BÀI TẬP CẤU TRÚC RỜI RẠC

Chương 1: Logic hình thức

Bài 1 Nếu biết mệnh đề $p \rightarrow q$ là sai. Hãy cho biết chân trị của các mệnh đề $p \vee q$, $q \vee \neg p$ và $q \rightarrow p$.

Bài 2 Nếu biết mệnh đề $((p \wedge q) \wedge r) \rightarrow s \vee t$ là sai. Hãy cho biết chân trị của các mệnh đề p, q, r, s và t.

Bài 3 Hãy chỉ ra hằng đúng trong các dạng mệnh đề sau:

a. $[\neg q \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
b. $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
c. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.

Bài 4 Không lập bảng chân trị, sử dụng các luật tương đương logic, chứng minh rằng các dạng mệnh đề sau là hằng đúng:

a. $\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg p$
b. $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$
c. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

Bài 5 Chứng minh các tương đương logic sau đây:

a. $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow q$
b. $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q)) \Leftrightarrow \neg(q \vee p)$
c. $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p$
d. $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
e. $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
f. $p \rightarrow q \wedge r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
g. $p \rightarrow q \vee r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

Bài 6 Chứng minh các mệnh đề sau:

a. $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge \neg r \rightarrow \neg(p \vee r)$
b. $q \wedge (t \rightarrow p) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow s) \rightarrow (t \rightarrow s)$
c. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q) \wedge r \rightarrow \neg p$
d. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p) \wedge p \rightarrow r$
e. $(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow r \wedge q) \wedge (r \rightarrow s \vee t) \wedge \neg s \rightarrow t$
f. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (p \vee s) \wedge (t \rightarrow q) \wedge \neg s \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg t)$

Bài 7 Xem suy luận sau: "Nếu tôi đang nhảy thì tôi hạnh phúc. Có một con chuột ở trong nhà hoặc tôi hạnh phúc. Nhưng tôi buồn. Vì vậy, có một con chuột ở trong nhà và tôi không nhảy"

a. Hãy dùng logic mệnh đề để mô hình hoá suy luận trên.
b. Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

Bài 8 Xem suy luận sau: "Nếu An được lên chức và làm việc nhiều thì An sẽ được tăng lương. Nếu được tăng lương thì An sẽ mua xe mới. An không mua xe mới. Vì vậy, An không được lên chức hoặc An không làm việc nhiều"

a. Hãy dùng logic mệnh đề để mô hình hoá suy luận trên.
b. Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

Bài 9 Xem suy luận sau: "Nếu Bình đi học về muộn thì mẹ anh ta sẽ buồn. Nếu An thường xuyên vắng nhà thì cha anh ta sẽ giận. Nếu mẹ Bình buồn hoặc cha An giận thì cô Hà, bạn họ, sẽ nhận được lời than phiền. Mà Hà không nhận được lời than phiền. Vì vậy, Bình đi học về sớm và An ít khi vắng nhà".

a. Hãy dùng logic mệnh đề để mô hình hoá suy luận trên.
b. Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

Bài 10 Cho ba vị từ P(x), Q(x) và R(x) với biến nguyên *x* được xác định như sau.

P(x) : "$x \le 5$", Q(x) : "x+ 1 là số lẻ", R(x) : " $x > 0$"

Hãy cho biết chân trị của các mệnh đề dưới đây:

a. $\neg P(5) \vee [Q(3) \vee \neg R(3)]$

b. $\neg P(2) \rightarrow [Q(2) \rightarrow \neg R(2)]$

Bài 11 Giả sử x là biến số nguyên trong các vị từ P(x): "x>0", Q(x) : "x là số nguyên chẵn", S(x): "x chia hết cho 4", R(x) : "x là số chính phương", T(x) : "x chia hết cho 3".

Hãy sử dụng các ký hiệu lượng từ và các phép toán logic để biểu diễn và xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a. Nếu *x* chẵn, thì *x* không chia hết cho 3.

b. Không có số nguyên chẵn nào là chia hết cho 3.

c. Tồn tại một số nguyên dương là số chẵn.

Bài 12 Xét các vị từ biến số thực x sau:

$p(x)$ ="$x^2-5x+6=0$, $q(x)$="$x^2-4x-5=0$" và $r(x)$="$x>0$"

Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a. $\forall x, p(x) \rightarrow r(x)$

b. $\forall x, q(x) \rightarrow \neg r(x)$

c. $\exists x, q(x) \rightarrow r(x)$

d. $\exists x, p(x) \rightarrow \neg r(x)$.

