ALGEBRĂ

LUCRARE DE CONTROL

1. a) * relație de echivalență:

relație: $(A, B, \sim)$

$A, B$ - mulțimi

$\sim$ - legea care le leagă

rel. de ech.: reflexivă $\forall a \in A \quad a \sim a$

tranzitivă $\forall a, b, c \in A \Rightarrow$ dacă $a \sim b$ și $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

simetrică $\forall a, b \in A \quad a \sim b \Rightarrow b \sim a$

ex.: ~~$(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +)$~~

$(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \sim) \quad a \sim b \Leftrightarrow \{a\} = \{b\}$

$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \sim) \quad (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$(a, b, c) \sim (d, e, f) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$

$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2}$

$|z_1| = |z_2|$

* ordin al unui elem. dintr-un grup:

nr. min $n$ a.î. $x^n = 1$ sau $+\infty$ dacă $\nexists$ un astfel de $n$

$$\text{ord } x = n \Leftrightarrow \begin{cases} x^n = 1 \\ \forall m \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } x^m = 1 \Rightarrow n \mid m \end{cases}$$

ord $i = 4$ pt. că $\langle i \rangle = \{-1, +1, -i, +i\}$

$i^4 = 1$

$\text{ord}(x) = |\langle x \rangle|$

* divizor al lui 0 într-un inel $(R, +, \cdot)$

a divizor al lui 0 $\Rightarrow \exists\, b \neq 0$ a.î. $a \cdot b = 0 = b \cdot a$

$0$ – el. neutru la „+"

dacă se respectă doar asta $\Rightarrow$ a diviz. la st. lui 0 ex.: $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \circ)$

$(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ - grup

asociativă (cu +)

inversabilă (- matricea)

are el. neutru ($O_2$)

" $\circ$ " - asociativă

- distributivă bilateral

diviz. al lui 0: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pt. că $A \cdot B = B \cdot A = O_2$ unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq O_2$

b) $G$ - grup

$H_i \leq G$ cu $i \in I$

$H = \bigcap_{i \in I} H_i$

Să se arate că $H \leq G$

I $1 \in H$ $\left.\begin{array}{l} \forall H_i \leq G \Rightarrow 1 \in H_i \\ H = \bigcap_{i\in I} H_i \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \in H$

II $\forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$

$\left.\begin{array}{l} y, x \in H \Rightarrow x, y \in H_i \ \forall i \in I \\ H_i \leq G \ \forall i \in I \end{array}\right\} \Rightarrow x y^{-1} \in H_i \ \forall i \in I \Rightarrow x y^{-1} \in H$

$\Rightarrow H \leq G$

c) $f: A \to B$ $\qquad A \xrightarrow{f} B \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}} C$

$h_1, h_2 : B \to C$

$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$

Să se arate că $f$ este surjectivă

pp. $f$ nu e surjectivă (contrapoziție)

dacă $h_1 \circ f = h_2 \circ f \not\Rightarrow h_1 = h_2$

$h_1(f(x)) = h_2(f(x)) \not\Rightarrow h_1 = h_2$

$\exists\, y \in B$ a.î. $\nexists\, x \in A : f(x) = y$

$$h_1(y) = \begin{cases} y & \text{dacă } \exists\, x : f(x) = y \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

↳ merge cel puțin odată ($f$ nu e surj)

$$h_2(y) = \begin{cases} y & \text{dacă } \exists\, x : f(x) = y \\ 1 & \text{altfel} \end{cases}$$

$\Rightarrow h_1 \neq h_2$ dar $h_1(f(x)) = h_2(f(x)) \Leftrightarrow \cancel{h_1(y) = h_2(y)}$

$f(x) = f(x)$ „A"

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \in (-\infty, 3) \\ x^2 - 2 & x \in [3, \infty) \end{cases} \qquad g(x) = x^2 + 1$$

a) inj.: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dacă $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

