Seminarul 8

① Evaluați integralele improprii:

a) $J = \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx$

$J' = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$ $\qquad u = \operatorname{arctg} x$, $du = \frac{1}{1+x^2}\, dx$

$J' = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$

$J = \lim_{t \to \infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} \Big|_0^t = \lim_{t \to \infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2} - \frac{\operatorname{arctg}^2 0}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{8}$

b) $J = \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$J' = \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

$= -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$

$J = \lim_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \int_t^0 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \int_0^t \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

$= \lim_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \left(-\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) \Big|_t^0 + \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \left(-\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) \Big|_0^t =$

$= (-1 + 0 + 0 + \pi/2) + (-0 + \pi/2 + 1 - 0) = \pi$

c) $J = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x}\, dx$

$J_n = \lim_{t \to \infty} \int_0^t x^n \cdot e^{-x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \Big[\overbrace{-\frac{x^n}{e^x} \Big|_0^t}^{=0} + n \underbrace{\int_0^t x^{n-1} \cdot e^{-x}\, dx}_{J_{n-1}} \Big]$

$f' = e^{-x}$ $\quad f = -e^{-x}$

$g = x^n$ $\quad g' = n \cdot x^{n-1}$

$I_n = n \cdot I_{n-1}$.

$I_{n-1} = (n-1) I_{n-2}$

$\vdots$

$I_1 = 1 \cdot I_0 = \int_0^\infty e^{-x} \, dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x} \Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{e^x} \Big|_0^t =$

$= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{e^t} + \frac{1}{e^0} \right) = 1.$

$I_n = n \cdot I_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot I_{n-2} = \dots = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot I_0 = n! \cdot 1 = n!$

d) $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \, dx$

$I = \int_1^{2-0} \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}} \, dx = \int_1^{2-0} \frac{1}{\sqrt{-(x^2-2x+1)+1}} \, dx = \int_1^{2-0} \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} \, dx$

$= \arcsin(x-1) \Big|_1^{2-0} = \lim_{t \nearrow 2} \arcsin(x-1) \Big|_1^t = \arcsin 1 - \arcsin 0$
$= \pi/2$

② Studiați convergența integralelor improprii:

$\boxed{P_1}$ Dacă $a, b, p \in \mathbb{R}$ și $f: [a,b) \to [0,\infty)$ e o fc. pozitivă și local integrabilă pe $[a,b)$ (= integrabilă pe orice compact $[u,v]$ din $[a,b)$) și $\exists \lim_{x \nearrow b} (b-x)^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci:

i) Dacă $p < 1$ și $\lambda < \infty$ $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ e convergentă.

ii) Dacă $p \geq 1$ și $\lambda > 0$ $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ e divergentă

$\boxed{P_2}$ Dacă $a, p \in \mathbb{R}$, $f: [a,\infty) \to [0,\infty)$ e o fc. poz. și local integr. pe $[a,\infty)$ și $\exists \lim_{x\to\infty} x^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci:

i) Dacă $p > 1$ și $\lambda < \infty$ $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ e convergentă.

ii) Dacă $p \leq 1$ și $\lambda > 0$ $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ e divergentă.

$\boxed{P_3}$ Dacă $a, b, p \in \mathbb{R}$, $f: (a,b] \to [0,\infty)$ este o fc. pozitivă și local integrabilă pe $(a,b]$ și $\exists \lim\limits_{x \searrow a} (x-a)^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

i) Dacă $p<1$ și $\lambda<\infty \Rightarrow \int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$ e convergentă.

ii) Dacă $p \geq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$ e divergentă.

$\boxed{P_4}$ Dacă $b, p \in \mathbb{R}$, $f: (-\infty, b] \to [0,\infty)$ e o fc. pozitivă și local integrabilă pe $(-\infty, b]$ și $\exists \lim\limits_{x \to -\infty} (-x)^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci.

i) Dacă $p>1$ și $\lambda<\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ e convergentă.

ii) Dacă $p \leq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ e divergentă.

a) $\int_0^{\underline{3}} \frac{x^3+1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$.

Pb. apare în $x=3$. Fie $f: [0,3) \to [0,\infty)$, $f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt{9-x^2}}$.

