Bài giảng

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
(GRAPH THEORY)

Trần Quốc Việt

Tài liệu tham khảo:

- Nguyễn Cam, Chu Đức Khánh, *Lý thuyết Đồ thị*, 1998.
- Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications

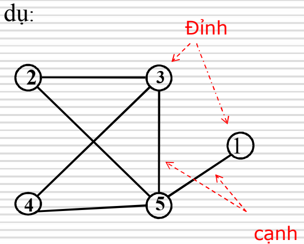
Chương 1: Giới thiệu tổng quan

- Khái niệm đồ thị, một số lĩnh vực ứng dụng của đồ thị
- Định nghĩa
- Một số đồ thị đặc biệt
- Biểu diễn đồ thị
- Đường đi và chu trình
- Liên thông và thành phần liên thông
- Một số vấn đề liên quan đến cài đặt đồ thị

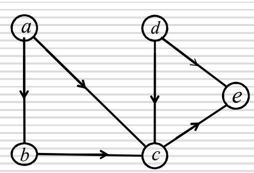
Khái niệm

- Một đồ thị (Graph) hiểu đơn giản là một cấu trúc rời rạc gồm tập đỉnh, và tập cạnh nối các đỉnh

Ví dụ:



Đồ thị vô hướng

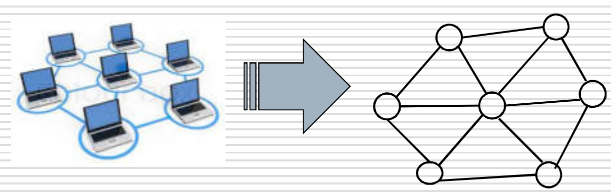


Đồ thị có hướng

Một số lĩnh vực ứng dụng

Trong thực tế, rất nhiều bài toán thuộc các lĩnh vực khác nhau được giải bằng đồ thị:

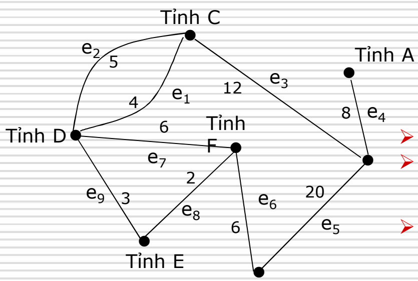
- Lĩnh vực mạng máy tính: Biểu diễn mạng máy tính



Xác định 2 máy có thể liên lạc với nhau trên một mạng,...

Một số lĩnh vực ứng dụng

- Lĩnh vực giao thông: Tìm đường đi, đường đi ngắn nhất giữa hai thành phố trong mạng giao thông,…



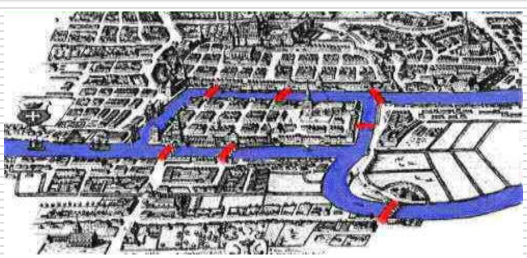
- Mỗi đỉnh: một tỉnh
- Mỗi cạnh nối 2 đỉnh u,v: Có đường đi trực tiếp giữa 2 tỉnh u,v
- Con số trên mỗi cạnh: Độ dài đường đi trực tiếp giữa 2 tỉnh.

Yêu cầu: Tìm đường đi ngắn nhất từ một tỉnh nào đó đến một tỉnh khác (chẳng hạn từ A đến F)?

Một số lĩnh vực ứng dụng

- Giải các bài toán về lập lịch, thời khóa biểu, và phân bố tần số cho các trạm phát thanh và truyền hình
- ….

Ví dụ: Bài toán về các cây cầu ở Konigsberg:

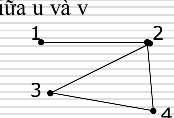


Tìm cách đi qua cả bảy cây cầu, sau đó về điểm xuất phát, mỗi cây cầu chỉ đi qua một lần ? ⇒ Giải bằng đồ thị

2. Một số định nghĩa

- ***Đồ thị vô hướng** (undirected graph):*
  - Đồ thị vô hướng G=(V,E) với:
    - V≠∅ là tập các đỉnh
    - E: Là đa tập hợp với các phần tử có dạng (u,v) với u,v∈V không có thứ tự, gọi là các cạnh của đồ thị
  - Biểu diễn bằng biểu đồ:
    - Mỗi đỉnh ↔ một điểm
    - Mỗi cạnh (u,v) ↔ một cạnh vô hướng nối giữa u và v

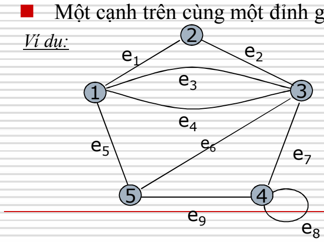
Ví dụ: Cho đồ thị G với Tập đỉnh V ={1,2,3,4}
tập cạnh E ={(1,2), (2,3), (3,4), (2,4)}
▪ Kí hiệu: G = (V,E)



2. Một số định nghĩa

- Cho đồ thị vô hướng G=(V,E)
  - Với cạnh e=(u,v)∈E, u,v gọi là 2 đỉnh kề nhau, e gọi là cạnh liên thuộc với 2 đỉnh u,v
  - Hai cạnh e_1, e_2 liên kết cùng một cặp đỉnh khác nhau được gọi là 2 cạnh song song (paralell edges).
  - Một cạnh trên cùng một đỉnh gọi khuyên (loop).