Bài 13 Dùng các qui tắc suy luận chứng minh mệnh đề sau

$$(\forall x, p(x) \vee q(x)) \wedge (\exists x, \neg p(x)) \wedge (\forall x, \neg q(x) \vee r(x)) \wedge (\forall x, s(x) \rightarrow \neg r(x)) \rightarrow \exists x, \neg s(x).$$

Bài 14 Xem suy luận sau: "Mọi số hữu tỉ là một số thực. Có một số hữu tỉ. Vì vậy, có một số thực"

a. Hãy dùng logic vị từ để mô hình hóa suy luận trên.

b. Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

Bài 15 Xem suy luận sau: "Mọi cô giáo duyên dáng đều được sinh viên yêu mến. cô Hằng là một cô giáo duyên dáng. vì vậy, cô Hằng được sinh viên yêu mến"

a. Hãy dùng logic vị từ để mô hình hóa suy luận trên.

b. Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

Chương 2: Tập hợp và ánh xạ

Bài 1 Xét các tập con tùy ý A, B, C, D của tập vũ trụ U. Hãy chứng minh các khẳng định sau:

a. Nếu $A \subset B$ và $C \subset D$ thì $A \cap C \subset B \cap D$ và $A \cup C \subset B \cup D$

b. Nếu $A \subset C$ và $B \subset C$ thì $A \cap B \subset C$ và $A \cup B \subset C$

c. $A \subset B$ khi và chỉ khi $A \cap \overline{B} = \varnothing$

Bài 2 Đối với mỗi ánh xạ f: $Z \rightarrow Z$ sau, hãy xác định xem nó có là đơn ánh toàn ánh không?. Tìm f(Z).

a. $f(x)=2x-3$

b. $f(x)=x^3$

c. $f(x)=x^2+x$

Bài 3 Tìm tập xác định và tập giá trị của các ánh xạ f và g trong mỗi trường hợp sau và cho biết có tồn tại ánh xạ hợp $g \circ f$ hay không, nếu tồn tại hãy tính $g \circ f$:

a. $f(x) = 2x + 3$ và $g(x) = 3x^2 + 2$ trong đó x là các số thực.

b. $f(n) = 2n +1$ và $g(n) = 2^n$ trong đó n là các số tự nhiên.

c. $f(x) = \sqrt[3]{x + \cos(x)}$, $g(x) = \dfrac{1}{2x^3}$ trong đó x là các số thực.

Bài 4 Với mỗi ánh xạ $f: A \rightarrow B$ sau đây, cho biết nó có là đơn ánh, toàn ánh, song ánh hay không?. Trong trường hợp nó là song ánh, hãy tìm ánh xạ ngược.

a. $A=B=R$, $f(x)=3x+7$
b. $A=B=R$, $f(x)=x^2+2x-3$
c. $A=B$, $B=(0, +\infty)$, $f(x)=e^{x+1}$

Bài 5 Xét hai ánh xạ f: $A\to B$, g: $B\to C$

a. Chứng minh rằng nếu $g\circ f$ đơn ánh thì f đơn ánh

b. Chứng minh rằng nếu $g\circ f$ toàn ánh thì g toàn ánh

c. Chứng minh rằng nếu f và g song ánh thì $g\circ f$ là song ánh. Hãy tìm $(g\circ f)^{-1}$

Chương 3: Phương pháp đếm

Bài 1 Tính số xâu nhị phân độ dài 10 trong các trường hợp sau:
a. Có bít đầu và bít cuối cùng bằng 1.
b. Có 2 bíts đầu là 0 hoặc 3 bíts cuối bằng 1.
c. Luôn chứa 4 bít 0.

Bài 2 Có bao nhiêu số nguyên dương không lớn hơn 100 chia hết cho 4 hoặc cho 6?

Bài 3 Trong một đám cưới có 10 người kể cả cô dâu và chú rể. Để chụp ảnh người ta xếp 6 người thành một hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng để chụp ảnh nếu
a. Mọi kiểu ảnh đều có cô dâu.
b. Mọi kiểu ảnh đều có cô dâu và chú rể.
c. Chỉ có hoặc là cô dâu hoặc là chú rể xuất hiện trong mọi kiểu ảnh.

Bài 4 Tìm số tập con của tập S có n phần tử.

Bài 5 Xét tập $S=\{1, 2,\ldots, 10\}$. Có bao nhiêu tập con A của S thỏa:
a. $|A|=5$
b. $|A|=5$ và phần tử bé nhất của A là 3.
c. $|A|=5$ và phần tử bé nhất của A bé hơn hay bằng 3.

Bài 6 Xét các tập hợp $A = \{1, 2, \ldots, 11\}$ và $B = \{1, 2, \ldots, 12\}$.
a. Có bao nhiêu tập con của A chứa ít nhất một số chẵn.
b. Có bao nhiêu tập con của B chứa ít nhất một số chẵn.
c. Tổng quát hóa các kết quả trong câu a và b

Bài 7 Cho phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$.
a. Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm.
b. Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm và $x_1 \geq 2$.
c. Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm và $x_i \geq 2$, với $i =1,.., 5$.
d. Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm và $x_1 < 2$.

