Analiză matematică

Seminar 1

① Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că
$$\max\{x,y\} = \frac{|x-y|+(x+y)}{2}.$$

Formulați și demonstrați o relație analoagă pentru $\min\{x,y\}$.

* $x = y$
$$\underbrace{\max\{x,x\}}_{=x} = \frac{|x-x| + x+x}{2} = x$$

* $x > y$
$$\underbrace{\max\{x,y\}}_{=x} = \frac{x-\cancel{y} + x+\cancel{y}}{2} = x.$$

* $y > x$
$$\underbrace{\max\{x,y\}}_{=y} = \frac{-(x-y) + x+y}{2} = y.$$

$x < y \Rightarrow -x > -y. \Rightarrow \max\{x,y\} = -\min\{-x,-y\}. \Rightarrow$

$\min\{x,y\} = -\max\{-x,-y\}.$

$$\Rightarrow \min\{x,y\} = -\frac{|-x+y| + (-x-y)}{2} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Demonstrația e analoagă cu cea de la $\max\{x,y\}$.

$* \; x > y$: $\underbrace{\min\{x,y\}}_{=y} = \frac{x+y-x+y}{2} = y$

$* \; x < y$: $\underbrace{\min\{x,y\}}_{=x} = \frac{x+y-(y-x)}{2} = x.$

② Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați următoarele proprietăți ale funcției modul:

a) $|x+y| \le |x| + |y|$

$$-|x| \le x \le |x|$$
$$-|y| \le y \le |y| \quad (+)$$

$-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|$

Știm că $-a \le x \le a \Leftrightarrow |x| \le a,\ a>0.$

$\Rightarrow |x+y| \le \big|\underbrace{|x|+|y|}_{\ge 0}\big|$, deci $|x+y| \le |x|+|y|$.

b) $|x-y| \ge |x|-|y|$

$|x| = |x-y+y| \overset{a)}{\le} |x-y|+|y| \Rightarrow$

$|x|-|y| \le |x-y|$.

③ Determinați $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$:

a) $A=[0,7)\cup[8,+\infty)$

Teorie: Dacă $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$, atunci:

* mulțimea minoranților lui A este
$\mathcal{M}in(A)=\{x\in\mathbb{R} \mid \forall a\in A,\ x\le a\}$.

* mulțimea majoranților lui A este:
$\mathcal{M}aj(A)=\{x\in\mathbb{R} \mid \forall a\in A,\ a\le x\}$.

* $\inf A$ = cel mai mare minorant.
* $\sup A$ = cel mai mic majorant.

* Orice submulțime nevidă și mărg. inferior / mărg. superior posedă un infimum / supremum în $\mathbb{R}$.

* Dacă A e nemărg. inf $\Rightarrow \inf A=-\infty$.
A e nemărg. sup. $\Rightarrow \sup A=+\infty$.

$m=\min(A)$ dacă $\begin{cases} m\in A \\ m\in\mathcal{M}in(A)\end{cases} \Leftrightarrow m\in A\cap\mathcal{M}in(A)$.

$M=\max(A)$ dacă $\begin{cases} M\in A \\ M\in\mathcal{M}aj(A)\end{cases} \Leftrightarrow M\in A\cap\mathcal{M}aj(A)$.

* Inf. și sup. sunt considerați în $\overline{\mathbb{R}}$ și $\exists$ întotdeauna.

* Min și max sunt considerați în $\mathbb{R}$; nu $\exists$ mereu.

* Dacă min, max $\exists$, atunci $\min A = \inf A$ și $\max A = \sup A$.

În cazul nostru:

$\min A = \inf A = 0$

$\max A \nexists$, $\sup A = +\infty$.

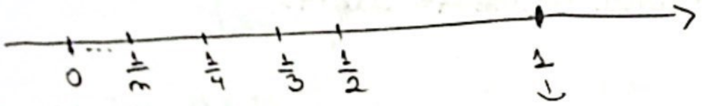
b) $A = [-1, 2] \setminus \mathbb{Q}$.

