BÀI TOÁN ĐẾM

Lý thuyết tổ hợp

Nội dung

- Các nguyên lý đếm cơ bản
- Nguyên lý bù trừ
- Hoán vị và tổ hợp
- Hệ thức truy hồi

Các nguyên lý đếm cơ bản

Nguyên lý cộng

- Nếu một công việc nào nó có thể thực hiện theo *n phương án khác nhau*, trong đó:
  - Phương án thứ 1 có m_1 cách thực hiện
  - Phương án thứ 2 có m_2 cách thực hiện
  - ………..
  - Phương án thứ n có m_n cách thực hiện
- Khi đó, có: $m_1+m_2+...+m_n$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

Qui tắc cộng

- Phát biểu dưới dạng tập hợp:

Nếu A và B là hai tập rời nhau ($A \cap B = \phi$) thì : $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$.

Nếu $A_1, A_2, .., A_n$ là những tập hợp rời nhau thì:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2) + .. + N(A_n).$$

Nguyên lý cộng: Ví dụ 1

- Giả sử cần chọn hoặc một cán bộ hoặc một sinh viên tham gia một hội đồng của một trường đại học.
  - Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại biểu này nếu như có 37 cán bộ và 63 sinh viên.

- **Lời giải:**
  - Gọi việc thứ nhất là chọn 1 cán bộ từ tập cán bộ ta có 37 cách.
  - Gọi việc thứ hai là chọn 1 sinh viên từ tập sinh viên ta có 63 cách.
  - Vì tập cán bộ và tập sinh viên là rời nhau, theo nguyên lý cộng ta có tổng số cách chọn vị đại biểu này là 37 + 63 = 100 cách chọn.

Nguyên lý cộng: Ví dụ 2

- Một đoàn VĐV gồm môn bắn súng và bơi được cử đi thi đấu.
  - Số VĐV nam là 10 người.
  - Số VĐV thi bắn súng kể cả nam và nữ là 14 người.
  - Số VĐV nữ thi bơi bằng số VĐV nam thi bắn súng.
  - Hỏi đoàn có bao nhiêu VĐV.

- **Lời giải:**
  - Chia đoàn thành hai tập, tập các VĐV nam và tập các VĐV nữ.
  - Tập nữ lại được chia thành hai: thi bắn súng và thi bơi.
  - Thay số nữ thi bơi bằng số nam thi bắn súng , ta được số nữ bằng tổng số vận động viên thi bắn súng.
  - Từ đó theo nguyên lý cộng toàn đoàn có 14 + 10 = 24 VĐV.

Nguyên lý cộng: Ví dụ 3

- Giá trị của biến *k* sẽ bằng bao nhiêu sau khi thực hiện đoạn chương trình sau :

```
k := 0
for i1:= 1to n1
        k:=k+1
for i2:= 1to n2
        k:=k+1
. . . . . . . . . .
for im:= 1 to nm
        k:=k+1
```

- **Lời giải:**
  - Coi mỗi vòng for là một công việc, do đó ta có *m* công việc $T_1, T_2, \ldots, T_m$.
  - Trong đó T_i thực hiện bởi n_i cách (i= 1, 2, .., m).
  - Theo nguyên lý cộng tổng tất cả các cách để hoàn thành $T_1, T_2, \ldots, T_m$ là $k = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Nguyên lý nhân

- Nếu một công việc nào đó phải hoàn thành qua *n giai đoạn liên tiếp*, trong đó:
  - Phương án thứ 1 có m_1 cách thực hiện
  - Phương án thứ 2 có m_2 cách thực hiện

giai đoạn

  - ....
  - Phương án thứ n có m_n cách thực hiện
- Khi đó, có: $m_1.m_2 ...m_n$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

Qui tắc nhân

- Phát biểu tổng quát bằng tập hợp:
  - Nếu $A_1, A_2, .., A_m$ là những tập hợp hữu hạn,
    - khi đó số phần tử của tích đề-các các tập này bằng tích số các phần tử của mỗi tập thành phần.
    - Hay đẳng thức: $N(A_1 \times A_2 \times .. A_m) = N(A_1)\, N(A_2) \ldots N(A_m)$.
  - Nếu $A_1 = A_2 =. . A_m$ thì $N(A^m) = N(A)^m$

Nguyên lý nhân: Ví dụ 1

- Giá trị của biến *k* sẽ bằng bao nhiêu sau khi thực hiện đoạn chương trình sau :

```
k:=0
for i1 = 1 to n1
    for i2 = 1 to n2
        .........
          ........
            for im=1 to nm
                k:=k +1
```

- **Lời giải:**
  - Coi mỗi vòng ***for*** là một công việc, do đó ta có *m* công việc $T_1, T_2, . . ., T_m$.
  - Trong đó T_i thực hiện bởi n_i cách (i= 1, 2, .., m).
  - Theo nguyên lý cộng tổng tất cả các cách để hoàn thành $T_1, T_2,.., T_m$ là $k= n_1 \times n_2 \times .. \times n_m$

Nguyên lý nhân: Ví dụ 2

- Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế của một giảng đường bằng một chữ cái và sau đó là một số nguyên nhỏ hơn 100.
  – Bằng cách như vậy hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế có thể ghi nhãn khác nhau.

