó đã xác thực thành công và sẵn sàng để giai đoạn tiếp theo.

```
Input: user_id (String), server_url (String)
Output: success (Boolean)
PROCEDURE
    if state ≠ INIT then
        OUTPUT "Invalid state: " + state;
        RETURN FALSE;
    end
    curve ← EllipticCurve(P_192_PARAMETERS);
    OUTPUT "Initialized P-192 elliptic curve";
    generate_ECDSA_keypaircurve, sk_sign, pk_sign;
    OUTPUT "Generated long-term identity keys";
    payload ← CREATE_OBJECT();
    payload["algorithm"] ← "ecdh";
    payload["curveParameters"] ← CREATE_OBJECT();
    payload["curveParameters"]["p"] ← STRING(P_192_P);
    payload["curveParameters"]["a"] ← STRING(P_192_A);
    payload["curveParameters"]["b"] ← STRING(P_192_B);
    payload["curveParameters"]["Gx"] ← STRING(P_192_GX);
    payload["curveParameters"]["Gy"] ← STRING(P_192_GY);
    payload["curveParameters"]["order"] ← STRING(P_192_ORDER);
    endpoint ← server_url + "/session/create?userId=" + user_id;
    headers ← CREATE_HEADERS("Content-Type": "application/json", "x-user-id":
     user_id);
    response ← HTTP_POST(endpoint, payload, headers);
    if response.status_code ≠ 200 then
        OUTPUT "HTTP error: " + STRING(response.status_code);
        RETURN FALSE;
    end
```

```
data ← JSON_PARSE(response.body);
if data.success ≠ TRUE then
    OUTPUT "Server rejected authentication";
    return FALSE;
end
token ← data.sessionToken;
if data.serverPublicKey ≠ NULL then
    server_pk_json ← data.serverPublicKey;
    pk_server ← RECONSTRUCT_POINT(server_pk_json.x, server_pk_json.y, curve);
    OUTPUT "Stored server ECDH public key";
end
state ← AUTHENTICATED;
OUTPUT "Authentication successful";
return TRUE;
```

Algorithm 1: authenticate()

3.2.2 Trao đổi khóa (Key Exchange)

Giai đoạn trao đổi khóa là phần quan trọng nhất của giao thức vì nó cho phép client và server thiết lập một shared secret mà chỉ cả hai bên biết. Shared secret này sẽ được sử dụng để dẫn xuất tất cả các khóa mã hóa cho phiên làm việc. Ngoài ra, giai đoạn này cũng bao gồm xác thực kỹ thuật số bằng ECDSA để đảm bảo rằng khóa công khai ECDH thực sự đến từ client đã xác thực.

Giai đoạn trao đổi khóa bắt đầu bằng việc tạo một cặp khóa ECDH tạm thời (ephemeral). Khác với cặp khóa ECDSA dài hạn mà client tạo ở giai đoạn xác thực, cặp khóa ECDH này chỉ tồn tại cho phiên hiện tại. Nếu phiên kết thúc hoặc client khởi tạo trao đổi khóa mới, khóa ECDH này sẽ bị hủy và thay thế bằng cặp khóa mới. Điều này cung cấp tính chất forward secrecy: ngay cả khi kẻ tấn công chiếm được khóa riêng ECDH hoặc khóa ký dài hạn trong tương lai, chúng cũng không thể giải mã các tin nhắn từ phiên quá khứ vì shared secret phụ thuộc vào khóa ECDH ephemeral đã bị hủy.

Tiếp theo, client phải serialize khóa công khai ECDH thành dạng bytes theo tiêu chuẩn X962. Định dạng này bắt đầu với byte 0x04 (chỉ ra điểm không nén), tiếp theo là 24 bytes cho tọa độ x, rồi 24 bytes cho tọa độ y. Client sau đó trích xuất các tọa độ này và chuyển đổi thành một đối tượng JSON chứa hai trường "x" và "y", mỗi trường là một chuỗi biểu diễn số nguyên ở dạng thập phân.

Client tính toán hash SHA256 của chuỗi JSON này (được serialize không có khoảng trắng với separators=(',', ':')). Hash được tính để thay vì ký toàn bộ cấu trúc JSON, chỉ cần ký một giá

trị cố định 32 bytes. Sau đó, hash này được chuyển đổi thành số nguyên và rút gọn modulo với hạng mục order của đường cong P-192, đảm bảo rằng giá trị nằm trong phạm vi hợp lệ cho thuật toán ECDSA.

Tiếp theo là bước ký số. Client sử dụng khóa riêng ECDSA dài hạn (sk_sign) đã được tạo ở giai đoạn xác thực để ký hash của khóa công khai ECDH. Việc sử dụng khóa ký dài hạn thay vì tạo khóa tạm thời mới đảm bảo tính nhất quán trong việc xác thực danh tính client trong suốt phiên làm việc. Chữ ký ECDSA tạo ra hai giá trị r và s, trong đó r là tọa độ x của điểm $R = k \times G$ (với k là số ngẫu nhiên) rút gọn modulo order, và s được tính theo công thức $s = k^{-1} \times (hash + r \times sk_sign) \pmod{o}rder$.

Client chuẩn bị payload JSON chứa session token hiện tại để xác định phiên làm việc, khóa công khai ECDH (clientPublicKey), chữ ký bao gồm các thành phần r và s cùng với hash của thông điệp và thuật toán sử dụng (clientPublicKeySignature), và khóa công khai ECDSA dài hạn (clientSignaturePublicKey) để server có thể xác minh chữ ký. Payload này được gửi tới server thông qua HTTP POST tới endpoint /session/exchange. Server nhận payload và thực hiện hai bước xác minh quan trọng. Đầu tiên, server kiểm tra xem khóa công khai ECDH có nằm trên đường cong P-192 không bằng cách thay tọa độ vào phương trình đường cong $y^2 = x^3 + ax + b(\pmod{p})$. Thứ hai, server xác minh chữ ký ECDSA bằng cách sử dụng khóa công khai được cung cấp trong payload. Nếu cả hai kiểm tra đều thành công, server trả về một phản hồi với trường clientSignatureVerified được đặt thành true. Server có thể cấp một session token mới để tăng cường bảo mật, vì vậy client phải cập nhật token của nó nếu có.

Cuối cùng, khi tất cả điều kiện được thỏa mãn, client chuyển sang trạng thái KEY_EXCHANGED, cho phép tiến hành giai đoạn thiết lập phiên.

