Seminar 5

$\boxed{1.4.37}$ Să se determine toate relațiile de echivalență care se pot defini pe $A = \{a, b, c\}$

Soluții: A mulțime

• O relație de echivalență (echivalență) pe A este o preordine care este de asemenea simetrică (o relație reflexivă, tranzitivă, simetrică)

• preordine = reflexivă + tranzitivă

• O relație R pe A este tranzitivă dacă:

$\forall\ a, b, c \in A$, cu

aRb și $bRc \Rightarrow aRc$

- $\forall\ a, b \in A$, dacă $aRb \Rightarrow bRa$ (simetria)
- $\forall\ a, b \in A$, dacă aRb și bRa, atunci $a = b$ (antisimetria)

$\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$; $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

Perechile posibile:

$\{(a,a); (a,b); (a,c); (b,a); (b,b); (b,c); (c,a); (c,b); (c,c)\}$

Obs: o relație pe mulțimea A este o submulțime a mulțimii $A \times A$

reflexivă: (x, x) este în

relații

<u>simetrică</u>: (x, y) este în relație $\Longrightarrow$ (y, x) este în relație

<u>tranzitivă</u>: (x, y) este în relație și (y, z) este în relație $\Longrightarrow$ (x, z) este în relație

$$R_1 = \{(a, a); (b, b); (c, c)\}$$

$$R_2 = \{(a, a); (b, b); (c, c); (a, b); (b, a)\}$$

$$R_3 = \{(a, a); (b, b); (c, c); (b, c); (c, b)\}$$

$$R_4 = \{(a, a); (b, b); (c, c); (a, c); (c, a)\}$$

$$R_5 = \{(a, a); (b, b); (c, c); (a, c); (c, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b)\}$$

$\boxed{1.4.39}$ Să se arate că relația dată prin $(a,b) \sim (c,d)$ dacă $ad = cb$ este o echivalență pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ și să se determine mulțimea factor $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/_{\sim}$.

<u>Soluție</u>: $(a,b) \sim (c,d)$

$\iff ad = cb$

$\boxed{\text{I}}$ $(a,b) \sim (a,b)$?

$\iff ab = ab$ (adv.)

$\implies$ rel. este <u>reflexivă</u>

$\boxed{\text{II}}$ $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$(a,b) \sim (c,d)$ și $(c,d) \sim (e,f)$

$\overset{?}{\implies} (a,b) \sim (e,f)$

$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = cb$

$(c,d) \sim (e,f) \Rightarrow cf = de \mid : f \neq 0$

$$c = \frac{de}{f}$$

$$ad = \frac{de}{f} b$$

$$\Rightarrow ad = \frac{deb}{f} \mid : d$$

$$a = \frac{eb}{f} \mid \cdot f$$

$$\underline{af = eb}$$

$\Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$

$\Rightarrow$ rel. este <u>tranzitivă</u>

$\boxed{\text{III.}}$ $(a,b) \sim (c,d)$

$\Leftrightarrow ad = cb$

$\Leftrightarrow cb = ad \Leftrightarrow (c,d) \sim (a,b)$

$\Rightarrow$ relația este <u>simetrică</u>

Mulțimea factor $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = cb$

$b, d \in \mathbb{Z}^*$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{a}{b}}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{c}{d}}_{\in \mathbb{Q}}$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_{\sim} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*,\ (a,b) = 1\}$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_{\sim} = \mathbb{Q}$$

Fie $\sim$ o rel. de echi pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$$[(a,b)] = [(a,b)]_{\sim} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (x,y) \sim (a,b)\}$$

este clasa de echivalență a lui (a,b)

Mulțimea factor a lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ cu $\sim$ este mulțimea tuturor claselor de echivalență:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_{\sim} = \{[(a,b)] \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$$

$(a,b) \sim (x,y) \Longrightarrow ay = xb,$
$b, y \in \mathbb{Z}^*$

$\Longleftrightarrow \underbrace{\frac{a}{b}}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{x}{y}}_{\in \mathbb{Q}}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_{\sim} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, (a,b) = 1\}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_{\sim} = \mathbb{Q}$

$\boxed{1.4.40.}$ Sunt bine definite următoarele funcții:

a.) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a+1}{b^2}$, pt orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$

b.) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $g\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2a+3b}{b}$, pt orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$

c.) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h(x) = \frac{x}{2}$, pt. $\forall\ x \in \mathbb{Z}$

d.) $k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $k(x) = \frac{1}{x}$ pt. orice $x \in \mathbb{Z}$?

Soluții: a) $f\left(\overset{=3}{\frac{3}{1}}\right) = \frac{4}{1} = 4$

$$f\left(\underbrace{\frac{6}{2}}_{=3}\right) = \frac{7}{4}$$

$$f\left(\frac{3}{1}\right) \neq f\left(\frac{6}{2}\right) \Rightarrow f \text{ nu este bine definită}$$

b.) $g\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2a+3b}{b} = \frac{2a}{b} + \cancel{\frac{3b}{b}} =$

$$= \frac{2a}{b} + 3 = 2 \cdot \frac{a}{b} + 3$$

$\frac{a}{b} = x$, $b \neq 0$, $g(x) = 2x+3$, $x \in \mathbb{Q}$

g este bine def.

