Tập hợp và Quan hệ

Lý thuyết tổ hợp

Tập hợp

- Lý thuyết tập hợp
- Biểu diễn tập hợp trên máy tính
- Ánh xạ
- Quan hệ tương đương
- Quan hệ thứ tự
- Biểu đồ Hasse

Tập các đối tượng trong một tập hợp

- là các phần tử của tập hợp.
- Ký hiệu của tập hợp: A, B, X, Y,. . .
- Ký hiệu phần tử của tập hợp: a, b, c, u, v . .
- a là (không là) phần tử của tập hợp A: $a \in A$ ($a \notin A$).
- Tập rỗng: ϕ hoặc { } - không chứa phần tử nào.
- Tập hợp A bằng tập hợp B (A=B): có cùng chung các phần tử.
  - Ví dụ: tập A={ 1, 3, 5 } sẽ bằng tập B = { 3, 5, 1 }

Cách xác định tập hợp

- Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp

  $A=\{1,2,3,4,a,b\}$

- Đưa ra tính chất đặc trưng của tập hợp

  $B=\{\, n \in N \mid n \text{ chia hết cho } 3\}$

Tập hợp con

- Tập A là một tập con của tập B ($A \subseteq B$): mỗi phần tử của A là một phần tử của B.
- $A \subseteq B$ khi và chỉ khi lượng từ $\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$ cho ta giá trị đúng.
- **Hệ quả:**
  - Tập rỗng ϕ là tập con của mọi tập hợp.
  - Mọi tập hợp là tập con của chính nó.
  - Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì A=B hay mệnh đề $\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$ cho ta giá trị đúng.
  - Nếu $A \subseteq B$ và $A \neq B$ thì ta nói A là tập con thực sự của B ($A \subset B$).

Bản số (lực lượng) của tập hợp

- Tập S có chính xác **n** phần tử phân biệt,
  - *n* là số nguyên không âm
- Khi đó:
  - S là một tập hữu hạn và
  - *n* được gọi là bản số của S.
  - Bản số của S được ký hiệu là |S| hay N(S).
    - Còn gọi là số phần tử của tập hợp.

Tập luỹ thừa

- Tập luỹ thừa của tập S:
  - ký hiệu là P(S) Power
  - là tập tất cả các tập con của S.
- Ví dụ:

$$S = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$\Rightarrow P(S) = \{ \phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\ \{0, 1, 2\} \}$$

= 8

Tập hợp có sắp thứ tự

- Dãy sắp thứ tự $(a_1, a_2,.., a_n)$
  - là một tập hợp sắp thứ tự có a_1 là phần tử thứ nhất, a_2 là phần tử thứ 2, ..., a_n là phần tử thứ n.
- Hai dãy sắp thứ tự là bằng nhau:
  - các phần tử tương ứng của chúng là bằng nhau.
  - Nói cách khác $(a_1, a_2,.., a_n)$ bằng $(b_1, b_2,.., b_n)$ khi và chỉ khi $a_i = b_i$ với mọi $i = 1, 2, ..n$.

Tích đề các của các tập hợp

- Tích đề các của A và B ($A \times B$)
  - là tập hợp của tất cả các cặp (a,b) với $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

- Tích đề các của các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1 \times A_2 \times .. \times A_n$)
  - là tập hợp của dãy sắp thứ tự $(a_1, a_2, .., a_n)$ trong đó $a_i \in A_i$ với i = 1, 2,..n

$$A_1 \times A_2 \times .. \times A_n = \{ (a_1, a_2, .., a_n) \mid a_i \in A_i \text{ với } i = 1, 2, ..n \}$$

Các phép toán trên tập hợp

- Hợp của A và B: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
- Giao của A và B: $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
- Hai tập hợp rời nhau: $(A \cap B = \phi)$
- Hiệu của A và B: $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$
- Phần bù của A: $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$

Các phép toán (mở rộng)

- Cho các tập hợp $A_1, A_2, . ., A_n$.
  - Hợp của các tập hợp là tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong số các tập hợp A_i (i=1, 2, . ., n).

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

- Cho các tập hợp $A_1, A_2, . ., A_n$.
  - Giao của các tập hợp là tập hợp chứa các phần tử thuộc tất cả n tập hợp A_i (i=1, 2, . ., n).

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n$$

Các hằng đẳng thức trên tập hợp

- Mỗi tập con của tập hợp tương ứng với một tính chất xác định trên tập hợp đã cho được gọi là mệnh đề.
  - Các phép toán trên tập hợp được chuyển sang các phép toán của logic mệnh đề:

□ Phủ định của A, ký hiệu $\overline{A}$ (hay NOT A) tương ứng với phần bù $\overline{A}$.

□ Tuyển của A và B, ký hiệu $A \vee B$ (hay A or B) tương ứng với $A \cup B$.

□ Hội của A và B, ký hiệu $A \wedge B$ (hay A and B) tương ứng với $A \cap B$.

Mốt số hằng đẳng thức trên tập hợp

HẰNG ĐẲNG THỨC	TÊN GỌI
$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$ (U là tập vũ trụ)	Luật đồng nhất
$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$	Luật nuốt
$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Luật luỹ đẳng
$\overline{\overline{A}} = A$	Luật bù
$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Luật giao hoán
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Luật kết hợp
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Luật phân phối
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Luật De Morgan

Biểu diễn tập hợp trên máy tính

- Biểu diễn tập hợp $A \subseteq U$ bằng xâu bít nhị phân:
  1. Chọn một thứ tự tuỳ ý nào đó đối với các phần tử của tập vũ trụ U:
     - giả sử ta được bộ có thứ tự $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
  2. Xây dựng một xâu bít nhị phân có độ dài n, sao cho nếu bít thứ i có giá trị 1 thì phần tử $a_i \in A$, nếu $a_i = 0$ thì $a_i \notin A$ (i=1,2..,n).

Ví dụ: Biểu diễn tập hợp bằng xâu bit

- Cho:
  - U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.
  - Tập các số nguyên lẻ $A \subseteq U$.
  - Tập các số nguyên chẵn $B \subseteq U$.
  - Tập các số nguyên nhỏ hơn 5 $C \subseteq U$.
- Tìm:
  - $A \cup B$
  - $A \cap C$

Ví dụ: Biểu diễn tập hợp bằng xâu bit (tt)

- Xem thứ tự các phần tử được sắp xếp theo thứ tự tăng dần tức a_i=i (i=1,2,..,10). Khi đó:
  - Xâu bít biểu diễn tập hợp A là: 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0
  - Xâu bít biểu diễn tập hợp B là: 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
  - Xâu bít biểu diễn tập hợp C là: 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
  - Xâu bít biểu diễn tập hợp $A \cup B$ là : 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1.
    - Như vậy, $A \cup B = U$.
  - Xâu bít biểu diễn tập hợp $A \cap C$: 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0.
    - Như vậy $A \cap C = \{1, 3\}$.