Input: None
Output: success (Boolean)

```
PROCEDURE
    if state ≠ AUTHENTICATED then
        RETURN FALSE;
    end
    generate_ECDH_keypaircurve, sk_client, pk_client;
    OUTPUT "Generated ephemeral ECDH keypair";
    pk_bytes ← serialize_ECDH_public_key(pk_client, curve);
    coord_length ← GET_COORDINATE_LENGTH(curve);
    x_coord ← EXTRACT_BYTES(pk_bytes, 1, coord_length);
    y_coord ← EXTRACT_BYTES(pk_bytes, 1 + coord_length, coord_length);
    client_public_key ← CREATE_OBJECT();
    client_public_key["x"] ← STRING(BYTES_TO_INT(x_coord));
    client_public_key["y"] ← STRING(BYTES_TO_INT(y_coord));
    message_str ← JSON_STRINGIFY(client_public_key);
    message_bytes ← ENCODE_UTF8(message_str);
    hash_digest ← SHA256(message_bytes);
    hash_int ← BYTES_TO_INT(hash_digest);
    hash_int_mod ← hash_int mod curve.order;
    generate_ECDH_keypaircurve, sk_sign_eph, pk_sign_eph;
    ECDSA_signcurve, sk_sign_eph, hash_int_mod, r_int, s_int;
    payload ← CREATE_OBJECT();
    payload["sessionToken"] ← token;
    payload["clientPublicKey"] ← client_public_key;
    payload["clientPublicKeySignature"] ← CREATE_OBJECT();
    payload["clientPublicKeySignature"]["r"] ← STRING(r_int);
    payload["clientPublicKeySignature"]["s"] ← STRING(s_int);
    payload["clientPublicKeySignature"]["messageHash"] ← STRING(hash_int_mod);
    payload["clientPublicKeySignature"]["algorithm"] ← "ECDSA-P192";
    payload["clientSignaturePublicKey"] ← CREATE_OBJECT();
    payload["clientSignaturePublicKey"]["x"] ← STRING(pk_sign_eph.x);
    payload["clientSignaturePublicKey"]["y"] ← STRING(pk_sign_eph.y);
    endpoint ← server_url + "/session/exchange?userId=" + user_id;
    response ← HTTP_POST(endpoint, payload, headers);
```

```
if response.status_code ≠ 200 then
    OUTPUT "Key exchange failed";
    return FALSE;
end
data ← JSON_PARSE(response.body);
if data.success ≠ TRUE or data.clientSignatureVerified ≠ TRUE then
    OUTPUT "Server rejected key exchange";
    return FALSE;
end
if data.sessionToken ≠ NULL then
    token ← data.sessionToken;
    OUTPUT "Session token updated";
end
state ← KEY_EXCHANGED;
OUTPUT "Key exchange successful";
return TRUE;
```

Algorithm 2: key_exchange()

3.2.3 Thiết lập phiên (Session Establishment)

Giai đoạn thiết lập phiên là nơi client tính toán shared secret từ trao đổi khóa ECDH và dẫn xuất các khóa mã hóa mà sẽ được sử dụng để bảo vệ tất cả các tin nhắn. Đây là bước chuyển đổi từ các hoạt động mật mã công khai (như ECDH và ECDSA) sang mật mã đối xứng (AES-256).

Khi giai đoạn thiết lập phiên bắt đầu, client phải kiểm tra xem trạng thái có phải KEY_EXCHANGED không. Nếu không, có nghĩa là giai đoạn trao đổi khóa chưa hoàn thành.

Tiếp theo, client tính toán shared secret bằng cách nhân khóa riêng ECDH của nó (sk_client) với khóa công khai ECDH của server (pk_server). Phép nhân này được thực hiện trên đường cong elliptic, kết quả là một điểm trên đường cong. Để lấy shared secret, client chỉ cần lấy tọa độ x của điểm này. Điều quan trọng cần lưu ý là server có thể tính toán cùng một shared secret bằng cách nhân khóa riêng của nó với khóa công khai ECDH của client. Đây là bản chất của ECDH - cả hai bên có thể tính toán cùng một secret mà không cần chia sẻ khóa riêng của chúng với nhau.

Tiếp theo, client sử dụng PBKDF2 (Password-Based Key Derivation Function 2) để dẫn xuất session key từ shared secret. PBKDF2 là một hàm dẫn xuất khóa được thiết kế để có thể chịu đựng các cuộc tấn công brute-force. Nó lặp lại một hàm MAC (HMAC-SHA256 trong trường hợp này) nhiều lần để làm cho việc tính toán khóa trở nên chậm. Cụ thể, client sử dụng salt là 16 bytes của zeros, 1000 lần lặp lại, và chiều dài đầu ra là 32 bytes. Sau khi hoàn thành, client

có được session key sẽ được sử dụng để mã hóa và giải mã tin nhắn.

Cuối cùng, client chuyển sang trạng thái SESSION_ESTABLISHED, cho biết rằng nó đã sẵn sàng để gửi và nhận tin nhắn bảo mật.

Input: None
Output: success (Boolean)

```
PROCEDURE
    if state ≠ KEY_EXCHANGED then
        RETURN FALSE;
    end
    shared_secret ← ECDH_compute_shared_secret(curve, sk_client, pk_server);
    OUTPUT "Computed ECDH shared secret";
    salt ← ZERO_BYTES(16);
    session_key ← PBKDF2_HMAC_SHA256(shared_secret, salt, 1000, 32);
    OUTPUT "Derived session key using PBKDF2";
    state ← SESSION_ESTABLISHED;
    OUTPUT "Session established successfully";
    RETURN TRUE;
```

Algorithm 3: establish_session()

3.2.4 Gửi tin nhắn bảo mật (Send Message)

Giai đoạn gửi tin nhắn bảo mật cho phép client gửi tin nhắn tới server với sự đảm bảo rằng tin nhắn được mã hóa để chỉ server có thể đọc được, đồng thời server có thể xác minh rằng tin nhắn thực sự đến từ client. Điều này được thực hiện bằng cách kết hợp AES-256-GCM để mã hóa có xác thực và ECDSA để ký số.

Khi gửi tin nhắn, client trước tiên kiểm tra xem trạng thái hiện tại có phải là SESSION_ESTABLISHED hay không. Nếu không phải, quá trình gửi tin nhắn sẽ bị từ chối vì session key chưa được thiết lập.

Tiếp theo, client tạo một initialization vector (IV) ngẫu nhiên dài 12 bytes. IV này được sử dụng bởi AES-GCM để đảm bảo rằng ngay cả khi cùng một tin nhắn được gửi hai lần với cùng session key, ciphertext sẽ hoàn toàn khác nhau. IV không cần phải bí mật và sẽ được gửi kèm với ciphertext để server có thể giải mã.

