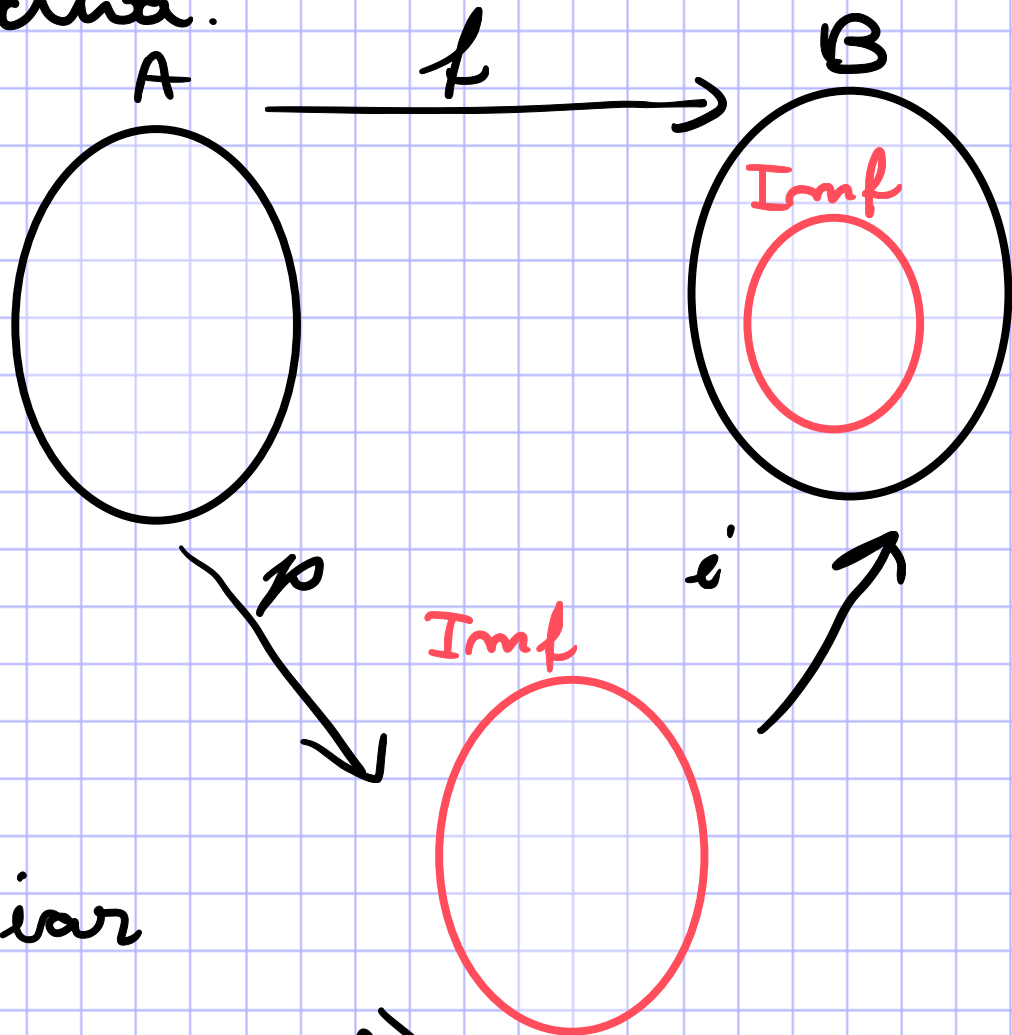


## Lemnar 3

1.3.41 Să se arate că orice funcție  $f: A \rightarrow B$  poate fi scrisă ca o compunere  $f = i \circ p$  unde  $i$  este injectivă, iar  $p$  este surjectivă.

Iducie:



$$p: A \rightarrow \text{Im } f$$
$$p(x) = f(x)$$

$$i: \text{Im } f \rightarrow B$$

$$i(x) = x, \text{ iar}$$

$$p \text{ surj. } (\text{Im } p = \text{Im } f)$$

$$i \text{ inj. (fct. identitate)}$$

$$f = i \circ p, \quad i \circ p: A \rightarrow B$$

**1.3.40** Să se găsească un exemplu de două funcții  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a.î.  $g \circ f \neq f \circ g$ .

