# Bài giảng

**LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ**
**(GRAPH THEORY)**

**TRẦN QUỐC VIỆT**

1

# Chương 2

- **ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH EULER**
- **ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH HAMILTON**

2

# Đường đi và chu trình Euler

Leonhard Euler 1707-1783

Nhà toán học Thụy sĩ

3

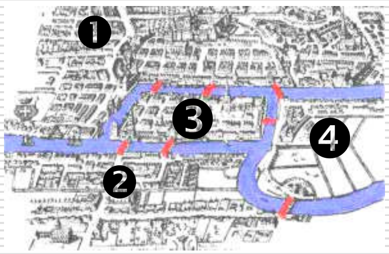
# Ví dụ :Bài toán về các cây cầu ở Konigsberg (Nga)

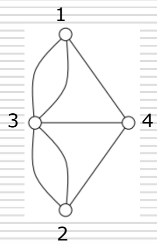
- Tìm cách đi qua cả bảy cây cầu, sau đó về điểm xuất phát, mỗi cây cầu chỉ đi qua một lần ? Nhiều người đã đi thử nhưng không thành công
- Năm 1736, L. Euler, đã dùng lý thuyết đồ thị, chứng minh được: Bài toán không thể có lời giải

4

## Ví dụ :Bài toán về các cây cầu ở Konigsberg (tt)

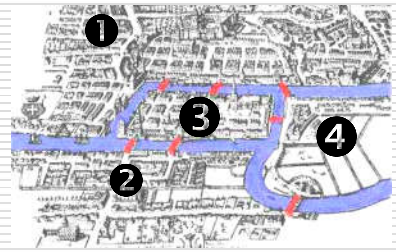
- Gọi 1, 2, 3 và 4 là 4 vùng đất bị ngăn cách bởi các nhánh sông
- Biểu diễn mỗi vùng đất bởi một đỉnh của đồ thị
- Một cạnh: một cây cầu nối giữa 2 vùng đất

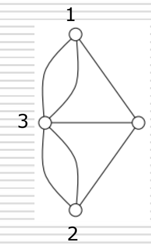



## Ví dụ :Bài toán về các cây cầu ở Konigsberg (tt)

- Bài toán trở thành: Tìm một chu trình đơn đi qua tất cả các cạnh của đồ thị $\Rightarrow$ Chu trình Euler?

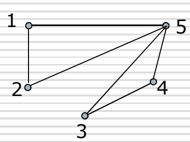



## Đường đi Euler và chu trình Euler

- Cho G là một đồ thị liên thông, một **chu trình Euler** (Eulerian circuit) của G là một chu trình đi đơn đi qua tất cả các cạnh (cung) của G

*Ví dụ*



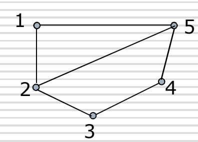

1,2,5,3,4,5,1: là một chu trình Euler:



## Đường đi Euler và chu trình Euler

- Cho G là một đồ thị liên thông, một **đường đi Euler** (Eulerian path) của G là đường đi đơn đi qua tất cả các cạnh (cung) của G

*Ví du*

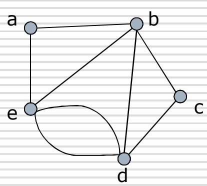



2,1,5,2,3,4,5: là một đường đi Euler

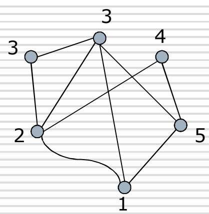
## Định lý Euler 1

- **Định lý Euler 1**:
  Đồ thị vô hướng G=(V,E) liên thông và |V|>1, G có chu trình Euler $\Leftrightarrow$ mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn

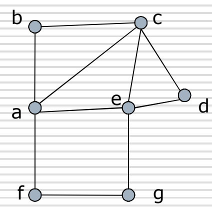
Ví dụ: Đồ thị nào sau đây có chu trình Euler, không có chu trình Uuler




**$G_1$**

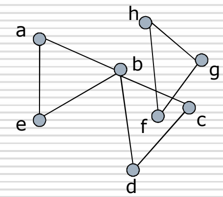



**$G_2$**




**$G_3$**

## Định lý Euler 1

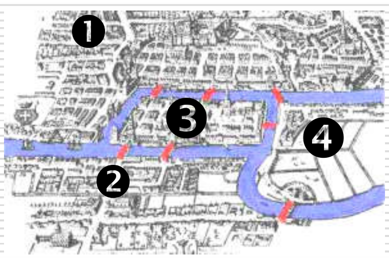


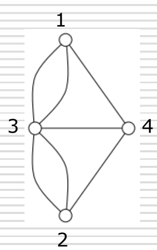

**$G_4$**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**$G_5$** (cho bởi ma trận kề)

## Bài toán về các cây cầu ở Konigsberg (trong ví dụ trước)




11

- Có lời giải cho bài toán các chiếc cầu?