Ví dụ:

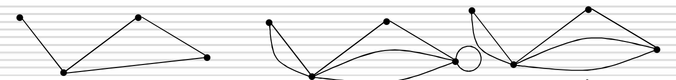


- Đỉnh 1 kề với đỉnh 2
- Đỉnh 2 kề với đỉnh 3
- Đỉnh 5 kề với đỉnh 4
- Đỉnh 1 không kề với đỉnh 4
- …
- e_3, e_4: Các cạnh song song
- e_8: Khuyên

9

2. Một số định nghĩa

- Cho đồ thị vô hướng G=(V,E):
  - **<u>G là đồ thị đơn</u> (Simple graph)** nếu G không có khuyên và không có cạnh song song
  - **<u>G gọi là đa đồ thị (multigraphs)</u>** nếu G không có khuyên và có thể có các cạnh song song
  - **<u>G gọi là giả đồ thị (pseudographs)</u>** nếu G có thể có cả khuyên và các cạnh song song.



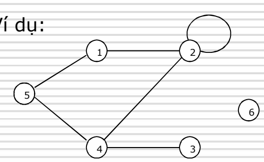
Đơn đồ thị *Giả đồ thị* *Đa đồ thị*

10

2. Một số định nghĩa

- **<u>Bậc của đỉnh trong đồ thị vô hướng</u>**: Bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với v, kí hiệu deg(v).
  - Đỉnh có bậc 0 gọi là đỉnh cô lập (isolated vertex)
  - Đỉnh có bậc 1 gọi là đỉnh treo (pendant vertex)

Ví dụ:



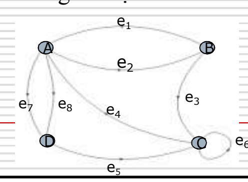
deg(1)=deg(5)=2,deg(4)=3, deg(3)=1, deg(6)=0

3: Đỉnh treo, 6: Đỉnh cô lập

11

2. Một số định nghĩa

- **<u>Đồ thị có hướng</u>** (*directed graph*) Đồ thị có hướng G = (V,E), V≠∅ là tập các đỉnh, E là tập các cặp (u,v) có **<u>thứ tự</u>** trong V gọi là các cung.
  - Với (u,v)∈E, u gọi là đỉnh đầu, v gọi là đỉnh cuối của cung (u,v) và v gọi là đỉnh kề của u.
  - Hai cung e_1, e_2 liên kết cùng một cặp đỉnh được gọi là 2 cung song song (paralell edges).
  - Cung từ một đỉnh đến chính nó gọi là khuyên (loop).



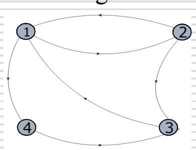
- A,B,C,D: Các đỉnh
- $e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8$: Các cung
- e_1,e_2: Song song ngược chiều
- e_7,e_8: Song song cùng chiều
- e_6: Khuyên

12

2. Một số định nghĩa

- Cho đồ thị có hướng G=(V, E)
  - **G là đơn đồ thị có hướng (Simple directed Graphs)** nếu G không có khuyên và không có cạnh song song cùng chiều.
  - **G là đa đồ thị có hướng (Directed multigraphs)** nếu G có thể có các khuyên, các cạnh song song cùng chiều
- Đồ thị hỗn hợp (Mixed Graph): là đồ thị mà có chứa cả cạnh vô hướng và cạnh có hướng

Ví dụ



Đơn đồ thị có hướng

2. Một số định nghĩa

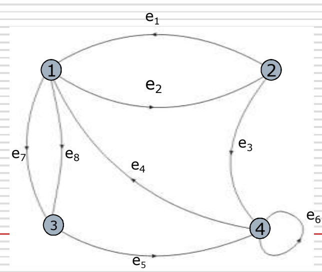
Tóm tắt một số thuật ngữ

Type	*Edges*	*Multiple Edges Allowed?*	*Loops Allowed?*
Simple graph	Undirected	No	No
Multigraph	Undirected	Yes	No
Pseudograph	Undirected	Yes	Yes
Simple directed graph	Directed	No	No
Directed multigraph	Directed	Yes	Yes
Mixed graph	Directed and undirected	Yes	Yes

2. Một số định nghĩa

- **<u>Bậc của đỉnh trong đồ thị có hướng</u>**: Cho đồ thị có hướng G = (V,E) và v∈V.
  - Nửa bậc trong của v, kí hiệu $deg^-(v)$ là số cung đến đỉnh v.
  - Nửa bậc ngoài của v, kí hiệu $deg^+(v)$ là số cung xuất phát từ v.

Ví dụ: Cho đồ thị

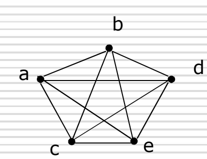


$deg^+(1)$=?
$deg^-(1)$=?
$deg^+(2)$=?
$deg^-(2)$=?
$deg^+(4)$=?
$deg^-(4)$=?
deg(1)?
deg(2)?

