BUỔI 02
MẢNG 2 CHIỀU (PHẦN 2)

MỤC TIÊU

- Vận dụng kiểu dữ liệu Mảng 2 chiều vào giải một số bài tập vận dụng

Bài tập 1. Cộng 2 ma trận

Cho hai ma trận số nguyên $a[m \times n], b[m \times n]$ với $(1 \leq m, n, p \leq 100)$. Phép cộng ma trận a với ma trận b được ma trận $c[m \times n]$ có các phần tử $c(i, j)$ được định nghĩa như sau:

$$c(i, j) = a(i, j) + b(i, j)$$

Ví dụ

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Mảng kết quả phép cộng

$$c = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Input

- Dòng số đầu tiên chưa hai số nguyên: m, n
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên của ma trận a
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên là ma trận b

Output

- Gồm m dòng, mỗi dòng chứa n số nguyên là ma trận tổng của hai ma trận a và b

Ví dụ

INPUT	OUTPUT
2 3 2 3 4 5 6 7 4 5 6 7 8 9	6 8 10 12 14 16

Bài tập 2. **Nhân 2 ma trận**

Cho hai ma trận số nguyên $a[m \times n]$ và $b[n \times p]$ với $(1 \leq m, n, p \leq 100)$. Phép nhân ma trận a với ma trận b được ma trận $c[m \times p]$ có các phần tử $c(i, j)$ được định nghĩa là tích vô hướng (dot product) của dòng i trong ma trận a với cột j trong ma trận b

$$c(i, j) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Ví dụ

Ma trận thứ nhất $firstMatrix$

$$firstMatrix = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ma trận thứ hai $secondMatrix$

$$secondMatrix = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Kết quả phép nhân 2 ma trận $productMatrix$

$$productMatrix = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 47 & 54 & 61 \end{pmatrix}$$

$productMatrix(0, 0) = 1 \times 5 + 2 \times 8 = 21$
$productMatrix(0, 1) = 1 \times 6 + 2 \times 9 = 24$
$productMatrix(0, 2) = 1 \times 7 + 2 \times 10 = 27$

$productMatrix(1, 0) = 3 \times 5 + 4 \times 8 = 47$
$productMatrix(1, 1) = 3 \times 6 + 4 \times 9 = 54$
$productMatrix(1, 2) = 3 \times 7 + 4 \times 10 = 61$

Input

- Dòng số đầu tiên chứa ba số nguyên: m, n, p
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên của ma trận a
- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa p số nguyên của ma trận b

Output

- Gồm m dòng, mỗi dòng chứa p số nguyên là ma trận tích của hai bảng trên

Ví dụ

INPUT	OUTPUT
2 2 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	21 24 27 47 54 61

Gợi ý:

- Định nghĩa hàm $\boldsymbol{DotProduct(a, b, i, j)}$ để tính vô hướng của dòng i ma trận a và cột j ma trận b
- Định nghĩa hàm $\boldsymbol{ProductMatrix(a\ , b)}$ để tính tích 2 ma trận a và b. Sử dụng 2 vòng lặp:

    Với mỗi dòng i $(0 \ \leq i \ \leq m)$ của ma trận a

        Lần lượt duyệt qua tất cả cột j $(0 \ \leq j \ \leq p)$ của ma trận b

            Tính $DotProduct(a, b, i, j)$ chính là phần tử $[i, j]$ của ma trận tích

Bài tập 3. **Tính doanh thu của cửa hàng**

Một cửa hàng bán 3 loại trái cây với đơn giá như sau:

Tên trái cây	Đơn giá ($/kg)
Táo	3
Cherry	4
Lê	2

Số lượng các loại trái cây đã bán từng ngày được thống kê thành bảng như sau:

	Ngày 1	Ngày 2	Ngày 3	Ngày 4	Ngày 5	Ngày 6	Ngày 7
Táo	34	12	15	11	10	2	15
Cherry	56	32	30	40	23	33	24
Lê	6	13	12	20	15	19	8

Doanh thu trong một ngày của cửa hàng được tính bằng tổng số tiền bán từng loại trái cây trong ngày đó. Ví dụ doanh thu của cửa hàng trong ngày 2 bằng:

$$(\$3 \times 12) + (\$4 \times 32) + (\$2 \times 13) = 190$$

Chúng ta có thể diễn đạt điều này bằng tích vô hướng của 2 vector (**dot product**) như sau:

$$(\$3, \$4, \$2) \cdot (12, 32, 13) = \$3 \times 12 + \$4 \times 32 + \$2 \times 13 = \$190$$

Chúng ta có thể mở rộng kết quả sang cả ma trận:

$$(\$3, \$4, \$2) \times \begin{pmatrix} 34 & 12 & 15 & 11 & 10 & 02 & 15 \\ 56 & 32 & 30 & 40 & 23 & 33 & 24 \\ 06 & 13 & 12 & 20 & 15 & 19 & 08 \end{pmatrix} = (338, 190, 189, 233, 152, 176, 157)$$

Tổng quát bài toán: một cửa hàng bán m sản phẩm, giá của m sản phẩm được cho trong mảng $a = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$ với $(1 \leq m \leq 100)$. Số lượng bán được của các sản phẩm trong từng ngày được cho trong bảng số nguyên $b[m \times n]$ với $(1 \leq n \leq 1000)$. Trong đó $b_{i,j}$ $(0 \leq i < m, 1 \leq j \leq n)$. cho biết số lượng sản phẩm i bán ra trong ngày j. Viết chương trình tính doanh thu từng ngày và tổng doanh thu tất cả các ngày của cửa hàng.

