Seminar 4

$\boxed{1.2.16}$ Să se determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $C_{\mathbb{N}}(A)$, $A \times B$, unde:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{3n+5}{n+1} \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ este par și } -2 \le x < 3 \}$$

Soluție:

$$\begin{cases} n+1 \mid 3n+5 \\ n+1 \mid n+1 \quad (\text{reflexivitate})^{1 \cdot 3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 \mid 3n+5 \\ n+1 \mid 3n+3 \end{cases} \quad \ominus$$

$$n+1 \mid 2 \Rightarrow n+1 \in D_2 = \{1, 2\}$$

$$n \in \{0, 1\}$$

$$A = \{0, 1\}$$

$$B = \{-2; 0; 2\}$$

$A \cup B = \{-2; 0; 1; 2\}$

$A \cap B = \{0\}$

$A \setminus B = \{1\}$

$C_{\mathbb{N}}(A) = \mathbb{N} \setminus A$ (complementara lui A în $\mathbb{N}$)

$C_{\mathbb{N}}(A) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

$A \times B = \{(0, -2); (0, 0); (0, 2);$
$(1, -2); (1, 0); (1, 2)\}$

$\boxed{1.2.17}$ Să se determine $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$, $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$

<u>Soluție</u>: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$

$\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}$

$\boxed{1.3.46.}$ Următoarele afirmații sunt echivalente, pentru o funcție $f : A \to B$:

(i) f este injectivă

(ii) $X = f^{-1}(f(X))$ pt. orice submulțime $X \subseteq A$

(iii) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ pt. orice două submulțimi $X_1, X_2 \subseteq A$.

a.) Demonstrați (i) $\Rightarrow$ (ii) și (ii) $\Rightarrow$ (i)

b.) Să se găsească un exemplu care să arate că injectivitatea lui f este necesară pt egalitățile (ii) și (iii).

Soluție: a) Fie $x \in X$

Pentru a arăta că $x \in f^{-1}(f(X))$ este suficient să arătăm $\exists\ x' \in X$ a.î. $x \in f^{-1}(f(x'))$ adică $\exists\ x' \in X$ a.î. $f(x) = f(x')$ (alegem $x = x'$) (1)

"$\Longrightarrow$" $\underline{x' \in f^{-1}(f(X))}$

$\Longrightarrow f(x') \in f(X)$

$\Longrightarrow \exists\ x \in X$ a.î. $f(x') = f(x)$

$\Longrightarrow \underline{x' \in X}$

Deci, $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow f^{-1}(f(X)) = X$

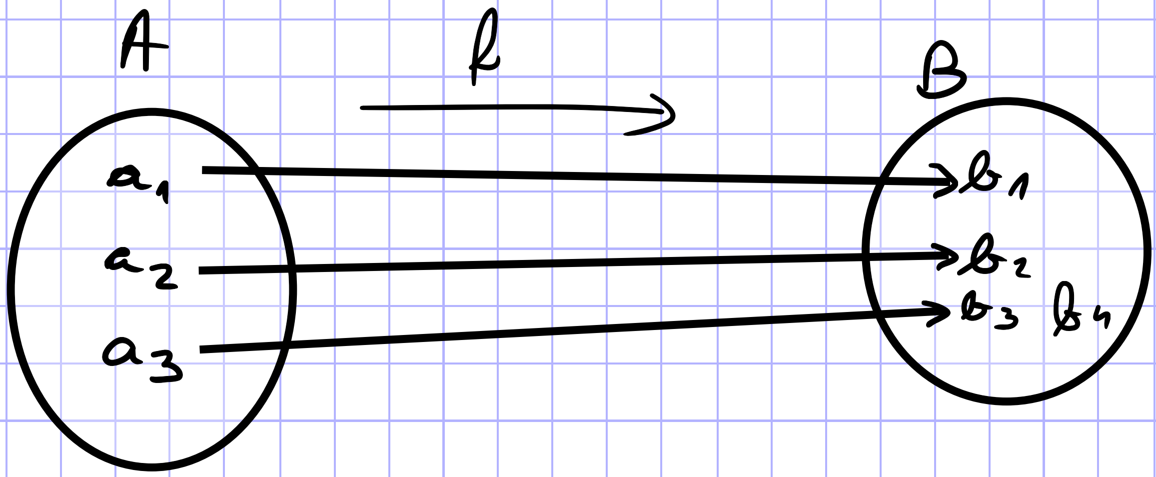
"$\Longleftarrow$" Fie $f^{-1}(f(X)) = X$