## Chứng minh Định lý Euler 1

- **C/m điều kiện cần:**

**G vô hướng liên thông có chu trình Euler $\Rightarrow$ mọi đỉnh của G có bậc chẵn**

- Mỗi lần chu trình đi qua một đỉnh thì đỉnh đó bớt đi 2 cạnh kề
- Kết thúc chu trình Euler, số cạnh kề của mỗi đỉnh phải bằng 0

Vậy: Tổng số cạnh kề của mỗi đỉnh phải là số chẵn. Hay mọi đỉnh trong G đều có bậc chẵn

12

## Chứng minh Định lý Euler 1

- **C/m điều kiện đủ:**

**G vô hướng liên thông, mọi đỉnh có bậc chẵn ⇒ G có chu trình Euler**

- Xuất phát từ đỉnh a bất kỳ, đi theo các cạnh một cách ngẫu nhiên không lặp lại cạnh nào đã qua, cho đến khi không thể đi tiếp. Gọi đỉnh dừng là b
- Nếu b ≠ a thì số lần đến b = số lần đi khỏi b+1 (vô lý, vì mọi đỉnh có bậc chẵn)
- Vậy b ≡ a, nghĩa là ta có chu trình $C_1$



## Chứng minh Định lý Euler 1

- **C/m điều kiện đủ (tt):**

- Nếu $C_1$ chứa tất cả các cạnh của G thì $C_1$ chính là chu trình Euler cần tìm.

- Ngược lại:

+ *Mở rộng $C_1$*: chọn một đỉnh $a_1$ trong $C_1$ có cạnh liên thuộc không nằm trong $C_1$ làm đỉnh bắt đầu của chu trình mới, tương tự như tìm chu trình $C_1$, ta tìm chu trình $C_2$ với đỉnh bắt đầu $a_1$ có chứa $C_1$.

+`Mở rộng $C_2$: Tương tự ta được chu trình $C_3$ chứa $C_2$

…..

Dừng khi nhận được $C_k$ không thể mở rộng thêm:



## Chứng minh Định lý Euler 1

- **C/m điều kiện đủ (tt):**

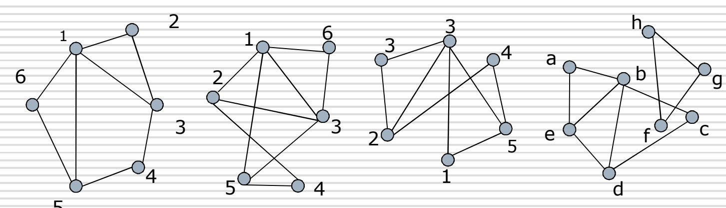
- Xét một cạnh e=(x,y) bất kỳ
- Do G liên thông nên phải có một đường đi từ một đỉnh a (trên $C_k$) đến x: $av_1v_2….v_mx$
- Mọi đỉnh trên $C_k$ đều không thể dùng để mở rộng chu trình, do vậy: $(a,v_1)\in C_k$, $(v_1,v_2)\in C_k,…, (v_m,x)\in C_k$, và $(x,y)\in C_k$
- Kết luận: $C_k$ chứa tất cả các cạnh của G hay $C_k$ là một chu trình Euler cần tìm



## Định lý Euler 2

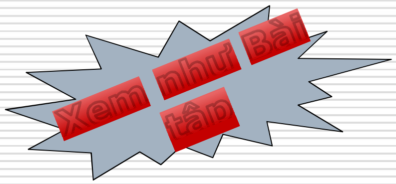
Đồ thị vô hướng liên thông G=(V,E) và có |V|>1, G có đường đi Euler và không có chu trình Euler ⇔ G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ

Ví dụ: Đồ thi nào sau đây có chu trình Euler, đồ thi nào có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler, đồ thị nào không có chu trình Euler và cũng không có đường đi Euler