Suntem în cazul $\boxed{P_1}$, $\underline{b=3}$.

$$\lambda = \lim_{x \uparrow 3} (3-x)^p \cdot \frac{x^3+1}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} = \lim_{x\uparrow 3} (3-x)^p \cdot \frac{x^3+1}{(3-x)^{1/2} \cdot (3+x)^{1/2}} =$$

$$= \lim_{x\uparrow 3} (3-x)^{p-1/2} \cdot \frac{x^3+1}{(3+x)^{1/2}} \left| \begin{array}{l} \exists p<1 \text{ ? a.î. } \lim < \infty \\ \text{Da, } p = 1/2 \end{array} \right.$$

Pt. $p = 1/2$ limita e $\lim\limits_{x\uparrow 3} (3-x)^{1/2-1/2} \cdot \frac{x^3+1}{(3+x)^{1/2}} = \frac{28}{\sqrt{6}} < \infty$.

$$\left.\begin{array}{l} p = 1/2 \\ \lambda < \infty \end{array}\right\} \overset{\boxed{P_1}}{\Longrightarrow} \text{ integrala e convergentă.}$$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$

Pb. apar atât în $x=0$, cât și pt. $x=\infty$. Deci întâi o despărțim în sumă de 2 integrale:

$$\mathcal{J} = \int_{0+0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx + \int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$$

$\boxed{\mathcal{J}_1}$: Fie $f: (0,1] \to [0,\infty)$, $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$. Suntem în cazul $\boxed{P_3}$, $a=0$.

$$\lambda = \lim_{x \searrow 0} (x-0)^p \cdot \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \searrow 0} x^p \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}_{\to 1 \text{ (l'Hopital)}}$$. Luăm $p = \frac{1}{2}$ și

obținem $\lambda = \lim_{x \searrow 0} x^{1/2} = 0 < \infty$.

$\left.\begin{array}{l} p = \frac{1}{2} < 1 \\ \lambda = 0 < \infty \end{array}\right\} \overset{\boxed{P_3}}{\Longrightarrow} \mathcal{J}_1$ convergentă.

$\boxed{\mathcal{J}_2}$: Fie $f: [1,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$. Suntem în cazul $\boxed{P_2}$,

$a = 1$.

$$\lambda = \lim_{x \to \infty} x^p \cdot \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \to \infty} x^{p-1} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\to \pi/2}$$

$\exists ?\ p > 1$ a.î. $\lambda < \infty$? - NU. Luăm $p = 1$.

$$\lambda = \lim_{x \to \infty} x^0 \cdot \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$\left.\begin{array}{l} p = 1 \\ \lambda = \frac{\pi}{2} > 0 \end{array}\right\} \overset{\boxed{P_2}}{\Longrightarrow} \mathcal{J}_2$ divergentă.

$\Rightarrow \mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ divergentă.

c) $\int_0^{\pi} \ln(\sin x) \cdot x\, dx$.

Pp. apar atât în $x=0$, cât și în $x=\pi$.

Fie $\mathcal{J} = \int_{0+0}^{\pi/2} x \cdot \ln(\sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-0} x \cdot \ln(\sin x)\, dx = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$

$\boxed{\mathcal{J}_1}$: Fie $f: (0, \pi/2] \to [0,\infty)$, $f(x) = -x \cdot \ln(\sin x)$.

Suntem în cazul $\boxed{P_3}$. (pt. că $\sin x \in (0,1] \Rightarrow \ln(\sin x) < 0$ și avem nevoie de fc. pozitivă)

$a=0$.

Scanned with CamScanner

$$\lambda = \lim_{x \searrow 0} -(x-0)^p \cdot x \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x\searrow 0} -x^{p+1} \cdot \ln(\sin x).$$

Fie $p=0$.

$$\lambda = \lim_{x\searrow 0} -x \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x\searrow 0} - \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\searrow 0} - \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -\lim_{x\searrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} = -\lim_{x\searrow 0} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\nearrow 1} \cdot x \cdot \cos x = 0 < \infty.$$

$\left.\begin{matrix} p=0<1 \\ \lambda = 0 < \infty \end{matrix}\right| \overset{\boxed{P_3}}{\Rightarrow} -J_1$ convergentă $\Rightarrow J_1$ convergentă.

$\boxed{J_2}$: Fie $f: [\pi/2, \pi) \to [0,\infty)$, $f(x) = -x \cdot \ln(\sin x)$. Suntem în cazul $\boxed{P_1}$, $b=\pi$.

$$\lambda = \lim_{x\nearrow\pi} (\pi - x)^p \cdot (-x) \cdot \ln(\sin x) = \lim_{\substack{t=\pi-x \\ t\searrow 0}} t^p \cdot (t-\pi) \cdot \ln(\underbrace{\sin(\pi - t)}_{=\sin t})$$

$$= \lim_{t\searrow 0} t^p \cdot (t-\pi) \cdot \ln(\sin(t)) =$$

Fie $p = \frac{1}{2}$.

$$\lambda = \lim_{t\searrow 0} (t-\pi) \cdot \frac{\ln(\sin(t))}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{t\searrow 0} (t-\pi) \cdot \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{-\frac{1}{2t\sqrt{t}}} =$$

$$= \lim_{t\searrow 0} (t-\pi) \cdot \frac{-2\overbrace{t}^{\nearrow 1}\sqrt{t}}{\sin t} \cdot \cos t = -\pi \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$\left.\begin{matrix} p=\frac{1}{2}<1 \\ \lambda = 0 < \infty \end{matrix}\right\} \overset{\boxed{P_1}}{\Rightarrow} -J_2$ convergentă $\Rightarrow J_2$ Convergentă

$\Rightarrow J = J_1 + J_2 =$ convergentă.

