LUCRARE SCRISĂ

VAR. A (POZA 1)

1. a) * spațiu vectorial: un triplet format din

   1. un corp comutativ $(K,+,\cdot)$

      ex.: $(\mathbb{R},+,\cdot)$

   2. un grup abelian $(V,+)$

      ex.: $(\mathbb{R},+)$

   3. o operație externă $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (înmulțirea cu scalari)

   ce respectă 4 axiome
   $$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$
   $$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta y$$
   $$1\cdot x=x$$
   $$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x$$

   $\mathbb{R}$ este parte stabilă față de $\cdot \Leftrightarrow \alpha x\in\mathbb{R}\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}$

* vectori liniar independenți: se definesc sub forma $v=[v_1,\dots,v_m]$ și satisfac relația : pt. $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_mx_m=0 \Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_m=0$

  unde $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ sunt scalari

  ex.: $v=[(1)]$ în $\mathbb{R}$ - sp. vec. peste $\mathbb{R}$

  $v=[(1,0),(0,1)]$ în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ - sp. vec. peste $\mathbb{R}$

  în rap. cu + vectorilor și $\cdot$ cu scalari

* dimensiunea unui spațiu vectorial: numărul de elemente dintr-o bază a spațiului (toate au aceleași nr. de elemente)

  ex.: $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}=1$ pentru că $\langle 1\rangle=\{\alpha\cdot 1 / \alpha\in\mathbb{R}\}=0$

  $\{1\}$ - liniar independent

b) lema lui Steinitz

fie v, w două sisteme de vectori din V

$v = [v_1, \dots, v_n]$ $v \in V^{n \times 1}$

$w = [w_1, \dots, w_m]$ $w \in V^{m \times 1}$

dacă v - liniar independent și $\langle w \rangle = V \Rightarrow n \leq m$

c) $b \overset{?}{-}$ bază în $\mathbb{R}^3$

$b = ((1,0,1), (-2,1,3), (-4,1,2))^t$

b - bază în $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow [b]_e$ - inversabilă, unde e - bază în $\mathbb{R}^3$

$e = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

$$|[b]_e| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{matrix} = \cancel{2} - \cancel{2} + 0 + 4 - 3 - 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{inversabilă} \Rightarrow b \text{ - bază în } \mathbb{R}^3$$

2. a) intersecția a 2 subsp. ale unui spațiu este un subspațiu

1. $\left.\begin{matrix} 0 \in U \\ 0 \in V \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \in U \cap V$

2. dacă $\left.\begin{matrix} x, y \in U \cap V \\ \alpha, \beta \in k \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha x + \beta y \in U \cap V$

$\left.\begin{matrix} x, y \in U \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U \\ x, y \in V \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V \cap U$

$\Rightarrow U \cap V$ - subspațiu

b) $b = [b_1, \dots, b_m]^t$

dacă bază $b \Rightarrow \forall x \in V \ \exists [\alpha_1, \dots, \alpha_m] \in k$ - unic pt. care

$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m = x$

b - bază => liniar independent
generează V

unicitate fie $[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ și $[\alpha_1', \dots, \alpha_m']$ pt. care $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m = x$
$\alpha_1' b_1 + \dots + \alpha_m' b_m = x$
$\Downarrow ?$
$\alpha_1 = \alpha_1', \dots, \alpha_m = \alpha_m'$

$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m = \alpha_1' b_1 + \dots + \alpha_m' b_m$

$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1 - \alpha_1') b_1 + \dots + (\alpha_m - \alpha_m') b_m = 0 \\ b \text{ - bază}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha_1 - \alpha_1' = 0 \\ \vdots \\ \alpha_m - \alpha_m' = 0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha_1 = \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_m = \alpha_m'\end{array}$

existența știm pentru că b generează V

c) $f \in Hom_k(V, W)$
$[x_1, \dots, x_k]$ - bază în Ker f
$[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m]$ - bază în V
arătați că $[f(x_{k+1}), \dots, f(x_m)]$ - bază în Im f
bază <=> liniar independentă
generează Im f

① liniar independentă

$\alpha_{k+1} \cdot f(x_{k+1}) + \dots + \alpha_m \cdot f(x_m) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0$

$\left.\begin{array}{l} f(\alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_m x_m) = 0 \\ \ker f = \{x \in V \mid f(x) = 0\}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_m x_m \in \ker f$

$\Rightarrow \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_m x_m = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$ (comb. lin cu elem. din baza lui ker f)

$\Rightarrow (-\beta_1) x_1 + \dots + (-\beta_k) x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_m x_m = 0$ (comb lin. cu elem din baza lui V)

$\Rightarrow -\beta_1 = \dots = -\beta_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0 \Rightarrow$ vectorul nostru e lin ind.