Bài 8 Một tổ của một lớp học có 7 sinh viên
a. Có bao nhiêu cách chia họ thành 2 nhóm?. Nếu yêu cầu mỗi nhóm có ít nhất 2 sinh viên thì có bao nhiêu cách chia?.
b. Tổng quát hóa các kết quả trả lời của câu trên khi số sinh viên trong tổ là một số n tùy ý.

Bài 9 Có bao nhiêu cách chia 15 hòn bi cho 5 đứa trẻ trong các trường hợp sau:
a. Không có hạn chế nào cả.
b. Đứa trẻ lớn nhất được ít nhất 2 hòn bi.
c. Mỗi đứa trẻ được ít nhất một hòn bi.
d. Giả sử trong 15 hòn bi kể trên có 4 hòn bi màu đỏ, 6 hòn bi màu vàng và 5 hòn bi màu xanh, tính số cách chia 15 hòn bi này cho 5 đứa trẻ mà không có bất kỳ hạn chế nào.

Bài 10 Có 5 loại học bổng khác nhau. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên được hưởng các loại học bổng này để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau.

Chương 4: Hệ thức truy hồi

Bài 1 Tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số xâu nhị phân độ dài n có một số chẵn bits 0.
Bài 2 Tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số các hoán vị của n phần tử.
Bài 3 Giải hệ các thức truy hồi:
a. $a_n = 2a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 3$.
b. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.
c. $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
d. $a_n = a_{n-2} /4$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.
Bài 4 Giải các hệ thức truy hồi:
a. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, và $a_2 = 0$.
b. $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 9$, $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.
Bài 5 Xác định dạng tổng quát nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất nếu phương trình đặc trưng của nó có các nghiệm $1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, 3, 3, -4$.

Chương 5: Quan hệ

Bài 1 Cho hai tập hợp X = {a, b, c} và Y = {b, c, d, e}
a. Tính $|X \times Y|$
b. Tính số quan hệ hai ngôi trên Y
c. Tính số quan hệ từ X đến Y chứa (b, c) và (b, d).
d. Hãy tìm một quan hệ trên X có tính phản xạ và bắc cầu nhưng không đối xứng.
e. Hãy tìm một quan hệ trên Y có tính phản xạ và đối xứng nhưng không bắc cầu.
Bài 2 Cho A={1, 2, 3, 4}, xác định số các qua hệ trên A có tính chất
a. Phản xạ
b. Đối xứng
c. Phản xạ và đối xứng
d. Đối xứng và phản xứng
e. Phản xạ, đối xứng và phản xứng
Bài 3 Các quan hệ nào sau đây có tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu:
a. Quan hệ R trên $\mathbb{Z}$ sao cho $x R y \Leftrightarrow x-y$ lẻ.
b. Quan hệ R trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sao cho $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a \leq c$
c. Quan hệ R trên tập số thực $\mathbb{R}$ sao cho $x R y \Leftrightarrow |x| = |y|$.
Bài 4 Chứng minh các quan hệ sau đây là tương đương
a. Quan hệ R trên Z sao cho $xRy \Leftrightarrow x+y$ chẵn, tìm lớp tương đương của 1.
b. Quan hệ R trên Z sao cho $xRy \Leftrightarrow x^2+y^2$ chẵn, tìm lớp tương đương của 0.
c. Quan hệ φ trên tập số thực R sao cho $x\varphi y \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 y=1$.
Bài 5 Cho A = {1, 2, 3, 4, 5}, R= {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)}.
a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương
b. Tìm các lớp tương đương [1], [2], [3].
Tìm phân hoạch của A thành các lớp tương đương.
Bài 6 Cho A={1, 2, 3, 4, 5}×{1, 2, 3, 4, 5} và R là quan hệ trên A sao cho
$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a+b=c+d$
a. Chứng minh R là quan hệ tương đương
b. Xác định các lớp tương đương của [(1, 3)], [(2, 4)] và [(1, 1)]
c. Chỉ ra phân hoạch của A thành các lớp tương đương.

Bài 7 Quan hệ R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5)} trên A = {1, 2, 3, 4, 5} có phải là một quan hệ thứ tự hay không? Nếu là quan hệ thứ tự, hãy tìm phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của A nếu có.

Bài 8 Xét quan hệ R trên tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}^+$ khác 0 như sau:

$$a \, R \, b \Leftrightarrow a \text{ là bội số của } b$$

a. Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^+$.

b. Tìm phần tử bé nhất, lớn nhất nếu có. R có phải là quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{N}^+$ hay không?