Bài tập 1

- Lập bảng giá trị chân lý cho các mệnh đề phức hợp sau:

a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

c) $(p \leftrightarrow q) \vee (p \oplus \overline{q})$

d) $(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \overline{q})$

~~e) $(p \leftrightarrow q) \vee (p \oplus \overline{q})$~~

f) $(\overline{p} \leftrightarrow \overline{q}) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

g) $(p \vee q) \wedge \overline{r}$

h) $(p \wedge q) \vee \overline{r}$

i) $(p \leftrightarrow q) \vee (\overline{q} \leftrightarrow r)$

j) $(\overline{p} \leftrightarrow \overline{q}) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

Bài tập 2

- Dùng bảng chân lý chứng minh:

a) Luật giao hoán

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

b) Luật kết hợp

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

c) Luật phân phối

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Bài 3

- Cho A, B, C là các tập hợp. Chứng minh rằng:

$$a)\quad \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

$$b)\quad (A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$$

$$c)\quad (A - B) - C \subseteq (A - C)$$

$$d)\quad (A - C) \cap (C - B) = \Phi$$

$$e)\quad (B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$$

$$f)\quad A - B = A \cap \overline{B}$$

$$g)\quad (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$

Ánh xạ

Khái niệm

1. Định nghĩa. Cho hai tập hợp X, Y $\neq \varnothing$. Ánh xạ giữa hai tập X và *Y* là một qui tắc f sao cho mỗi x thuộc X tồn tại duy nhất một y thuộc Y để $y = f(x)$

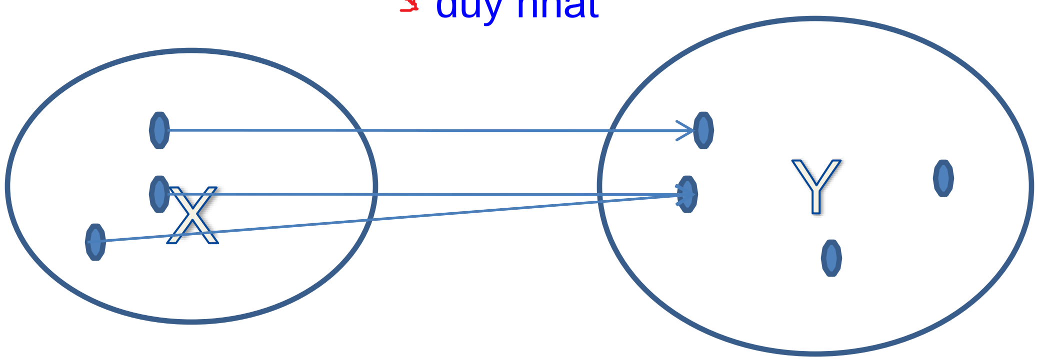
Ta viết:

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \mapsto f(x)$$

Nghĩa là $\forall x \in X, \exists! y \in Y : y = f(x)$

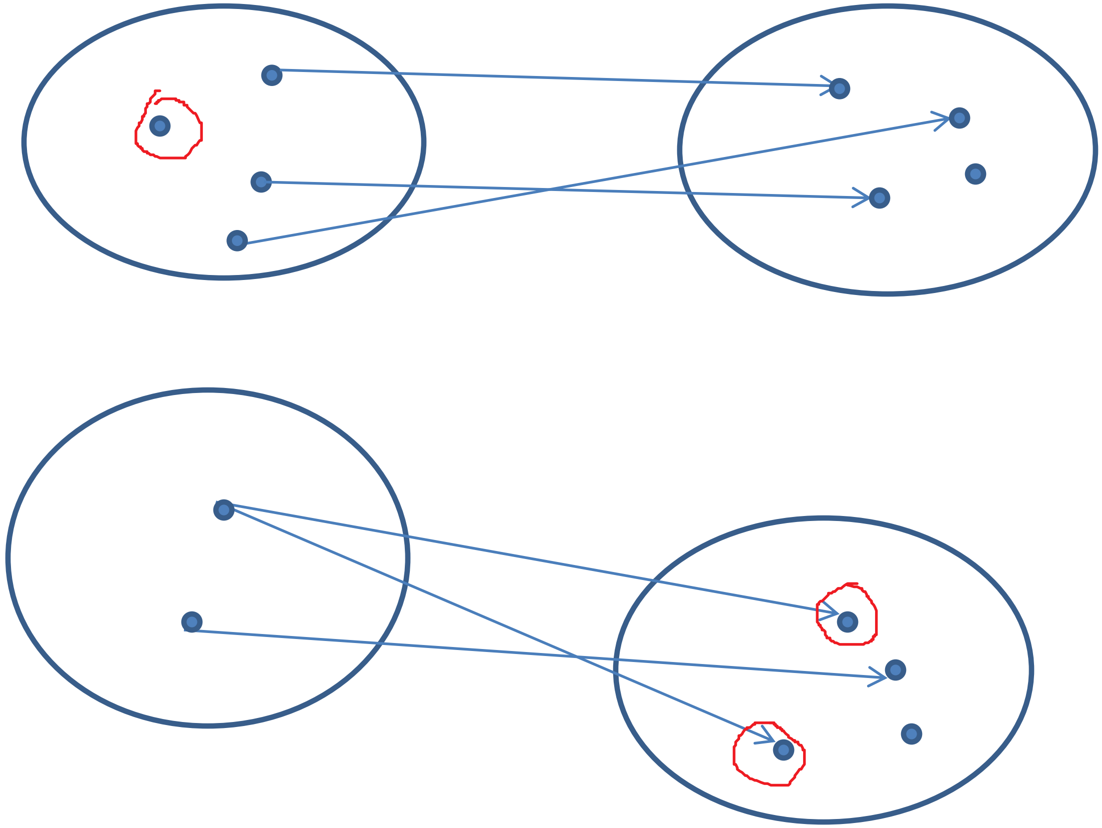
duy nhất



tạo ảnh

ảnh

Ví dụ



Cả hai đều Không là ánh xạ

Ánh xạ bằng nhau

Định nghĩa. Hai ánh xạ f và g từ X vào Y được gọi là *bằng nhau* nếu $\forall x \in X$, $f(x) = g(x)$.

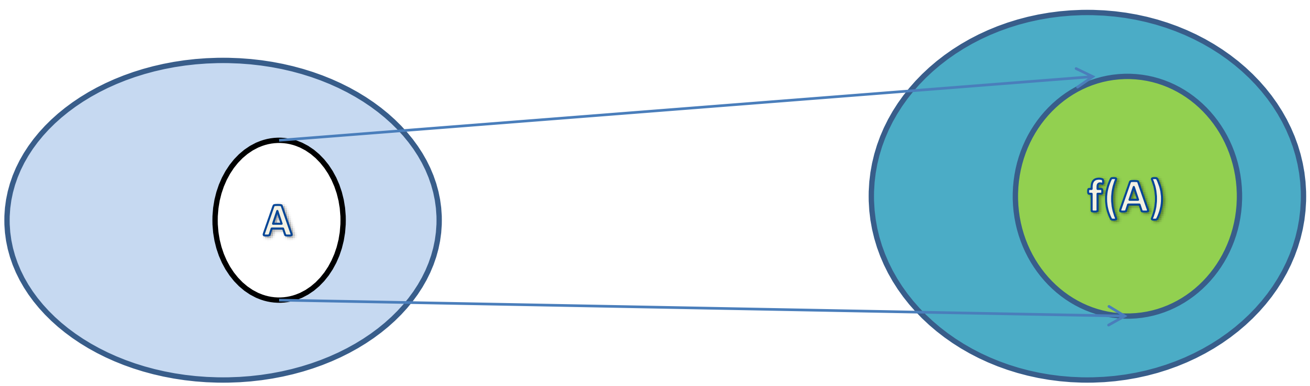
Ví dụ: Xét ánh xạ $f(x)=(x-1)(x+1)$ và $g(x) =x^2-1$ từ $R \rightarrow R$

Ta có $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ nên $f(x) = g(x)$ $\forall x \in R$

Vậy hai ánh xạ này bằng nhau.