Client sau đó mã hóa plaintext bằng AES-256-GCM sử dụng session key và IV. AES-GCM là một chế độ mã hóa có xác thực tích hợp (Authenticated Encryption with Associated Data - AEAD), không chỉ mã hóa tin nhắn mà còn tự động tạo ra một authentication tag dài 16 bytes. Authentication tag này được sử dụng để xác minh rằng ciphertext không bị chỉnh sửa trong quá trình truyền tải. Đầu ra của AES-GCM là ciphertext ghép liền với authentication tag. Client ghép thêm IV vào phía trước để tạo thành encrypted blob hoàn chỉnh, sau đó mã hóa toàn bộ

bằng Base64.

Để đảm bảo tính xác thực nguồn gốc, client ký chuỗi Base64 của encrypted blob bằng khóa ECDSA dài hạn được tạo từ giai đoạn xác thực. Quy trình ký bao gồm: tính hash SHA256 của chuỗi Base64, chuyển đổi hash thành số nguyên, rút gọn modulo order của đường cong, và cuối cùng tính toán giá trị r và s của chữ ký ECDSA. Chữ ký này cho phép server xác minh rằng tin nhắn thực sự được gửi từ client sở hữu khóa riêng tương ứng.

Client chuẩn bị payload JSON chứa session token để xác định phiên làm việc, IV được mã hóa Base64, encrypted message được mã hóa Base64, chữ ký bao gồm các thành phần r và s cùng với hash của thông điệp và thuật toán sử dụng, và khóa công khai ECDSA để server có thể xác minh chữ ký. Payload này được gửi tới server thông qua HTTP POST tới endpoint /message/send.

Khi server nhận được tin nhắn, nó thực hiện xác minh chữ ký ECDSA bằng khóa công khai được cung cấp, sau đó giải mã ciphertext bằng session key mà server cũng đã dẫn xuất được từ shared secret. Do AES-GCM có tích hợp xác thực, quá trình giải mã sẽ tự động kiểm tra authentication tag và thất bại nếu ciphertext bị chỉnh sửa. Nếu server có dữ liệu để phản hồi, nó sẽ mã hóa dữ liệu đó bằng cùng session key theo cấu trúc tương tự (IV 12 bytes ghép với ciphertext và tag) và gửi trong trường encryptedResponse. Client sau đó tách IV từ 12 bytes đầu tiên và giải mã phần còn lại bằng session key để nhận được phản hồi từ server.

```
Input: plaintext (String)
Output: (success, message_id, decrypted)
PROCEDURE
    if state ≠ SESSION_ESTABLISHED then
        OUTPUT "Invalid state for sending message";
        RETURN (FALSE, NULL, FALSE);
    end
    iv ← RANDOM_BYTES(12);
    plaintext_bytes ← ENCODE_UTF8(plaintext);
    ciphertext_with_tag ← AES_GCM_ENCRYPT(session_key, plaintext_bytes, iv);
    final_encrypted_blob ← iv + ciphertext_with_tag;
    encrypted_msg_b64 ← BASE64_ENCODE(final_encrypted_blob);
    msg_to_sign ← encrypted_msg_b64;
    message_bytes ← ENCODE_UTF8(msg_to_sign);
    hash_digest ← SHA256(message_bytes);
    hash_int ← BYTES_TO_INT(hash_digest);
    hash_int_mod ← hash_int mod curve.order;
    ECDSA_signcurve, sk_sign, hash_int_mod, r, s;
    payload ← CREATE_OBJECT();
    payload["sessionToken"] ← token;
    payload["iv"] ← BASE64_ENCODE(iv);
    payload["encryptedMessage"] ← encrypted_msg_b64;
    payload["messageSignature"] ← CREATE_OBJECT();
    payload["messageSignature"]["r"] ← STRING(r);
    payload["messageSignature"]["s"] ← STRING(s);
    payload["messageSignature"]["messageHash"] ← STRING(hash_int_mod);
    payload["messageSignature"]["algorithm"] ← "ECDSA-P192";
    payload["clientSignaturePublicKey"] ← CREATE_OBJECT();
    payload["clientSignaturePublicKey"]["x"] ← STRING(pk_sign.x);
    payload["clientSignaturePublicKey"]["y"] ← STRING(pk_sign.y);
    endpoint ← server_url + "/message/send?userId=" + user_id;
    response ← HTTP_POST(endpoint, payload, headers);
```

```
if response.status_code ≠ 200 then
    OUTPUT "Send message failed";
    return (FALSE, NULL, FALSE);
end
data ← JSON_PARSE(response.body);
if data.success ≠ TRUE then
    return (FALSE, NULL, FALSE);
end
decrypted ← FALSE;
if data.encryptedResponse ≠ NULL then
    OUTPUT "Server sent encrypted response";
    enc_resp_blob ← BASE64_DECODE(data.encryptedResponse);
    resp_iv ← EXTRACT_BYTES(enc_resp_blob, 0, 12);
    resp_ciphertext ← EXTRACT_BYTES(enc_resp_blob, 12, LENGTH(enc_resp_blob) -
     12);
    resp_plaintext_bytes ← AES_GCM_DECRYPT(session_key, resp_ciphertext,
     resp_iv);
    resp_plaintext ← DECODE_UTF8(resp_plaintext_bytes);
    OUTPUT "Server reply: " + resp_plaintext;
    decrypted ← TRUE;
end
message_id ← data.messageId;
return (TRUE, message_id, decrypted);
```

Algorithm 4: send_message(plaintext)

Các hàm mã hóa chính

3.2.5 Các hàm mật mã cơ bản

(a) Tạo cặp khóa ECDH

Để tạo một cặp khóa ECDH, client cần tạo một số ngẫu nhiên trong phạm vi từ 1 tới hạng mục order của đường cong trừ đi 1. Số này là khóa riêng. Khóa công khai được tạo bằng cách nhân khóa riêng này với điểm sinh G của đường cong. Công khai khóa phải nằm trên đường cong elliptic, vì vậy client kiểm tra điều này.

Input: curve (EllipticCurve)
Output: (private_key, public_key)

```
PROCEDURE
    private_key ← RANDOM_INTEGER(1, curve.order - 1);
    OUTPUT "Generated random private key";
    public_key ← SCALAR_MULTIPLY(private_key, curve.G);
    if NOT IS_POINT_ON_CURVE(public_key, curve) then
        RETURN ERROR;
    end
    RETURN (private_key, public_key);
```

Algorithm 5: generate_ECDH_keypair(curve)

(b) Tính ECDH Shared Secret

Shared secret được tính bằng cách nhân khóa riêng ECDH của mình với công khai khóa ECDH của người kia. Kết quả là một điểm trên đường cong. Chúng ta lấy tọa độ x của điểm này và chuyển nó thành bytes.