I $x_1 \in (-\infty, 3)$ $x_2 \in (-\infty, 3)$

$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

II $x_1 \in (-\infty, 3)$ $x_2 \in [3, \infty)$

$2x_1 + 1 = x_2^2 - 2 \Leftrightarrow x_2^2 - 2x_1 - 3 = 0$

$2x_1 + 3 = x_2^2$

↓ max = 9 ↓ min = 9

$\Rightarrow x_2 = x_1 = 3$

$x_1 \in (-\infty, 3)$

nu se poate

($\nexists\, f(x_1) = f(x_2)$ dacă $x_1 \in (-\infty, 3)$ și $x_2 \in [3, \infty)$)

III $x_1 \in [3, \infty)$ $x_2 \in [3, \infty)$

$x_1^2 - 2 = x_2^2 - 2$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \\ x_1, x_2 \in [3, \infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

din I, II și III $\Rightarrow f$ inj.

surj.: $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

$\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$

+ continuă în 3

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x \in (-\infty, 3) \\ 2x & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

$f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ - cresc.

$$\left.\begin{matrix} \lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = f(3) \\ 7 = 7 = 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \text{ - continuă în } 3$$

inversa: $\cancel{f^{-1}(y) = \begin{cases} y_1 = f(x) & x \in (-\infty, 3) \\ y_2 = f(x) & x \in [3, \infty) \end{cases} \Leftrightarrow f^{-1}(y) =}$

I $f(x) = y \quad x \in (-\infty, 3)$

$2x + 1 = y$

$x = \frac{y-1}{2} \quad x \in (-\infty, 3)$

$\frac{y-1}{2} < 3 \Leftrightarrow y - 1 < 6 \Leftrightarrow y < 7 \Leftrightarrow y \in (-\infty, 7)$

II $f(x) = y \quad x \in [3, +\infty)$

$x^2 - 2 = y$

$x^2 = y + 2$

$x = \sqrt{y+2} \quad x \in [3, +\infty)$

$\sqrt{y+2} \geq 3 \ /(\,)^2$

$y + 2 \geq 9$

$y \geq 7 \Rightarrow y \in [7, +\infty)$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2}, & y \in (-\infty, 7) \\ \sqrt{y+2}, & y \in [7, \infty) \end{cases}$$

$Im f = \mathbb{R}$

$f\circ g : Im g \to \mathbb{R}$

NU E DEF.

$f \circ g(x) = f(g(x))$

$Im g \subseteq dom f \Leftrightarrow \underset{Im f}{\overset{\text{in}}{(0,\infty)}} \subseteq \mathbb{R}$ ✓

$f\circ g(x) = f(x^2+1)$

$$f(x^2+1) = \begin{cases} 2(x^2+1)+1, & x^2+1 \in (-\infty, 3) \\ (x^2+1)^2 - 2, & x^2+1 \in [3,\infty) \end{cases} = \begin{cases} 2x^2+3, & x^2 \in (-\infty, 2) \\ x^4+2x^2-1, & x^2 \in [2, +\infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x^2+3, & x \in (0, \sqrt{2}) \\ x^4+2x^2-1, & x \in [\sqrt{2}, \infty) \end{cases}$$

NU e definit $f \circ g$

~~$f\circ g$ - bine def~~ $\Leftrightarrow$ ~~$f\circ g : B \to B$~~

~~$f: A \to B$~~ ~~$dom f = codom g \Leftrightarrow C = A$~~

~~$g: B \to C$~~ ~~$[codom g = dom f]$~~

$f\circ g$ bine def $\Leftrightarrow codom g = dom f$

$g\circ f \quad codom f = dom g = \mathbb{R}$

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(2x+1), & x \in (-\infty, 3) \\ g(x^2-2), & x \in [3,\infty) \end{cases} = \begin{cases} (2x+1)^2+1, & x \in (-\infty, 3) \\ (x^2-2)^2+1, & x \in [3,\infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 4x^2+4x+2 & x < 3 \\ x^4-4x^2+5 & x \geq 3 \end{cases}$$

c) $A \subseteq (0,\infty) : g(g^{-1}(A)) \neq A$

nu e bij! $\nexists y \in (0,\infty)$ $y = 0,5$ pt. care $\exists x \in dom$ a.î. $f(x)=y$