Fie $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$

Atunci, $\underline{\underline{x_1}} \in f^{-1}(f(\{x_2\})) = \underline{\underline{\{x_2\}}}$

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \Rightarrow f$ este injectivă

b) • f injectivă



$f: \{a_1, a_2, a_3\} = A \to \{b_1, b_2, b_3, b_4\} = B$

$$\left.\begin{array}{l} f(a_1) = b_1 \\ f(a_2) = b_2 \\ f(a_3) = b_3 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ injectivă}$$

$X = \{a_1, a_2\}, \quad X \subseteq A$

(ii) $f(C) = \{y \in B \mid \exists\, x \in C : f(x) = y\}$

$f: A \to B, \quad C \subseteq A$

$\forall\; D \subseteq B, \quad f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$

$f(X) = f(\{a_1, a_2\}) = \{b_1, b_2\}$

$$f^{-1}(\{b_1, b_2\}) = \{a_1, a_2\} = X$$

(iii): $X_1 = \{a_1\}$

$X_2 = \{a_1, a_3\}$

$$X_1 \cap X_2 = \{a_1\}$$

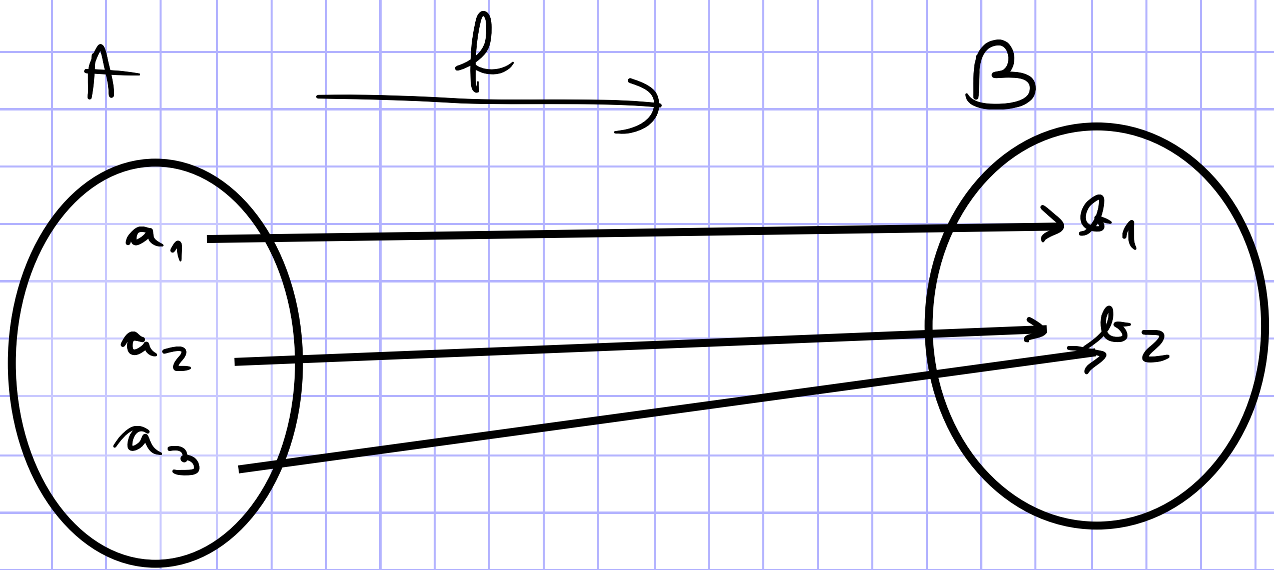
$$f(X_1 \cap X_2) = f(\{a_1\}) = \{b_1\}$$