$\inf A, \min A, \sup A, \max A = ?$

$\inf A = -1$, $\sup A = 2$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

* Dacă y ar fi $\inf A$, atunci $y \leq x$, $\forall x \in A$.
Cum $y \in [-1,2] \setminus \mathbb{Q}$, $\Rightarrow$ între -1 și y $\exists$ un alt nr. irațional, deci $y \neq \inf A$.
$\inf A = -1$.

c) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$



se obține pt. $n = 1$.

$\inf A = 0$ $\quad$ $\max A = 1$.

$\min A \nexists$ $\quad$ $\sup A = 1$.

d) $A = \left\{ \frac{1}{x - [x]} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \right\}$

$x - [x] = \{x\} \in [0, 1)$.

$\{x\} = 0 \Leftrightarrow x = [x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\{x\} \in (0, 1)$ și $\frac{1}{\{x\}} > 1$.

$y = \frac{1}{\{x\}} \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{y}$
$\{x\} \in (0,1) \Rightarrow y > 1$.

$A = (1, \infty)$

$\inf A = 1$. $\quad$ $\sup A = +\infty$

$\min A \nexists$ $\quad$ $\max A \nexists$

4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Arătați că:

a) Dacă $\exists \min A$, atunci $\min A = \inf A$.

Fie $m = \min(A)$.

Atunci $m \in A$ și $m \le a, \forall a \in A. \Rightarrow m \in \mathcal{M}in(A)$ (e minorant al lui A).

Pp. că $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $x \le a, \forall a \in A$ și $x > m$.
(adică pp. că $\exists$ un minorant al lui A, mai mare decât minimul său) $\gg$ contradicție,

Cum $m \in A$ și $\left.\begin{matrix} \\ x \le a, \forall a \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x \le m}$. deci $m = \min A$

este cel mai mare minorant al lui A, deci $m = \inf A$.

b) Dacă $\exists \max A$, atunci $\max A = \sup A$.

Fie $M = \max(A)$.

Atunci $M \in A$ și $M \ge a, \forall a \in A. \Rightarrow M \in \mathcal{M}aj(A)$, deci M e majorant al lui A).

Vom presupune că $\exists$ un majorant al lui A, mai mic decât M, deci pp. că $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $x \ge a, \forall a \in A$ și $x < M$.

Cum $x \ge a, \forall a \in A$ și $M \in A$, avem că $x \ge M$, obținând o contradicție.

Așadar, $M = \max A$ este cel mai mic majorant al lui A, deci $M = \sup A$.

⑤ Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mulțimi nevide și mărginite cu $A \subseteq B$.

a) Arătați că $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Deoarece $\sup B \in Maj(B)$ și $A \subseteq B \Rightarrow \sup B \in Maj(A)$, deci, ținând cont că $\sup A$ e cel mai mic majorant al lui A, avem $\sup A \leq \sup B$. (1)

Deoarece $\inf B \in Min(B)$ și $A \subseteq B \Rightarrow \inf B \in Min(A)$, deci, ținând cont că $\inf A$ e cel mai mare minorant al lui A, avem $\inf B \leq \inf A$. (2)

Deoarece $\inf A \in Min(A)$ și $\sup A \in Maj(A)$

$$Min(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : x \leq a\} \qquad Maj(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : x \geq a\},$$

avem pentru $a \in A$: $\inf A \leq a \leq \sup A$, deci

$\inf A \leq \sup A$. (3)

$$\overset{(1),(2)}{\underset{(3)}{\Longrightarrow}} \inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B).$$

b) Dacă $\inf A = \inf B$ și $\sup A = \sup B \Rightarrow A = B$?

Nu. Exemplu: $A = (0,1) \subset [0,1] = B$.

$\inf A = 0 = \inf B$.

$\sup A = 1 = \sup B$.

$A \neq B$.

⑥ Demonstrați că între oricare 2 nr. reale distincte, $\exists$ cel puțin un nr. rațional (respectiv irațional).