(definirea fiind independentă față de alegerea reprezentanților)

c.) $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{Z}$

$x = 1 \in \mathbb{Z}$

$h(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow h$ nu este bine definită

d) $x = 0$ nu convine

$0 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ f_a nu este bine definită

$\boxed{1.4.41.}$ Considerăm mulțimea
$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/_\sim$ ca în ex.
1.4.39. Să se arate că $+, \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sunt bine definite, unde:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{și} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

pt. $\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0, d \neq 0$.

<u>Soluție</u>: $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = cb$
$\underline{b, d \in \mathbb{Z}^*}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_\sim = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*,\ \frac{a}{b} \text{ ireductibilă} \}$

$= \{ \underbrace{\frac{a}{b}}_{= \mathbb{Q}} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*,\ (a, b) = 1 \}$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{si} \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{?}{\neq} \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$$

$$\frac{ad+bc}{bd} \overset{?}{\neq} \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Longrightarrow \quad ab' = \underline{a'b}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Longrightarrow \quad cd' = \underline{c'd} \qquad \text{(slim)}$$

$$(ad+bc)b'd' = \underline{a}d\underline{b}'d' + b\underline{c}b'\underline{d}'$$

$$bd(a'd'+b'c') = bda'd' + bd\,b'c'$$

$$\Longrightarrow \quad (ad+bc)b'd' = bd(a'd'+b'c')$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{si} \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{?}{\neq} \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$$

$$\frac{ac}{bd} \overset{?}{\neq} \frac{a'c'}{b'd'}$$

$\underline{acb'd'} = a'bcd' = a'bc'd =$
$= \underline{a'c'bd}$

$\boxed{1.4.42}$ Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că:

(1) Congruența modulo n, și anume $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \equiv_n)$ dată de $x \equiv_n y$ (sau $x \equiv y \pmod n$) dacă $n / (x-y)$ este o relație de echivalență.

(2) Mulțimea factor corespunzătoare este mulțimea tuturor claselor de resturi modulo n:

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/_{\equiv_n} = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}$$

(3) Operațiile următoare sunt bine definite:

$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ unde

$[x]_n + [y]_n = [x+y]_n \ , \ x,y \in \mathbb{Z}$

$\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ unde

$[x]_n \cdot [y]_n = [xy]_n \ , \ x,y \in \mathbb{Z}$

<u>Soluție</u> : (1) $x \equiv_n y \iff n \mid (x-y)$

1. $x \in \mathbb{Z}$: $x \equiv_n x \iff n \mid (x-x)$

$n \mid 0$ „A"

$\Rightarrow$ reflexivitatea

2. $x, y, z \in \mathbb{Z}$: $x \equiv_n y$ și $y \equiv_n z$

$\Rightarrow x \equiv_n z$

$$\begin{array}{l} n \mid (x-y) \\ n \mid (y-z) \\ \hline n \mid (x-z) \end{array} \oplus \quad \Rightarrow x \equiv_n z$$

$\Rightarrow$ tranzitivitatea

3. $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \equiv_n y \Rightarrow y \equiv_n x$

$x \equiv_n y \Rightarrow n \mid x-y \quad | \cdot (-1)$

$n \mid y-x \Rightarrow y \equiv_n x$

$\Rightarrow$ simetria

1, 2, 3 $\Rightarrow$ relație de echivalență

(2) Obs. $x \equiv_n y \Leftrightarrow x, y$ au aceeași rest după împărțirea la n

$x = n \cdot a + r_1$, $a, r_1 \in \mathbb{Z}$
$0 \leq r_1 < n$

$y = n \cdot b + r_2$, $b, r_2 \in \mathbb{Z}$
$0 \leq r_2 < n$

„$\Leftarrow$" $r_1 = r_2 \Rightarrow x - y = n(a-b)$
$\Rightarrow n \mid (x-y)$
$\Rightarrow x \equiv_n y$

„$\Rightarrow$" $x \equiv_n y$

$\Rightarrow n \mid x - y$

$x - y = n \cdot a + r_1 - n \cdot b - r_2 =$
$= n(a-b) + r_1 - r_2$

$$r_1 - r_2 = \underbrace{(x-y)}_{n \mid x-y} - n(a-b)$$

$$\Rightarrow \quad n \mid r_1 - r_2$$

$$r_1 - r_2 \in \{-n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1\}$$

din cauza condițiilor

$$\Rightarrow \quad r_1 - r_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2$$

$$\mathbb{Z}/_{\equiv n} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\} = \{[0]_n, \dots, [n-1]_n\}$$

(3): temă