$g: (0,\infty) \to (0,\infty)$ ~~este bij~~

$f$-inj. $\Rightarrow$ are inversă la dr

$g(x) = y \Rightarrow x^2+1 = y$

$x = \sqrt{y-1}$ pt. că $x > 0$

pt $f(f^{-1}(A))$ ar fi ~~$-\infty$~~ $[3, +\infty)$

dacă ar fi $g\circ g^{-1}((1,\infty)) = (2,\infty)$

o ? o

3. a) $\langle n \rangle = n \cdot \mathbb{Z}$ (dublă incluziune)

$\overline{I}$ $\{n\} \in n \cdot \mathbb{Z} \to \{n\}$ submulțime de $n \cdot \mathbb{Z}$; $(n, \mathbb{Z}, +)$ - grup $\Rightarrow \langle n \rangle \subseteq n \cdot \mathbb{Z}$ (teoremă)

$\overline{II}$ $x \cdot n \in n \cdot \mathbb{Z}$ unde $x \in \mathbb{Z}$

$\langle n \rangle = \{ m \cdot n \mid m \in \mathbb{Z} \}$

pt. $m = x \in \mathbb{Z}$ avem $m \cdot n = x \cdot n \Rightarrow x \cdot n \in \langle n \rangle$ $\Rightarrow n \cdot \mathbb{Z} \subseteq \langle n \rangle$

din $\overline{I}$ și 2 $\Rightarrow$ dublă incluziune

b) $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$

vrem ex. de izomorfism

$f : n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\qquad f: \{\ldots -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\} \to \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(x) = \frac{x}{n} \quad n \neq 0$

$f(x+y) = \frac{x+y}{n} = \frac{x}{n} + \frac{y}{n} = f(x) + f(y) \to$ morfism

inj.: $\forall x_1, x_2 \in n\mathbb{Z}$ dacă $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\frac{x_1}{n} = \frac{x_2}{n} \mid \cdot n \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ✓

surj.: $y = f(x)$

$y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists x \in n\mathbb{Z}$ a.î. $f(x) = y$

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{n} \Rightarrow x = ny \in n \cdot \mathbb{Z}$ pt. că $y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$

$a+ib \leq c+id$ ddacă $a \leq c$ și $b \leq d$

reflexivă: $a+ib \leq a+ib$ dacă $a \leq a$ și $b \leq b$ „A"

tranzitivă: $a+ib \leq c+id$ și $c+id \leq e+if \Rightarrow a+ib \leq e+if$

$$\begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases} \quad \begin{cases} c \leq e \\ d \leq f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq e \\ b \leq f \end{cases} \quad \text{„A"}$$

antisimetrică: dacă $a+ib \leq c+id$ și $c+id \leq a+ib \Rightarrow a+ib = c+id$

$$\begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases} \text{ și } \begin{cases} c \leq a \\ d \leq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ d = b \end{cases}$$

4. $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

a) $(A,+,\cdot)$ - inel

$(A,+)$ - grup $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} + \text{ asociativă} \\ \text{are el. neutru} \\ \text{orice el. are invers} \\ \text{parte stabilă} \end{cases}$

asociativitate:

~~∀~~ $x, y, z \in A \Leftrightarrow x_1 + x_2\sqrt{2} + y_1 + y_2\sqrt{2}) + z_1 + z_2\sqrt{2} =$