Soluție:  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x+1$

$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = x^2$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \\ &= g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$$

(Din compunerea este definită bilateral, ea nu este comutativă)

**1.3.42** Să se găsească un exemplu care conține dintr-o funcție  $f: A \rightarrow B$ , astfel încât:

(1)  $f$  este injectivă, dar nu

are inversă la stânga

(2)  $f$  are exact o inversă la stânga dar nu este bijectivă

(3)  $f$  are exact două inverse la stânga

(4)  $f$  are o infinitate de inverse la stânga

Idutii: (1) Prop. 1 (Terminar 2)

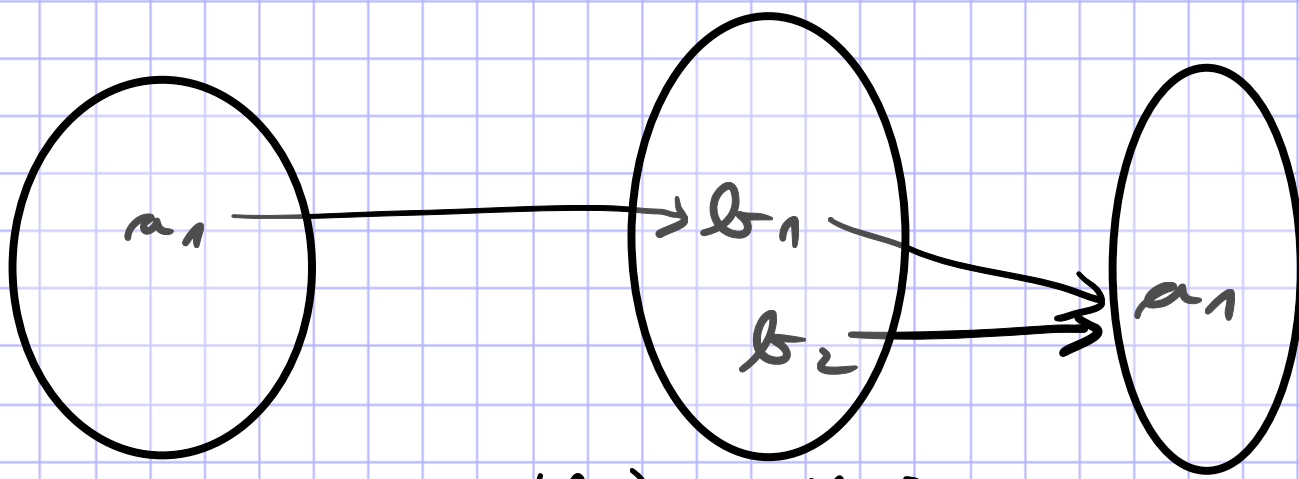
$\Rightarrow$   $A = \emptyset$ ,  $B$  mult. care are  
 $\exists!$   $f: A \rightarrow B$  inj.