Input: curve (EllipticCurve), private_key (Integer), peer_public_key (ECPoint)
Output: shared_secret (Bytes)

```
PROCEDURE
    shared_point ← SCALAR_MULTIPLY(private_key, peer_public_key);
    OUTPUT "Computed shared secret point";
    if shared_point.is_infinity() then
        OUTPUT "Error: Shared secret is point at infinity";
        RETURN ERROR;
    end
    coord_length ← GET_COORDINATE_LENGTH(curve);
    shared_secret ← shared_point.x.to_bytes(coord_length, BIG_ENDIAN);
    RETURN shared_secret;
```

Algorithm 6: ECDH_compute_shared_secret(curve, private_key, peer_public_key)

(c) Ký ECDSA

ECDSA yêu cầu chọn một số k ngẫu nhiên, tính toán điểm $R = k \times G$, rồi tính toán giá trị $r = R \cdot x \pmod{order}$ và $s = k^{-1} \times (hash + r \times sk) \pmod{order}$. Nếu r hoặc s bằng 0, chúng ta phải thử lại với k khác.

Input: curve (EllipticCurve), private_key (Integer), message_hash (Bytes)
Output: (r, s) - Signature components

PROCEDURE
    hash_int ← BYTES_TO_INT(message_hash);
    hash_bits ← BIT_LENGTH(hash_int);
    order_bits ← BIT_LENGTH(curve.order);
    if *hash_bits > order_bits* **then**
        hash_int ← hash_int ≫ (hash_bits - order_bits);
    end
    hash_int ← hash_int mod curve.order;
    if *hash_int = 0* **then**
        hash_int ← 1;
    end
    max_retries ← 10;
    for *attempt ← 1* ***to*** *max_retries* **do**
        k ← RANDOM_INTEGER(1, curve.order - 1);
        R ← SCALAR_MULTIPLY(k, curve.G);
        if *R.is_infinity()* **then**
            continue;
        end
        r ← R.x mod curve.order;
        if *r = 0* **then**
            continue;
        end
        k_inv ← MODULAR_INVERSE(k, curve.order);
        s ← (k_inv · (hash_int + r · private_key)) mod curve.order;
        if *s = 0* **then**
            continue;
        end
        OUTPUT "Generated valid ECDSA signature";
        RETURN (r, s);
    end
    OUTPUT "Failed to generate signature after max retries";
    RETURN ERROR;

Algorithm 7: ECDSA_sign(curve, private_key, message_hash)

3.2.6 Implementation Code

Hệ thống được triển khai bằng Python với cấu trúc module như sau:

- `client_smc.py`: Lớp `ClientSMC` chứa logic giao thức chính

- `crypto_utils.py`: Các hàm mật mã (ECDH, ECDSA, AES-GCM, PBKDF2)

(a) Xác thực (Authentication)

```python
def authenticate(self):
    if self.state != "INIT":
        return False

    # P-192 (SECP192R1)
    p_hex = "0xfffffffffffffffffffffffffffffffeffffffffffffffff"
    a_hex = "-3"
    b_hex = "0x64210519e59c80e70fa7e9ab72243049feb8deecc146b9b1"
    Gx_hex = "0x188da80eb03090f67cbf20eb43a18800f4ff0afd82ff1012"
    Gy_hex = "0x07192b95ffc8da78631011ed6b24cdd573f977a11e794811"
    order_hex = "0xffffffffffffffffffffffff99def836146bc9b1b4d22831"

    curve_params_internal = {
        "p": p_hex, "a": a_hex, "b": b_hex,
        "Gx": Gx_hex, "Gy": Gy_hex, "order": order_hex
    }
    self.curve = EllipticCurve(**curve_params_internal)

    # ECDSA
    self.sk_sign, self.pk_sign = ecdh_generate_keypair(self.curve)

    # Payload
    payload = {
        "algorithm": "ecdh",
        "curveParameters": {
            "p": str(int(p_hex, 16)),
            "a": a_hex,
            "b": str(int(b_hex, 16)),
            "Gx": str(int(Gx_hex, 16)),
            "Gy": str(int(Gy_hex, 16)),
            "order": str(int(order_hex, 16))
        }
    }

    endpoint = f"{self.server_url}/session/create?userId={self.user_id}"
    headers = {"Content-Type": "application/json", "x-user-id": self.user_id}
    response = requests.post(endpoint, json=payload, headers=headers)
    data = response.json()

    if not data.get("success", False):
        return False

    self.token = data.get("sessionToken")

    if "serverPublicKey" in data:
```

```
        server_pub_json = data["serverPublicKey"]
        sx = int(server_pub_json["x"])
        sy = int(server_pub_json["y"])
        self.pk_server = ECPoint(sx, sy, self.curve)

    self.state = "AUTHENTICATED"
    return True
```

Listing 1: Hàm authenticate()

(b) Trao đổi khóa (Key Exchange)

```
def key_exchange(self):
    if self.state != "AUTHENTICATED":
        return False

    #Generate Ephemeral ECDH Key Pair
    sk_c, pk_c = ecdh_generate_keypair(self.curve)
    self.sk_client = sk_c
    self.pk_client = pk_c

    pk_c_bytes = serialize_ecdh_public_key(pk_c, self.curve)
    coord_length = self.curve.get_coord_length()  # 24 bytes cho P-192
    x_coord = pk_c_bytes[1:1+coord_length]
    y_coord = pk_c_bytes[1+coord_length:]

    client_public_key = {
        "x": str(int.from_bytes(x_coord, 'big')),
        "y": str(int.from_bytes(y_coord, 'big'))
    }

    # Message & Hash
    message_str = json.dumps(client_public_key, separators=(',', ':'))
    message_bytes = message_str.encode('utf-8')
    hash_digest_raw = hash_sha256(message_bytes)
    hash_int = int.from_bytes(hash_digest_raw, 'big')
    hash_int_mod = hash_int % self.curve.order
    order_bytes_len = (self.curve.order.bit_length() + 7) // 8
    hash_for_sign = hash_int_mod.to_bytes(order_bytes_len, 'big')

    #Sign
    r_int, s_int = ecdsa_sign(self.curve, sk_sign, hash_for_sign)

    payload = {
        "sessionToken": self.token,
        "clientPublicKey": client_public_key,
        "clientPublicKeySignature": {
            "r": str(r_int),
            "s": str(s_int),
```

```
            "messageHash": str(hash_int_mod),
            "algorithm": "ECDSA-P192"
        },
        "clientSignaturePublicKey": {
            "x": str(pk_sign.x),
            "y": str(pk_sign.y)
        }
    }

    endpoint = f"{self.server_url}/session/exchange?userId={self.user_id}"
    headers = {"Content-Type": "application/json", "x-user-id": self.user_id}
    response = requests.post(endpoint, json=payload, headers=headers)
    data = response.json()

    if not data.get("clientSignatureVerified"):
        return False

    if "sessionToken" in data:
        self.token = data["sessionToken"]

    self.state = "KEY_EXCHANGED"
    return True
```