$= x_1 + x_2\sqrt{2} + (y_1 + y_2\sqrt{2} + z_1 + z_2\sqrt{2}) \Rightarrow$ „A"

are el. neutru: $0 \overset{?}{\in} A$

$\exists\ a = b = 0 \in \mathbb{Q}$ pt. care $0 \in a + b\sqrt{2} \in A$

el. inversabile: $x = a + b\sqrt{2}$

$-x = -a + (-b\sqrt{2}) \overset{?}{\in} A$

$\left.\begin{array}{l} -a \in \mathbb{Q} \text{ pt. că } a \in \mathbb{Q} \\ -b \in \mathbb{Q} \text{ pt. că } b \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow -x \in A$

parte stabilă $x, y \in A$ $\quad x = x_1 + x_2\sqrt{2}$ $\quad$ $y = y_1 + y_2\sqrt{2}$

$x + y = \underbrace{x_1 + y_1}_{\in \mathbb{Q}} + \sqrt{2}(\underbrace{x_2 + y_2}_{\in \mathbb{Q}})$

$\Rightarrow A$ - parte stabilă

„·" - asociativă (se moștenește)
- distributivă bilateral (se moștenește de la $(\mathbb{R}^*, \cdot)$) $A \subseteq \mathbb{R}$

b) $f: A \to M_{2\times2}(\mathbb{Q})$, $f(a+b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$

A - inel cu $+, \cdot$

$(M_{2\times2}, +, \cdot)$ - inel ?

asociativitate: $(A+B)+C = A+(B+C)$ se moștenește

el. neutru ~~[illegible]~~ $O_2 + A = A + O_2 = A$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

el. inversabile $A^{-1} = -A \in M_{2\times2}(\mathbb{Q})$

parte stabilă $A, B \in M_{2\times2}(\mathbb{Q}) \Rightarrow A+B \in M_{2\times2}(\mathbb{Q})$

„·" - asociativă
- distributivă bilateral - se moștenesc ✓

~~$f(a+b\sqrt{2})$~~ $f(x+y) = f(x) + f(y)$

~~$f(a+b\sqrt{2}$~~ $x = x_1 + x_2\sqrt{2}$

$y = y_1 + y_2\sqrt{2}$

$f(x+y) = f(x_1 + x_2\sqrt{2} + y_1 + y_2\sqrt{2}) = f((x_1+y_1) + \sqrt{2}(x_2+y_2))$

$= \begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ 2(x_2+y_2) & x_1+y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 2x_2 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 2y_2 & y_1 \end{pmatrix} =$

$= f(x) + f(y) \Rightarrow$ morfism

injectiv? $\forall x, y \in A$ dacă $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ $\Rightarrow x = x_1 + x_2\sqrt{2}$

$y = y_1 + y_2\sqrt{2}$

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 2x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 2y_2 & y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y$

dom. de integritate: inel comutativ, unitar (conține pe 1), fără diviz ai lui 0

* $(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + 2bd = ac + \sqrt{2}(ad+cb) + 2bd$

$(c+d\sqrt{2})(a+b\sqrt{2}) = ac + \sqrt{2}(cb+ad) + bd\cdot 2$

egale => comutativ

* $1 \overset{?}{\in} (A,+,\cdot)$ $\quad \begin{matrix} a=1 \\ b=0 \end{matrix} \Rightarrow 1+0\sqrt{2} \in A \Rightarrow$ unitar

* fără diviz ai lui 0! față de a 2-a lege

$(x_1 + x_2\sqrt{2})(y_1 + y_2\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$

Dacă un elem. e inversabil => nu e diviz. a lui 0

$A^* = A^\times$

$(a+b\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})^{-1} = 1 \Rightarrow (a+b\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}}^{a-b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2-2b^2}}_{\in Q} + \underbrace{\frac{-b}{a^2-2b^2}}_{\in Q}\sqrt{2}$

$\Rightarrow (a+b\sqrt{2})^{-1} \in A \Rightarrow$ orice elem. din A e inv față de $\cdot$

=> oricum elem. nu e diviz a lui 0

am zis și că e corp (unitar și orice elem. nenul e inversabil față de $\cdot$)

sau $\begin{cases} \text{inel unitar} \\ \text{grup cu } \cdot \end{cases}$

parte stabilă!