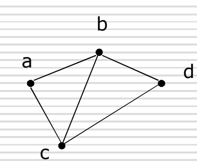
2. Một số định nghĩa

- **Đồ thị con** (*subgraph*): Cho 2 đồ thị (cùng có hướng hoặc cùng vô hướng) G=(V,E) và H=(X,U). H được gọi là đồ thị con của G nếu X⊆V và U ⊆ E. Kí hiệu H≤G

<u>*Ví dụ*</u>:



G



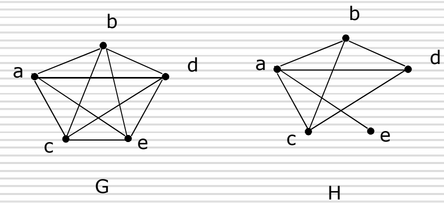
H

H là đồ thị con của G

2. Một số định nghĩa

- **Đồ thị khung (*spanning subgraph*)**: Cho 2 đồ thị G=(V,E) và H=(X,U), H≤G. Nếu X=V thì H gọi là đồ thị khung của G

  Ví dụ:

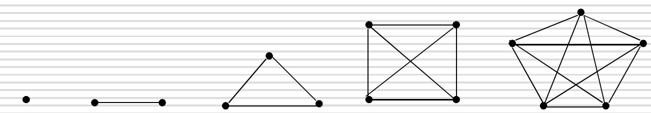


H là đồ thị khung của G

3. Một số đồ thị đặc biệt

- ***Đồ thị đủ (Complete Graph)***: Một đơn đồ thị vô hướng G=(V,E) với |V|=n, được gọi là đồ thị đủ cấp n(kí hiệu K_n) nếu với mỗi cặp đỉnh khác nhau đều kề nhau.

  Ví dụ:



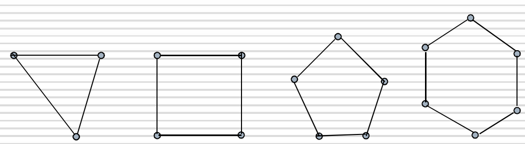
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Một số đồ thị K_n (n=1,2,...,5)

Một đồ thị đủ cấp n thì có số cạnh là n(n-1)/2

Một số đồ thị đặc biệt

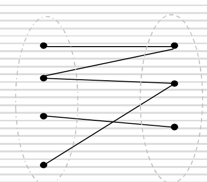
- **Đồ thị vòng *(Cycles)***: Đơn đồ thị n đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ (n≥3) với n cạnh $(v_1,v_2), (v_2,v_3), ..., (v_{n-1},v_n), (v_n,v_1)$ được gọi là đồ thị vòng, ký hiệu là C_n.



- Như vậy, mỗi đỉnh của C_n có bậc là 2.

Một số đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị lưỡng phân** *(Bipartite Graphs)*: Đơn đồ thị G=(V,E) gọi là lưỡng phân nếu $V=V_1 \cup V_2$, với $V_1 \cap V_2=\varnothing$, $V_1 \neq \varnothing$, $V_2 \neq \varnothing$ và mỗi cạnh trong E đều nối một đỉnh trong V_1 với một đỉnh trong V_2.

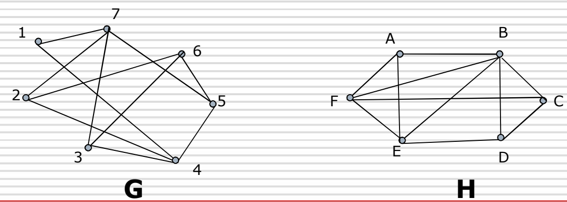


V_1 V_2

Một số đồ thị đặc biệt

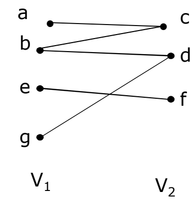
- **Định lý**: Một đơn đồ thị là lưỡng phân nếu và chỉ nếu có thể dùng 1 trong 2 màu khác nhau cho trước để gán cho mỗi đỉnh sao cho không có 2 đỉnh kề nhau có chung một màu

Ví dụ: Đồ thị nào sau đây là lưỡng phân?

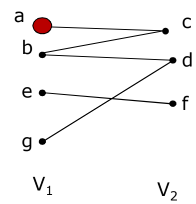


21

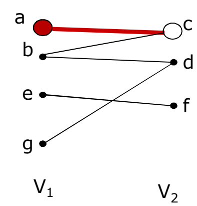
Kiểm tra G là lưỡng phân?



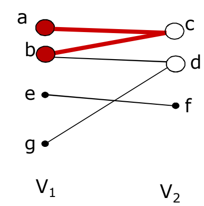
G



R={a}, W=∅

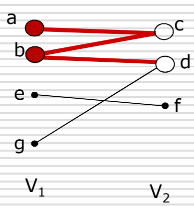


R={a}, W={c}

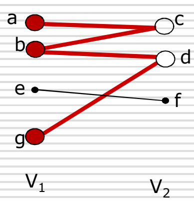


R={a,b},
W={c}

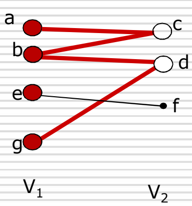
22



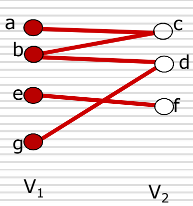
R={a,b},
W={c,d}



R={a,b,g},
W={c,d}



R={a,b,g,e},
W={c,d}



R={a,b,g,e},
W={c,d,f}

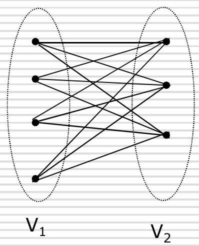
23

Thuật toán kiểm tra đồ thị là lưỡng phân???