- **Lời giải:**
  – Có nhiều nhất là 26 x 100 = 2600 ghế được ghi nhãn.

Nguyên lý nhân: Ví dụ 3

- Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 7?.

- **Lời giải:**
  – Một xâu nhị phân có độ dài 7 gồm 7 bít
  – Mỗi bít có hai cách chọn (hoặc giá trị 0 hoặc giá trị 1)
  – Theo qui tắc nhân ta có 2.2.2.2.2.2.2 = 2^7 = 128 xâu bít nhị phân độ dài 7.

Nguyên lý nhân: Ví dụ 4

- Số điện thoại gồm 10 chữ số:
  - nhóm mã vùng (3 chữ số), nhóm mã chi nhánh (3 chữ số), nhóm mã máy (4 chữ số).
- Một số hạn chế đối với một số con số:
  - X biểu thị một số có thể nhận các giá trị từ 0..9
  - N là số có thể nhận các chữ số từ 2..9
  - Y là các số có thể nhận các chữ số 0 hoặc 1.
  - Hỏi theo hai dự án đánh số NYX NNX XXXX và NXX NXX XXXX có bao nhiêu số điện thoại được đánh số khác nhau?

- **Lời giải:**
  - Đánh số theo dự án NYX NNX XXXX được nhiều nhất là:

    $8 \times 2 \times 10 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 8^3 \times 10^6 = 1024.10^6$
  - Đánh số theo dự án NXX NXX XXXX được nhiều nhất là:

    $8 \times 10 \times 10 \times 8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 8^2 \times 10^8 = 64.\ 10^8$

Nhận xét

- Nếu *bỏ 1 giai đoạn nào đó mà ta không thể hoàn thành được công việc* (không có kết quả) thì lúc đó ta cần phải sử dụng quy tắc **nhân**.
- Nếu *bỏ 1 giai đoạn nào đó mà ta vẫn có thể hoàn thành được công việc* (có kết quả) thì lúc đó ta sử dụng quy tắc **cộng**.

Một vài ví dụ

- **VD1**: Người ta có thể đi từ TP.HCM đến Đà Nẵng bằng một trong ba phương tiện: tàu hoả, tàu thuỷ và máy bay. Nếu có 3 cách đi bằng tàu hoả, 4 cách đi bằng tàu thuỷ, và 2 cách đi bằng máy bay, thì sẽ có mấy cách đi từ TP.HCM đến Đà Nẵng? 3+4+2=9
- **VD2**: Đề đi từ thành phố HCM đến thành phố Phan Rang người ta phải đi lần lượt qua hai thành phố Biên Hòa và Phan Thiết. Nếu có 3 cách đi từ TP.HCM đến TP. Biên Hòa, 4 cách đi từ TP. Biên Hòa đến TP. Phan Thiết và 2 cách đi từ TP. Phan Thiết đến TP. Phan Rang, thì sẽ có mấy cách đi từ TP. HCM đến TP. Phan Rang?

3*4*2=24

Một vài ví dụ

- **VD3**: Có 10 người tham gia vào việc chụp ảnh đám cưới (có cả cô dâu và chú rễ). Bức ảnh chỉ có 6 người trong số họ.
  a) Có bao nhiêu bức ảnh có mặt cô dâu? 6*9*8*7*6*5=90720
  b) Có bao nhiêu bức ảnh có mặt cả cô dâu và chú rễ? 6*5*8*7*6*5 = 50400
  c) Có bao nhiêu bức ảnh chỉ có hoặc cô dâu hoặc chú rễ?

  (6*8*7*6*5*4)+(6*8*7*6*5*4) = 80640

Nguyên lý bù trừ

- Nếu không có giả thiết gì về sự rời nhau giữa hai tập A và B thì:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 1

- Lớp toán học rời rạc có 25 sinh viên giỏi tin học, 13 sinh viên giỏi toán và 8 sinh viên giỏi cả toán và tin học.
  - Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên nếu mỗi sinh viên giỏi toán hoặc học giỏi tin học hoặc giỏi cả hai?

- **Lời giải:**
  - Tập các sinh viên giỏi tin học: A
  - Tập các sinh viên giỏi toán: B
  - Khi đó $A \cap B$ là tập sinh viên giỏi cả toán học và tin học.
  - Vì mỗi sinh viên trong lớp hoặc giỏi toán, hoặc giỏi tin học hoặc giỏi cả hai nên ta có tổng số sinh viên trong lớp là $N(A \cup B)$.
  - Do vậy: $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 25 + 13 - 8 = 30$

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 2

- Có bao nhiêu số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11.