Listing 2: Hàm key_exchange()

(c) Thiết lập phiên (Session Establishment)

```
def establish_session(self):
    if self.state != "KEY_EXCHANGED":
        return False

    shared_secret = ecdh_compute_shared_secret(
        self.curve, self.sk_client, self.pk_server)

    salt = b'\x00' * 16  # 16 bytes zeros
    self.session_key = kdf_pbkdf2(
        shared_secret, salt, iterations=1000, length=32)
    # session_key = 32 bytes cho AES-256

    self.state = "SESSION_ESTABLISHED"
    return True
```

Listing 3: Hàm establish_session()

(d) Gửi tin nhắn (Send Message)

```
def send_message(self, plaintext):
    if self.state != "SESSION_ESTABLISHED":
        return False, None, False

```

```
    from crypto_utils import aes_256_gcm_encrypt, aes_256_gcm_decrypt

    # Encrypt (AES-GCM)
    iv = random_bytes(12)  # 12 bytes IV
    plaintext_bytes = plaintext.encode('utf-8')
    ciphertext_with_tag = aes_256_gcm_encrypt(
        self.session_key, plaintext_bytes, iv)

    #IV || ciphertext || tag
    final_encrypted_blob = iv + ciphertext_with_tag
    encrypted_msg_b64 = base64_encode(final_encrypted_blob)

    # Sign
    msg_to_sign_str = encrypted_msg_b64
    message_bytes = msg_to_sign_str.encode('utf-8')
    hash_digest_raw = hash_sha256(message_bytes)

    hash_int = int.from_bytes(hash_digest_raw, 'big')
    hash_int_mod = hash_int % self.curve.order

    order_bytes_len = (self.curve.order.bit_length() + 7) // 8
    hash_for_sign = hash_int_mod.to_bytes(order_bytes_len, 'big')

    r, s = ecdsa_sign(self.curve, self.sk_sign, hash_for_sign)

    payload = {
        "sessionToken": self.token,
        "iv": base64_encode(iv),
        "encryptedMessage": encrypted_msg_b64,
        "messageSignature": {
            "r": str(r), "s": str(s),
            "messageHash": str(hash_int_mod), "algorithm": "ECDSA-P192"
        },
        "clientSignaturePublicKey": {
            "x": str(self.pk_sign.x), "y": str(self.pk_sign.y)
        }
    }

    endpoint = f"{self.server_url}/message/send?userId={self.user_id}"
    headers = {
        "Authorization": f"Bearer {self.token}",
        "Content-Type": "application/json",
        "x-user-id": self.user_id
    }
    response = requests.post(endpoint, json=payload, headers=headers)
    data = response.json()

    if not data.get("success", False):
```

```
        return False, None, False

    # Decrypt
    decrypted_success = False
    if "encryptedResponse" in data:
        enc_resp_b64 = data["encryptedResponse"]
        enc_resp_blob = base64_decode(enc_resp_b64)

        resp_iv = enc_resp_blob[:12]
        resp_ciphertext = enc_resp_blob[12:]

        resp_plaintext_bytes = aes_256_gcm_decrypt(
            self.session_key, resp_ciphertext, resp_iv)
        resp_plaintext = resp_plaintext_bytes.decode('utf-8')
        decrypted_success = True

    msg_id = data.get("messageId", 0)
    return True, msg_id, decrypted_success
```

Listing 4: Hàm send_message()

3.2.7 Kết quả thử nghiệm

Sau khi hoàn tất việc cài đặt lại giao thức phía Client, nhóm tiến hành chạy thử nghiệm để kết nối tới Server và gửi các tin nhắn yêu cầu. Kết quả bên dưới cho thấy Client đã thực hiện thành công toàn bộ quy trình bắt tay (handshake), thiết lập khóa phiên và giải mã tin nhắn bảo mật.

Kết quả của terminal với messages:

```
test_messages = [
        "Hello, Secure Chat!",
        "This is message 2",
        "Final test message"
    ]
```

```
======================================================================
  SMC Client Re-implementation
======================================================================

Configuration:
  User ID:     group-1
  Server URL:  https://crypto-assignment.dangduongminhnhat2003.workers.dev

======================================================================
    Initialize Client
======================================================================
[] Client initialized
    State: INIT

======================================================================
    Authenticate
======================================================================
[AUTH] Created curve with p=192 bits
[AUTH] Generating long-term ECDSA signing key...
[AUTH] Sending to https://crypto-assignment.dangduongminhnhat2003.workers.dev/
    session/create?userId=group-1
[AUTH] Captured Server ECDH Public Key
[AUTH] Authenticated successfully

======================================================================
    Key Exchange (ECDH P-192)
======================================================================
[KX] Sending payload...
[KX] Server verified client signature successfully
[KX] Session Token updated

======================================================================
    Establish Session
======================================================================
[SESSION]     Session established (PBKDF2 Key Derived)

======================================================================
    Send Secure Messages
======================================================================
[SEND] Sending message: 'Hello, Secure Chat!'
[SEND] Server responded with encrypted data!
[SEND] SERVER REPLY: Hey there, fellow cryptographer!
[SEND] Sending message: 'This is message 2'
[SEND] Server responded with encrypted data!
[SEND] SERVER REPLY: I'm ageless... born from pure JavaScript energy     (
    somewhere in 2024).
[SEND] Sending message: 'Final test message'
[SEND] Server responded with encrypted data!
```

```
[SEND] SERVER REPLY: I'm ageless... born from pure JavaScript energy     (
    somewhere in 2024).

[] Sent 3/3 messages successfully
[] Attempted to decrypt 3 server response(s)

======================================================================
  Summary
======================================================================

[] Client State:           SESSION_ESTABLISHED
[] Messages Sent:          3

[] FULL FLOW COMPLETED SUCCESSFULLY
```

3.3 Exploitation & Proof-of-Concept

3.3.1 Xác định lỗ hổng

Đối với **userId=group-1**, ta tóm tắt lại luồng hoạt động chính của ứng dụng SMC như sau:

(a) Client gửi tên thuật toán trao đổi khóa (ECDH) và các tham số đường cong (P-192) cho Server.

(b) Client và Server sử dụng ECDH private key (dài hạn) để tính ra public key rồi gửi cho nhau.

(c) Client và Server cùng tính shared secret bằng private key của mình và public key của đối phương.