Observatii: ①  $|B^A| = |B|^{|A|} = |B|^{|0|} = 1$

② Dacă  $B \neq \emptyset$ , atunci:  
 $\nexists B \cong \emptyset$

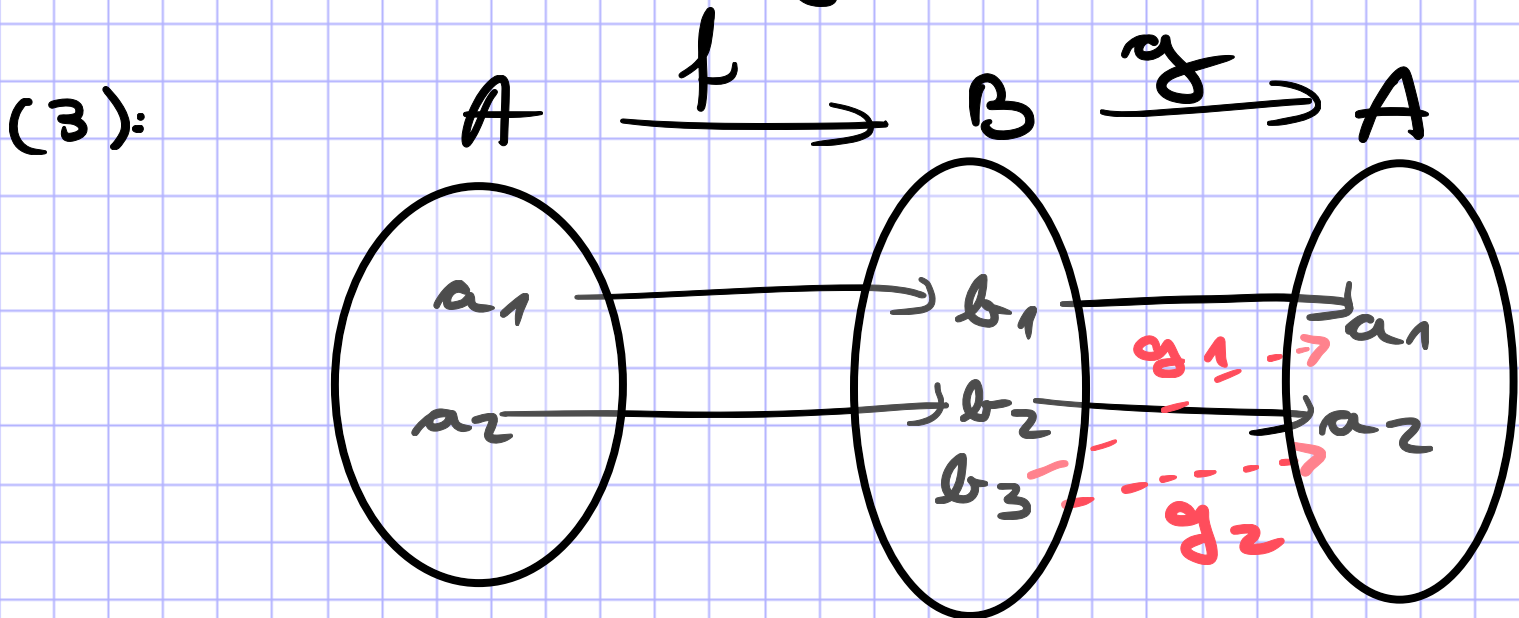
③ Dacă  $B = \emptyset$ , atunci:  
 $1_{\emptyset}: \emptyset \rightarrow \emptyset$  bij.

(2):  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$



$$g(b_1) = g(b_2) = a_1 \quad (b_1 \neq b_2) \quad (\text{nu este inj})$$

3!  $g: B \rightarrow A$ ,  $g(x) = a_1, \forall x \in B$   
 a. i.  $g \circ f = 1_A$



