Seminar 2

Aplicații

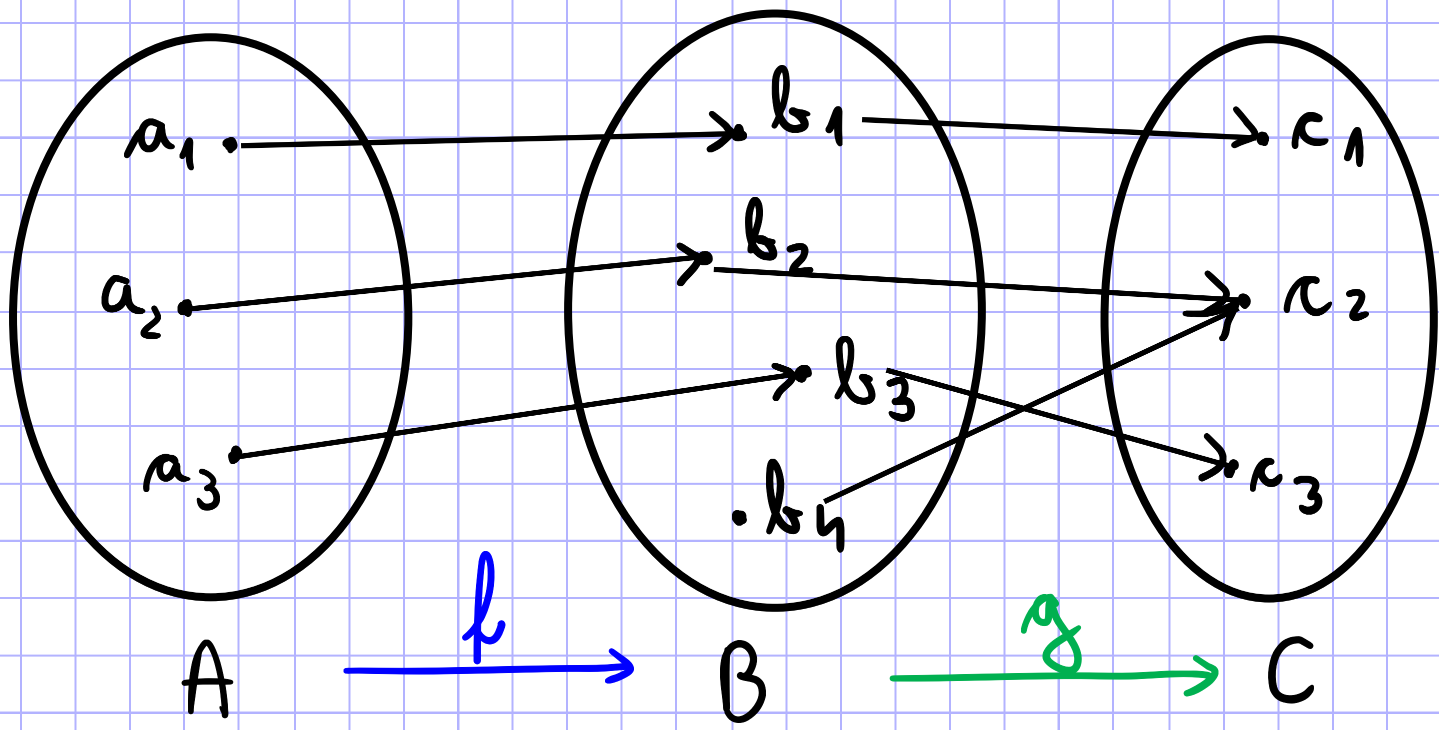
$\boxed{1.3.44.}$ Să se găsească un exemplu care constă din două funcții $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, așa încât:

(1) $g \circ f$ este injectivă, dar g nu este injectivă

(2) $g \circ f$ este surjectivă, dar f nu este surjectivă

(3) $g \circ f$ este bijectivă, dar g nu este injectivă și f nu este surjectivă.

Soluție: (1), (2) (temă)



$g \circ f : A \to C$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ este bijectivă

<u>Observație</u>: Dacă $C = A$, atunci

$g \circ f : A \to A \ (= C)$

$(g \circ f)(x) = x \quad , \ \forall \ x \in A$

- g este inversa la stânga a funcției f
- f este inversa la dreapta a funcției g

Propoziția 1

Fie $f : A \to B$ o funcție, $A \neq \emptyset$.
Următoarele afirmații sunt echivalente (UASE):

(i) f este injectivă

(ii) f are o inversă la stânga, adică $\exists\, g : B \to A$, a.î. $g \circ f = 1_A$.

(iii) f este simplificabilă la stânga, adică dacă $h_1, h_2 : A' \to A$, atunci

$$f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$$

Propoziția 2

Fie $g : B \to A$ o funcție. UASE:

(i) g este surjectivă

(ii) g are o inversă la dreapta, adică $\exists\, f : A \to B$

a.î. $g \circ f = 1_A$.