24

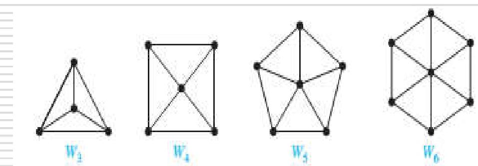
Một số đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị lưỡng phân đủ (Complete Bipartite Graphs)**: Đồ thị lưỡng phân $G=(X_1 \cup X_2, E)$ với $|V_1|=m$, $|V_2|=n$ là lưỡng phân đủ, kí hiệu $K_{m,n}$ nếu mọi đỉnh trong V_1 đều kề với mọi đỉnh trong V_2



Một số đồ thị đặc biệt

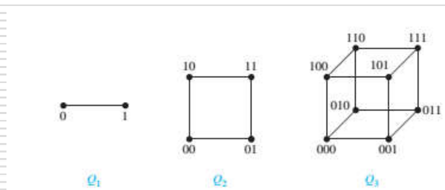
- **Đồ thị bánh xe** *(Wheels)*: Kí hiệu W_n, nhận được từ đồ thị C_n ($n \geq 3$) bằng cách thêm một đỉnh mới và bổ sung các cạnh nối đỉnh vừa thêm với các đỉnh trong C_n.
- Ví dụ:



Một số đồ thị W_n, $(3 \leq n \leq 6)$

Một số đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị lập phương** *(n-Cubes)*: Đồ thị lập phương n đỉnh (kí hiệu Q_n)là đồ thị với các đỉnh biểu diễn 2^n xâu nhị phân độ dài n. Hai đỉnh của nó gọi là kề nhau nếu như hai xâu nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit.
- Ví dụ:



4. Định lý bắt tay (The handshaking Theorem)

- **Định lý**: Cho đồ thị vô hướng G=(V,E) với m cạnh, Ta có:

$$\boxed{2m = \sum_{v \in V} \deg(v)}$$

C/m:????

- *Ví dụ*: Đồ thị G có 6 đỉnh và tất cả các đỉnh có bậc là 6. Tính số cạnh của G?

4. Định lý 1: Định lý bắt tay

Hệ quả:

i) Tổng bậc của các đỉnh bậc lẻ trong một đồ thị vô hướng G là một số chẵn

ii) Mọi đồ thị vô hướng đều có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ

iii) Đồ thị K_n có $\frac{1}{2}n(n-1)$ cạnh

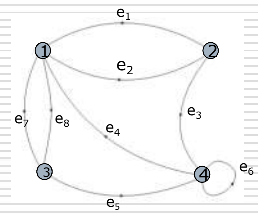
C/m:???

Định lý 2

- **Định lý**: G=(V,E) là đồ thị vô hướng có m cung, ta có:

$$m = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v)$$

Ví dụ:



m=|E|=8

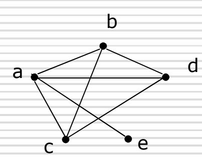
$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \deg^+(1) + \deg^+(2) + \deg^+(3) + \deg^+(4)$$
$$= 3 + 2 + 1 + 2 = 8$$

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \deg^-(1) + \deg^-(2) + \deg^-(3) + \deg^-(4)$$
$$= 2 + 1 + 2 + 3 = 8$$

5. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

- G=(V,E) không có cạnh song song (G không có cạnh song song cùng chiều nếu G có hướng). G có thể được biểu diễn bằng cách liệt kê tất cả các đỉnh của G, mỗi đỉnh liệt kê các đỉnh kề với nó

Ví dụ:



Đỉnh	Các đỉnh kề
a	b,d,e,c
b	a,c,d
c	a,b,d
d	a,b,c
e	a

- Biểu diễn bằng danh sách kề khá cồng kềnh, đặc biệt khi G có nhiều cạnh ⟹ ít được dùng trong các thuật toán về đồ thị

6. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề **(Adjacency Matrix)**

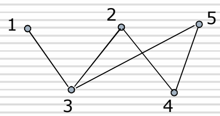
Cho đồ thị G=(V,E), tập đỉnh V={v_1, v_2, …, v_n} và tập cạnh/cung E={e_1, e_2,…, e_m}. Ma trận kề của G ứng với thứ tự các đỉnh v_1, v_2, …, v_n là ma trận vuông cấp n được định nghĩa như sau:

$A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ Với a_{ij}=số cạnh/cung nối từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j

Nếu G là đồ thị vô hướng thì A đối xứng

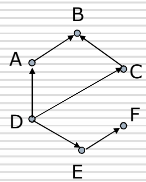
Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề (tt)

Ví dụ:



Ma trận kề

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

33

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề (tt)

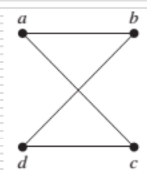
__Ví dụ__: Cho G=(V,E) với ma trận kề như sau:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

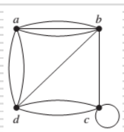
- Đỉnh A có bậc 1
- Đỉnh B có bậc 3
- Đỉnh C có bậc 4
- Đỉnh D có bậc 2
- Đỉnh E có bậc 2