- **Lời giải:**
  - A: tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7
  - B: tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 11.
  - Khi đó tập số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc chia hết cho 11 là $N(A \cup B)$.
  - Theo nguyên lý bù trừ ta có:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = \lfloor 1000/7 \rfloor + \lfloor 1000/11 \rfloor - \lfloor 1000/7.11 \rfloor$$
$$= 142 + 90 - 12 = 220.$$

Số phần tử của hợp 3 tập A, B, C

- Ta nhận thấy $N(A) + N(B) + N(C)$ đếm một lần những phần tử chỉ thuộc một trong ba tập hợp.
  - số phần tử của $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ được đếm hai lần là $N(A \cap B)$, $N(A \cap C)$, $N(B \cap C)$,
  - Số phần tử của $A \cap B \cap C$ được đếm ba lần là $N(A \cap B \cap C)$
- Khi đó, biểu thức: $N(A \cup B \cup C) – N(A \cap B)- N(A \cap C) – N(B \cap C)$ chỉ đếm các phần tử chỉ thuộc một trong ba tập hợp và loại bỏ đi những phần tử được đếm hai lần.
  - Như vậy, số phần tử được đếm ba lần chưa được đếm, nên ta phải cộng thêm với giao của cả ba tập hợp.
- Từ đó ta có công thức đối với 3 tập không rời nhau:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

Nguyên lý bù trừ tổng quát

- $A_1, A_2, . ., A_m$ là những tập hữu hạn. Khi đó:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup . . . \cup A_m) = N_1 - N_2 + . . +(-1)^{m-1} N_m$$

- Trong đó:

$$N_1 = N(A_1) + N(A_2) + . . + N(A_m)$$

  - $1<k<m$, N_k là tổng phần tử của tất cả các giao của *k* tập lấy từ *m* tập đã cho,

$$N_m = N(A_1 \cap A_2 \cap . . . \cap A_m)$$

Nói cách khác:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup ... A_n) = \sum_{1 \le i \le n} N(A_i) - \sum_{1 \le i, j < n} N(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(A_i \cap A_j \cap A_k$$

$$- ... + (-1)^{n+1} N(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n)$$

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 3

- Tìm công thức tính số phần tử của 4 tập hợp.
- **Lời giải:**
  - Từ nguyên lý bù trừ tổng quát ta có:

4C1

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) + N(A_4) - N(A_1 \cap A_2) -$$

4C2

$$N(A_1 \cap A_3) - N(A_1 \cap A_4) - N(A_2 \cap A_3) - N(A_2 \cap A_4) -$$

4C3

$$N(A_3 \cap A_4) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) +$$

$$N(A_1 \cap A_3 \cap A_4 + N(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

4C4

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 4

- Tập X = {1, 2, . . ., 10000} có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3, 4, 7?.
- **Lời giải:**
  - Gọi A là tập các số thuộc X chia hết cho 3, B là tập các số thuộc X chia hết cho 4, C là tập các số thuộc X chia hết cho 7.
  - N(ABC): tập các số trong X chia hết cho ít nhất một trong các số 3, 4, 7

$N(A\cup B\cup C) = N(A)+N(B) + N(C) - N(A\cap B) - N(A\cap C) - N(B\cap C) + N(A\cap B\cap C)$

trong đó :

$N(A) + N(B) + N(C) = [10\,000/3] + [10\,000/4] + [10\,000/7]$

$= 3333 + 2500 + 1428 = 7261$

$N(A\cap B) = [10000/3x4] = 833$

$N(A\cap C) = [10000/3x7] = 476$

$N(B\cap C) = [10000/4x7] = 357$

$N(A\cap B) + N(A\cap C) + N(B\cap C) = 833 + 476 + 357 = 1666$

$N(A\cap B\cap C) = [10000/(3x4x7)] = 119.$

=>Số các số nhỏ hơn 10000 cần đếm là :

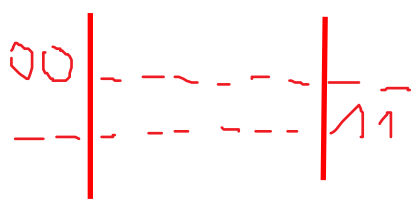
$10000 - N(A\cup B\cup C) = 10000 - (7261 - 1666 + 119)$

Nguyên lý bù trừ: Ví dụ 5

- Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00 hoặc kết thúc bởi 11.

- **Lời giải:**
  - A: số xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00,
  - B: số xâu nhị phân độ dài 10 kết thúc bởi 11.
  - Dễ ràng nhận thấy, $N(A) = N(B) = 2^8 = 256$, $N(A \cap B) = 2^6 = 64$.
  - Theo nguyên lý bù trừ ta có:

$$\begin{aligned} N(A \cup B) &= N(A) + N(B) - N(A \cap B) \\ &= 256 + 256 - 64 = 448. \end{aligned}$$



Đếm các hoán vị và tổ hợp

Chỉnh hợp lặp

- Một chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* phần tử là bộ có thứ tự gồm *k* thành phần lấy từ *n* phần tử của tập đã cho.
  - Như vậy, một chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* phần tử có thể xem là phần tử của tích đề các A^k với A là tập đã cho.
- Theo nguyên lý nhân, số các tất cả các chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* sẽ là $\mathbf{n^k}$.
- **Ví dụ 1**: Tính số dãy **nhị phân** có độ dài k bit
  - 0,1
    => n=2; ví dụ k=3: ta có (000),(111): thành phần có thể lặp; (001), (110), (011), (101)... => 2^3 .

Chỉnh hợp lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 2:** Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài *k*?