Ảnh và ảnh ngược

- Cho ánh xạ f từ X vào Y và $A \subset X$, $B \subset Y$. Ta định nghĩa:
- $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ được gọi là **ảnh** của A



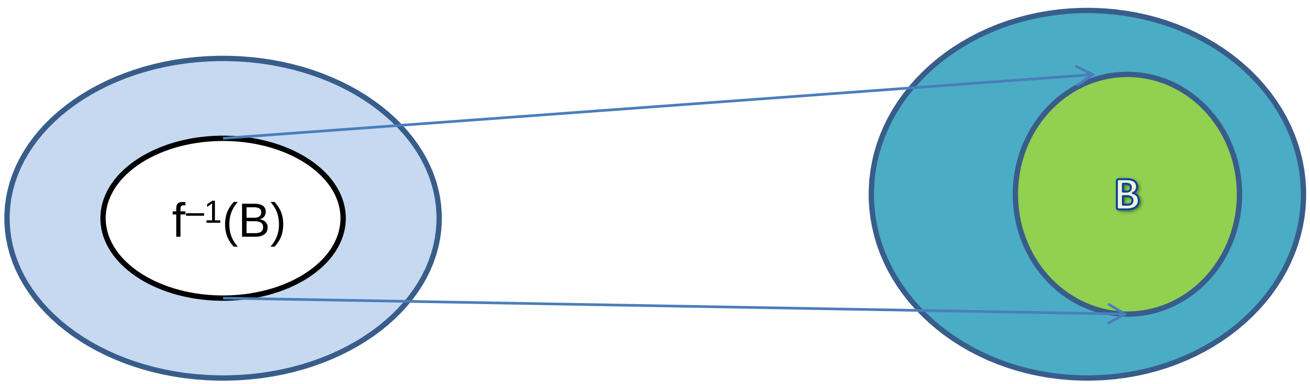
Ảnh và ảnh ngược

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$

Như vậy $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$;

$y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x)$.

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ được gọi là ảnh ngược của B



Như vậy $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Ví dụ ảnh và ảnh ngược

Ví dụ. Cho f: **R**→**R** được xác định $f(x)=x^2 +1$

Ta có

$f'(x) = 2x$

$f([1,3])=[2,10]$

$f([-2,-1])=[2,5]$ MODE + 7: TABLE

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f([-1,3])=[1,10]$

$f((1,5)) = (2,26)$

$f^{-1}(1)=\{0\}$

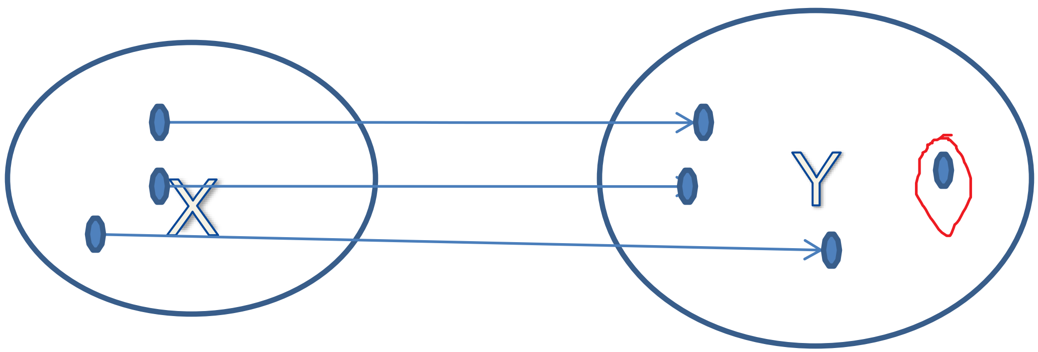
$f^{-1}(2)=\{-1,1\}$

$f^{-1}(-5)= \varnothing$

$f^{-1}([2,5])= [-2,-1] \cup [1,2]$

Phân loại ánh xạ

a. ***Đơn ánh*** Ta nói $f : X \rightarrow Y$ là một ***đơn ánh*** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều có ảnh khác nhau, nghĩa là:

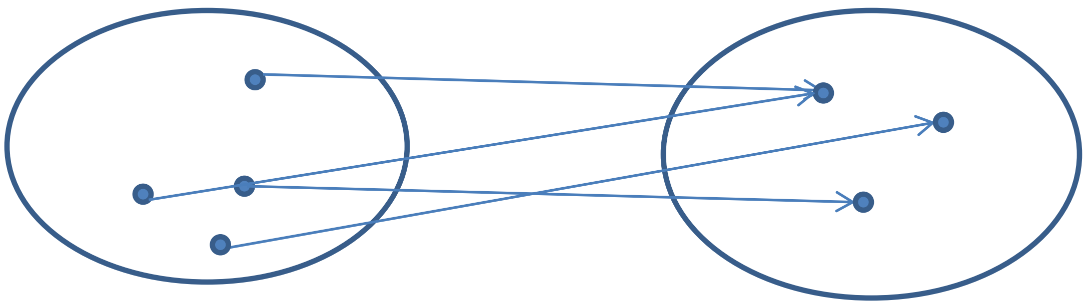


Ví dụ. Cho f: **N**→**R** được xác định $f(x)=x^2+1$ (là đơn ánh)

g: **R**→**R** được xác định $g(x)=x^2+1$ (không đơn ánh)

Toàn ánh

b. ***Toàn ánh*** Ta nói f : X → Y là một ***toàn ánh*** nếu f(X)=Y, nghĩa là:



Ví dụ. Cho f: R→R được xác định $f(x)=x^3+1$ (là toàn ánh)

$-7 = (-2)^3 + 1$

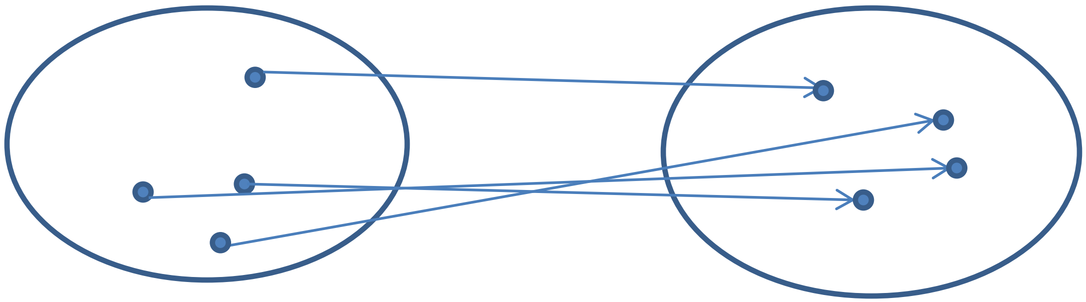
g: R→R được xác định $g(x)=x^2+1$ (không là toàn ánh)

$-7 = \ldots \quad (x^2+1 > 0 \ \forall x)$

Hàm số f từ tập hợp X đến tập hợp Y được gọi là toàn ánh nếu như với mọi phần tử y thuộc Y ta luôn tìm được ít nhất một phần tử x thuộc X sao cho f(x) = y.

Song ánh

c. ***Song ánh*** Ta nói $f : X \to Y$ là một ***song ánh*** nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.