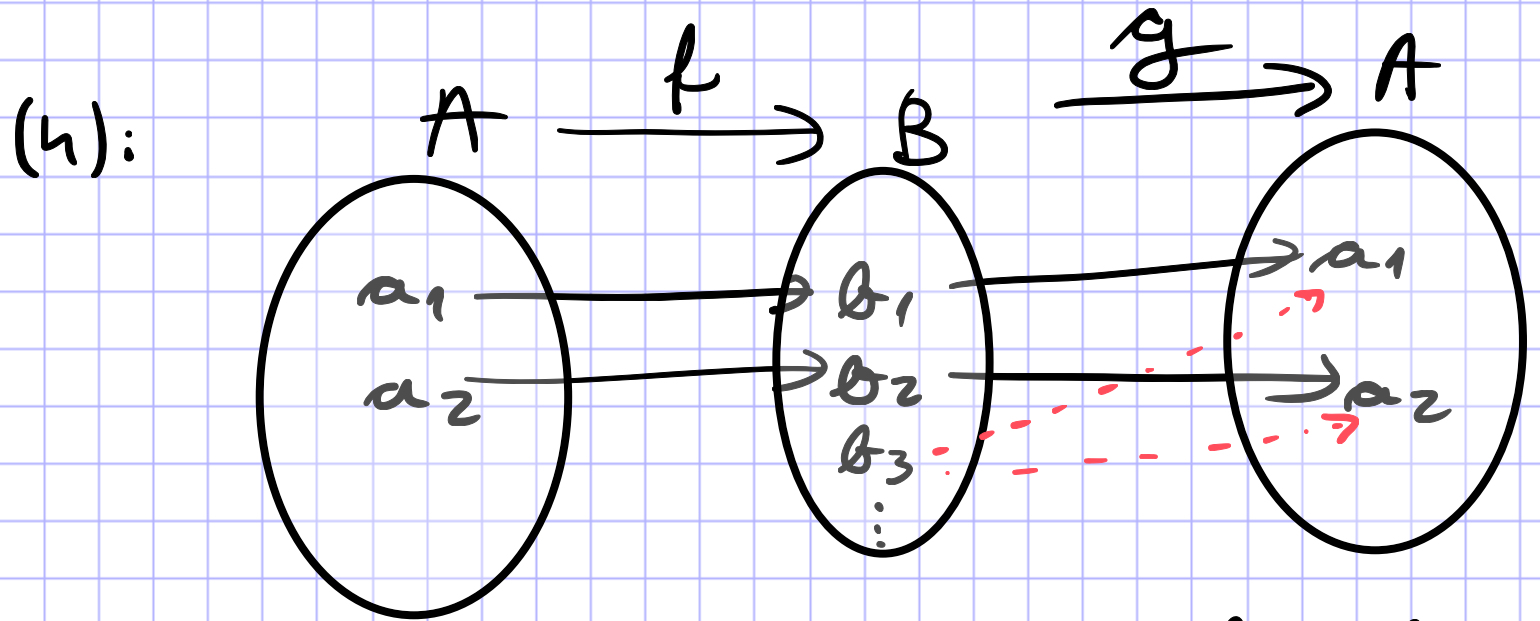
x	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>
f(x)	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>

$g: B \rightarrow A$  inv. la stanga

$(\Rightarrow) \quad g \circ f = 1_A$

$g(b_1) = a_1$   
 $g(b_2) = a_2$  și  $g(b_3) \in \{a_1, a_2\}$   
 (2 posibilitati)