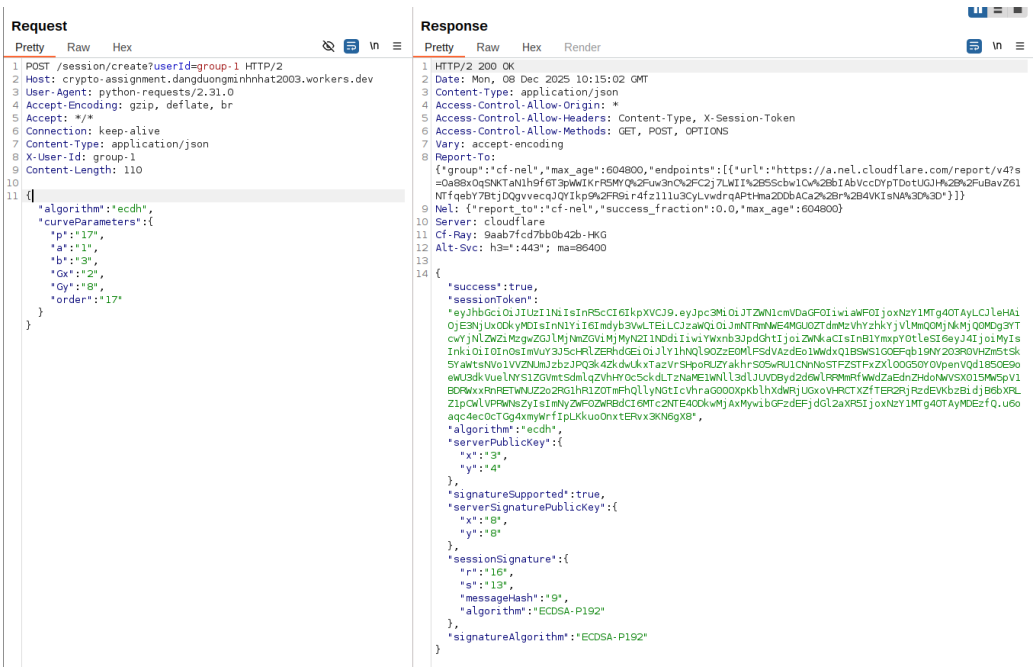
(d) Session key được sinh từ shared secret bằng thuật toán dẫn xuất khóa (PBKDF2-HMAC-SHA256).

(e) Client và Server sử dụng session key để mã hóa và giải mã các tin nhắn bằng thuật toán AES-GCM.

Ở gói tin đầu tiên, Client gửi các tham số của đường cong P-192 cho Server. Đây là một hành vi dư thừa và bất thường vì thông thường Client chỉ cần gửi mã tên của đường cong thỏa thuận, còn Server sẽ đọc ra các tham số đã được cài đặt sẵn trong code để tính toán.

Điều này dẫn đến câu hỏi liệu Server có trực tiếp sử dụng các giá trị này để tính toán public key? Nói cách khác, liệu Server có đang cho phép Client lựa chọn đường cong tùy ý?

Ta sẽ kiểm chứng bằng cách sử dụng Burp Suite để gửi một gói tin create với các tham số của một đường cong Elliptic khác.



Kết quả cho thấy, Server chấp nhận một đường cong bậc 17 và thực hiện tính public key P=kG trên đó (k là private key). Vì kết quả P chỉ có thể là 1 trong 17 điểm, ta dễ dàng vét cạn với 17 giá trị k' để tìm ra phương trình: $k \equiv k' \pmod{17}$.

```
p = 17
a = 1
b = 3
Gx, Gy = 2, 8
Px, Py = 3, 4

E = EllipticCurve(GF(p), [a, b])
order = E.order()

G = E(Gx, Gy)
P = E(Px, Py)

Q = E(0)
for k in range(order):
    if Q == P:
        print(f"k = {k} (mod {order})")
        break
    Q += G
```

```
k = 9 (mod 17)
```

Đến đây, ta có thể kết luận rằng ứng dụng đang tồn tại lỗ hổng *Tấn công đường cong không hợp lệ* (Invalid curve attack), cho phép kẻ tấn công gửi các đường cong Elliptic với nhóm cyclic tùy ý lên Server và nhận về kết quả của phép nhân private key với điểm sinh của nhóm đó. Nếu chọn được các nhóm cyclic yếu, nghĩa là bậc của nó đủ nhỏ để có thể vét cạn giá trị k, kẻ tấn công sẽ thu thập được các phương trình đồng dư của k với modulo nhỏ, cuối cùng khôi phục lại private key của Server và giải mã bất cứ tin nhắn nào. Điều này là do private key được Server sử dụng trực tiếp cho việc dẫn xuất session key với mọi Client.

3.3.2 Khai thác lỗ hổng

Để khai thác lỗ hổng này, ta sẽ lập trình để tự động hóa việc gửi gói tin create với các nhóm cyclic bậc p_i khác nhau, giải bài toán logarit rời rạc để tìm ra các giá trị k' tương ứng và cuối cùng tính k bằng *Định lí thặng dư Trung Hoa* (Chinese Remainder Theorem).

Trước hết, cần trả lời 2 câu hỏi sau:

(a) *Cần ít nhất bao nhiêu phương trình đồng dư khác nhau để khôi phục được giá trị có độ lớn 192 bit?*

(b) *Làm sao để tìm ra nhóm cyclic của đường cong với bậc nguyên tố?*

Đối với câu hỏi 1: Định lý thặng dư Trung Hoa phát biểu rằng một hệ phương trình đồng dư của ẩn x theo các modulo $p_1, p_2, ..., p_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{p_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{p_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{p_n} \end{cases}$$

Thì hệ phương trình này có nghiệm duy nhất theo modulo $M = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$.

Như vậy, để khôi phục được 192 bit của private key, tức là tìm k duy nhất theo modulo 2^{192}, thì ta cần thu thập số phương trình đồng dư sao cho $\prod p_i \geq 2^{192}$. Để dễ dàng thỏa mãn điều kiện đôi một nguyên tố cùng nhau, ta sẽ chọn các p_i nguyên tố. Theo tính toán, cần 32 phương trình đồng dư nếu chọn p bắt đầu từ 13.

Đối với câu hỏi 2: Có nhiều cách để giải quyết, nhưng ở đây ta sẽ chọn cách đơn giản, dễ hiện thực nhất vì ta có thể lựa chọn các nhóm điểm $E(F_p)$ với p nhỏ để tính toán nhanh.

Định lý Hasse về đường cong Elliptic E trên trường hữu hạn F_p phát biểu rằng $|N-(q+1)| \leq 2\sqrt{q}$, với N là số điểm trên $E(F_p)$ bao gồm điểm vô cực. Do đó, nếu ta thực hiện tìm kiếm trên p nhỏ thì bậc N sẽ không vượt quá $p + 1 + 2\sqrt{q}$.

Cụ thể như sau:

(a) Chuẩn bị 1 mảng các p nguyên tố nhỏ tăng dần. Đây là các trường hữu hạn F_p mà ta thực hiện tìm đường cong có bậc nguyên tố.