Ví dụ. Cho f: $R \to R$ được xác định $f(x)=x^3+1$ (là song ánh)

g: $R \to R$ được xác định $g(x)=x^2+1$ (không là song ánh)

x = -1 -> g(x) = 2
x = 1 -> g(x) = 2
g(x) = -7 <=> ...

Tính chất của song ánh

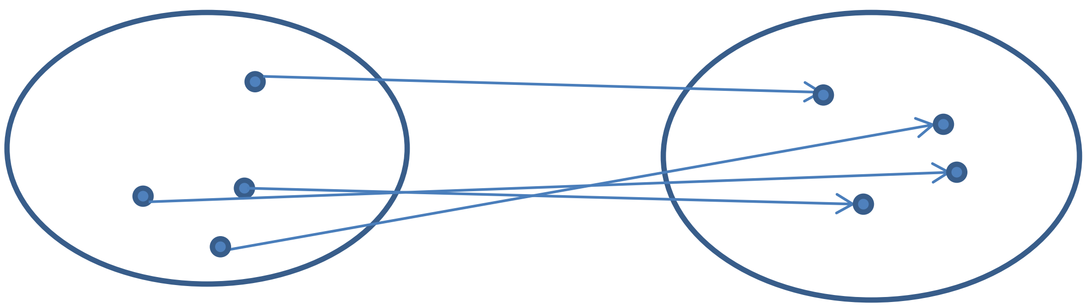
Tính chất.

$f : X \to Y$ là một song ánh

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x))$;

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ có đúng một phần tử);

$\Leftrightarrow \forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có duy nhất một nghiệm $x \in X$.



Ánh xạ ngược

Ánh xạ ngược.

Xét $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, theo tính chất trên, với mọi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ thỏa $f(x) = y$. Do đó tương ứng $y \mapsto x$ là một ánh xạ từ Y vào X. Ta gọi đây là ***ánh xạ ngược*** của f và ký hiệu f^{-1}. Như vậy:

$$f^{-1} : Y \to X$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = x \text{ với } f(x) = y.$$

Ví dụ. Cho f là ánh xạ từ R vào R, $f(x) = 2x+1$.

$y = 2x + 1$

$x = \frac{y-1}{2}$

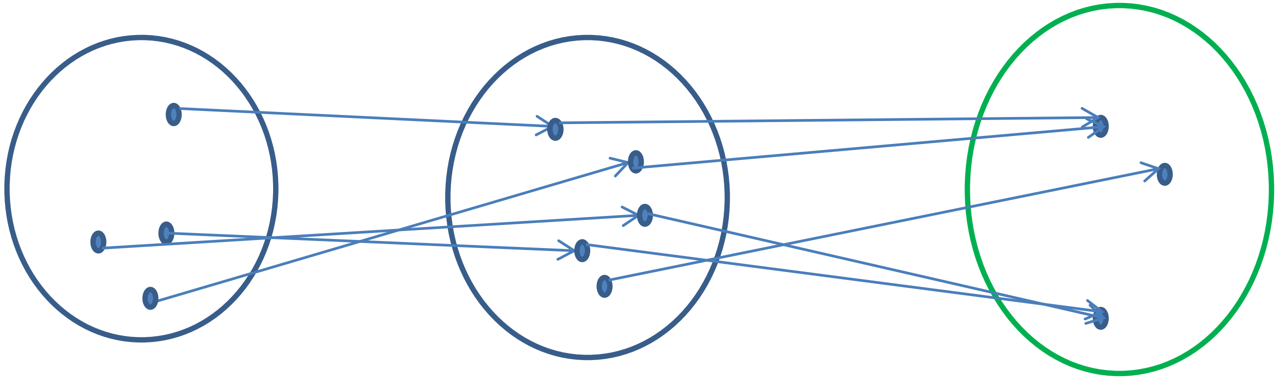
Khi đó $f^{-1}(y)=x=(y-1)/2$

Ánh xạ hợp (ánh xạ tích)

3. Ánh xạ hợp (tích). Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$
Ánh xạ hợp h của f và g là ánh xạ từ X vào Z xác định bởi:
$h : X \to Z$

$$x \longmapsto h(x) = g(f(x))$$

Ta viết: $h = g_{o}f : X \to Y \to Z$



Ví dụ ánh xạ hợp

Ví dụ. Tìm $g_\circ f$, $f_\circ g$

$$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & if \quad x > 0 \\ x+1 & if \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) = 2x + 1$$

Quan hệ

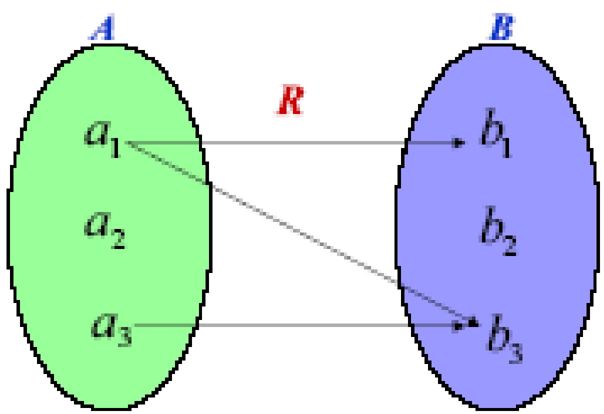
Quan hệ

1. Định nghĩa và tính chất
2. Biểu diễn quan hệ
3. Quan hệ tương đương, đồng dư
4. Quan hệ thứ tự, biểu đồ Hasse

Định nghĩa

Một *quan hệ hai ngôi* từ tập A đến tập B là tập con của tích Đề các $R \subseteq A \times B$. Chúng ta sẽ viết $a\,R\,b$ thay cho $(a, b) \in R$.

Quan hệ từ A đến chính nó được gọi là quan hệ trên A

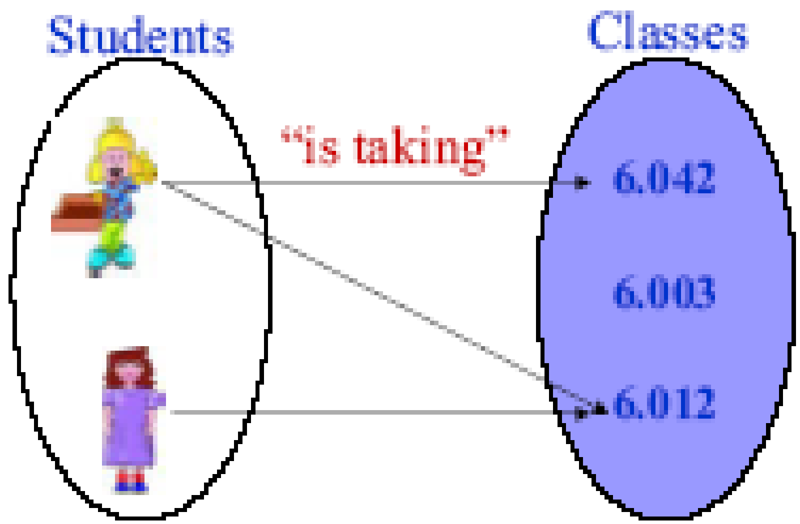


$$R = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_3) \}$$

Định nghĩa

Ví dụ. A = tập sinh viên; B = các lớp học.