$\Rightarrow$   $f$  are exact două inverse  
la stânga



$\exists$  o infinitate de funcții

$$g: B \rightarrow A \quad \text{a. i.}$$

$$g(b_1) = a_1$$

$$g(b_2) = a_2$$

$$n, \quad g(b_i) \in \{a_1, a_2\}, i \geq 3$$

$$\left( |A^B| = |A|^{|B|} = 2^\infty \text{ funcții} \right)$$

**1.3.43.** Să se găsească un  
exemplu care constă dintr-o  
funcție  $g: B \rightarrow A$ , astfel  
încât:

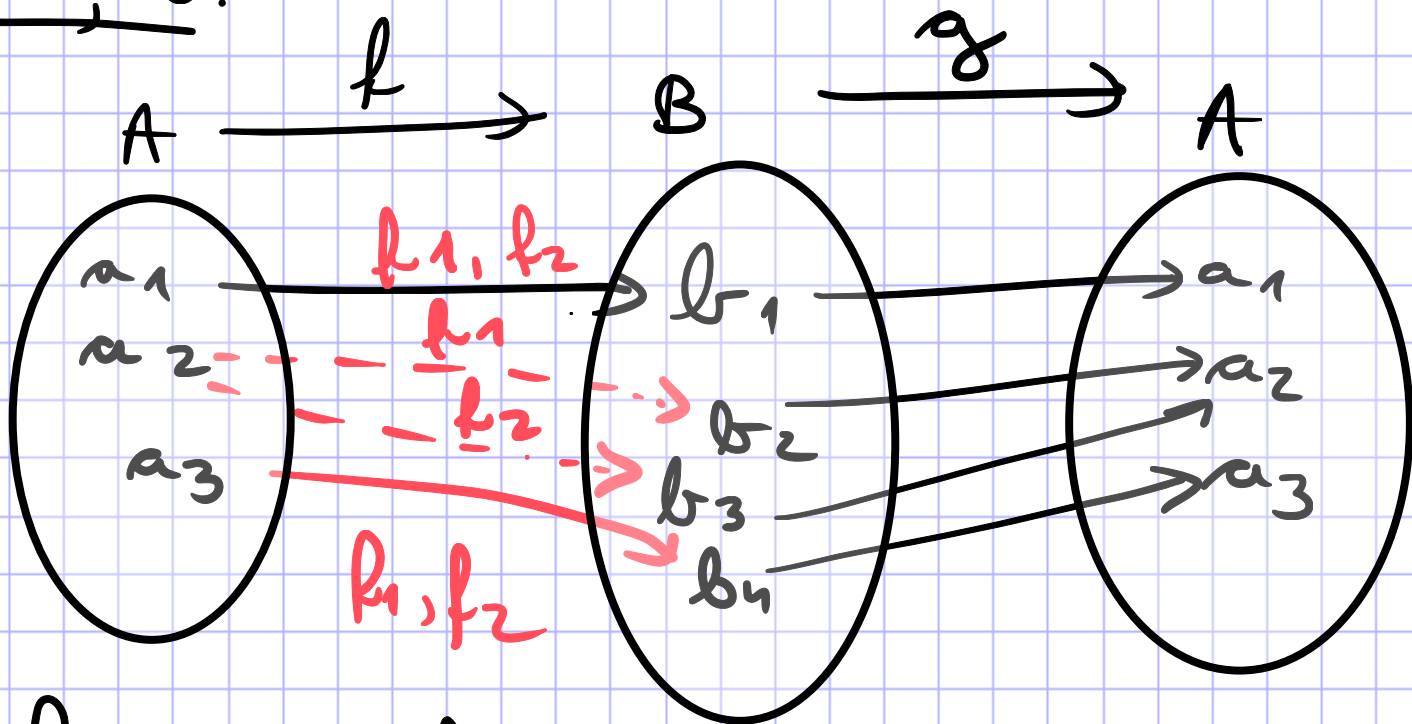
(1)  $g$  are exact două

inverse la dreapta

(2)  $g$  are o infinitate de  
inverse la dreapta

sa se arate ca  $g$  are  
exact o inversa la dreapta  
dacu  $g$  este bijectiva.

Solutie: (1):



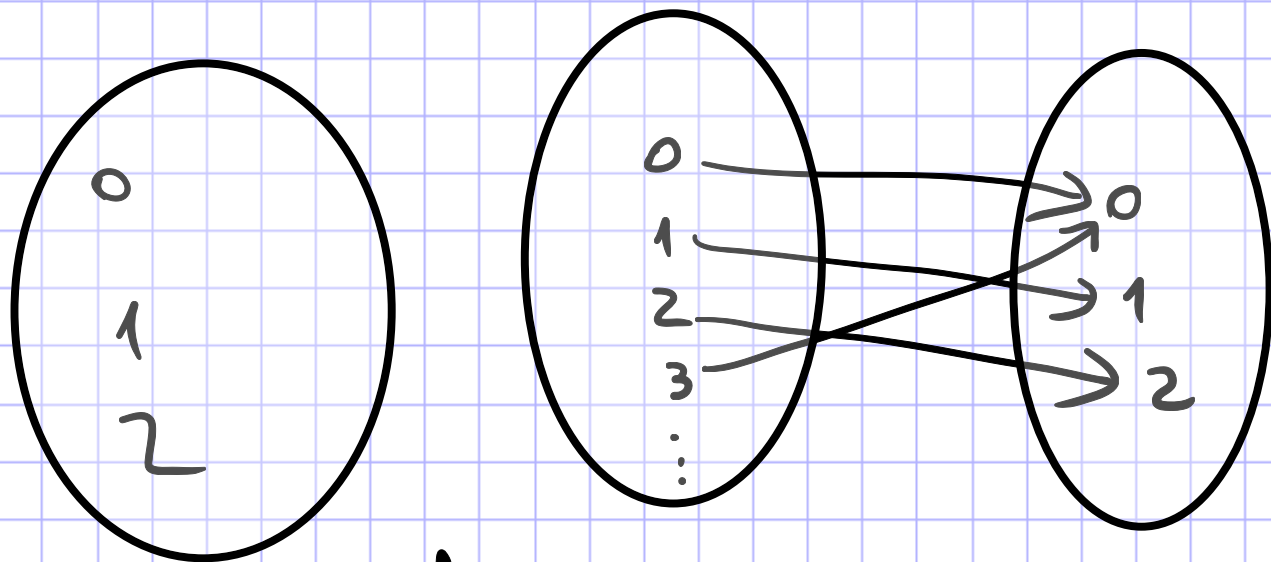
$$f_i(a_1) = b_1, \quad i = \overline{1, 2}$$