Input

- Dòng số đầu tiên chứa hai số nguyên: m, n
- Dòng thứ hai chứa m số nguyên $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên của bảng b

Output

- Dòng thứ nhất là tổng doanh thu của cửa hàng
- Dòng thứ hai chứa n số, số thứ i là doanh thu của ngày i

Ví dụ

INPUT	OUTPUT
3 4 3 4 2 12 15 11 10 32 30 40 23 13 12 20 15	1435 338 190 189 233 152 176 157

Bài tập 4. Chuyển vị ma trận

Cho ma trận số nguyên $a[m \times n]$ với $(1 \leq m, n \leq 100)$. Chuyển vị ma trận (transpose) là hoán vị các dòng và các cột. Chúng ta đặt ký hiệu T lên góc phía trên bên phải của ma trận với nghĩa là chuyển vị.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Viết chương trình tạo ma trận chuyển vị của ma trận a

Input

- Dòng số đầu tiên chưa hai số nguyên: m, n
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên của bảng a

Output

- Gồm n dòng, mỗi dòng chứa m số nguyên là ma trận chuyển vị

Ví dụ

INPUT	OUTPUT
2 3 5 6 7 8 9 10	5 8 6 9 7 10

Bài tập 5. Khoảng cách Euclid giữa 2 ma trận

Cho hai ma trận số nguyên $a[m \times n], b[m \times n]$ với $(1 \leq m, n \leq 100)$. Hãy tính khoảng cách Euclid của ma trận a và ma trận b. Biết rằng:

$$dist(a, b) = \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(a_{i,j} - b_{i,j}\right)^2}$$

Ví dụ 1

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dist(a, b) = \sqrt{(4-2)^2 + (5-5)^2 + (6-8)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{4+0+4+36} = \sqrt{44} = 6.6332$$

Ví dụ 2

0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0

Ma trận a

0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0

Ma trận b

Ta có khoảng cách giữa hai ma trận là

$$dist(a, b) = \sqrt{6} = 2.4495$$

Input

- Dòng số đầu tiên chứa hai số nguyên: m, n
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên của ma trận a
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên của ma trận b

Output

- Số thực là khoảng cách của 2 ma trận (**lấy 2 số lẻ**)

Ví dụ

INPUT	OUTPUT
2 2 4 5 6 7 2 5 8 1	6.63

Bài tập 6. Dot product của hai ma trận

Cho hai ma trận số nguyên $a[n \times n]$ và $b[n \times n]$ với $(1 \leq n \leq 100)$. Dot product của ma trận a với ma trận b là một giá trị được tính như sau

$$value = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j} \times b_{i,j}$$

Ví dụ

Ma trận a

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ma trận b

$$b = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kết quả dot product của a và b:

$$value = 2 \times 4 + 1 \times 5 + 2 \times 6 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 + 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 = 66$$

Input

- Dòng số đầu tiên chứa số nguyên: n
- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên của ma trận a
- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên của ma trận b

Output

- Một số là giá trị dot product của a và b

Ví dụ

INPUT	OUTPUT
2 2 4 5 6 7 2 5 8 1	6.63

Bài tập 7. Phép tích chập (Convolution)

Cho ma trận số nguyên $a[m \times n]$ và $b[k \times k]$ với ($1 \le m, n, k \le 100$ và $k < n$; $k < m$). Ta gọi ma trận a là ma trận lớn (a còn gọi là image), ma trận b là ma trận nhỏ (b còn gọi là kernel).

Phép tích chập (convolution) của ma trận nhỏ b lên ma trận lớn a được tính bằng cách: trượt ma trận nhỏ b lên ma trận lớn a từ trên xuống dưới, từ trái sang phải (ma trận b phải nằm gọn trong ma trận a). Tại mỗi vị trí trượt chúng ta tính dot product giữa ma trận b với vùng của ma trận a mà b đang được đặt lên trên.

Ví dụ

Ma trận a

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận b

$$b = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mảng kết quả phép tích chập c

$$c = \begin{pmatrix} \boxed{51} & \boxed{10} \\ -3 & -27 \end{pmatrix}$$

Input

- Dòng số đầu tiên chưa số nguyên: m, n, k
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số nguyên của ma trận a
- k dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa k số nguyên của ma trận b

Output

- Chứa $(m - k + 1)$ dòng, mỗi dòng chưa $(n - k + 1)$ giá trị của ma trận c

Ví dụ

INPUT	OUTPUT
4 4 3 4 2 2 4 1 9 5 3 1 4 2 4 0 9 8 1 −1 −1 −1 −1 8 −1 −1 −1 −1	51 10 −3 −27