$\boxed{a\ I0}$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. $\Rightarrow b - a \neq 0$ și $\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Conform Principiului lui Arhimede ($\forall x \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{N} : m > x$) avem $\exists m \in \mathbb{N}$ a.î. $m > \frac{1}{b-a}$. ⑤

Fie $M = \{x \in \mathbb{N} : \frac{x}{n} > a\}$. Deoarece orice submulțime a lui $\mathbb{N}$ are un minim, avem că $\exists m = \min M$.

Deci $m > a \cdot n$ și fiind cel mai mare minorant cu această proprietate:

$m - 1 \leq a \cdot n.$

Cum $n > \frac{1}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{n} < b - a$

$$m - 1 \leq a \cdot n$$
$$m \leq a \cdot n + 1 \quad | : n$$
$$\frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n}$$
$$\frac{m}{n} < a + b - a$$
$$\frac{m}{n} < b.$$

Deci $a < \frac{m}{n} < b.$

• $\boxed{a < 0}$.

Dacă $b > 0$, putem considera $a < 0 < b$.

Altfel avem $a < b \leq 0$, deci

$0 \leq -b < -a$, deci $\exists r \in \mathbb{Q}$ ca înainte a. î.

$-b < r < -a$, deci $a < -r < b$.

Fie $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$. $\Rightarrow r\sqrt{2}$ irațional. Cum pt. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ avem din cazul precedent ~~a<r<~~ $\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \cdot\sqrt{2} \Rightarrow$

$a < r\sqrt{2} < b$, și deci $r\sqrt{2}$ e nr. căutat.

Dacă $a < 0$ și $b > 0$, $r = 0$, atunci căutăm un al 2-lea nr. rațional s între 0 și $\frac{b}{\sqrt{2}}$, deci $0 < s < \frac{b}{\sqrt{2}} \overset{\cdot\sqrt{2}}{\Rightarrow}$

$$0 < s\sqrt{2} < b \Rightarrow a < 0 < s\sqrt{2} < b,$$

deci $s\sqrt{2}$ e nr. căutat.

(7) Dem. că orice nr. real este limita unui șir de nr. raționale (respectiv iraționale). Dați exemple pt. $x=2$ și $y=\sqrt{2}$.

Conform exercițiului anterior, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $a \in \mathbb{R}$, avem un nr. rațional x_n ~~a.î.~~ ~~pt.~~ între nr. reale $a-\frac{1}{n}$ și $a+\frac{1}{n}$:

$$a-\frac{1}{n} < x_n < a+\frac{1}{n}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right) = a \overset{\text{T. cleștelui}}{\Rightarrow}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}.$$

Analog dacă $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$x_n = 2 + \frac{1}{n}$.

$y_n = \sqrt{2} - \frac{1}{n}$.

(8) Justificați că $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Pp. că $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} = a \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\sqrt[3]{3} = a - \sqrt{2} \quad |()^3$

$3 = a^3 - 3a^2\cdot\sqrt{2} + 3a\cdot 2 - 2\sqrt{2}$

$(3a^2+2)\sqrt{2} = a^3 + 6a - 3$

$\sqrt{2} = \frac{a^3+6a-3}{3a^2+2}$

(7) $3a^2+2 \neq 0,\ a \in \mathbb{Q}$

Cum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (vezi curs), e imposibil să-l scriem ca raport de 2 nr. raționale.

Sau: Fie $a = \sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \Rightarrow$

$a - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3} \quad |()^3$

$a^3 - 3a^2\sqrt{2} + 3a\cdot 2 - (\sqrt{2})^3 = 3$

$\sqrt{2}(3a^2+2) = a^3 + 6a - 3 \quad ()^2$

$2(9a^4+12a^2+4) = a^6 + 36a^2 + 9 + 12a^4 - 6a^3 - 36a$

$\Rightarrow a^6 - 6a^4 - 6a^3 + 12a^2 - 36a + 1 = 0$

Dacă $\frac{p}{q}$ ar fi răd. $\Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-1, 1\}$ ceea ce e fals, deci ec. nu are răd. în $\mathbb{Q}$.