34

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề (tt)



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

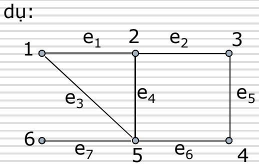
35

7. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc **(Incidence Matrix)**

Cho **__đồ thị vô hướng__** G=(V,E),V={$v_1,v_2,\ldots,v_n$},E={$e_1,e_2,\ldots,e_m$}.
Ma trận liên thuộc của G là ma trận cấp n×m được định nghĩa như Sau:

$$M = (m_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \, . \; m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } e_j \text{ liên thuộc với } v_i \\ 0 \text{ nếu } e_j \text{ không liên thuộc với } v_i \end{cases}$$

Ví dụ:

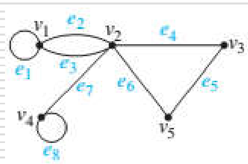


$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

36

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc (tt)

Đồ thi



Ma trận liên thuộc

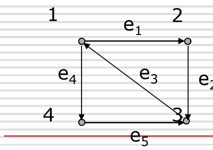
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc (tt)

- Cho **đồ thị có hướng** $G=(V,E), V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1, e_2,\ldots, e_m\}$. Ma trận liên thuộc của G là ma trận cấp n×m được xác định như sau:

$$M = (m_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \qquad m_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ nếu } e_j \text{ rời khỏi đỉnh } i \\ 0 \text{ nếu } e_j \text{ không liên thuộc với } v_i \\ -1 \text{ nếu } e_j \text{ đến đỉnh } i \end{cases}$$

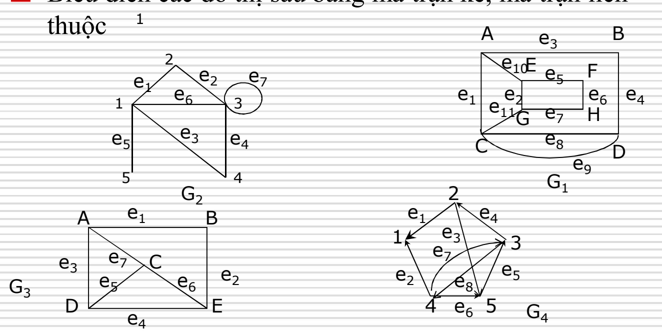
Ví du:



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bài tập

- Biểu diễn các đồ thị sau bằng ma trận kề, ma trận liên thuộc



8. Đồ thị đẳng cấu (Graph Isomorphism)

- **Định nghĩa**: Hai đồ thị $G_1=(V_1,E_1)$ và $G_2=(V_2,E_2)$ gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại song ánh $f: V_1 \leftrightarrow V_2$ sao cho:

$$\forall i,j \in V_1, (i,j) \in E_1 \Leftrightarrow (f(i), f(j)) \in E_2$$

Nghĩa là: f bảo toàn tính chất kề của các đỉnh. Hơn nữa, cũng bảo toàn bậc của đỉnh.

Ví dụ: f được xác định

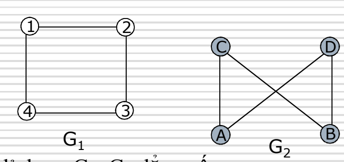
$f: \{1,2,3,4\} \leftrightarrow \{A,B,C,D\}$

Với:

f(1)=C; f(2)=B;

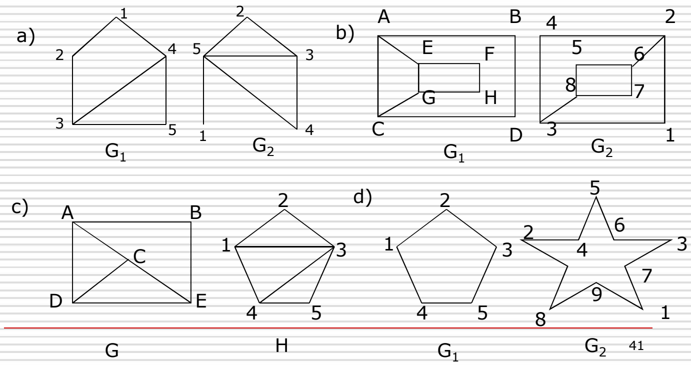
f(3)=D; f(4)=A

f bảo toàn tính chất kề của các đỉnh ⇒ G_1, G_2 đẳng cấu



Đồ thị đẳng cấu (tt)

Ví dụ: Các cặp đồ thị sau đây có phải đẳng cấu không?

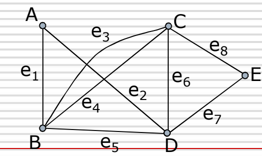


9. Đường đi và chu trình

- **Đường đi** (Path) có độ dài k từ đỉnh u đến đỉnh v của đồ thị G=(V,E) là dãy các đỉnh $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k$, $x_0=u$, $x_k=v$ và (x_i, x_{i+1}) là một cạnh/cung của G. Có thể biểu diễn đường đi bởi dãy các đỉnh cạnh/cung liên tiếp:

$$P=(x_0, e_1, x_1, e_2,\ldots,x_{k-1}, e_k, x_k)$$

Với: $x_0=u$, $x_k=v$, $e_i=(x_{i-1},x_i)\in E$



- (A,e_1,B,e_4,C,e_6,D) là một đường đi có độ dài 3 từ đỉnh A và đỉnh D
- $(E,e_7,D,e_6,C,e_4,B,e_1,A)$ là đường đi từ E đến A có độ dài 4