$R = \{(a, b) \mid$ sinh viên a học lớp $b\}$



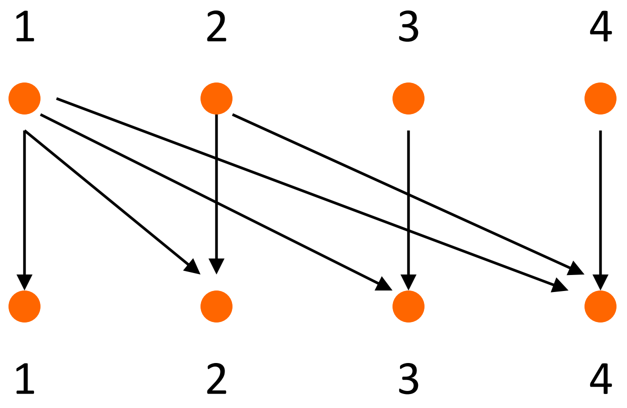
Định nghĩa

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, và

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ là ước của } b\}$$

Khi đó

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)\}$$



Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là *phản xạ* nếu:

$$\forall a \in A, a\ R\ a$$

Ví dụ. Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$ không phản xạ vì $(3, 3) \notin R_1$

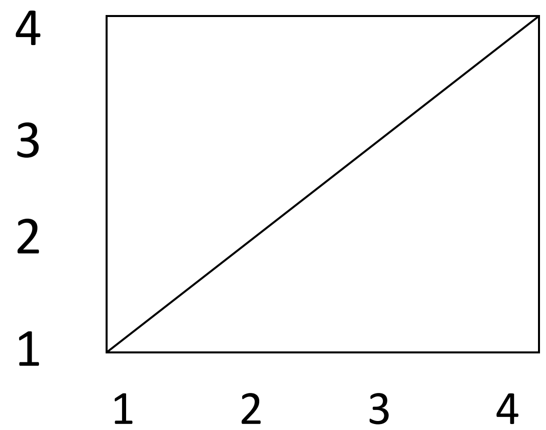
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ phản xạ vì $(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R_2$

- Quan hệ $\leq$ trên Z phản xạ vì $a \leq a$ với mọi $a \in Z$
- Quan hệ > trên Z không phản xạ vì 1 > 1 ko xảy ra

- Quan hệ " | " ("ước số") trên Z^+ là phản xạ vì mọi số nguyên a là ước của chính nó .

Chú ý. Quan hệ R trên tập A là phản xạ nếu nó chứa đường chéo của $A \times A$:

$$\Delta = \{(a, a);\ a \in A\}$$



Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là *đối xứng* nếu:

$$\forall a \in A\ \forall b \in A\ (a\ R\ b) \rightarrow (b\ R\ a)$$

Quan hệ R được gọi là *phản xứng* nếu

$$\forall a \in A\ \forall b \in A\ (a\ R\ b) \wedge (b\ R\ a) \rightarrow (a = b)$$

Ví dụ.

- Quan hệ $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng
- Quan hệ $\leq$ trên **Z** không đối xứng. (1,2) nhưng ko có (2,1)

Tuy nhiên nó phản xứng vì

$$(a \leq b) \wedge (b \leq a) \rightarrow (a = b)$$ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

Các tính chất của Quan hệ

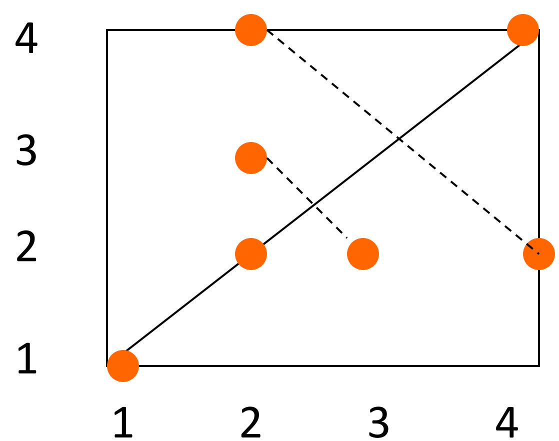
- Quan hệ" | " ("ước số") trên Z^{+}. không đối xứng

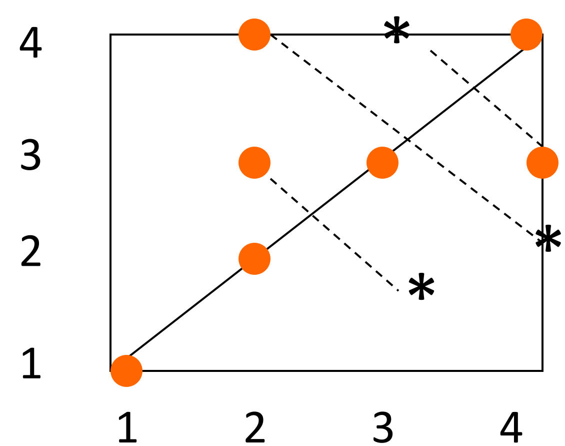
Tuy nhiên nó có tính phản xứng vì

$$(a \mid b) \wedge (b \mid a) \rightarrow (a = b)$$ (1,1), (2,2),...

Chú ý. Quan hệ R trên A là đối xứng nếu nó đối xứng nhau qua đường chéo Δ của $A \times A$.

Quan hệ R là phản xứng nếu chỉ có các phần tử nằm trên đường chéo là đối xứng qua Δ của $A \times A$.





Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A có tính *bắc cầu* *(truyền)* nếu

$$\forall a, b, c \in A, (a\ R\ b) \wedge (b\ R\ c) \to (a\ R\ c)$$

Ví dụ.

Quan hệ R = {(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (1, 3), (2, 3)} trên tập A = {1, 2, 3, 4} có tính bắc cầu.

Quan hệ $\leq$ và "|" trên Z có tính bắc cầu

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \to (a \leq c)$$

$$(a \mid b) \wedge (b \mid c) \to (a \mid c)$$

Tóm tắt quan hệ R

- R phản xạ : aRa
- R đối xứng: aRb → bRa
- R phản xứng: aRb và bRa → a=b
- R bắc cầu: aRb và bRc → aRc

Quan hệ tương đương

Ví dụ.

Cho S = {sinh viên của lớp}, gọi

R = {(a,b): a có cùng họ với b}

Hỏi

R phản xạ? Yes

R đối xứng? Yes

R bắc cầu? Yes

Mọi sinh viên có cùng họ thuộc cùng một nhóm.

Quan hệ tương đương

Định nghĩa. Quan hệ R trên tập A được gọi là *tương đương* nếu nó có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu:

Ví dụ. Cho R là quan hệ trên **R** sao cho aRb nếu $a - b$ nguyên. Khi đó R là quan hệ tương đương.

Quan hệ tương đương

Cho a và b là hai số nguyên. **a** được gọi là **ước của b** hay **b chia hết cho a** nếu tồn tại số nguyên k sao cho ***b = ka***

Ví dụ. Cho m là số nguyên dương **và** *R* quan hệ trên **Z** sao cho *aRb* nếu *a – b* chia hết cho *m*, khi đó *R* là quan hệ tương đương.

- Rõ ràng quan hệ này có tính phản xạ và đối xứng.
- Cho *a*, *b*, *c* sao cho *a – b* và *b – c* chia hết cho *m*, khi đó *a – c* = *a – b* + *b – c* cũng chia hết cho *m*. Suy ra *R* có tính chất bắc cầu.
- Quan hệ này được gọi là ***đồng dư modulo m*** và chúng ta viết

$$a \equiv b \pmod{m}$$

thay vì *aRb*

Cho số nguyên dương n, hai số nguyên: a,b được gọi là đồng dư theo mô-đun m nếu chúng có cùng số dư khi chia cho m. Điều này tương đương với hiệu a-b chia hết cho m.