(iii) g este simplificabilă la dreapta, adică dacă $k_1, k_2 : A \to A'$, atunci $k_1 \circ g = k_2 \circ g \Rightarrow k_1 = k_2$

$\boxed{1.3.48}$ Fie A și B două mulțimi finite cu $|A| = n$, $|B| = m$. Să se determine $|B^A|$.

Soluție: $\boxed{M_I}$ $B^A = \{ f : A \to B \mid f \text{ este funcție} \}$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$f(a_1) \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$
$\Rightarrow$ m posibilități

$f(a_2) \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$
$\Rightarrow$ m posibilități

$\vdots$

$f(a_n) \in B = \{b_1, \dots, b_m\}$

$\Rightarrow$ <u>m posibilități</u>

$$\Rightarrow \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{de } n \text{ ori}} = m^n \text{ funcții}$$

$$|B^A| = m^n$$

$\boxed{M_{II}}$

$$\begin{array}{ccccc}
X & a_1 & a_2 & \cdots & a_n
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc}
f_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\
f_2 & b_2 & b_1 & \cdots & b_1 \\
f_3 & b_3 & b_1 & \cdots & b_1 \\
\vdots & \vdots & & & \\
f_m & b_m & b_1 & \cdots & b_1
\end{array}\right\} m$$

$$\left.\begin{array}{ccccc}
f_{m+1} & b_1 & b_2 & \cdots & b_1 \\
f_{m+2} & b_2 & b_2 & \cdots & b_1 \\
\vdots & & & & \\
 & b_m & b_2 & \cdots & b_1
\end{array}\right\} m$$

$\vdots$

$\underbrace{B \times B \times \dots \times B}_{n \text{ de ori}} \Rightarrow m^n$ posibilități,

$|B^A| = |B|^{|A|}$

$\boxed{1.3.49}$ Fie A și B mulțimi finite cu $|A| = n$ și $|B| = m$. Determinați numărul tuturor funcțiilor injective de la A la B.

Soluție: $inj(A,B) = \{ f \in B^A \mid f \text{ inj} \}$

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

$f(a_1) \in B \Rightarrow$ $\underline{m \text{ posibilități}}$,

$f(a_2) \in B \setminus \{f(a_1)\} \Rightarrow$ $\underline{m-1 \text{ posibilități}}$,

$\vdots$

$f(a_n) \in B \setminus \{f(a_1), \dots, f(a_{n-1})\}$

$\Rightarrow m - (n-1) = \underline{m-n+1}$

posibilități

Total: $m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}, & n \le m \\ 0, & n > m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} A_m^n, & n \le m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

$\boxed{1.3.50}$ Fie A o mulțime finită cu $|A| = n$. Să se determine numărul tuturor funcțiilor bijective $f: A \to A$ (adică numărul tuturor permutărilor lui A)

Soluție: $f: A \to A$ bijectivă

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$\Rightarrow f$ injectivă $\Rightarrow A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} =$

$= \dfrac{n!}{0!} = n!$ (permutări)

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$\boxed{1.3.52}$ Să se arate că:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$$

Soluție: Fie B o mulțime

$\mathcal{P}(B)$ = mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii B (mulțimea părților mulțimii B)

$|\mathcal{P}(B)| = 2^n$, unde $|B| = n$

Combinările numără submulțimile unei mulțimi în funcție de cardinalul lor. Mai precis, suma combinărilor de n luate câte k $(0 \leq k \leq n)$, este egală cu numărul total de submulțimi ale unei mulțimi de cardinal m.

$$\Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i} = 2^m$$

Regula produsului

Dacă un obiect A poate fi ales în m moduri și dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B), în această ordine, poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

$\boxed{1.3.53.}$ (Principiul includerii și al excluderii)

Fie $A_1, A_2, \dots, A_n$ mulțimi

finite, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| -$$

$$- \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| -$$

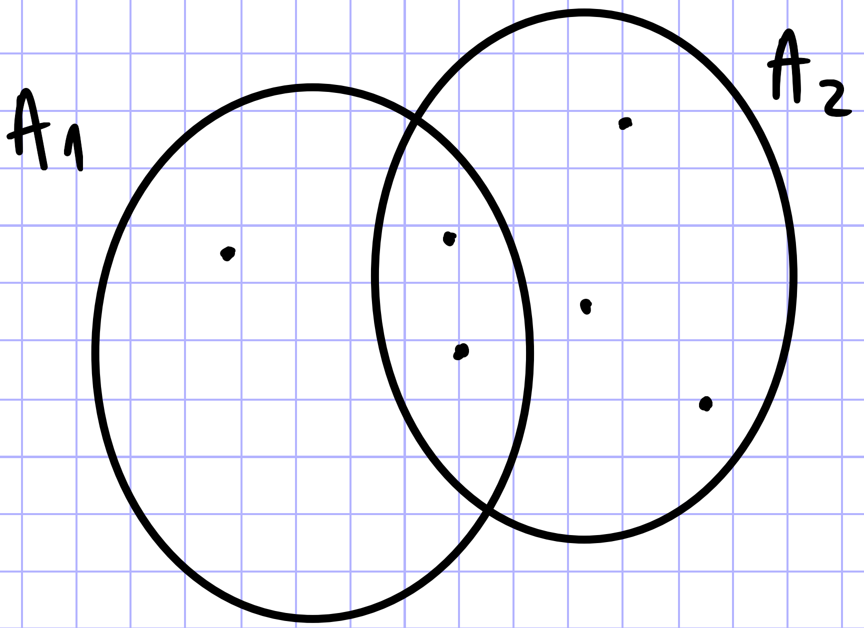
$$- \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cup A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cup A_j \cup A_k|$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