Đường đi và chu trình (tt)

- Đường đi không có lặp lại các cạnh/cung gọi là đường đi đơn.
- Đường đi không có lặp lại đỉnh gọi là đường sơ cấp

Ví dụ:

- (A,e_1,B,e_4,C,e_6,D) là một đường đi sơ cấp có độ dài 3 từ đỉnh A và đỉnh D
- $(A,e_1,B,e_5,D,e_5,B,e_4,C)$ không phải là đường đi đơn
- $(A,e_1,B,e_4,C,e_3,B,e_5,D)$ là đường đi đơn từ A đến D nhưng không phải là là đường đi sơ cấp

- Mọi đường đi sơ cấp đều là đường đi đơn

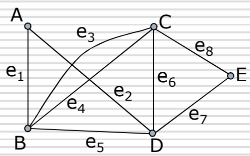
Đường đi và chu trình (tt)

- ***Chu trình*** Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối gọi là chu trình.
  - Chu trình gọi là đơn nếu không có sự lặp lại các cạnh (hay cung)
  - Chu trình gọi là sơ cấp nếu không có sự lặp lại các đỉnh

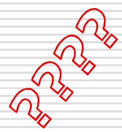
- ***Định lý***: Cho đồ thị G=(V,E) có ma trận kề là A. Số đường đi khác nhau có độ dài r từ đỉnh i đến đỉnh j của đơn đồ thị G là giá trị của phần tử a_{ij} trong ma trận A^r

Đường đi và chu trình (tt)

Ví dụ: Cho đồ thị G như hình dưới. Số đường đi có độ dài 3 từ A đến D?

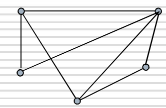


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

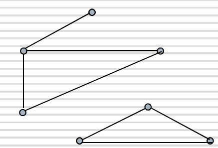


10. Sự liên thông – thành phần liên thông

- **Định nghĩa:** Đồ thị vô hướng G=(V,E) gọi là liên thông nếu luôn tồn tại đường đi giữa 2 đỉnh u, v bất kỳ trong V.



G_1: Liên thông

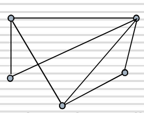


G_2: Không liên thông

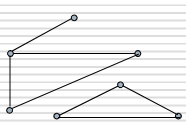
Sự liên thông–thành phần liên thông (tt)

- ***Định nghĩa***: Cho đồ thi vô hướng G=(V,E). Trên V ta định nghĩa quan hệ ~ như sau:
  $\forall x,y \in V$, $x \sim y$ $\Leftrightarrow$ có một đường đi giữa x và y
  Ta có: ~ là quan hệ tương đương trên V và mỗi lớp tương đương là gọi là một thành phần liên thông của G

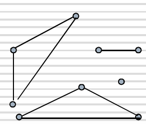
Ví dụ:



G_1: có 1 thành phần liên thông



G_2: có 2 thành phần liên thông

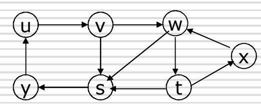


G_3: có 4 thành phần liên thông

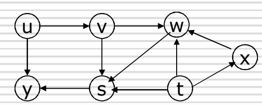
Sự liên thông–thành phần liên thông (tt)

- Đồ thi có hướng G gọi là **liên thông yếu** *(Weakly connected)* nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông
- Đồ thi có hướng G gọi là **liên thông mạnh** (*strongly connected*) nếu với mọi cặp đỉnh khác nhau u,v luôn có đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v và ngược lại.

Ví dụ:



G:liên thông mạnh

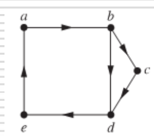


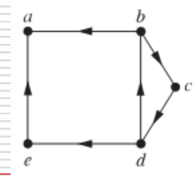
G' là liên thông yếu (không lt mạnh)

Sự liên thông–thành phần liên thông (tt)

- Một thành phần liên thông mạnh của đồ thi có hướng G là một đồ thị con liên thông mạnh của G và không là đồ thị con của bất kỳ đồ thi con liên thông mạnh nào khác của G.

Ví dụ: Tìm các thành phần liên thông mạnh của các đồ thị có hướng sau:

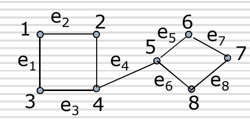




Sự liên thông–thành phần liên thông (tt)

- *Định nghĩa*: Cho G liên thông
  - Cạnh e của G gọi là cầu nếu sau khi loại bỏ e, G không còn liên thông
  - Đỉnh v trong G gọi là đỉnh nối (đỉnh cắt/vertex cut) nếu sau khi loại bỏ v cùng với các cạnh liên thuộc với nó thì G không còn liên thông.

Ví dụ:



➢Các đỉnh 4,5 là đỉnh nối
➢Cạnh e_4 là cầu

Sự liên thông–thành phần liên thông (tt)

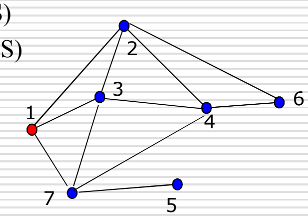
- ***Mệnh đề***: Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông luôn có đường đi sơ cấp.
- **Mệnh đề:** Mọi đơn đồ thị vô hướng n đỉnh ($n \geq 2$) có tổng bậc của hai đỉnh tuỳ ý không nhỏ hơn n đều là đồ thị liên thông.