$G_1$ $G_2$ $G_3$ $G_4$

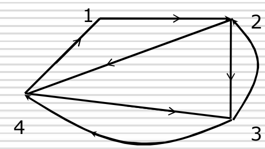
# Chứng minh định lý Euler 2

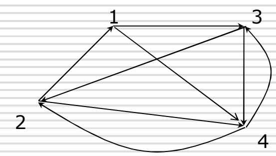





# Định lý Euler 3

- **<u>Định lý Euler 3:</u>**
  Đồ thị có hướng G=(V,E) liên thông yếu và |V|>1. G có chu trình Euler ⇔ mọi đỉnh trong G đều có nữa bậc trong bằng nữa bậc ngoài (hay G cân bằng)




$G_1$:
cân bằng nên Có chu trình Euler

$G_2$:
Không cân bằng nên
Không Có chu trình Euler



# Định lý Euler 4

- **<u>Định lý Euler 4</u>**:
  Cho G=(V,E) có hướng, không có đỉnh cô lập. Và |V|>1. G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler ⇔ G liên thông yếu và có đúng 2 đỉnh x,y thoả:

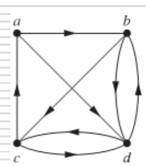
$$deg^+(x)=deg^-(x)+1$$

$$deg^-(y)=deg^+(y)+1$$

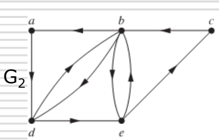
Các đỉnh còn lại cân bằng

Ví dụ: Đồ thị nào có chu trình Euler, đồ thị nào chỉ có đường đi Euler

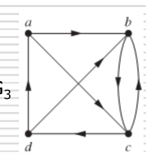
$G_1$




$G_2$

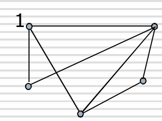



$G_3$

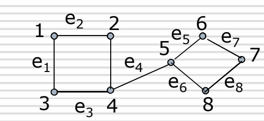




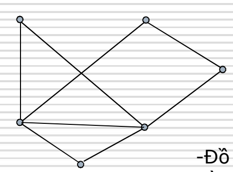

# Ví dụ:




G1




G2



G3

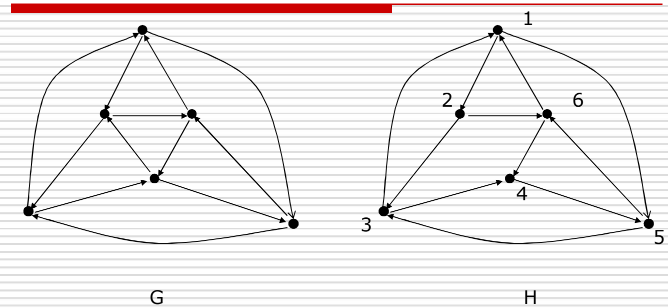
-Đồ thị nào có chu trình Euler, đồ thị nào có đường đi Euler
-Tìm đường đi Euler, chu trình Euler (nếu có) trong mỗi đồ thị

# Thuật toán Fleury tìm đường đi Euler

Bài tập



## Bài tập




**Tìm đường đi và chu trình Euler (nếu có) trong các đồ thị trên?**



## Bài tập

- Tìm chu trình Euler trên đồ thị được cho bởi ma trận kề

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$



## Thuật toán tìm chu trình Euler

1. Chọn đỉnh v bất kỳ làm đỉnh bắt đầu

2. C $\leftarrow$ {v};

3. Nếu còn cạnh của G chưa đặt vào C

   **(a)** Đặt G'=($V_{G'}$,$E_{G'}$) có được từ G sau khi xóa các cạnh có trong C và xóa các đỉnh cô lập.

   (b) Chọn một đỉnh a$\in$ {tập đỉnh có trong C}$\cap$ $V_{G'}$

   (c) Từ a, chọn một dãy các cạnh, đỉnh kề liên tiếp trong G' (không có canh lặp lai), cho đến khi không chọn được nữa, ta được chu trình $C_1$

   (d) Thay thế vị trí a trong C bởi $C_1$, lặp lại bước 3

end

4. Return C;

# Bài tập thực hành

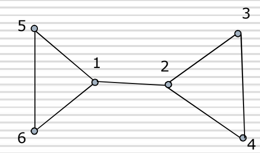
- Cài đặt thuật toán kiểm tra một đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) có là Euler (hoặc nửa Euler) hay không
- Cài đặt thuật toán tìm đường đi và chu trình Euler trong đồ thị vô hướng (có hướng)



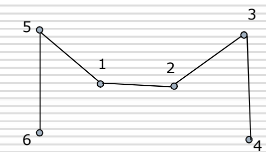
# 2. Đường đi và chu trình Hamilton

- Cho G liên thông, đường đi (tương tự chu trình) Hamilton trong G là đường đi (tương tự chu trình) đi qua tất các đỉnh của G, mỗi đỉnh chỉ qua đúng một lần
  - Một đồ thị có chu trình Hamilton được gọi là thị Hamilton.
  - Một đồ thị có đường đi Hamilton được gọi là nửa Hamilton.