Lớp tương đương

Định nghĩa. Cho R là quan hệ tương đương trên A và phần tử $a \in A$. ***Lớp tương đương chứa a*** được ký hiệu bởi $[a]_R$ hoặc $[a]$ là tập

$$[a]_R = \{b \in A|\ b\ R\ a\}$$

Lớp tương đương

Ví dụ. Tìm các lớp tương đương modulo 8 chứa 0 và 1?

Giải. Lớp tương đương modulo 8 chứa 0 gồm tất cả các số nguyên a chia hết cho 8. Do đó

$$[0]_8 = \{ \ldots, -16, -8, 0, 8, 16, \ldots \}$$

Tương tự

$$[1]_8 = \{a \mid a \text{ chia 8 dư 1}\}$$
$$= \{ \ldots, -15, -7, 1, 9, 17, \ldots \}$$

Lớp tương đương

Chú ý. Trong ví dụ cuối, các lớp tương đương $[0]_8$ và $[1]_8$ là rời nhau.

Tổng quát, chúng ta có

Định lý. Cho R là quan hệ tương đương trên tập A và $a, b \in A$, Khi đó

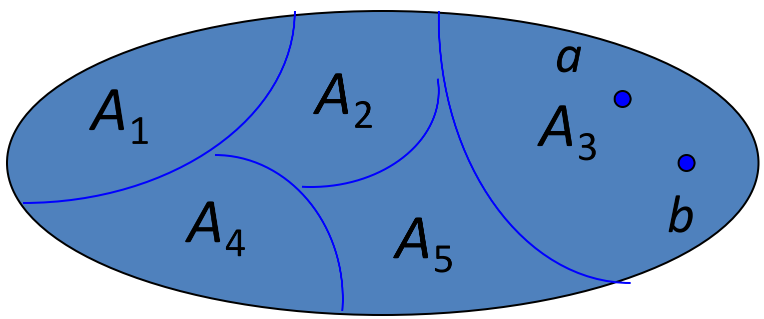
(i) $a\ R\ b$ nếu $[a]_R = [b]_R$

(ii) $[a]_R \neq [b]_R$ nếu $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$

Chú ý. Các lớp tương đương theo một quan hệ tương đương trên A tạo nên một phân họach trên A, nghĩa là chúng chia tập A thành các tập con rời nhau.

Lớp tương đương

Chú ý. Cho $\{A_1, A_2, \ldots\}$ là phân họach A thành các tập con không rỗng, rời nhau. Khi đó có duy nhất quan hệ tương đương trên A sao cho mỗi A_i là một lớp tương đương.



Ví dụ. Cho m là số nguyên dương, khi đó có m lớp đồng dư modulo m là $[0]_m$, $[1]_m$, …, $[m-1]_m$.

Chúng lập thành phân hoạch của **Z** thành các tập con rời nhau.

Chú ý rằng

$$[0]_m = [m]_m = [2m]_m = \ldots$$

$$[1]_m = [m + 1]_m = [2m + 1]_m = \ldots$$

……………………………………

[m + (m - 1)]

$$[m-1]_m = [2m-1]_m = [3m-1]_m = \ldots$$

Mỗi lớp tương đương này được gọi là ***số nguyên modulo m***

Tập hợp các số nguyên modulo m được ký hiệu bởi $\mathbf{Z}_m$

$$\mathbf{Z}_m = \{[0]_m , [1]_m , \ldots, [m-1]_m\}$$

Quan hệ thứ tự và Biểu đồ Hasse

- Quan hệ thứ tự
- Biểu đồ Hasse
- Phần tử tối tiểu, tối đại
- Chặn trên nhỏ nhất, chặn dưới lớn nhất

Quan hệ thứ tự

Ví dụ. Cho *R* là quan hệ trên tập số thực:

$$a\ R\ b \ \text{ nếu } \ a \le b$$

Hỏi:

- *R* phản xạ không? Có
- *R* đối xứng không? Không
- *R* phản xứng không? Có
- *R* bắc cầu không? Có

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa. Quan hệ R trên tập A là *quan hệ thứ tự* *(thứ tự)* nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Người ta thường ký hiệu quan hệ thứ tự bởi $\prec$

Cặp $(A, \prec)$ được gọi là *tập sắp thứ tự* hay ***poset.***

Phản xạ: $a \prec a$

Phản xứng: $(a \prec b) \wedge (b \prec a) \rightarrow (a = b)$

Bắc cầu: $(a \prec b) \wedge (b \prec c) \rightarrow (a \prec c)$

Quan hệ thứ tự

Ví dụ. Quan hệ ước số " | "trên tập số nguyên dương là quan hệ thứ tự, nghĩa là ($\mathbf{Z}^+$, |) là poset

Phản xạ?

Có, $x \mid x$ vì $x = 1 \cdot x$

Bắc cầu?

Có?

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid c$ nghĩa là $c = jb$.
Khi đó $c = j(ka) = jka$: $a \mid c$

Quan hệ thứ tự

Phản xứng?

có?

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid a$ nghĩa là $a = jb$.

Khi đó $a = jka$

Suy ra $j = k = 1$, nghĩa là $a = b$

Ví dụ. ($\mathbf{Z}$, |) là poset?

Không phải

Phản xứng?

Không

3|-3, và -3|3,

nhưng $3 \neq -3$.

Quan hệ thứ tự

$(P(S), \subseteq)$, ở đây P(S) là tập hợp các con của S, là một poset?

Có, là poset.

Phản xạ?

Có, $A \subseteq A$, $\forall A \in P(S)$

Bắc cầu?

Có

$A \subseteq B$, $B \subseteq C$. Suy ra $A \subseteq C$?

Phản xứng?

Có

$A \subseteq B$, $B \subseteq A$. Suy ra $A = B$?

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa. Các phần tử *a và b* của poset $(S, \prec)$ gọi là *so sánh được* *nếu* $a \prec b$ hay $b \prec a$.

Trái lại thì ta nói *a* và *b* *không so sánh được*.

Cho $(S, \prec)$, nếu hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là *tập sắp thứ tự toàn phần.*

Ta cũng nói rằng $\prec$ là *thứ tự toàn phần hay thứ tư tuyến tính* trên *S.*

Quan hệ thứ tự

Ví dụ. Quan hệ "$\leq$" trên tập số nguyên dương là thứ tự toàn phần.

Ví dụ. Quan hệ ước số " | "trên tập hợp số nguyên dương không là thứ tự toàn phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được.

Biểu đồ Hasse

Mỗi poset có thể biễu diễn bởi đồ thị đặc biệt ta gọi là biểu đồ *Hasse*

Để định nghĩa biểu đồ Hasse chúng ta cần các khái niệm phần tử trội và trội trực tiếp.