$$f_1(a_2) = b_2$$

$$f_2(a_2) = b_3$$

$$f_i(a_3) = b_4, \quad i = \overline{1, 2}$$

(2):



$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$$

Gătim  $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{N}$  a.t.

$$g \circ f = 1_A \Rightarrow \forall x \in \{0, 1, 2\}$$

$$g(f(x)) = x$$

$$\Rightarrow f(x) \equiv x \pmod{3}$$

$$f(0) = 3m_0, m_0 \in \mathbb{N}$$

$$f(1) = 3m_1 + 1, m_1 \in \mathbb{N}$$

$$f(2) = 3m_2 + 2, m_2 \in \mathbb{N}$$

$g: B \rightarrow A$  bijectivă  $(\stackrel{?}{=}) \exists! f: A \rightarrow B$

a.t.

$$g \circ f = 1_A$$

" $\Rightarrow$ "  $(\exists)$

$g: B \rightarrow A$  big

$$\Rightarrow \exists g^{-1}: A \rightarrow B$$

a. i.  $g \circ g^{-1} = 1_A$  și  $g^{-1} \circ g = 1_B$

$\Rightarrow g^{-1}$  este o inversă la dreapta pt.  $g$

Presupunem  $f: A \rightarrow B$  o altă inversă la dreapta a. i.

$$g^{-1} \circ f = 1_A$$

$$f = g^{-1} \text{ str.}$$

" $\Leftarrow$ " Itim  $\exists! f: A \rightarrow B$   
a. i.  $g \circ f = 1_A$

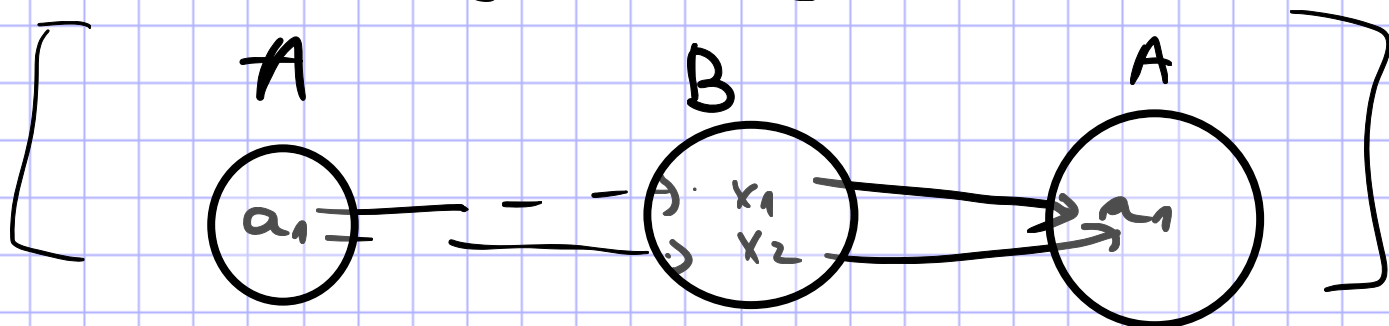
Prop<sub>2</sub>  
S<sub>2</sub>)

$g$  surj (1)

p. p. că  $g$  nu este injectivă

$\Rightarrow \exists x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in B$

cu  $g(x_1) = g(x_2)$





putem construi 2 inverse  
la dreapta  $\Rightarrow$  ctr. cu  
unitatea

$\Rightarrow$   $g$  este injectivă (2)