*Ví dụ:*



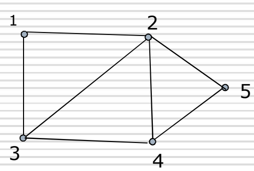
G



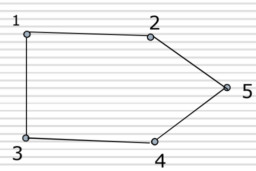
Một đường đi Hamilton trong G



# 2. Đường đi và chu trình Hamilton (tt)



H



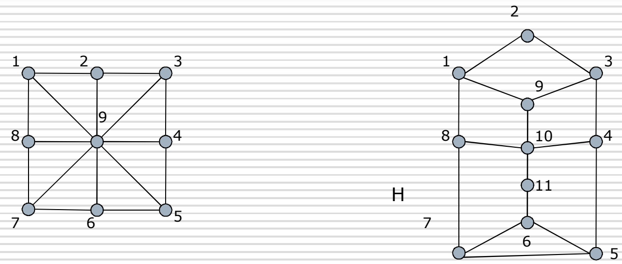
Một chu trình Hamilton trong H



# Quy tắc tìm chu hình Hamilton

- Nếu tồn tại 1 đỉnh của G có bậc ≤1 thì G không có chu trình Hamilton
- Nếu đỉnh x có bậc 2 thì cả 2 cạnh tới x đều phải thuộc chu trình Hamilton
- Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào
- Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh tới đỉnh x đặt vào chu trình Hamilton rồi thì phải xóa mọi cạnh còn lại tới x

## Ví dụ:



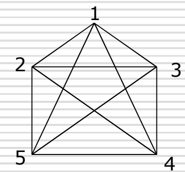

G

-Đồ thị nào có chu trình Hamilton, đồ thị nào không có chu trình Hamilton?
-Tìm một chu trình Hamilton (nếu có) trên mỗi đồ thị

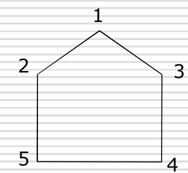
29

## 2. Đường đi và chu trình Hamilton (tt)

- **Định lý**: Mọi đồ thị đủ đều có chu trình Hamilton




$K_5$



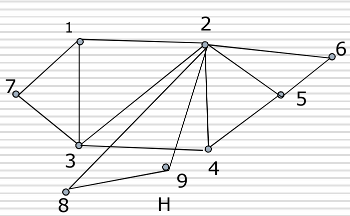

1→2 →5 → 4 →3 → 1

Là một chu trình Hamilton của $K_5$

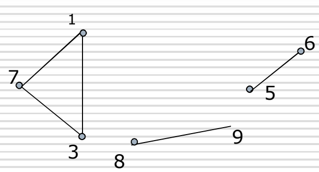
30

## 2. Đường đi và chu trình Hamilton (tt)

- **Định lý**: Cho đồ thị G, giả sử có k đỉnh sao cho khi xoá k đỉnh này cùng với các cạnh liên kết với chúng thì ta được nhiều hơn k thành phần liên thông. Thì G không có chu trình Hamilton




H có chu trình Hamilton không?




Xóa 2 đỉnh 2 và 4 cùng với các cạnh liên kết của nó thu được 3 thành phần liên thông⇒ H không có chu trình Hamilton

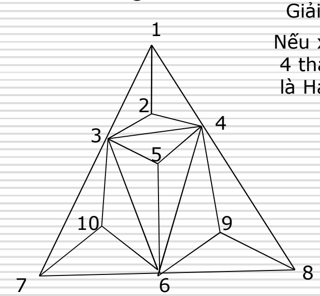
31

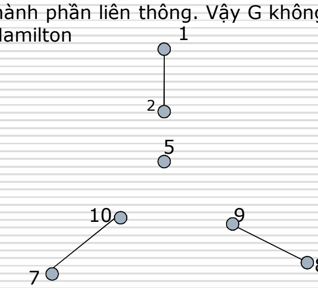
## 2. Đường đi và chu trình Hamilton (tt)

- Cho đồ thị G như hình dưới. G có chu trình Hamilton không?