- **Lời giải**: Bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 kí tự [‘A’..’Z’], số các xâu có độ dài *k* được chọn từ 26 chữ cái chính là chỉnh hợp lặp *k* của 26 phần tử và bằng 26^k.

Chỉnh hợp lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 3:** Tính xác suất lấy ra liên tiếp được 3 quả bóng đỏ ra khỏi bình kín chứa 5 quả đỏ, 7 quả xanh nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra lại bỏ nó trở lại bình?
- **Lời giải**:
  - Số kết cục có lợi để ta lấy ra liên tiếp 3 quả bóng đỏ là $\mathbf{5^3}$ (là chỉnh hợp lặp vì có 5 quả đỏ ta phải lấy 3 quả và có hoàn lại).
  - Toàn bộ kết cục có thể để lấy ra 3 quả bóng bất kỳ trong 12 quả bóng là $\mathbf{12^3}$.
  - Như vậy, xác suất để có thể lấy ra 3 quả bóng đỏ liên tiếp là $\mathbf{5^3/12^3}$.

Chỉnh hợp không lặp

- Chỉnh hợp **không lặp** chập *k* của *n* phần tử là bộ có thứ tự gồm *k* thành phần lấy ra từ *n* phần tử đã cho.
  - Các phần tử **không được lặp lại**.
- Để xây dựng một chỉnh hợp không lặp:
  - Xây dựng từ thành phần đầu tiên. Thành phần này có n khả năng chọn.
  - Mỗi thành phần tiếp theo, những khả năng chọn giảm đi 1 (vì không được lấy lặp lại).
  - Tới thành phần thứ *k* có **n-k + 1** khả năng chọn.
  - Theo nguyên lý nhân ta có số chỉnh hợp không lặp chập *k* của tập hợp *n* phần tử ký hiệu là **P(n, k)** được tính theo công thức:

$$P(n,k) = n(n-1)..(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chỉnh hợp không lặp – Ví dụ

- **Ví dụ 1**:Tìm số hàm đơn ánh có thể xây dựng được từ tập *k* phần tử sang tập *n* phần tử?
- **Lời giải**:
  – Số hàm đơn ánh từ tập *k* phần tử sang tập *n* phần tử chính là P(n,k).

- **Ví dụ 2**: Có bao nhiêu cách chọn 4 cầu thủ khác nhau trong đội bóng gồm 10 cầu thủ để tham gia các trận đấu đơn.
- **Lời giải**:
  – Có P(10,4) = 10.9.8.7 = 5040 cách chọn. $\frac{10!}{(10-4)!}$

Chỉnh hợp không lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 3**: Có 8 vận động viên chạy thi. Người về nhất sẽ được nhận huân chương vàng, người về nhì nhận huân chương bạc, người về ba nhận huy chương đồng.
  – Hỏi có bao nhiêu cách trao huy chương nếu tất cả các kết cục đều có thể xảy ra?
- **Lời giải**: Số cách trao huy chương chính là số chỉnh hợp chập 3 không lặp của tập hợp 8 phần tử.
  – Vì thế có P(8,3) = 8.7.6 = 336 cách trao huy chương.

$$\frac{8!}{5!}$$

Hoán vị

- Các hoán vị của *n* phần tử là một **cách xếp** có thứ tự các phần tử đó.
  - Số các hoán vị của tập *n* phần tử có thể coi là trường hợp riêng của chỉnh hợp không lặp với **k = n**.
  - Ta cũng có thể đồng nhất một hoán vị với một song ánh từ tập *n* phần tử lên chính nó.
  - Số hoán vị của tập gồm *n* phần tử là **P(n,n) = n!** (hoặc P_n)
- **Ví dụ 1**: Có 6 người xếp thành hàng để chụp ảnh. Hỏi có thể bố trí chụp được bao nhiêu kiểu khác nhau?
- **Lời giải**: Mỗi kiểu ảnh là một hoán vị của 6 người.
  - Do đó có **6! = 720** kiểu ảnh khác nhau có thể chụp.

Hoán vị - Ví dụ

- **Ví dụ 2**: Cần bố trí thực hiện ***n*** chương trình trên một máy tính. Hỏi có bao nhiêu cách bố trí khác nhau?
- **Lời giải**: Số chương trình được đánh số từ 1, 2, . ., n. Như vậy, số chương trình cần thực hiện trên một máy tính là số hoán vị của 1, 2, .., n. (**n!**)
- **Ví dụ 3**: Một thương nhân đi bán hàng tại 8 thành phố. Cô ta có thể bắt đầu hành trình của mình tại một thành phố nào đó nhưng phải qua 7 thành phố kia theo bất kỳ thứ tự nào mà cô ta muốn. Hỏi có bao nhiêu lộ trình khác nhau mà cô ta có thể đi?
- **Lời giải**: Vì thành phố xuất phát đã được xác định. Do vậy thương nhân có thể chọn tuỳ ý 7 thành phố còn lại để hành trình.
  - Như vậy, tất cả số hành trình của thương nhân có thể đi qua là 7! = 5040 cách.