Định nghĩa. Phần tử b trong poset $(S, \prec)$ được gọi là *phần tử trội* của phần tử a trong S nếu $a \prec b$

Chúng ta cũng nói rằng a là ***được trội bởi*** b. Phần tử b được gọi là ***trội trực tiếp của*** a nếu b là trội của a, và không tồn tại trội c sao cho

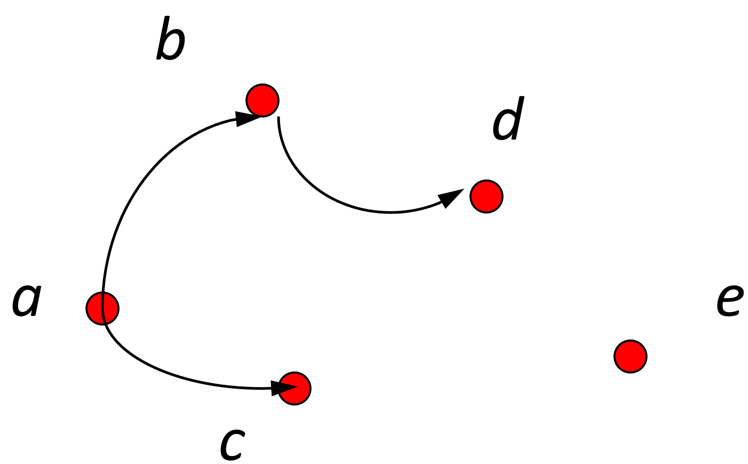
$$a \prec c \prec b, \quad a \neq c \neq b$$

Biểu đồ Hasse

- Ta định nghĩa *Biểu đồ Hasse* của poset (S, $\prec$) là đồ thị:

✓Mỗi phần tử của S được biễu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng .

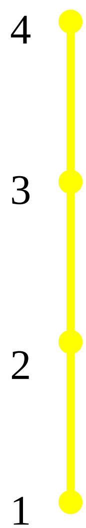
✓ Nếu *b* là trội trực tiếp của *a* thì vẽ một cung đi từ *a* đến *b.*



$$a \prec b \prec d, \quad a \prec c$$

Biểu đồ Hasse

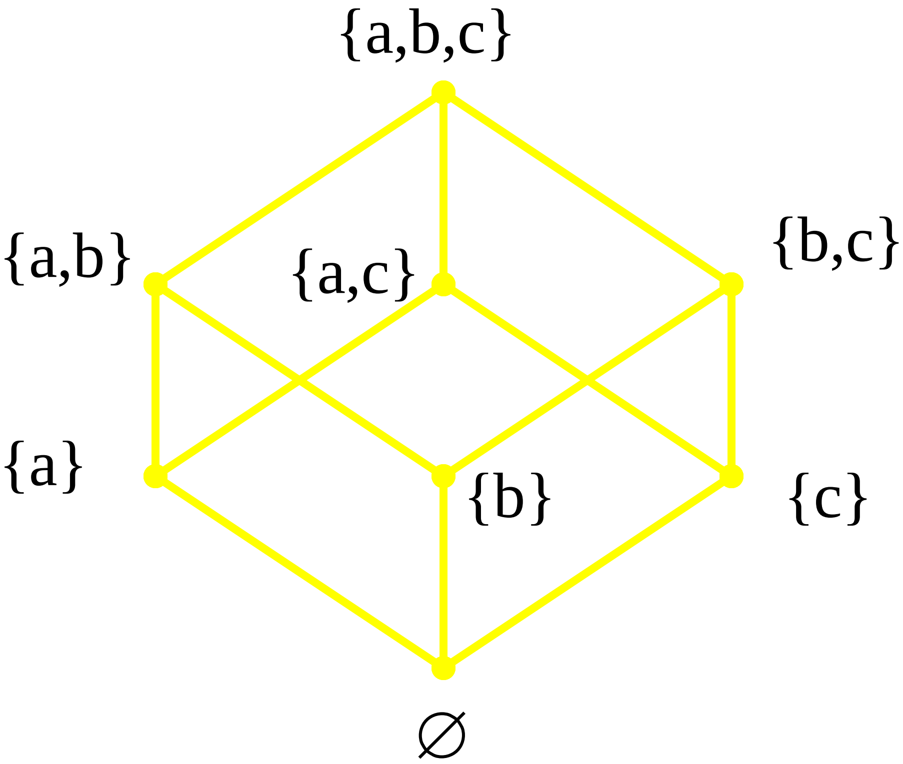
Ví dụ. Biểu đồ Hasse của poset ({1,2,3,4}, ≤) có thể vẽ như sau



Chú ý: Chúng ta không vẽ mũi tên với qui ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên

Ví dụ. Biểu đồ Hasse của P({a,b,c})

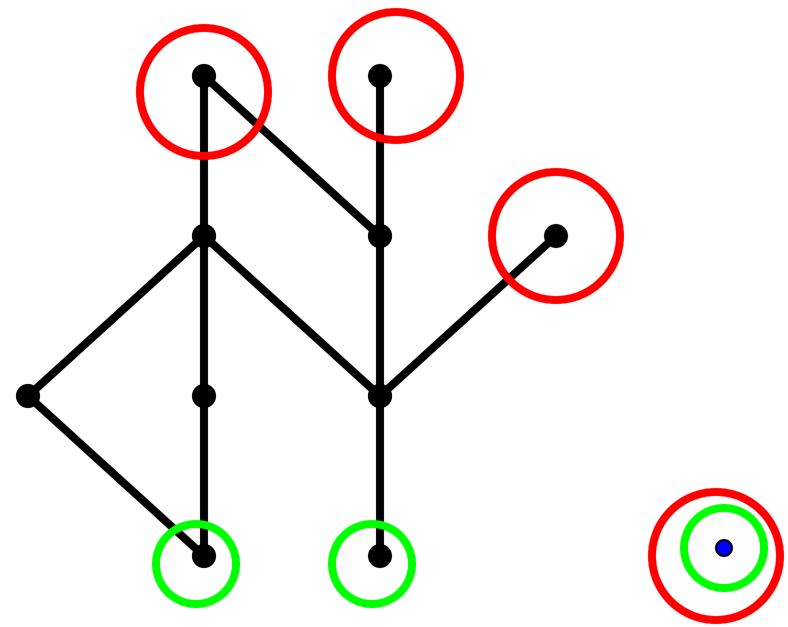
$\subseteq$



Phần tử tối đại và phần tử tối tiểu

Xét poset có biểu đồ Hasse như dưới đây:

- ✓ Mỗi đỉnh màu đỏ là ***tối đại.***
- ✓ Mỗi đỉnh màu xanh là ***tối tiểu.***
- ✓ Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
- ✓ Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.



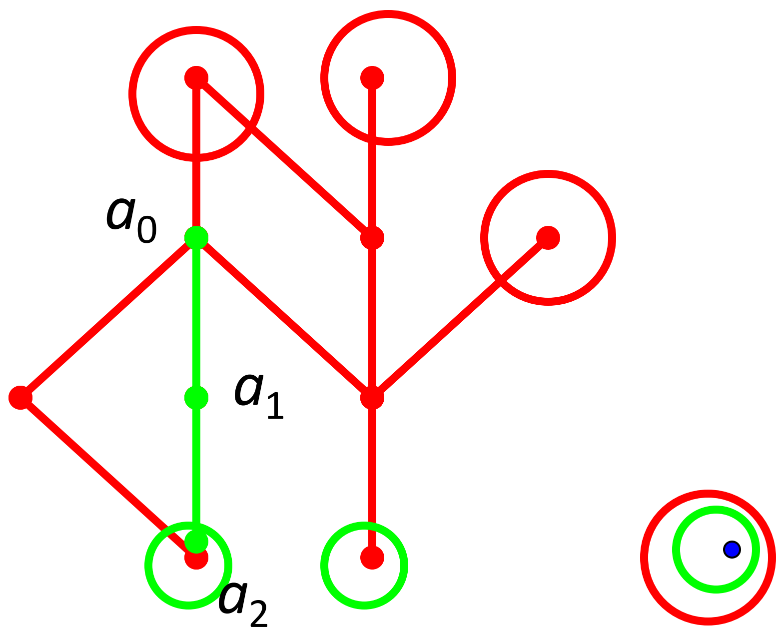
Chú ý. Trong một poset *S hữu hạn*, phần tử tối đại và phần tử tối tiểu luôn luôn tồn tại.

