Seminar 1

• O funcție (aplicație) este un triplet (A, B, f), unde A și B sunt mulțimi oarecare, iar f este lege de corespondență a.î. fiecărui element din A îi corespunde un singur element din B.

A = domeniu de definiție

B = codomeniu

$f: A \to B$

• Funcția $f: A \to B$ se numește injectivă dacă:

$\forall\ x_1, x_2 \in A$ a.î. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Observație: f inj $\Rightarrow \forall\ x_1, x_2 \in A$

și $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

• Funcția $f: A \to B$ se numește **surjectivă** dacă:

$\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A$ a.î. $f(x) = y$

• Funcția $f: A \to B$ se numește **bijectivă** dacă este injectivă și surjectivă.

$\forall\, y \in B,\ \exists!\, x \in A$ a.î. $f(x) = y$

$\Leftrightarrow\ \exists\ f^{-1}: B \to A,\ f^{-1}(y) = x$

(inversa există)

Aplicații

$\boxed{1.3.35.}$ Fie funcțiile:

(1) $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2$

(2) $f_2: [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2$

(3) $f_3: \mathbb{R} \to [0, \infty),\ f_3(x) = x^2$

(4) $f_4: [0, \infty) \to [0, \infty),\ f_4(x) = x^2$

Să se studieze pt. fiecare dintre

ele inj., surj., bij. În cazul existenței inversei, să se determine aceasta.

<u>Soluții</u>: (1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_1 \neq x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(x_1) = f_1(x_2)$$

$\Rightarrow f_1$ nu este inj.

$y = -1 \in \mathbb{R}$ (codomeniu)

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 > 0$

$\Rightarrow f_1$ nu este surj.

(2) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$

$f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$$\left.\begin{array}{l} |x_1| = |x_2| \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f_2$ inj.

$$\left.\begin{array}{l} y = -1 \in \mathbb{R} \\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_2 \text{ nu este surj.}$$

(3) $f_3 : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f_3(x) = x^2$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_1 \neq x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f_3(x_1) = f_3(x_2)$$

$\Rightarrow f_3$ nu este inj.

$\forall\, y \in [0,\infty)$, $\exists\, x = \pm\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ a.î. $f_3(x) = y$

$\Rightarrow f_3$ este surj.

(4) $f_4 : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f_4(x) = x^2$

$\exists\, f_4^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f_4^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$\Rightarrow f_4$ bij. și inversabilă

$\boxed{1.3.36.}$ Aceeași cerință ca și 1.3.35 pt. funcțiile:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ -x+2, & x > 0 \end{cases}$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$

Soluție: (1) $f'(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, 1) \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$

$f'(1) \nexists$

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 3 = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$f(x) = y \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = y, & x \in (-\infty, 1] \\ x + 2 = y, & x \in (1, \infty) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & \frac{y-1}{2} \leq 1 \\ x = y - 2, & y - 2 > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & y \leq 3 \\ x = y - 2, & y > 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & y \in (-\infty, 3] \\ x = y - 2, & y \in (3, +\infty) \end{cases}$

$(-\infty, 3] \cup (3, \infty) = \mathbb{R} \Rightarrow f$ surj.

$\left. \begin{array}{l} (-\infty, 3] \cap (3, \infty) = \emptyset \\ \text{(sol. unică pe ramură)} \end{array} \right\} \Rightarrow$

f este inj.

(2) temă

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$

$f((0,\infty)) = (2,\infty)$

$f((-\infty, 0]) = (-\infty, 1)$

$\operatorname{Im} f = (2,\infty) \cup (-\infty, 1] = \mathbb{R} \setminus (1, 2]$

$\Rightarrow$ f nu este surj.

$(2,\infty) \cap (-\infty, 0) = \emptyset \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 \in [0,\infty) \\ x_2 \in (-\infty, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f inj

Compunerea funcțiilor

$f : A \to \underline{B}$, $g : \underline{B} \to C$

$g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall\, x \in A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

$\boxed{1.3.37}$ Să se precizeze dacă următoarele compuneri $f\circ g$, $g\circ f$ sunt definite, și în caz afirmativ, să se determine funcția compusă:

(1) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \le -1 \\ x-1, & x > -1 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 3 \\ x-2, & x \ge 3 \end{cases}$$

(2) $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) = |x|$ și

$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

(3) $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2+1$ și

$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$

<u>Soluție:</u> (1) $g\circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -f(x)+1, & f(x) < 3 \\ f(x)-2, & f(x) \ge 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x^2+1+1, & x^2-1<3 \text{ și } x \le -1 \\ -x+1+1, & x-1<3 \text{ și } x > -1 \\ x^2-1-2, & x^2-1 \ge 3 \text{ și } x \le -1 \\ x-1-2, & x-1 \ge 3 \text{ și } x > -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x^2+2, & x^2<4 \text{ și } x \le -1 \\ -x+2, & x<4 \text{ și } x > -1 \\ x^2-3, & x^2 \ge 4 \text{ și } x \le -1 \\ x-3, & x \ge 4 \text{ și } x > -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x^2+2, & x \in (-2,2) \cap (-\infty,-1] \\ -x+2, & x \in (-\infty,4) \cap (-1,+\infty) \\ x^2-3, & x \in \left((-\infty,-2] \cup [2,\infty)\right) \cap (-\infty,-1] \\ x-3, & x \in [4,+\infty) \cap (-1,+\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^2+2, & x \in (-2,-1] \\ -x+2, & x \in (-1,4) \\ x^2-3, & x \in (-\infty,-2] \\ x-3, & x \in [4,+\infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2-3, & x \le -2 \\ -x^2+2, & -2 < x \le -1 \\ -x+2, & -1 < x < 4 \\ x-3, & x \ge 4 \end{cases}$$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \circ g = f(g(x)) =$

$$= \begin{cases} g^2(x) - 1, & g(x) \le -1 \\ g(x) - 1, & g(x) > -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (-x+1)^2 - 1, & -x+1 \le -1 \text{ şi } x < 3 \\ (x-2)^2 - 1, & x-2 \le -1 \text{ şi } x \ge 3 \\ -x+1-1, & -x+1 > -1 \text{ şi } x < 3 \\ x-2-1, & x-2 > -1 \text{ şi } x-2 \ge 3 \end{cases}$$

$= \ldots\ldots$

(2) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = |x|$

$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

$\mathbb{N}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} [0, \infty)$

$\Longrightarrow \exists\ f \circ g : \mathbb{N}^* \to [0, \infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left|\frac{1}{x}\right| \underset{x \in \mathbb{N}^*}{=} \frac{1}{x}$$

$\nexists \; g \circ f$

(3) temă