$$f(X_1) \cap f(X_2) = f(\{a_1\}) \cap f(\{a_1, a_3\})$$

$$= \{b_1\} \cap \{b_1, b_3\} = \{b_1\}$$

$$\Rightarrow f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$$

• f <u>nu</u> este injectivă



$$f : \{a_1, a_2, a_3\} = A \to \{b_1, b_2\} = B$$

$$f(a_1) = b_1 \quad , \quad f(a_2) = f(a_3) = b_2$$

$\Rightarrow$ f nu este injectivă

(ii) $X = \{a_1, a_2\}$

$f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(f(\{a_1, a_2\})) =$

$= f^{-1}(\{b_1, \underline{\underline{b_2}}\})$ nu există

(iii) $X_1 = \{a_1, a_2\}, X_2 = \{a_3\}$

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$f(\emptyset) = \emptyset$

$f(X_1) = f(\{a_1, a_2\}) = \{b_1, b_2\}$

$f(X_2) = f(\{a_3\}) = \{b_2\}$

$\Rightarrow f(X_1) \cap f(X_2) = \{b_2\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ inj. lui f este necesară pt (ii) și (iii)

$\boxed{1.3.51.}$ Fie B o mulțime cu $|B| = m$. Să se determine numărul tuturor submulțimilor lui B cu n elemente.

<u>Soluție</u>: $f : \underbrace{\{1, \ldots, n\}}_{:= A} \to B$ funcție injectivă

$$C = \operatorname{Im} f \subseteq B$$
$$\operatorname{Im} f = \{f(1); \ldots; f(n)\}$$

Câte funcții injective $f : A \to B$ există cu $\operatorname{Im} f = C$

$\Longleftrightarrow$ f bij. $\Longrightarrow$ $n!$ funcții

Atunci mulțimea submulțimilor $C \subseteq B$ cu n elemente:

$$\frac{A_m^n}{n!} = \begin{cases} \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}, & n \le m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} C_m^n , & n \le m \\ 0 , & n > m \end{cases}$$

$\boxed{1.3.58.}$ Se consideră operația $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $x * y = xy + 2ax + by$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $*$ să fie asociativă și comutativă.

<u>Soluție</u>: $x * y = xy + 2ax + by =$

$= x(y+2a) + by + 2ab - 2ab$

$= x(y+2a) + b(y+2a) - 2ab$

$= (x+b)(y+2a) - 2ab$

$*$ asociativă $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

$*$ comutativă $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x * y = y * x$

$$x * y = (x+b)(y+2a) - 2ab$$

$$y * x = (y+b)(x+2a) - 2ab$$

$$x * y = y * x \iff (x+b)(y+2a) - \cancel{2ab} = (y+b)(x+2a) - \cancel{2ab} =$$

$$\Rightarrow (x+b)(y+2a) = (x+2a)(y+b)$$

$$\Rightarrow 2a = b$$

$$\Rightarrow x * y = (x+b)(y+b) - b^2$$

$$(x*y)*z = [(x+b)(y+b) - b^2] * z =$$

$$= [(x+b)(y+b) - b^2 + b](z+b) - b^2$$

$$= \underline{(x+b)(y+b)(z+b)} + (b-b^2)(z+b) \underline{- b^2}$$

$$x*(y*z) = x * [(y+b)(z+b) - b^2] =$$

$$= (x+b)[(y+b)(z+b) - b^2 + b] - b^2$$

$$= \underline{(x+b)(y+b)(z+b)} + (b-b^2)(x+b) \underline{- b^2}$$

$$(x*y)*z = x*(y*z) \iff$$

$$\iff (b-b^2)(z+b) = (b-b^2)(x+b)$$

$$(b-b^2)(z + \cancel{b} - x - \cancel{b}) = 0$$

$$(b-b^2)(z-x)=0 \quad , \forall x,z\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow b=b^2 \Rightarrow b\in\{0,1\}$$

$$b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow x*y=xy$$

$$b=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow x*y=xy+x+y$$