(3) Studiați convergența integralei improprii

$$J(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

și calculați valoarea lui $J\left(\frac{1}{2}\right)$.

* $\boxed{\alpha=0} \Rightarrow J(0) = \int_0^1 dx = 1 \Rightarrow J$ convergentă.
* $\boxed{\alpha>0} \Rightarrow$ avem pb. in $x=1$.

. Fie $f: [0,1) \to [0,\infty)$, $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}$. Suntem in $\boxed{P_1}$, $b=1$.

$\lambda = \lim\limits_{x \nearrow 1} (1-x)^p \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} = \lim\limits_{x\nearrow 1} (1-x)^{p-\alpha} \cdot \underbrace{x^{\alpha}}_{\to 1}$.

Fie $p=\alpha$. Atunci $\lambda=1$, deci avem și $\lambda>0$ și $\lambda<\infty$.

$p<1, \lambda<\infty \Rightarrow J(\alpha)$ convergentă.

$p\geq 1, \lambda>0 \Rightarrow J(\alpha)$ divergentă.

Cum $p=\alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha\in(0,1) & J(\alpha)\ C \\ \alpha\geq 1 & J(\alpha)\ D \end{cases}$

* $\boxed{\alpha<0} \Rightarrow$ avem pb. in $x=0$. $J = \int_{0+0}^{1} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{-\alpha} dx$, $-\alpha>0$.

Fie $f: (0,1] \to [0,\infty)$, $f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{-\alpha}$. Suntem in $\boxed{P_3}$, $a=0$

$\lambda = \lim\limits_{x\searrow 0} (x-0)^p \cdot \frac{(1-x)^{-\alpha}}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\searrow 0} x^{p+\alpha} \cdot \underbrace{(1-x)^{-\alpha}}_{\to 1}$.

Fie $p=-\alpha$. Atunci $\lambda=1$, deci avem și $\lambda>0$ și $\lambda<\infty$.

$p<1, \lambda<\infty \Rightarrow J(\alpha)\ C$.

$p\geq 1, \lambda>0 \Rightarrow J(\alpha)\ D$.

Cum $p=-\alpha \Rightarrow \begin{cases} -\alpha<1 \Rightarrow \alpha>-1 \Rightarrow \alpha\in(-1,0) \quad J(\alpha)\ C \\ -\alpha\geq 1 \Rightarrow \alpha\leq -1 \Rightarrow J(\alpha)\ D. \end{cases}$

Așadar, $\boxed{J(\alpha)\ C \Leftrightarrow \alpha\in(-1,1)}$.

$\boxed{\alpha=\frac{1}{2}} \Rightarrow J = \int_0^{1-0} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx$

$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = t \Rightarrow \frac{x}{1-x} = t^2 \Rightarrow \frac{1-x-1}{1-x} = t^2$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{1-x} = t^2 \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1+t^2 \Rightarrow 1-x = \frac{1}{1+t^2}$

$\Rightarrow x = 1-\frac{1}{t^2+1} \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1}$.

$dx = \frac{2t(t^2+1)-2t\cdot t^2}{(t^2+1)^2}dt$, $dx = \frac{2t}{(t^2+1)^2}$

$x=0 \Rightarrow t=0$, $x=1 \Rightarrow t=\frac{1}{0+}=\infty$

$J(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\infty} \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}dt$

$f=t \qquad f'=1$

$g' = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \qquad g = -\frac{1}{t^2+1}$

$J(1/2) = -\frac{t}{t^2+1}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+1}dt =$

$= \lim\limits_{v\to\infty}\left(-\frac{t}{t^2+1}\Big|_0^{v} + \operatorname{arctg} t\Big|_0^{\infty}\right) =$

$= 0 + \pi/2 - 0 = \pi/2$.

