Seminarul 9

① Fie $x=(1,0,-1)$, $y=(3,-1,1)\in\mathbb{R}^3$. Calculați: $x+y$, $x\cdot y$, $\|-2y\|$, $\|x-y\|$.

Fie $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Avem:

1) $x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$

2) $\alpha\cdot x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

3) $x\cdot y=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\dots+x_n\cdot y_n\in\mathbb{R}$, $x\cdot y=y\cdot x$.

4) $\|x\|=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$, $\boxed{x\cdot x=\|x\|^2}$

$x+y=(4,-1,0)$

$x\cdot y=1\cdot 3+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=2$

$\|-2y\|=\|(-6,2,-2)\|=\sqrt{(-6)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

$\|x-y\|=\|(-2,1,-2)\|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

② Fie $x,y\in\mathbb{R}^n$ și $a=x\cdot y$, $b=\|x\|$, $c=\|y\|$. Exprimați următoarele mărimi în fc. de a,b,c:

a) $(x+y)\cdot y=x\cdot y+y\cdot y=a+\|y\|^2=a+c^2$

b) $x\cdot(2x-y)=2x\cdot x-xy=2\cdot\|x\|^2-a=2b^2-a$

c) $\|x-y\|=\sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}=\sqrt{x\cdot x-2xy+y\cdot y}=$

$=\sqrt{\|x\|^2-2xy+\|y\|^2}=\sqrt{b^2-2a+c^2}$

③ Fie $x, y \in \mathbb{R}^m$. Dem. identitatea paralelogramului:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y)(x+y) + (x-y)(x-y) =$$

$$= x\cdot x + \cancel{2\cdot x\cdot y} + y\cdot y + x\cdot x - \cancel{2xy} + y\cdot y =$$

$$= 2\cdot x\cdot x + 2\cdot y\cdot y = 2\cdot\|x\|^2 + 2\cdot\|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

④ Det. int A, fr A, precum și dacă A e mulțime deschisă, resp. mulțime închisă.

a) $A = B(0_2, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$

$B(0_2, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - 0_2\| < 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$

(bila deschisă de centru 0_2 și rază 1)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ o mulțime nevidă.

a) $\text{int}\, A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subseteq A\}$

↳ interiorul lui A

b) $\text{fr}\, A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ și } B(x,r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset\}$

↳ frontiera lui A

c) A = mult. deschisă dacă $\forall x \in A, \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$.

d) A = mult. închisă dacă $\mathbb{R}^m \setminus A$ este deschisă.

* $B(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^0\| < r\}$ (bila deschisă de centru x^0 și rază r)

* $\overline{B}(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^0\| \leq r\}$ (bila închisă de centru x^0 și rază r)

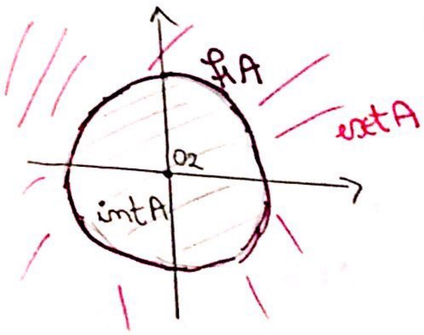
Obs:

$\text{fr}\, A = \mathbb{R}^m \setminus (\text{int}\, A \cup \text{ext}\, A)$

$\text{ext}\, A = \text{int}(\mathbb{R}^m \setminus A)$

A deschisă $\Leftrightarrow A \cap \text{fr}\, A = \emptyset$

② A închisă $\Leftrightarrow \text{fr}\, A \subseteq A$.



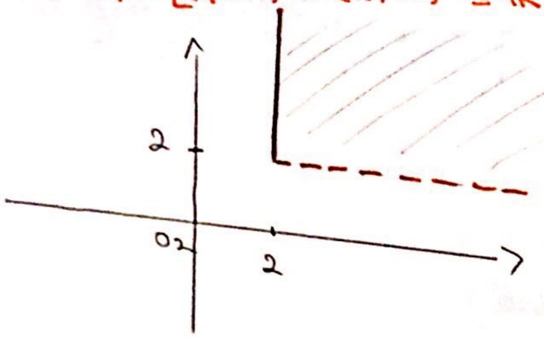
$A = B(O_2, 1)$

$\text{int}\, A = B(O_2, 1)$.

$\text{Fr}\, A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$

$A \cap \text{Fr}\, A = \emptyset \Rightarrow A$ deschisă

b) $A = [2, \infty) \times (2, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2$

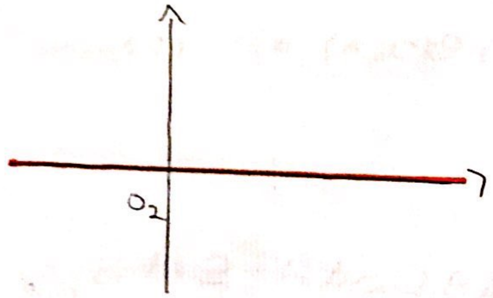


$\text{int}\, A = (2, \infty) \times (2, \infty) \overset{\text{not.}}{=} (2, \infty)^2$

$\text{Fr}\, A = (\{2\} \times [2, \infty)) \cup ([2, \infty) \times \{2\})$

$\left.\begin{array}{l} A \cap \text{Fr}\, A \neq \emptyset \\ \text{Fr}\, A \not\subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow$ A nu e nici deschisă, nici închisă.