Hoán vị lặp

- **Hoán vị lặp :** Cho n phần tử, trong đó có n_1 phần tử x_1 , n_2 phần tử x_2, ..., n_k phần tử x_k với $n_1+n_2+...+n_k=n$.
  - Mỗi cách sắp xếp n phần tử đó vào n vị trí gọi là **một hoán vị lặp của *n* phần tử** đã cho.
- *Số tất cả các hoán vị lặp* của **n** phần tử ở trên là :

$$\mathbf{P(n_1,n_2,...,n_k) = n!/(n_1!n_2!...n_k!)}$$

Tổ hợp

- Một tổ hợp chập *k* của *n* phần tử là một bộ không kể thứ tự gồm *k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử* đã cho.
- Có thể coi một tổ hợp chập *k* của *n* phần tử là một tập con *k* phần tử lấy trong *n* phần tử.
- Số tổ hợp chập *k* của *n* phần tử ký hiệu là C(n,k).

$$P(n,k) = C(n,k).P(k,k) \Rightarrow C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Số tổ hợp chập *k* của *n* phần tử: C(n,k)

- Có thể tính được trực tiếp C(n,k) thông qua chỉnh hợp không lặp của *k* phần tử.
- Xét tập hợp tất cả các chỉnh hợp không lặp chập *k* của *n* phần tử.
  - Sắp xếp chúng thành những lớp sao cho *hai chỉnh hợp thuộc cùng một lớp* ***chỉ khác nhau về thứ tự***.
  - Mỗi lớp như vậy là một tổ hợp chập *k* của *n* phần tử **C(n,k)**.
  - Số chỉnh hợp trong mỗi lớp đều bằng nhau và bằng **k!** (là số hoán vị k phần tử **P(k,k)**.
  - Số các lớp bằng số chỉnh hợp không lặp chập k của n **P(n,k)**.
  - Từ đó ta có:

$$P(n,k) = C(n,k).P(k,k) \Rightarrow C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tổ hợp – Ví dụ

- **Ví dụ 1**: Cho S = {a,b,c,d}, tìm C(4,2)?
- **Lời giải**:
  - C(4,2) = 6 tương ứng với 6 tập con: {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}.
- **Ví dụ 2**: Có *n* đội bóng thi đấu vòng tròn. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu.
- **Lời giải**:
  - Cứ hai đội bóng thì có một trận,
  - Số trận đấu sẽ bằng số cách chọn *2* trong *n* đội,
  - C(n, 2) = n! / 2!(n-2)! = n(n-1)/2 trận đấu.

Tổ hợp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 3**: Chứng minh

  a) C(n,k) = C(n, n-k)

  b) C(n, 0) = C(n,n)= 1

  c) C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)

Lời giải:

a) C(n,n-k) = n!/(n-k)!.(n-n+k)! = n!/k!(n-k)! = C(n,k).

Hoặc C(n, k) = n!/k!(n-k)! = n!/ (n-k)! (n-(n-k))! = C(n, n-k);

b) Chú ý 0!=1 => b hiển nhiên đúng

c) C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)

$$C(n-1,k-1)+C(n-1,k)=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-\cancel{1}-k+\cancel{1})!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right)=\frac{(n-1)!.\underline{n}}{(k-1)!\underline{k}(n-k-1)!\underline{(n-k)}}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C(n.k)$$

Tổ hợp lặp

- Mỗi cách chọn ra *k* **vật** từ *n* **loại vật** khác nhau (*trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần*) được gọi là tổ hợp lặp chập *k* của *n*.
- Số các tổ hợp lặp chập *k* của *n* được ký hiệu là:

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Hay **C(n + k -1, k)**

Lưu ý: **C(n + k -1, k) = C(n + k -1, n-1)**

Tổ hợp lặp – Ví dụ

- **Ví dụ 1**: Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

- **Giải**:
  – Ta có mỗi cách chọn là mỗi *tổ hợp lặp* chập 2 của 3.
  – Cụ thể: AA, AB, AC, BB, BC, CC

$$K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$$

Tổ hợp lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 2**: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?
- **Giải**:
  - Mỗi nghiệm nguyên không âm của phương trình ứng với một cách chọn 11 phần tử từ một tập có 3 loại,
    - sao cho có x_1 phần tử loại 1 được chọn, x_2 phần tử loại 2 được chọn, x_3 phần tử loại 3 được chọn.
  - Số này chính bằng số tổ hợp lặp chập 11 từ tập có 3 phần tử.
  - Vì vậy, số nghiệm nguyên không âm của phương trình là:

$$\mathbf{C(3 + 11 - 1, 11)} = C(13, 11) = (13.12) / 2 = 78.$$

Tổ hợp lặp – Ví dụ (tt)

- **Ví dụ 3**: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$?
- **Giải**:
  - Mỗi nghiệm nguyên không âm của phương trình ứng với một cách chọn 11 phần tử từ một tập có 3 loại,
    - sao cho có x1 phần tử loại 1 được chọn, x2 phần tử loại 2 được chọn, x3 phần tử loại 3 được chọn.
    - Trong đó, có ít nhất một phần tử loại 1, hai phần tử loại 2 và ba phần tử loại 3.
  - Vì thế ta chọn một phần tử loại 1, hai phần tử loại 2, ba phần tử loại 3 sau đó chọn thêm 5 phần tử nữa.
    - Số này chính bằng số tổ hợp lặp chập 5 từ tập có 3 loại phần tử.
  - Vì vậy, số nghiệm nguyên không âm của phương trình là:

C(3 + 5 -1, 5) = C (7, 5) = (7.6) / 2 = 21.