④ (funcția Gama) Considerăm integrala improprie

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Dem. că:

a). $\Gamma(\alpha)$ e convergentă, $\forall \alpha > 0$.

$$\Gamma(\alpha) = \underbrace{\int_{0+0}^{1} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \, dx}_{J_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \, dx}_{J_2}$$

J_1: $\dfrac{x^{\alpha-1}}{e^x} < x^{\alpha-1}$ dacă $x \in (0,1]$

$\int_{0+0}^{1} x^{\alpha-1} dx = \dfrac{x^{\alpha}}{\alpha} \Big|_0^1 = \dfrac{1}{\alpha} < \infty$ dacă $\alpha > 0$, deci J_1 convergentă

conform Criteriului Comparației* în care am luat $f(x) = x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx$

și $g(x) = x^{\alpha-1}$.

---

* Criteriul Comparației

$-\infty < a < b \leq +\infty$, $f, g: [a,b) \to [0,\infty)$ fc. pozitive și local integrabile pe $[a,b)$, atunci:

1°) Dacă $\exists c \in [a,b)$ a.î. $f(x) \leq g(x) \; \forall x \in [c,b)$, atunci

i) $\int_a^{b-0} g(x) dx$ convergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x) dx$ convergentă.

ii) $\int_a^{b-0} f(x) dx$ divergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} g(x) dx$ divergentă.

**

J_2: $f: [1,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}$ pozitivă și local integr.

$$\lim_{x\to\infty} x^p \cdot f(x) = \lim_{x\to\infty} x^p \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{p+\alpha-1}}{e^x} \underset{p=2>1}{=}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} \underset{\alpha>0}{=} 0 < \infty \Rightarrow J_2 \text{ convergentă.}$$

$\Rightarrow J_1 + J_2$ convergentă $\Rightarrow \Gamma(\alpha)$ convergentă pt. $\alpha > 0$.

** Dacă $a, p \in \mathbb{R}$, $f: [a, \infty) \to [0, \infty)$ este o fc. pozitivă și local integrabilă pe $[a, \infty)$ și $\exists \lim_{x \to \infty} x^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

i) $p > 1$ și $\lambda < +\infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ convergentă.

ii) $p \leq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergentă.

---

b) $\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^{n+1-1} \cdot e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^n \cdot e^{-x}\,dx \overset{1.c)}{=} n!$$

c) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha), \ \forall \alpha > 0$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \Big[-\frac{x^\alpha}{e^x} \Big|_0^t + \alpha \underbrace{\int_0^t x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\,dx}_{=\Gamma(\alpha)} \Big]$$

$f' = e^{-x}$ $\quad f = e^{-x} \cdot (-1)$

$g = x^\alpha$ $\quad g' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$$= \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{-t^\alpha}{e^t}}_{=0} + 0 + \alpha \cdot \Gamma(\alpha) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

d) $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \overset{c)}{=} \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) \cdot \frac{2n-1}{2} \overset{c)}{=} \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right)$$

$$= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdot \frac{2n-5}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2n-5}{2}\right) = \dots = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdot \frac{2n-5}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

⑤ Exprimați cu ajutorul fc. Γ valoarea următoarelor integrale improprii:

a) $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

$x^2=t \Rightarrow x=\sqrt{t}$ $\qquad$ $x=0 \Rightarrow t=0$

$2x\,dx=dt$ $\qquad$ $x=\infty \Rightarrow t=\infty$

$dx=\frac{1}{2x}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

$$I=\int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}\cdot e^{-t}\,dt =$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

b) $I=\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$

$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ f(-x)=e^{-\frac{1}{2}(-x)^2}=e^{-\frac{1}{2}x^2}\end{array}\right\} \Rightarrow$ fc. pară

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$\frac{x^2}{2}=t \Rightarrow x=\sqrt{2t}$ $\qquad$ $x=0 \Rightarrow t=0$

$x\,dx=dt \Rightarrow dx=\frac{1}{x}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t}}\,dt$ $\qquad$ $x=\infty \Rightarrow t=\infty$

$$I=2\int_0^\infty e^{-t}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cdot t^{1/2}}\,dt=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{-1/2}\,dt=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{\frac{1}{2}-1}\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

c) $I=\int_0^1 (\ln x)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$\ln x=t$ $\qquad$ $x=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln x = t=-\infty$

$x=e^t$

$dx=e^t\,dt$ $\qquad$ $x=1 \Rightarrow t=\ln 1=0.$

$$I=\int_{-\infty}^0 t^{\frac{1}{3}}\cdot e^t\,dt = \int_\infty^0 (-u)^{\frac{1}{3}}\cdot e^{-u}\cdot(-du)=\int_0^\infty (-1)^{1/3}\cdot u^{1/3}\cdot e^{-u}\,du$$

$t=-u$

$dt=-du$

$t=-\infty \Rightarrow u=\infty$

$t=0 \Rightarrow u=0$

$$=-\int_0^\infty u^{4/3-1}\cdot e^{-u}\,du=$$

$$=-\Gamma(4/3)$$