c) $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$\text{int}\, A = \emptyset$

$\text{Fr}\, A = A$

$A \cap \text{Fr}\, A = A \neq \emptyset$

$\text{Fr}\, A = A \subseteq A \Rightarrow A$ închisă

d) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$\text{int}\, A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$\text{Fr}\, A = \mathbb{Z}$

$A \cap \text{Fr}\, A = \emptyset \Rightarrow A$ deschisă

$(\text{int}\, \mathbb{Z} = \emptyset)$

5 $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ nevidă, au loc afirmațiile:

a) $\text{int}\, A \subseteq A$

Fie $x \in \text{int}\, A$. $\Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$
Cum $x \in B(x, r)$ $\Big\} \Rightarrow x \in A$, deci $\text{int}\, A \subseteq A$.

b) $\mathrm{int}\, A \cap \mathrm{fr}\, A = \emptyset$

Pp. prin absurd că $\exists x \in \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{fr}\, A$.

Cum $x \in \mathrm{int}\, A \Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x,r) \subseteq A$, deci

$$B(x,r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) = \emptyset \quad (1)$$

Cum $x \in \mathrm{fr}\, A \Rightarrow \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ și $B(x,r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$ contrad., deci $\mathrm{int}\, A \cap \mathrm{fr}\, A = \emptyset$.

c) $A \subseteq \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{fr}\, A$ (cu "=" dacă A închisă)

Fie $x \in A$.

Pp. că $x \notin \mathrm{int}\, A$. $\Rightarrow \forall r > 0, B(x,r) \not\subseteq A \Rightarrow \forall r > 0, B(x,r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$. (1)

Cum $x \in A$ și $x \in B(x,r), \forall r > 0 \Rightarrow A \cap B(x,r) \neq \emptyset$ (2)

$\Rightarrow x \in \mathrm{fr}\, A$.

* Dacă A închisă $\Rightarrow \mathrm{fr}\, A \subseteq A$

Totodată $\mathrm{int}\, A \subseteq A$ $\Big\} \Rightarrow \mathrm{fr}\, A \cup \mathrm{int}\, A \subseteq A$,

deci $A = \mathrm{fr}\, A \cup \mathrm{int}\, A$.

d) $\mathrm{int}\, A \cup \mathrm{fr}\, A \cup \mathrm{int}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathbb{R}^m$

$\mathrm{fr}\, A = \mathbb{R}^m \setminus (\mathrm{int}\, A \cup \mathrm{ext}\, A) = \mathbb{R}^m \setminus (\mathrm{int}\, A \cup \mathrm{int}(\mathbb{R}^m \setminus A))$

$\mathrm{int}\, A \cup \mathrm{fr}\, A \cup \mathrm{int}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{int}(\mathbb{R}^m \setminus A) \cup [\mathbb{R}^m \setminus (\mathrm{int}\, A \cup \mathrm{int}(\mathbb{R}^m \setminus A))]$

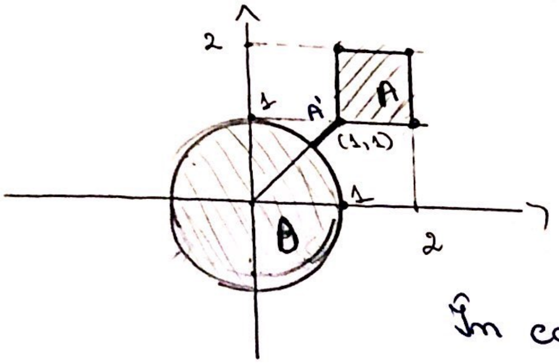
$= \mathbb{R}^m$.

⑥ Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ mulț. nevide. Nr. real

$$d(A,B) = \inf\{\|x-y\| : x\in A, y\in B\}$$

s.n. distanța dintre mulț. A și B.

a) Det. ~~mu~~ distanța dintre $A=[1,2]^2$ și $B=B(0_2,1)$.

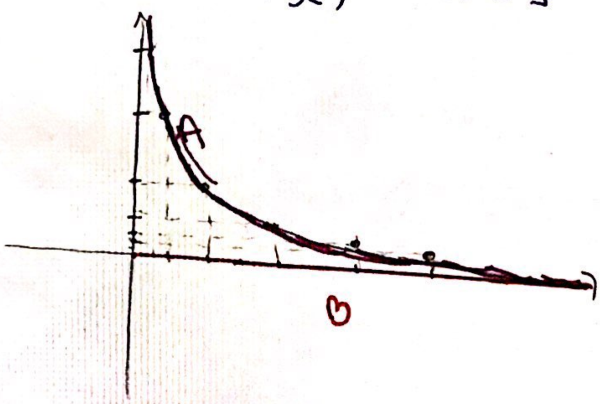


Dist. minimă de la un pct. P la un cerc situat în origine, de rază R este $|OP - R|$

În cazul nostru, $d(A,B) = OA' - 1 = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} - 1$
$= \sqrt{2} - 1$.

b) Dați exemplu de 2 mulțimi nevide $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ cu $A\cap B = \emptyset$ și $d(A,B)=0$.

Fie $A = \{(x, \frac{1}{x}) : x>0\}$ și $B=\{(x,0) : x>0\}$



$A\cap B = \emptyset$, dar

când $x\to\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$

$\inf\{\|x-x, \frac{1}{x}-0\|\} =$

$\inf\{\|(0,\frac{1}{x})\|\} = 0$