(1), (2)  $\Rightarrow$   $g$  este bijectivă

1.3.44 Să se găsească un  
exemplu care conține din  
două funcții :

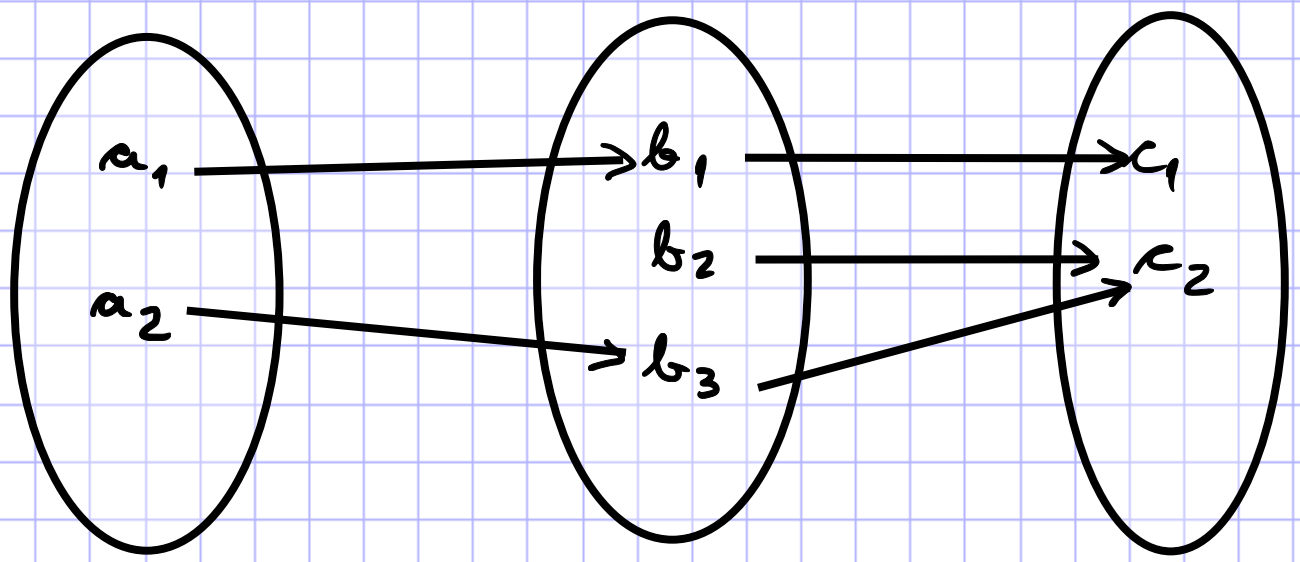
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ , așa încât:

(1)  $g \circ f$  injectivă, dar  $g$  nu  
este injectivă

(2)  $g \circ f$  surjectivă, dar  $f$  nu  
este surjectivă

Soluție:

(1)  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$



$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$$A = \{a_1, a_2\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$C = \{c_1, c_2\}$$