Hệ thức truy hồi

- Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy, cụ thể là a_1, a_2, .., a_{n-1} với mọi $n \geq n_0$ nguyên dương.
- Dãy số được gọi là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu *các số hạng của nó thoả mãn hệ thức truy hồi*.

Ví dụ 1 - Lãi kép

- Giả sử một người gửi 10000$ vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Hỏi sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?
- **Lời giải**:
  - Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau *n* năm.
  - Vì số tiền có trong tài khoản sau *n* năm bằng số tiền có được trong *n-1* năm cộng với lãi suất năm thứ *n*.
  - Nên dãy $\{P_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi:

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$$

Ví dụ 1 - Lãi kép (tt)

- Dùng phương pháp lặp để tìm nghiệm cho P_n:

$$P_0 = 10000$$

$$P_1 = 1.11P_0$$

$$P_2 = 1.11P_1 = (1.11)^2P_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n = 1.11P_{n-1} = (1.11)^n\ P_0$$

Thay P_0= 10000, và n = 30 ta được:

$$P_{30} = (1.11)^{30}10000 = 228922,97\ \$$$

Ví dụ 2 - Họ nhà thỏ và số Fibonaci

- Một cặp thỏ sinh đôi (một con đực và một con cái) được thả lên một hòn đảo.
- Giả sử rằng cặp thỏ sẽ chưa sinh sản được trước khi đầy hai tháng tuổi.
- Từ khi chúng đầy hai tháng tuổi, mỗi tháng chúng sinh thêm được một cặp thỏ.
- Tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ trên đảo sau *n* tháng với giả sử các cặp thỏ là trường thọ.

Ví dụ 2 - Họ nhà thỏ và số Fibonaci (tt)

- **Lời giải**:
  - Giả sử f_n là số cặp thỏ sau *n* tháng. Ta sẽ chỉ ra rằng $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (n=1, 2, . ., n) là các số của dãy fibonaci.
  - Cuối tháng thứ nhất số cặp thỏ trên đảo là $f_1 = 1$.
  - Vì tháng thứ hai cặp thỏ vẫn chưa đến tuổi sinh sản được nên trong tháng thứ hai $f_2 = 1$.
  - Vì mỗi cặp thỏ chỉ được sinh sản sau ít nhất hai tháng tuổi, nên ta tìm số cặp thỏ sau tháng thứ *n* bằng cách cộng số cặp thỏ sau tháng *n-2* và tháng *n-1* hay $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.
  - Do vậy, dãy $\{f_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi $\mathbf{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}}$ với $\mathbf{n \geq 3}$ và $\mathbf{f_1 = 1, f_2 = 1}$.

Ví dụ 2 - Họ nhà thỏ và số Fibonaci (tt)

Số tháng	Số cặp sinh sản	Số cặp thỏ con	Tổng số cặp thỏ
1	0	1 0	1
2	0	1 0	1
3	1 0	1 1	2
4	1 0	2 1 2	3
5	2 0 1	3 2 3 4	5
6	3 0 1 2	5 3 4 5 6 7	8
……..	……..	……..	……..

Ví dụ 3 - Tính hệ số tổ hợp C(n,k)

- **Lời giải**
  - Chọn phần tử cố định *a* trong ***n*** phần tử đang xét.
  - Chia số cách chọn tập con ***k*** phần tử này thành hai lớp (lớp chứa ***a*** và lớp không chứa ***a***).
  - Nếu *a* được chọn thì ta cần bổ xung ***k-1*** phần tử từ ***n-1*** phần tử còn lại, từ đó lớp chứa ***a*** gồm **C(n-1, k-1)** cách.
  - Nếu *a* không được chọn, thì ta phải chọn ***k*** phần tử từ ***n-1*** phần tử còn lại, từ đó lớp không chứa ***a*** gồm **C(n-1, k)** cách.
  - Theo nguyên lý cộng ta được công thức truy hồi: **C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1,k)**
    - với các giá trị biên được suy ra trực tiếp: *C(n,0)* = *C(n,n)* = *1*.

Giải công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số

- Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc ***k*** với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \qquad (1)$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực và $c_k \neq 0$

- Tìm công thức trực tiếp cho số hạng $\mathbf{a_n}$ của dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn công thức (1):
  - Theo phương pháp qui nạp toán học thì dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn công thức (1) được xác định duy nhất nếu như nó thoả mãn ***k*** điều kiện đầu:

$a_0 = C_0$, $a_1 = C_1$, . ., $a_{k-1} = C_{k-1}$, trong đó $C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$ là các hằng số.

quy nạp

Ví dụ

- Hệ thức truy hồi $P_n=(1.11)P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc **1**.
- Hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc **2**.
- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-5}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc **5**.
- Hệ thức truy hồi $B_n=nB_{n-1}$ không phải là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất
  - vì nó không có hệ số hằng số.

Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

- Tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$ của (1), ***r*** là hằng số, nếu và chỉ nếu:

$$a_n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k}.$$

Chia cả hai vế cho r^{n-k} ta nhận được

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_{k-1} r - c_k = 0 \qquad (2)$$

- Vậy dãy $\{a_n\}$ với $a_n=r^n$ là nghiệm nếu và chỉ nếu ***r*** là nghiệm của (2).

Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai (Định lý 1)

- Cho c_1, c_2 là các hằng số thực.
- Giả sử $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt r_1, r_2.
- Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n$ với n =0, 1, 2, . ..; α_1, α_2 là các hằng số.

Chứng minh - Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai

1. **Chiều thuận**, cần chỉ ra rằng nếu r_1, r_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng và α_1, α_2 là hai hằng số thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi.
2. **Ngược lại**, cần phải chứng minh rằng nếu $\{a_n\}$ là nghiệm thì $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với α_1, α_2 là các hằng số nào đó.

Chứng minh chiều thuận- Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai (tt)

($\Rightarrow$): Giả sử r_1 và r_2 là hai nghiệm phân biệt của $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, khi đó $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$; $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$ đồng thời ta thực hiện dãy các phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned}
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\
&= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = a_n
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

Chứng minh chiều ngược Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai (tt)

($\Leftarrow$):Để chứng minh ngược lại, ta giả sử dãy $\{a_n\}$ là một nghiệm bất kỳ của hệ thức truy hồi. Ta chọn α_1, α_2 sao cho dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ thoả mãn các điều kiện đầu $a_0 = C_0$, $a_1 = C_1$. Thực vậy,

$$a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$$

Từ phương trình đầu ta có $\alpha_2 = C_0 - \alpha_1$ thế vào phương trình thứ hai ta có:

$C_1 = \alpha_1 r_1 + (C_0 - \alpha_1) r_2 = \alpha_1 (r_1 - r_2) + C_0 r_2$; Từ đây suy ra:

$$\alpha_1 = \frac{(C_1 - C_0 r_2)}{r_1 - r_2}; \alpha_2 = C_0 - \alpha_1 = C_0 - \frac{(C_1 - C_0 r_2)}{r_1 - r_2} = \frac{(C_0 r_1 - C_1)}{r_1 - r_2}.$$

Như vậy, khi chọn những giá trị trên cho α_1, α_2 dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ thoả mãn các điều kiện đầu. Vì hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu được xác định duy nhất nên $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Định lý được chứng minh.

Ví dụ 1

- Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ với } a_0 = 2,\ a_1 = 7$$

Lời giải. Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi có dạng $r^2 - r - 2 = 0$. Nghiệm của nó là $r_1 = 2$ và $r_2 = -1$. Theo định lý 1, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu và chỉ nếu :

$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$ với α_1, α_2 là các hằng số nào đó. Từ các điều kiện đầu suy ra:

$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$

$a_1 = 7 = \alpha_1 2 + \alpha_2(-1)$

Giải ra ta được $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$. Vậy nghiệm của biểu thức truy hồi với điều kiện đầu là dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3.2^n - (-1)^n$.

Ví dụ 2 - Tìm công thức f_n của các số fibonaci

Giải: Các số fibonaci thoả mãn hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ và các điều kiện đầu $f_0 = 0$, $f_1=1$. Các nghiệm của phương trình đặc trưng $r^2 - r - 1 = 0$ là:

$r_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $r_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ theo định lý 1 ta suy ra số fibonaci được cho bởi công thức sau:

$f_n = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ với α_1, α_2 là hai hằng số. Các điều kiện đầu $f_0=0$, $f_1=1$ được dùng để xác định các hằng số α_1, α_2.

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$f_1 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

Từ hai phương trình này ta suy ra $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ do đó các số fibonaci được cho như sau:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Định lý 2 – nghiệm kép

- Cho c_1, c_2 là các hằng số thực, $c_2 \neq 0$.
- Giả sử $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ chỉ có một nghiệm r_0 (nghiệm kép)
- Dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 \mathbf{n} r_0^n$ với n =0, 1, 2, ...; α_1, α_2 là các hằng số.

Ví dụ

- Tìm nghiệm của công thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với các điều kiện đầu $a_0=1$, $a_1 = 6$

Giải: Phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 9 = 0$ có nghiệm kép $r_0=3$. Do đó nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$ với α_1, α_2 là các hằng số nào đó. Từ các điều kiện đầu ta suy ra:

$a_0 = 1 = \alpha_1$

$a_1 = 6 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ vậy nghiệm của hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu đã cho là:

$a_n = 3^n + n3^n$

Định lý 3: Nghiệm các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với các hệ số hằng số - Tổng quát

- Cho c_1, c_2 , …., c_k là các số thực.
- Giả sử phương trình đặc trưng $r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ có *k* nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$.
- Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$ với n = 0, 1, 2, . ..; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k$ là các hằng số.

Ví dụ

- Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với điều kiện đầu $a_0=2$, $a_1=5$, $a_2=15$.