Soluție: (reuniune)

Caz particular: $n = 2$

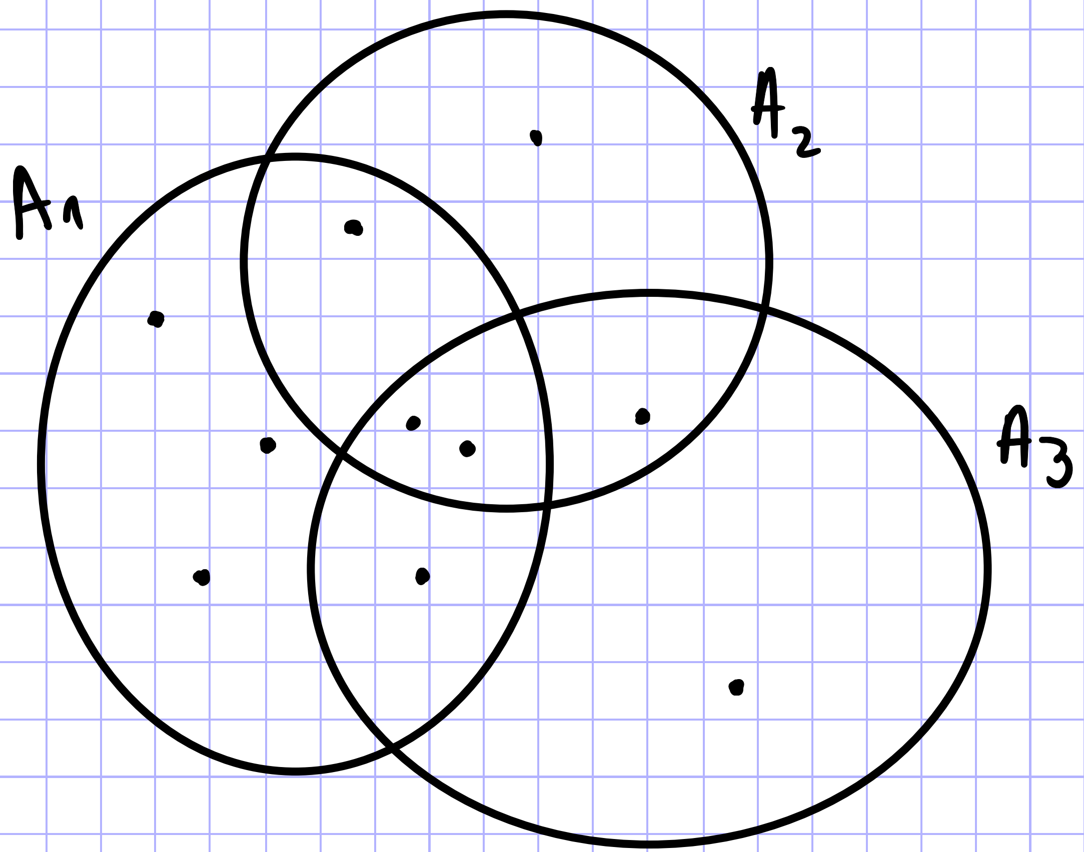
$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



$$|A \cup A_2| = 3 + 5 - 2 = 6 \quad \checkmark$$

$n = 3$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$



$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 7 + 5 + 5 - 3 - 3 - 3$
$+ 2 = 10$ ✓

(temă)

$\boxed{1.3.54}$ Fie A și B mulțimi, cu $|A| = n$ și $|B| = m$. Să se găsească nr. tuturor funcțiilor surjective $f: A \to B$.

Soluție: Numărăm mulțimile care nu sunt surjective și le scădem din $|B^A|$.

$S_1 = \{ f: A \to B \mid b_1 \notin \operatorname{Im} f \}$

$\Rightarrow |S_1| = (m-1)^n$

$S_2 = \{ f: A \to B \mid b_2 \notin \operatorname{Im} f \}$

$\Rightarrow |S_2| = (m-1)^n$

...

$S_m = \{ f: A \to B \mid b_m \notin \operatorname{Im} f \}$

$\Rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^{m} S_i \right|$ și folosim 1.3.53.