  Hệ quả: Đơn đồ thị mà bậc của mỗi đỉnh của nó không nhỏ hơn một nửa số đỉnh là đồ thị liên thông.
- **Mệnh đề:** Nếu một đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh này phải liên thông, tức là có một đường đi nối chúng.
- **Mệnh đề:** Cho G=(V,E) là một đồ thị liên thông. Khi đó một đỉnh của G là điểm khớp khi và chỉ khi trong G tồn tại hai đỉnh u và v sao cho mỗi đường đi nối u và v đều phải đi qua đỉnh này.

11. Duyệt đồ thi

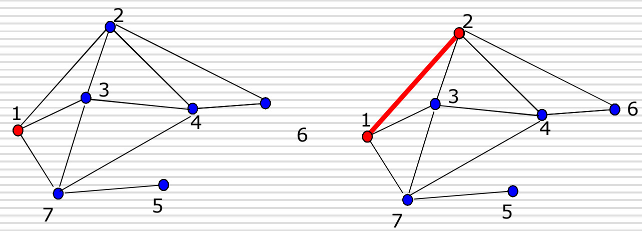
- là thăm qua tất cả các đỉnh của đồ thị
- Thường dùng một trong 2 cách để duyệt một đồ thị liên thông:
  - Duyệt theo chiều sâu (DFS)
  - Duyệt theo chiều rộng (BFS)

Ví dụ: Duyệt đồ thi sau bắt đầu từ đỉnh 1



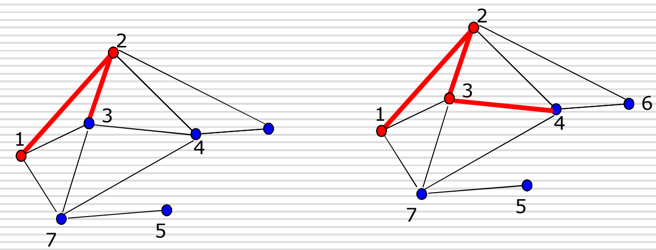
Duyệt đồ thị theo chiều sâu (DFS: Depth First Search)

- Duyệt theo chiều sâu



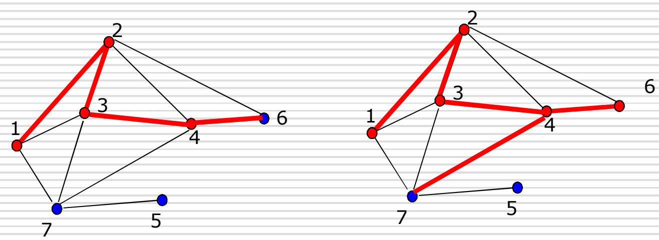
53

Duyệt đồ thị theo chiều sâu (DFS: Depth First Search)



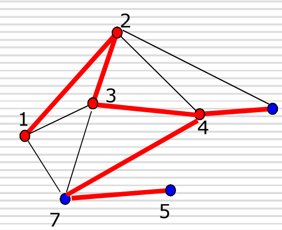
54

Duyệt đồ thị theo chiều sâu (DFS: Depth First Search)



55

Duyệt đồ thị theo chiều sâu (DFS: Depth First Search)



56

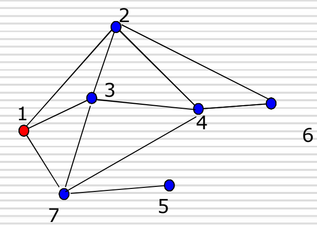
Thuật toán duyệt đồ thị theo chiều

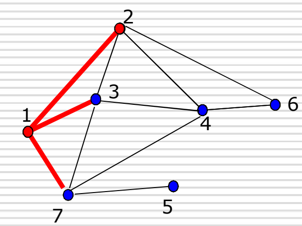
Procedure visited(u)
Begin visited[u]:=True;
  for each vertex v adjacent to u **do**
    if not vistited[v] **then** DFS(v);
End
Procedure DFS
begin **for each** vertex u **in** V **do** visited[u]=false;
 for each vertex u **in** V **do**
  If not visited[u] **then** DFS(u);
End

57

Duyệt đồ thị theo chiều rộng (BFS: Breadth First Search)

- Duyệt theo chiều rộng

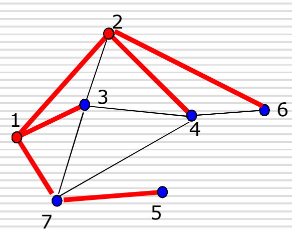




58

Duyệt đồ thị theo chiều rộng (BFS: Breadth First Search)

- Duyệt theo chiều sâu



59

Thuật toán duyệt đồ thị theo chiều rộng

Procedure visit(u)
Begin Queue:= ∅;
  Queue.push(u);
  visited[u]:=True;
  While Queue<>∅ **do**
  Begin v=Queue.pop();
    visit(v);
    for each vertex w adjacent to v **do**
    If not visited[w] **then**
    Begin Queue.push(w); visited[w]=true;
    End;
  End;
End;

60

Procedure BFS

Begin

for each vertex u **in** V **do** visited[u]=false;