Giải: Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi là :

$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ có các nghiệm là $r_1=1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng: $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$.

Để tìm các hằng số α_1, α_2, α_3 ta dựa vào những điều kiện ban đầu:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \alpha_3 3$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 4 + \alpha_3 9$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3=2$. Vì vậy nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi này và các điều đầu đã cho là dãy $\{a_n\}$ với:

$$a_n = 1 - 2^n + 2.3^n$$

Bài tập 1

- Cô dâu và chú rể mời 4 bạn đứng thành một hàng để chụp ảnh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng nếu:
  - a) Cô dâu đứng cạnh chú rể.
  - b) Cô dâu không đứng cạnh chú rể.
  - c) Cô dâu đứng ở phía bên phải chú rể

a) TH1: cô dâu đứng đầu hoặc cuối
(1*1*4*3*2*1)*2 = 48
TH2: cô dâu đứng 1 trong 4 vị trí ở giữa
(1*2*4*3*2*1)*4 = 192
=> 48+192=240
b) Tổng trừ cho TH cô dâu đứng cạnh chú rể
=> 6! – 240 = 480
c) (1*5*4*3*2*1)+(1*4*4*3*2*1)+(1*3*4*3*2*1)+(1*2*4*3*2*1)+(1*1*4*3*2*1) = 360
chú ý: cô dâu đứng ở phía bên phải, không nhất thiết phải là đứng kế bên

$\frac{b}{2} + \frac{a}{2}$

Bài tập 2

- Xét các chuỗi nhị phân 8 bít. Hỏi có bao nhiêu chuỗi **không** chứa 6 số 0 liền nhau?

Có 3 TH 6 số 0 kề nhau: **0**xx, x**0**x, xx**0**
Mỗi TH có 4 cách:
•**0**00, **0**01, **0**10, **0**11
•*0**0**0*, *0**0**1*, 1**0**0, 1**0**1
•*00**0***, 01**0**, *10**0***, 11**0**
=> Có 4 cách bị trùng nhau: (3*4)-4=8
=> 2^8 – 8 = 248

Bài tập 3

- Đếm số byte = 8 bit
  a) Bất kỳ 2^8 = 256
  b) Có đúng hai bit 0. hoán vị lặp: 8! / (2!*6!) = 28
  c) Có ít nhất 2 bit 0 2^8 - (1 + 8) = 247 *<bất kỳ> - (<TH ko có bit 0> + <TH có 1 bit 0>)*
  d) Bắt đầu 00 và kết thúc 00 4 bit giữa có 2^4 = 16
  e) Bắt đầu 11 và kết thúc không phải 11 2^4 * 3 =48

2 bit đầu là 11 -> 1 cách
4 bit giữa có 2^4 cách
2 bit cuối có 3 cách 00,01,10

$1 \cdot 1 \cdot 2^4 \cdot 3 =$

$1\ 1\ \underbrace{xx\ xx}\ $ 00
01
10

Bài tập 4

- Đội bóng PTIT-HCM có 20 cầu thủ, chọn 11 cầu thủ ra sân thi đấu chính thức ứng với 11 vị trí trên sân. Hỏi có mấy cách chọn nếu:

20P11

a) Ai cũng có thể chơi ở bất kỳ vị trí nào. chỉnh hợp ko lặp: 20!/(20-11)!

có khả năng

b) Chỉ có một cầu thủ làm thủ môn, các cầu thủ còn lại có thể chơi ở bất kỳ vị trí nào. chỉnh hợp ko lặp: 19!/(19-10)!

c) Có 3 cầu thủ có thể làm thủ môn, các cầu thủ còn lại có thể chơi ở bất kỳ vị trí nào. 3 * 17!/(17-10)!

Bài tập 5

Tìm số nghiệm nguyên không âm của:

a) Phương trình

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 20 \quad \text{với } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

b) Phương trình

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 20 \quad \text{với } x_1 \geq 6,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 9,\ x_4 \geq -2$$

c) Bất phương trình

$$x_1+x_2+x_3 \leq 11 \text{ với } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Bài tập 6

- Giải các hệ thức truy hồi với các điều kiện đầu sau:
  a) $a_n = 5a_{n-1} – 6a_{n-2}$; $a_0=0$ và $a_1=1$
  b) $a_n = 6a_{n-1} – 9a_{n-2}$; $a_0=1$ và $a_1=6$
  c) $a_n=2a_{n-1} + 5a_{n-2} – 6a_{n-3}$; $a_0=0$, $a_1=-4$ và $a_2=8$

Bài tập 7

- Gọi a_n là số dãy bit độ dài n không có 2 bit 0 liền nhau.
  a) Tìm hệ thức truy hồi cho a_n
  b) Biết giá trị đầu a_1=2, a_2=3, giải hệ thức truy hồi trên.

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Bài tập 8

- Cho biết dân số của Việt Nam năm 2020 là 100 triệu người. Giả sử tốc độ tăng dân số hằng năm là 0,2% mỗi năm. Gọi D_n là dân số của Việt Nam n năm sau kể từ 2020.
  a) Lập hệ thức truy hồi tính D_n.
  b) Dân số Việt Nam năm 2030 là bao nhiêu?