Giải:

Nếu xóa đi 3 đỉnh 3,4 và 6 ta được 4 thành phần liên thông. Vậy G không là Hamilton




32

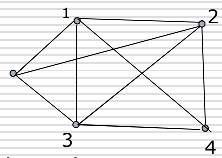
## 2. Đường đi và chu trình Hamilton (tt)

- **Định lý (Dirac)**: Cho G là đơn đồ thị có n đỉnh ($n \geq 3$). Nếu mọi đỉnh của G đều có bậc $\geq n/2$ thì G có chu trình Hamilton
- **Định lý**: Mọi đồ thị có hướng, có n đỉnh, liên thông mạnh. Nếu mỗi đỉnh v thuộc đồ thị thỏa:

$$deg^-(v) \geq n/2 \text{ và } deg^+(v) \geq n/2$$

Thì G có chu trình hamilton

Ví dụ:




n=5 (>3)
deg(1)=4 (≥5/2)
deg(2)=4 (≥5/2)
Deg(3)=4 (≥5/2)
Deg(4)=3 (≥5/2)
Deg(5)=3 (≥5/2)

Vậy G có chu trình Hamilton

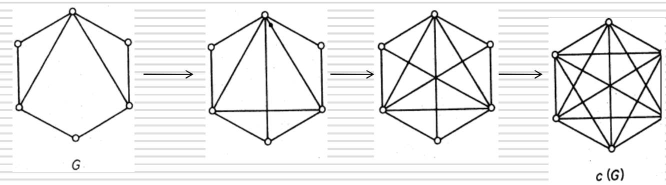
33

## 2. Đường đi và chu trình Hamilton (tt)

- **Bao đóng của đồ thị:**

  Cho đơn đồ thị *G* có *n* đỉnh, **bao đóng** c(*G*) được tạo ra từ *G* bằng cách bổ sung cho mỗi cặp đỉnh không kề nhau *u* và *v* với deg(v) + deg(u) ≥ n một cạnh mới *uv*.

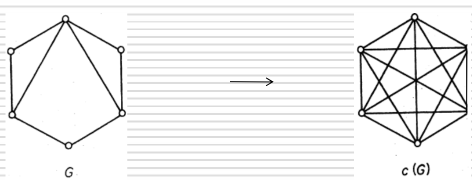
Ví dụ: Cho G, tìm bao đóng của G




## 2. Đường đi và chu trình Hamilton (tt)

- ***Định lý***: Một đồ thị là Hamilton nếu và chỉ nếu bao đóng của nó là Hamilton.

Ví dụ: Cho đồ thị

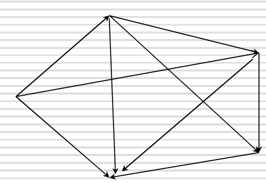



G có phải là hamilton không?

35

## 2. Đường đi và chu trình Hamilton (tt)

- **Đồ thị đấu loại:** Là đồ thị có hướng có đỉnh bất kỳ luôn luôn được nối với nhau bởi đúng một cung



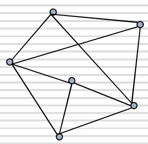
- **Định lý:**
  - Mọi đồ thị đấu loại đều có đường đi Hamilton
  - Mọi đồ thị đấu loại liên thông mạnh đề có chu trình Hamilton

36

## 2. Đường đi và chu trình Hamilton (tt)

- **Định lý (Ore, 1960):** Một đơn đồ thị vô hướng G gồm n đỉnh với n≥3. Nếu deg(u)+deg(v)≥n với mọi cặp đỉnh u,v không kề nhau trong G thì G là đồ thị Hamilton

*Ví dụ:*



G

Mọi cặp đỉnh khác nhau u, v trong G đều thỏa:

deg(u)+deg(v)≥n=6

Nên G có chu trình Hamilton

37

## Thuật toán tìm tất cả các chu trình Hamilton của G (Thuật toán quay lui)

```
FindHamiltonCycles(int[][] A)
  // A là ma trận kề của G
    // G có n đỉnh
    // hc[0..n-1] chứa chu trình
     tìm được
   //visited[0...n-1] đánh dấu
     các đỉnh đã xét
     int[] hc= new int[n];
      visited = new boolean[n];
     for (j=0; j<a.length;j++)
     visited[j]=false
     hc[0]=0;visited[0]=true;
     Expand(1);
}
```

```
Expand(i)
{     for (j=0; j<n;j++)
          if (visited[j]==false && a[hc[i]-1][j]>0)
          {
               hc[i]=j;
               if (i<n-1)
               {
                    visited    [j]=true;
                    Expand(i+1);
                    visited[j]=false;
               }
               else
               if (a[hc[i]][0]>0)
                  printHamiltonCycle(x);
          }
}
```

38