Sem. 12, partea I

*) Determinarea punctelor de extrem local pt. funcții de 2 sau 3 variabile

| $\mathbb{R}^2$ $f(x,y)$ | $\mathbb{R}^3$ $f(x,y,z)$ |
|---|---|

I. Se determină punctele critice ale lui $f$ = soluții ale:

| | |
|---|---|
| $\nabla f(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$ | $\nabla f(x,y,z)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0 \end{cases}$ |

Punctele de extrem local din interiorul domeniului (atenție la cazul de pe frontieră!) se vor afla printre punctele critice

II. Determinăm derivatele de ordinul II ale lui $f$ și matricea hessiană:

| | |
|---|---|
| $H(f)(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ | $H(f)(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$ |

III. Calculăm matricea hessiană în fiecare punct critic și procedăm astfel în toate cazurile:

A. Încercăm criteriul lui Sylvester:

| | |
|---|---|
| $H(f)(\ldots,\ldots)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ | $H(f)(\ldots,\ldots,\ldots)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ |
| $\Delta_1=c_{11}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$ | $\Delta_1=c_{11}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$ |

* Dacă $\Delta_k > 0, \forall k \Rightarrow d^2f(\ldots)$ e pozitiv definită $\Rightarrow$ pct. critic e pct. de minim local

| | |
|---|---|
| $\Delta_1>0, \Delta_2>0$ | $\Delta_1>0, \Delta_2>0, \Delta_3>0$ |

* Dacă $(-1)^k \cdot \Delta_k > 0, \forall k \Rightarrow d^2f(\ldots)$ e negativ definită $\Rightarrow$ pct. critic e pct. de maxim local

| | |
|---|---|
| $\Delta_1<0, \Delta_2>0$ | $\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0$ |

| | |
|---|---|
| $d^2f(x,y)(u_1,u_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot u_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot u_2^2+ 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot u_1 u_2$ | $d^2f(x,y,z)(u_1,u_2,u_3)= =\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot u_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot u_2^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot u_3^2+ +2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot u_1u_2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\cdot u_1u_3+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}u_2\cdot u_3$ |

* Dacă nici una din cele 2 situații de mai sus nu are loc, trecem la calculul lui

| | |
|---|---|
| $d^2f(\ldots,\ldots)(u_1,u_2)$ | $d^2f(\ldots,\ldots,\ldots)(u_1,u_2,u_3)$ |

b.) Încercăm să găsim 2 puncte astfel încât:

| | |
|---|---|
| $d^2f(\ldots,\ldots)(u_1,u_2)>0$ <br> $d^2f(\ldots,\ldots)(u_3,u_4)<0$ | $d^2f(\ldots,\ldots,\ldots)(u_1,u_2,u_3)>0$ <br> $d^2f(\ldots,\ldots,\ldots)(u_4,u_5,u_6)<0$ |

Astfel, $d^2f(\ldots)$ va fi indefinită, iar punctul critic va fi punct șa.

* Dacă $d^2f(\ldots)\underset{\text{= nu e indefinită}}{\geq 0}$ (sau $\leq 0$) pt. orice pct. din $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$, ~~dar~~ și găsim puncte

| | |
|---|---|
| $(u_1,u_2)$ în afară de $(0,0)$ | $(u_1,u_2,u_3)$ $(0,0,0)$ |
| a.î. $d^2f(\ldots)(u_1,u_2)=0$ | $d^2f(\ldots)(u_1,u_2,u_3)=0$, trecem la pasul următor |
| Ex: $d^2f(\ldots)(u_1,u_2)=u_1^2\geq 0$ <br> $d^2f(\ldots)(0,2)=0$, dar $(0,2)\neq(0,0)$ | Ex: $d^2f(\ldots)(u_1,u_2,u_3)=-2u_3^4\leq 0$ <br> $d^2f(\ldots)(1,1,0)=0$, dar $(1,1,0)\neq(0,0,0)$ |

c.) Încercăm să arătăm că punctul critic nu poate fi nici de maxim, nici de minim pe bile din jurul său / SAU / verificăm dacă nu putem prelucra funcția a.î. să îi obținem un minim/maxim global