Bài 9 Xét quan hệ R trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ như sau:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \le c \text{ và } b \le d$$

a. Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b. R có phải là quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hay không?. Có phần tử lớn nhất, bé nhất trong $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ theo R hay không.

Bài 10 Giả sử $\mathbb{N}^+$ là tập hợp các số tự nhiên khác 0. Xét quan hệ R trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ như sau:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \le c \text{ và } b|d \text{ (b là ước số của d)}$$

a. Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

b. Tìm min, max, inf, sup của tập hợp A = {(3, 2), (5, 4), (6, 6), (8, 10)}.

Bài 11 Xét tập các tập con P(S) của tập S và quan hệ R trên P(S) như sau:

$$\forall A, B \in P(S), A \, R \, B \Leftrightarrow A \subset B$$

Chứng minh R là một quan hệ thứ tự trên P(S).

Bài 12 Giả sử A = $\wp$(E) với E = {1, 2, 3}. Xét tập hợp sắp thứ tự (A, $\subset$) và tập B $\subset$ A, hãy tìm max, min, sup, inf của B khi

a. B = {{1}, {2}, {3}, {1, 2}}

b. B = {$\varnothing$, {1}, {2}, {1, 2}}

c. B= {{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}}.

Chương 6: Đại số Bool

Bài 1 Chứng minh rằng trong một đại số Boole, nếu $x \vee y = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$, nếu $x \wedge y = 1$ thì $x = 1$ và $y = 1$.

Bài 2 Trên tập các tập con P(E) của tập E ta định nghĩa hai phép toán $\wedge$, $\vee$ như sau:

$$\forall A, B \in P(E), A \wedge B = A \cap B, A \vee B = A \cup B.$$

Chứng minh rằng P(E) là một đại số bool với hai phép toán $\wedge$, $\vee$ được định nghĩa như trên.

Bài 3 Giả sử $\mathcal{A}$ là một đại số Boole, một tập con B $\neq \varnothing$ của $\mathcal{A}$ được gọi là một đại số con của $\mathcal{A}$ nếu với mọi x, y $\in$ B thì $x \vee y$, $x \wedge y$ và $\bar{x}$ cũng là phần tử của B.

a. Chứng minh rằng nếu B là một đại số con của $\mathcal{A}$ thì 0, 1 $\in$ B.

b. Với $\mathcal{A} = \wp(\{a, b, c\})$, hãy tìm tất cả các đại số con của $\mathcal{A}$.

c. Giả sử B là một tập con của $\mathcal{A}$ sao cho với mọi x, y $\in$ B, thì $x \vee y$, $\bar{x} \in$ B. Chứng minh B là một đại số con của $\mathcal{A}$.

Bài 4 Tìm dạng nối rời chính tắc của các hàm boole 3 biến sau:

a. $(x \vee yz)(\bar{x} \vee \overline{yz})$

b. $x(y \vee xz) \vee \bar{z}$

Bài 5 Tìm dạng tuyển chính tắc của hàm Boole f ba biến sao cho

a. Tập các giá trị của (x, y, z) để $f(x, y, z)$ bằng 1 là {100, 110, 101, 000, 111}

b. Tập các giá trị của (x, y, z) để $f(x, y, z)$ bằng 1 là {010, 110, 101, 000, 111}

Bài 6 Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm bool f theo 4 biến, biết f thỏa một trong 2 điều kiện

a. $f^{-1}(1)$={0101, 0110, 1000, 1011}

b. $f^{-1}(0)=\{0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 1001, 0110\}$

Bài 7 Tìm dạng tuyển chính tắc của hàm Boole $f(x, y, z)$ biết f bằng 1 khi và chỉ khi:

a. $x = 0$

b. $x + y = 0$

c. $xy = 0$

Bài 8 Dùng phương pháp biến đổi và biểu đồ Karnaugh, tìm hàm Boole cực tiểu của các hàm Boole ba biến sau:

a. $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$

b. $xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}.\bar{y}z$

c. $xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$.

Bài 9 Vẽ mạch tổ hợp, tìm công thức đa thức tối tiểu và vẽ mạch tổ hợp của đa thức tối tiểu (đã tìm được) của các hàm Boole sau:

a. $xyzt + x\bar{y}zt + x\bar{y}.\bar{z}t + \bar{x}y\bar{z}t + \bar{x}.\bar{y}zt$

b. $\bar{z}(x\bar{y} \vee yt) \vee y(x\bar{z} \vee \bar{x}z)$.

c. $xyzt \vee \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{z}t \vee y\bar{z}\bar{t}$.

d. $xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy(\bar{z} \vee \bar{t})$.

e. $yt(x \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(\bar{z}\bar{t} \vee yt) \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t$

f. $(x \vee t)(x \vee z)(y \vee t)(y \vee z)$.