(b) Duyệt các đường cong E không suy biến với a, b trong khoảng $[0, p-1]$, chọn 1 điểm bất kì thuộc $E(F_p)$ làm điểm sinh G. Lần lượt cộng G vào cho đến khi gặp điểm vô cực, ta sẽ có được bậc N của nhóm cyclic sinh bởi G (Lưu ý rằng 1 nhóm $E(F_p)$ có thể chứa 1 hoặc nhiều nhóm cyclic với các bậc khác nhau).

(c) Kiểm tra nếu N là nguyên tố và không trùng với modulo của các phương trình đồng dư trước đó thì chọn nhóm cyclic này.

(d) Thực hiện gửi các tham số p, a, b, G, N đến Server. Thực hiện vét cạn k' trong khoảng $[1, N-1]$ ta có được phương trình đồng dư $k \equiv k' \pmod{N}$. Lưu lại cặp (k', N) để tính k sau này và để bỏ qua các nhóm cyclic trùng N trong quá trình tìm kiếm.

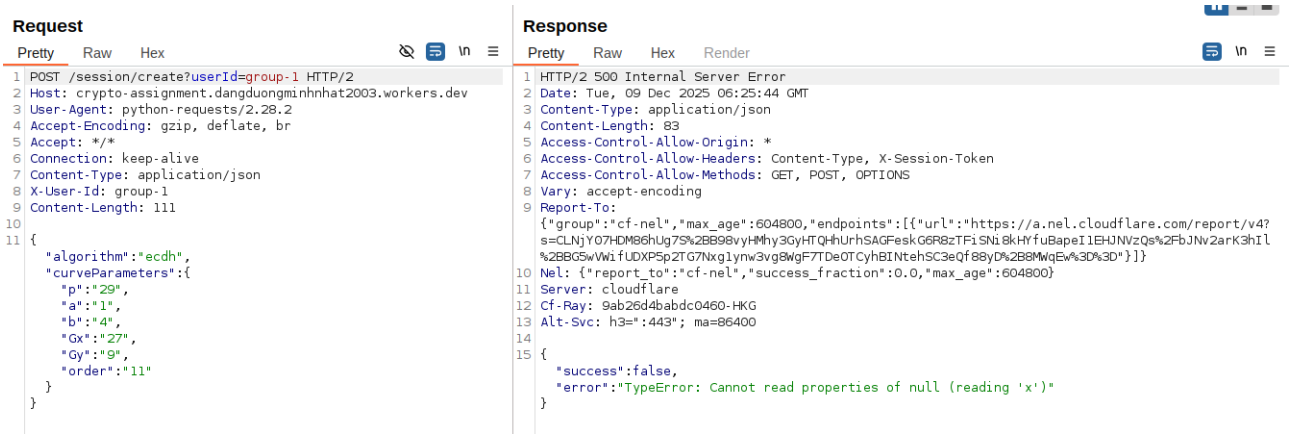
(e) Cuối cùng, khi đã thu thập đủ số phương trình đồng dư sao cho $\prod N_i \geq 2^{192}$, ta dừng tìm kiếm và áp dụng Định lí Thặng dư Trung Hoa để tính k (private key của Server).

Kết quả chạy code tấn công:

```
[*] Searching on F_13:  Order = 3, a=1, b=2, G=(9,5) -> [FAIL]
[*] Searching on F_17:  Order = 17, a=1, b=3, G=(16,1) -> [OK] k = 9 (mod 17)
[*] Searching on F_19:  Order = 19, a=1, b=4, G=(14,8) -> [OK] k = 1 (mod 19)
[*] Searching on F_23:  Order = 29, a=1, b=4, G=(22,5) -> [OK] k = 19 (mod 29)
[*] Searching on F_29:  Order = 11, a=1, b=4, G=(27,9) -> [FAIL]
[*] Searching on F_31:  Order = 41, a=1, b=3, G=(30,1) -> [OK] k = 2 (mod 41)
[*] Searching on F_37:  Order = 13, a=1, b=3, G=(36,1) -> [OK] k = 1 (mod 13)
[*] Searching on F_41:  Order = 47, a=1, b=5, G=(39,6) -> [OK] k = 32 (mod 47)
[*] Searching on F_43:  Order = 37, a=1, b=5, G=(41,9) -> [OK] k = 7 (mod 37)
[*] Searching on F_47:  Order = 59, a=1, b=4, G=(46,7) -> [OK] k = 50 (mod 59)
[*] Searching on F_53:  Order = 5, a=1, b=7, G=(48,6) -> [OK] k = 1 (mod 5)
[*] Searching on F_59:  Order = 11, a=1, b=3, G=(58,1) -> [FAIL]
[*] Searching on F_61:  Order = 11, a=1, b=3, G=(60,1) -> [FAIL]
[*] Searching on F_67:  Order = 7, a=1, b=4, G=(60,18) -> [FAIL]
[*] Searching on F_71:  Order = 79, a=1, b=8, G=(70,19) -> [OK] k = 73 (mod 79)
[*] Searching on F_73:  Order = 7, a=1, b=9, G=(71,27) -> [OK] k = 2 (mod 7)
[*] Searching on F_79:  Order = 43, a=1, b=1, G=(76,34) -> [OK] k = 7 (mod 43)
[*] Searching on F_83:  Order = 23, a=1, b=14, G=(82,26) -> [OK] k = 16 (mod 23)
[*] Searching on F_89:  Order = 101, a=1, b=9, G=(87,34) -> [OK] k = 63 (mod 101)
[*] Searching on F_97:  Order = 97, a=1, b=1, G=(96,22) -> [OK] k = 87 (mod 97)
[*] Searching on F_101:  Order = 109, a=1, b=46, G=(99,6) -> [OK] k = 16 (mod 109)
[*] Searching on F_103:  Order = 103, a=1, b=4, G=(102,38) -> [OK] k = 10 (mod 103)
[*] Searching on F_107:  Order = 107, a=1, b=4, G=(105,23) -> [OK] k = 26 (mod 107)
[*] Searching on F_109:  Order = 53, a=1, b=35, G=(107,5) -> [OK] k = 14 (mod 53)
[*] Searching on F_113:  Order = 113, a=1, b=9, G=(112,32) -> [OK] k = 30 (mod 113)
[*] Searching on F_127:  Order = 71, a=1, b=5, G=(125,54) -> [OK] k = 12 (mod 71)
[*] Searching on F_131:  Order = 137, a=1, b=9, G=(130,20) -> [OK] k = 43 (mod 137)
[*] Searching on F_137:  Order = 157, a=1, b=17, G=(136,17) -> [OK] k = 131 (mod 157)
[*] Searching on F_139:  Order = 3, a=1, b=1, G=(133,14) -> [FAIL]
[*] Searching on F_149:  Order = 83, a=1, b=9, G=(148,56) -> [OK] k = 16 (mod 83)
[*] Searching on F_151:  Order = 167, a=1, b=3, G=(150,1) -> [OK] k = 10 (mod 167)
[*] Searching on F_157:  Order = 31, a=1, b=3, G=(156,1) -> [OK] k = 9 (mod 31)
[*] Searching on F_163:  Order = 163, a=1, b=4, G=(156,44) -> [OK] k = 26 (mod 163)
[*] Searching on F_167:  Order = 181, a=1, b=3, G=(166,1) -> [OK] k = 134 (mod 181)
[*] Searching on F_173:  Order = 11, a=1, b=15, G=(172,79) -> [FAIL]
[*] Searching on F_179:  Order = 89, a=1, b=6, G=(178,2) -> [OK] k = 9 (mod 89)
[*] Searching on F_181:  Order = 199, a=1, b=5, G=(180,33) -> [OK] k = 183 (mod 199)
[*] Searching on F_191:  Order = 197, a=1, b=6, G=(190,2) -> [OK] k = 58 (mod 197)
[*] Searching on F_193:  Order = 193, a=1, b=5, G=(192,14) -> [OK] k = 26 (mod 193)
[*] Searching on F_197:  Order = 211, a=1, b=28, G=(196,82) -> [OK] k = 1 (mod 211)

[+] Collected enough modulo equations for 192-bit key recovery.
[*] Number of equations: 33
```

```
[*] Total bit coverage: 198 bits

[+] RECOVERED PRIVATE KEY: 0x4b9a95c2326135c622fa761e25bfd1a8070dc3f61e6bcc6b
```