$\Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exerciții suplimentare

① Det. $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$:

a) $A = [-\pi, \pi) \cap \mathbb{Z}$

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$\inf A = \min A = -3$

$\sup A = \max A = 3$

b) $A = \left\{ \frac{n}{1-n^2} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$

$A = \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{3}{8}, \frac{-4}{15}, \dots \right\}$

Termenii sunt în ordine crescătoare

$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{-n^2+1} = 0$

$\inf A = \min A = -\frac{2}{3}$, $\max A \nexists$, $\sup A = 0$.

c) $A = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x > 0 \right\}$

Fie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0		1		∞
$f'(x)$		$- -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	2	$\nearrow$	∞

$\operatorname{Im} f = [2, +\infty)$
(f continuă)

$A = [2, +\infty)$

$\min A = \inf A = 2$,

$\max A \nexists$, $\sup A = \infty$.

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - x| \leq 1\}$

$-1 \leq x^2 - x \leq 1$

$x^2 - x \geq -1$

$x^2 - x + 1 \geq 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$a > 0$
$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$x^2 - x - 1 \leq 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$

$A = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$

$\inf A = \cancel{\sup} \min A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\max A = \sup A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

② Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mulțimi nevide și mărginite superior.
Ar. că $A \cup B$ este mărginită superior și

$$\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

A mărg. superior $\Rightarrow$ ~~$\forall x$~~ $\exists M_A$ a.î. $x \le M_A$, $\forall x \in A$.

B mărg. superior $\Rightarrow$ $\exists M_B$ a.î. $y \le M_B$, $\forall y \in B$.

Fie $M = \max\{M_A$ și $M_B\}$, atunci $\forall x \in A$ și $\forall y \in B$, avem $x \le M$ și $y \le M$. (*)

Dacă $e \in A\cup B$, atunci $e \in A$ sau $e \in B$, dar în orice caz, conform (*), avem $e \le M$, deci $A \cup B$ e mărginită de M.

Fie $x \in A\cup B$. $\Rightarrow$ fie $x \in A$ și $x \le \sup A$
fie $x \in B$ și $x \le \sup B$

deci $x \le \max\{\sup A, \sup B\}$. (1)

Cum $A \subseteq A\cup B \overset{Ex.5}{\Rightarrow} \sup A \le \sup(A\cup B)$
$B \subseteq A\cup B \overset{Ex.5}{\Rightarrow} \sup B \le \sup(A\cup B)$

deci $\max\{\sup A, \sup B\} \le \sup(A\cup B)$ (2)

Din (1),(2) $\Rightarrow \sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Metoda 2:
Fie $x \in A\cup B \rightarrow$ $x \in A$ și $x \le \sup A$ sau $x \in B$ și $x \le \sup B$, deci $x \le \max\{\sup A, \sup B\}$, așadar $\max\{\sup A, \sup B\}$ este majorant pt. $A\cup B$.
Arătăm că e cel mai mic. Pp. prin contrad. că $\exists m \in \mathbb{R}$ a.î. $m < \max\{\sup A, \sup B\}$ și $x \le m$, $\forall x \in A\cup B$.
Dacă $\sup A \ge \sup B$, avem $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$, deci $m < \sup A$, deci $\exists a \in A$ a.î. $m < a$, așadar m nu e majorant pt. A, deci nici pt. $A\cup B$, ⚡.
$\Rightarrow \max\{\sup A, \sup B\} = \sup(A\cup B)$
(analog și dacă $\sup B \le \sup A$)

③ Demonstrați că între oricare 2 nr. reale distincte $\exists$ o infinitate de nr. raționale (resp. iraționale). Dați exemplu de o mulțime infinită de nr. iraționale în $[0,1]$.

La ex. 6 am arătat că $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $\exists r_1 \in \mathbb{Q}$ a.î. $a<r_1<b$. Luând acum nr. reale a, r_1, avem că $\exists r_2 \in \mathbb{Q}$ a.î. $a<r_2<r_1<b$. Continuând astfel obținem $a<\ldots<r_m<r_{m-1}<\ldots<r_1<b$.

Analog pt. cele iraționale.

$A=\left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} \mid p\text{-prim} \right\} \subseteq (0,1)$.