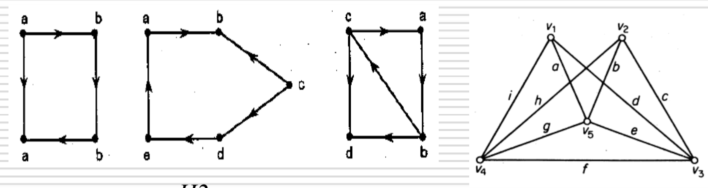
for each vertex u **in** V **do**

If not visited[u] **then** BFS(u);

End

Bài tập chương 01

1) Viết ma trận kề và mà trận liên thuộc của các đồ thị sau:



H1 *H2* *H3* *H4*

Bài tập chương 01

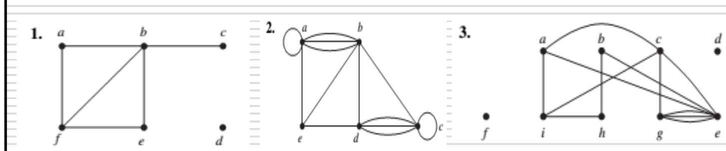
2) Tìm số đỉnh của đồ thị vô hướng G. Biết:
   - a) G có 12 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc là 2
   - b) G có 15 cạnh, 3 đỉnh bậc 4 và các đỉnh còn lại bậc 3.
   - c) G có 6 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc bằng nhau.

3) Một đồ thị vô hướng G có 19 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc >=3. G có tối đa bao nhiêu đỉnh?

4) Biết rằng mọi đỉnh của một đồ thị vô hướng G đều có bậc là một số lẻ p. Cmr, số cạnh của G là bội số của p

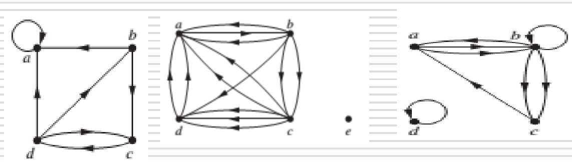
Bài tập chương 01

5. Với các đồ thị vô hướng sau đây, tính bậc của từng đỉnh, chỉ ra các đỉnh treo, các đỉnh cô lập, sau đó tính tổng bậc của tất cả các đỉnh, áp dụng định lý bắt tay tính số cạnh của từng đồ thị:



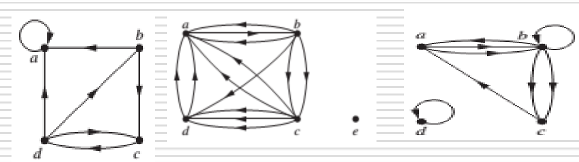
Bài tập chương 01

6. Với các đồ thị có hướng sau đây, tính nữa bậc trong, nữa bậc ngoài của từng đỉnh, tính số cung của từng đồ thị:



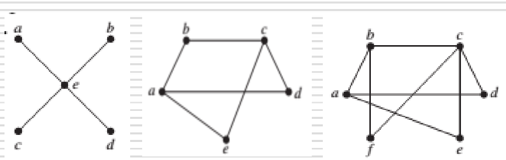
Bài tập chương 01

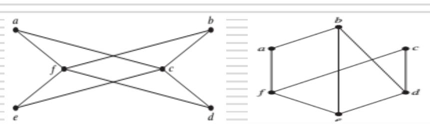
6. Với các đồ thị có hướng sau đây, tính nữa bậc trong, nữa bậc ngoài của từng đỉnh, tính số cung của từng đồ thị:



Bài tập chương 01

7. Các đồ thi sau đây, đồ thị nào là lưỡng phân





Bài tập chương 01

8) Cho G={V,E} đơn với V={v_1,v_2,…,v_n} (n≥2)

Và E = {(i,j), 1≤i,j≤n, i≠j, i+j chẵn}

CMR: G không liên thông? xác định số thành phần liên thông

9) Có thể có 1 nhóm 9 người trong đó mỗi người chỉ quen biết đúng 5 người khác trong nhóm hay không

10) CMR, một đồ thị liên thông có n đỉnh sẽ có ít nhất n-1 cạnh

11) CMR, trong mọi đồ thị đơn luôn tồn tại đường đi từ một đỉnh bậc lẻ tới một đỉnh bậc lẻ khác

Thực hành chương 1

- Cài đặt đồ thị (vô hướng/ có hướng):
  - Sử dụng ma trận kề, ma trận liện thuộc để biểu diễn đồ thị
  - Các phương thức:
    - Thêm một đỉnh
    - Thêm một cạnh
    - In ma trận kề/ma trận liện thuộc
    - Duyệt đồ thị (theo DFS và BFS)
    - Tính bậc của đỉnh
    - Tính số cạnh
    - Tìm một đường đi từ đỉnh x đến đỉnh y
    - Kiểm tra tính liên thông của đồ thị
    - Tìm các thành phần liên thông
    - Kiểm tra đồ thị có phải là đồ thị con của một đồ thị khác
    - Kiểm tra đồ thị lưỡng phân?

69

- Kiểm tra đồ thi có hướng liên thông yếu
- Kiểm tra đồ thi có hướng liên thông mạnh
- In ra thành phân liên thông (mạnh đv đồ thị có hướng) chứa một đỉnh cho trước
- In ra tất cả các thành phân liên thông (mạnh)

70