Một số nhóm cyclic bị *FAIL* là do private key chia hết cho bậc của nhóm này, dẫn đến tạo ra điểm vô cực. Server gặp lỗi khi tính toán và trả về.



Để xác nhận private key tìm được là chính xác, ta sẽ sử dụng để tính toán public key và so sánh với public key trả về của Server.

```
[AUTH] Created curve with p=192 bits
[AUTH] Generating long-term ECDSA signing key...
[AUTH] Sending to
↪  https://crypto-assignment.dangduongminhnhat2003.workers.dev/session/create?userId=group-1
[AUTH] Captured Server ECDH Public Key
[AUTH] Authenticated successfully
============================================================
[*] Server ECDH private key: 0x4b9a95c2326135c622fa761e25bfd1a8070dc3f61e6bcc6b
------------------------------------------------------------
[*] Calculated PubKey (x): 0x1f0aee0d86a8f12d26e337e03f177f5b028d930431dc1bd6
[*] Calculated PubKey (y): 0xc4eb307befa1f5689829919c9339ea5a3b2fcb31b632efee
------------------------------------------------------------
[*] REAL Server PubKey (x): 0x1f0aee0d86a8f12d26e337e03f177f5b028d930431dc1bd6
[*] REAL Server PubKey (y): 0xc4eb307befa1f5689829919c9339ea5a3b2fcb31b632efee
------------------------------------------------------------
[SUCCESS] Public key matches!
```

3.3.3 Khắc phục lỗ hổng

Lỗ hổng *Invalid curve attack* khai thác việc Server tin tưởng sử dụng tham số đường cong gửi từ Client để tính toán public key, do đó cách hiệu quả nhất để giải quyết chính là thay vì sử dụng tham số từ Client gửi, hai bên chỉ trao đổi mã tên của đường cong (ví dụ P-192, P-256, Ed25519), sau đó sẽ tính toán bằng tham số cài đặt sẵn trong code.

```
POST /session/create?userId=group-1 HTTP/1.1
Host: crypto-assignment.dangduongminhnhat2003.workers.dev
User-Agent: python-requests/2.28.2
Accept-Encoding: gzip, deflate, br
Accept: */*
Connection: keep-alive
Content-Type: application/json
x-user-id: group-1
Content-Length: 109

{"algorithm": "ecdh", "curve":"P-256"}
```

Việc lựa chọn đường cong cũng quan trọng không kém vì nếu sử dụng các đường cong tự tạo hoặc đến từ nguồn không tin cậy, hệ thống sẽ có nguy cơ bị lỗ hổng *Small subgroup attack* hoặc *Smart's attack*, khai thác điểm yếu về mặt toán học trên các đường cong và rút gọn về các bài toán dễ bị phá vỡ hơn. Do đó, cần phải lựa chọn các đường cong an toàn được khuyến nghị và chuẩn hóa bởi các tổ chức lớn và giới khoa học có chuyên môn.

Một biến thể khác của lỗ hổng Invalid curve attack xảy ra trong bước trao đổi khóa, khi Client gửi public key và Server thực hiện tính toán ra giá trị shared secret dùng để mã hóa tin nhắn. Nếu Server không thực hiện kiểm tra xem public key có nằm trên đường cong đã thống nhất hay không mà vẫn thực hiện tính toán thì kẻ tấn công có thể gửi một điểm thuộc đường cong yếu có cùng p, a với đường cong gốc, chỉ thay đổi giá trị b để tạo ra đường cong chứa các nhóm cyclic có bậc nhỏ, tạo điều kiện cho việc vét cạn k'. Khác với lỗ hổng trong bài tập lớn này một chút, thay vì nhận về public key để vét cạn tìm k', thì kẻ tấn công sẽ vét cạn k' để tính toán khóa mã hóa tin nhắn và gửi một gói tin mà hắn biết rằng Server sẽ phản hồi khác biệt. Lí do mà mặc dù giá trị b không còn khớp với giá trị cài đặt trên Server nhưng shared secret tính toán ra vẫn thuộc đường cong yếu của kẻ tấn công lựa chọn là vì trong công thức cộng điểm và nhân đôi điểm không hề dùng đến tham số b. Do đó trước khi thực hiện tính toán, Server phải kiểm tra xem public key nhận được có thuộc đường cong gốc hay không.

Tài liệu tham khảo

[1] Dan Boneh and Victor Shoup. *A Graduate Course in Applied Cryptography*. Self-published, 2015. https://crypto.stanford.edu/~dabo/cryptobook/.

[2] Group 3. Source code for co3038 assignment hk251. https://github.com/NIaLliceH/AdvancedCryptography-Assignment-HK251, 2025.

[3] Tibor Jager, Jörg Schwenk, and Juraj Somorovsky. Practical invalid curve attacks on tls-ecdh. In *Proceedings of the European Symposium on Research in Computer Security (ESORICS)*, Vienna, Austria, 2015. Springer.

[4] Nadim Kobeissi. Applied cryptography – part 1: Provable security, section 1.8: Elliptic curves and digital signatures. Lecture Slides, CMPS 297AD/396AI, 2025. https://appliedcryptography.page.