- ✓ Thật vậy, chúng ta xuất phát từ điểm bất kỳ $a_0 \in S$.

  Nếu a_0 không tối tiểu, khi đó tồn tại $a_1 \prec a_0$,

  tiếp tục như vậy cho đến khi tìm được phần tử tối tiểu .

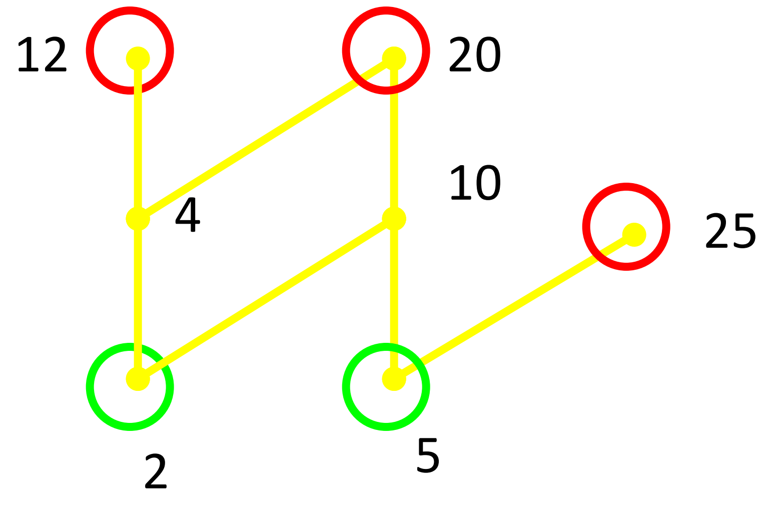
- ✓ Phần tử tối đại tìm được bằng phương pháp tương tự.



Ví dụ. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset ({2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, |) ?

Giải. Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 12, 20, 25 là các phần tử tối đại, còn 2, 5 là các phần tử tối tiểu.

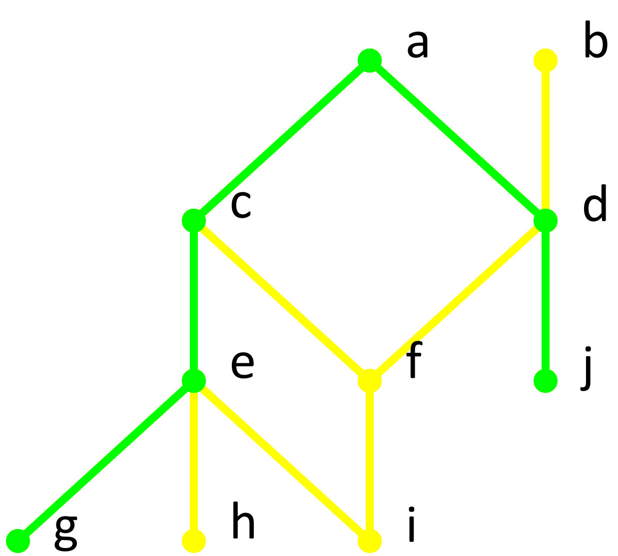
Như vậy phần tử tối đại, tối tiểu của poset có thể không duy nhất.



Chặn trên, chặn dưới

Định nghĩa. Cho (S, $\prec$) là poset và $A \subseteq S$. Phần tử *chặn trên* của A là phần tử $x \in S$ (có thể thuộc A hoặc không) sao cho $\forall a \in A, a \prec x$.

Phần tử *chặn dưới* của A là phần tử $x \in S$ sao cho $\forall a \in A, x \prec a$



Ví dụ. Phần tử chặn trên của $\{g, j\}$ là a.

Tại sao không phải là b?

b không phải là trội của g

Chặn trên, chặn dưới

Định nghĩa. Cho $(S, \prec)$ là poset và $A \subseteq S$. *Chặn trên nhỏ nhất* của A là phần tử chặn trên x của A sao cho mọi chặn trên *y của A*, ta đều có $y \succ x$

Chặn dưới lớn nhất của *A* là phần tử chặn dưới *x* của A sao cho mọi chặn dưới *y* của *A*, ta có $y \prec x$

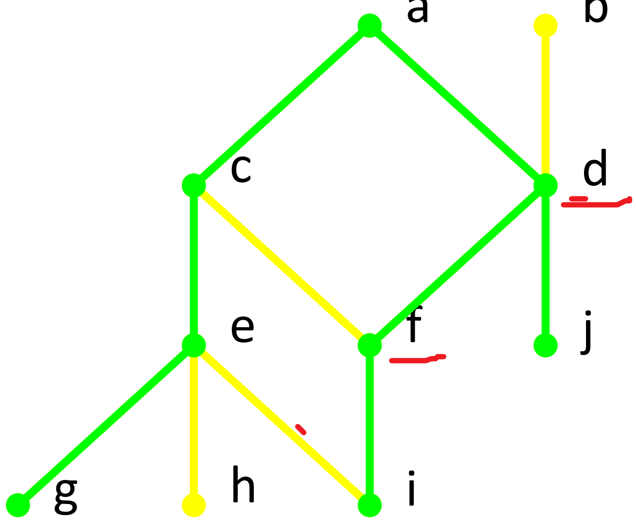
Chặn trên nhỏ nhất của: supA

Chặn dưới lớn nhất: infA

Chặn trên, chặn dưới

Ví dụ Chặn trên nhỏ nhất của {*i*,*j*} là *d*

Ví dụ. Chặn dưới chung lớn nhất của {*a*,b} là gì? d

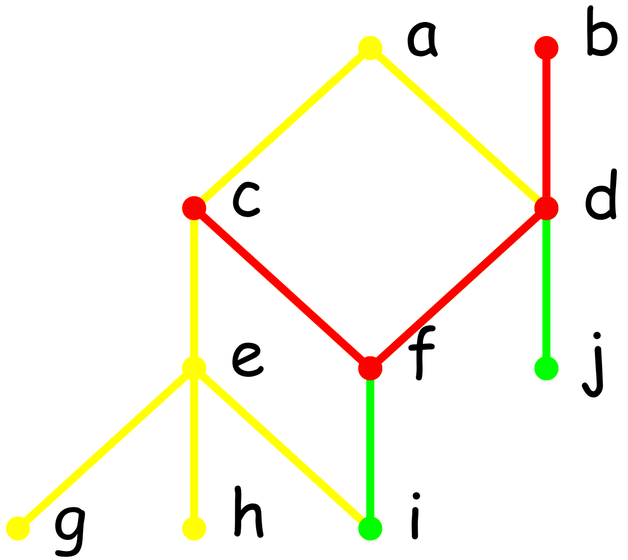


f ∨ d = ?

Chặn trên, chặn dưới

Chặn trên nhỏ nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ được ký hiệu bởi $a \vee b$

Chặn dưới lớn nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ được ký hiệu bởi $a \wedge b$



Ví dụ. $i \vee j = d$

Ví dụ. $b \wedge c = f$