$$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_1) = c_1$$

$$(g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(b_3) = c_2$$

$$a_1 \neq a_2, \quad c_1 \neq c_2$$

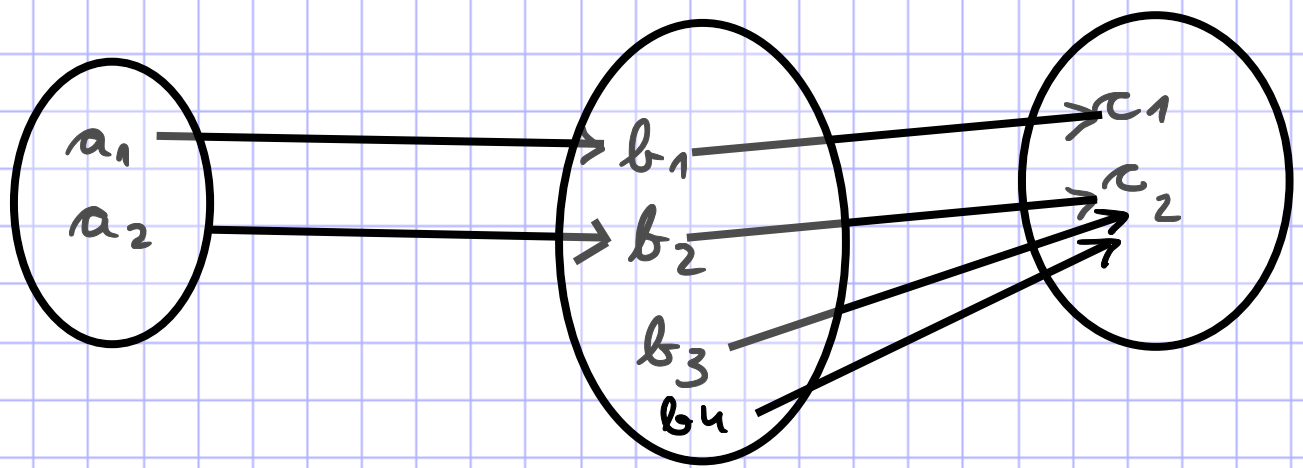
$\Rightarrow g \circ f$  este injectivă

$$\left. \begin{array}{l} g(b_2) = g(b_3) = c_2 \\ b_1 \neq b_3 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow g: B \rightarrow C$  nu este injectivă

(2):

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$



$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_1) = c_1$$

$$(g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(b_2) = c_2$$

$$\text{Im}(g \circ f) = \{c_1, c_2\} = C$$

$\Rightarrow$   $g \circ f$  este surjectivă

$$f: A \rightarrow B, \quad f(a_1) = b_1, \quad \text{și} \quad f(a_2) = b_2$$

$$\text{Im} f = \{b_1, b_2\} \subset B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

$\Rightarrow$   $f: A \rightarrow B$  nu este surjectivă

**1.3.45.** Să fie  $f: A \rightarrow B$  o funcție  
 și fie  $x, x_1, x_2 \in A$  și  
 $y, y_1, y_2 \in B$  submulțimi:

Să se arate că:

$$(1): X \subseteq f^{-1}(f(X))$$

$$(2): f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$$

$$(3): f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$$

$$(4): f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$$

Soluție: •  $f: A \rightarrow B$ ,  $C \subseteq A$

$$f(C) = \{y \in B \mid \exists x \in C: f(x) = y\}$$

$$\bullet \forall D \subseteq B$$

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

$$(1): X \subseteq A$$

Fie  $x \in X$ , notăm  $f(x) = y \in B$

$$\Rightarrow f(x) = y \in f(X) \subseteq B$$

$$x \in f^{-1}(f(X))$$

Dar  $x \in X$

$$\Rightarrow X \subseteq f^{-1}(f(X))$$

(2): Metoda dublei incluziuni

" $\subseteq$ ": vrem:  $f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$

hi  $y \in f(X_1 \cup X_2)$

(def.)  $(\exists x \in X_1 \cup X_2) f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists x \in A : (x \in X_1 \text{ or } x \in X_2), f(x) = y$

$\Leftrightarrow (\exists x \in A, x \in X_1, f(x) = y) \text{ or } (\exists x \in A, x \in X_2, f(x) = y)$

$\Leftrightarrow y \in f(X_1) \text{ or } y \in f(X_2)$

$\Leftrightarrow \underline{y \in f(X_1) \cup f(X_2)}$

$\Rightarrow f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$

(1)

" $\supseteq$ " vrem:  $f(X_1) \cup f(X_2) \subseteq f(X_1 \cup X_2)$

hi  $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$

$\Leftrightarrow y \in f(X_1) \text{ or } y \in f(X_2)$

...

Obs:  $P(x)$ ,  $Q(x)$  predicate  
logic

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \iff (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$$

(3): tercüme

(4):  $\exists x \quad y \in \underbrace{f(f^{-1}(y))}$

$$\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(y) : f(x) = y$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x)}_{\text{Darin } y \in y} \in y$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(y)) \subseteq y$$