④ Justificați că $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt[3]{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Pp. $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt[3]{2}} = a \in \mathbb{Q}$. ~~$\sqrt{2}-a$~~

$\sqrt{2} = a + a\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{2} - a = a\sqrt[3]{2} \quad |()^3$

$2\sqrt{2} - 3\cdot 2\cdot a + 3\cdot\sqrt{2}\cdot a^2 - a^3 = a^3 \cdot 2$

$\sqrt{2}(3a^2+2) = 3a^3+6a$

$\sqrt{2} = \frac{3a^3+6a}{3a^2+2}$

Cum $a\in\mathbb{Q} \Rightarrow \frac{3a^3+6a}{3a^2+2} \in \mathbb{Q}$

$3a^2+2 \neq 0$.

Dar $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, contradicție

Deci $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt[3]{2}} \notin \mathbb{Q}$.

$\sqrt{2}(3a^2+2) = 3a^3+6a \quad |()^2$

$2(3a^2+2)^2 = 9a^6 + 36a^4 + 36a^2$

$9a^6 + 36a^4 + 36a^2 - 18a^4 - 24a^2 - 8 = 0$

$9a^6 + 18a^4 + 12a^2 - 8 = 0$

$\frac{p}{q} \in \left\{ \pm 8, \pm 4, \pm 2, \pm 1, \pm\frac{8}{9}, \pm\frac{4}{9}, \pm\frac{2}{9}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{8}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3} \right)$

Exercitii suplimentare
Seminarul 1

① Să se arate că $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

~~Pp. că $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$.~~

Vom arăta că ecuația $x^2 - 7 = 0$ nu are rădăcini raționale, dar $\sqrt{7}$ e rădăcină.

Fie $p, q \in \mathbb{Z}^*$ cu $(p,q) = 1$. Dacă $\frac{p}{q}$ e rădăcină a ecuației, atunci $p \mid 7$ și $q \mid 1 \Rightarrow p \in \{-1, 1, 7, -7\}$, $q \in \{-1, 1\}$
$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-1, 1, -7, 7\}$. Cum niciuna nu e rădăcină a ecuației $\Rightarrow \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

② Arătați că $\sqrt{1 + \sqrt[3]{3}} \notin \mathbb{Q}$.

$a = \sqrt{1 + \sqrt[3]{3}}$

$a^2 = 1 + \sqrt[3]{3}$

$a^2 - 1 = \sqrt[3]{3} \overset{|(\,)^3}{\Rightarrow} a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 4 = 0$

$\mathbb{Q} \ni \frac{p}{q}$ rădăcină, dar $\frac{p}{q} \notin \{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}$.

③ inf, sup, min, max pentru:

a) $A = \bigcup \{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$

$A = [-1, 1] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup \dots \cup [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = [-1, 1]$

$\Rightarrow \min A = \inf A = -1$; $\max A = \sup A = 1$.

b) $A = \bigcap \{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$.

Vom arăta că $A = \{0\}$.

Evident, $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $0 \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Fie $r > 0$, deci $\frac{1}{r} > 0$. Cum $\mathbb{N}$ nu e mărginită (sau

Principiul lui Arhimede), avem că $\exists n_x \in \mathbb{N}$ a.î. $n_x > \frac{1}{x}$,

deci $x > \frac{1}{n_x}$. Așadar, pt. $n_x \in \mathbb{N}$, avem că

$0 < \frac{1}{n_x} < x$, deci $x \notin \left(-\frac{1}{n_x}, \frac{1}{n_x}\right) \Rightarrow x \notin A$ dacă $x > 0$.

* Dacă $x < 0 \Rightarrow |x| > 0 \Rightarrow \exists n_x' \in \mathbb{N}$ a.î. $|x| > \frac{1}{n_x'}$,

deci $0 < \frac{1}{n_x'} < |x| \quad | \cdot (-1)$

$$\underbrace{-|x|}_{= x} < -\frac{1}{n_x'} < 0$$

din nou $x \notin \left(-\frac{1}{n_x'}, \frac{1}{n_x}\right)$, deci $x \notin A$ dacă $x < 0$.

Așadar $A = \{0\} \Rightarrow \min A = \inf A = \max A = \sup A = 0$.