② generează $\operatorname{Im} f$

$\langle f(x_{k+1}), \dots, f(x_n) \rangle = \operatorname{Im} f$ (egalitate de mulțimi $\Rightarrow$ dublă implicație)

"$\subseteq$" evidentă

"$\supseteq$" $\operatorname{Im} f \subseteq \langle f(x_{k+1}), \dots, f(x_n) \rangle$

$y \in \operatorname{Im} f$ dacă $\exists x \in V : f(x) = y$

$x \in V \Rightarrow x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$

$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \dots + \alpha_n x_n) = y$

$f(\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k}_{\in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0}) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) + \dots \quad = y$

$\Rightarrow \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(x_n) = y$

$\Rightarrow y$ - comb lin de elem din $[f(x_{k+1}), \dots, f(x_n)]$

$\Rightarrow$ .... generează $\operatorname{Im} f$

din ① și ② $\Rightarrow [f(x_{k+1}), \dots, f(x_n)]$ - bază în $\operatorname{Im} f$

3. $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 = -x_1 + x_2 + x_3\}$

a) $S, T \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ și $S \oplus T = \mathbb{R}^3$

$S \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$

① $0 \in S$ $\exists (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ a.î. $0 - 0 + 0 = 0 \in S$

② $\left.\begin{matrix} x, y \in S \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) \in S$

$\Leftrightarrow (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \in S$

$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 = 0 \\ x, y \in S \end{cases} \Rightarrow \alpha(\underbrace{x_1 - x_2 + x_3}_{\in S}) + \beta(\underbrace{y_1 - y_2 + y_3}_{\in S}) = 0$

$\Rightarrow \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ ✓

$T \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$

① $0 \in T \quad \exists (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ a.î. $2 \cdot 0 - 0 + 0 = -0 + 0 + 0 = 0 \in T$

② $\left.\begin{matrix} x, y \in T \\ \alpha, \beta \in T \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) \in T$

$\Leftrightarrow (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \in T$

$2(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + \alpha x_3 + \beta y_3 = 0$

$\alpha(2x_1 - x_2 + x_3) + \beta(2y_1 - y_2 + y_3) = 0$

$\Rightarrow = 0 \qquad \Rightarrow = 0$

$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ „A" $\Rightarrow \alpha x + \beta y \in T$

$S \oplus T = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{matrix} S + T = \mathbb{R}^3 \\ S \cap T = \{0\} \end{matrix}$

$\underline{S \cap T = \{0\}}$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$\begin{cases} x \in S \\ x \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ sol. unică

$x = (0,0,0)$ - soluție a sistemului $\Rightarrow (0,0,0)$ - unică soluție

$\Rightarrow S \cap T = \{0\} \Rightarrow \dim S \cap T = 0$

$\underline{S + T = \mathbb{R}^3}$

① $x = (x_1, x_2, x_3) \in S \Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$

căutăm o bază în S $\quad x_3 = x_2 - x_1 \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_2 - x_1) \in S \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, x_2 - x_1) = (x_1, 0, -x_1) + (0, x_2, x_2) = x_1(1,0,-1) + x_2(0,1,1)$

↓
vector

vrem $[(1,0,-1),(0,1,1)]$ - bază în S $\Rightarrow \begin{cases} \text{generează } S \checkmark \text{ (de la asta am pornit)} \\ \text{liniar ind} \end{cases}$

liniar ind:

$$\alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(0,1,1) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \end{cases} \checkmark$$

$\Rightarrow [(1,0,-1), (0,1,1)]$ - bază în $S \Rightarrow \dim S = 2$

② $x \in T \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in T$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_2 - 2x_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x_1 + x_2 + x_2 - 2x_1 = 0$$

$$2x_2 - 3x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_1$$

$$x_3 = \frac{3}{2}x_1 - 2x_1 = -\frac{1}{2}x_1$$

$$\Rightarrow x = \left(x_1, \frac{3}{2}x_1, -\frac{1}{2}x_1\right) \in T \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\left(x_1, \frac{3}{2}x_1, -\frac{1}{2}x_1\right) = x_1\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

vrem $\left[\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right]$ - bază $\Rightarrow \begin{cases} \text{generează } T \checkmark \text{ (de la asta am pornit)} \\ \text{liniar ind} \checkmark \text{ (listă cu un singur elem.)} \end{cases}$

$\Rightarrow \dim T = 1$

$$\Rightarrow \dim T + \dim S = 1 + 2 = 3 = \dim S+T + \overset{0}{\overset{\parallel}{\dim S \cap T}} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim T + \dim S = \dim \mathbb{R}^3 \\ S+T \leq \underset{\downarrow}{\mathbb{R}^3} \end{array}\right\} \Rightarrow S+T = \mathbb{R}^3$$

pt. că S-subs în $\mathbb{R}^3$ și T-subs. în $\mathbb{R}^3$

b) $\dim T = 1$ bază $= \left[\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right]$

$\dim S = 2$ bază $= [(1,0,-1), (0,1,1)]$

c)

c) $s = (2,3,1) \in S$

$b = [(1,0,-1),(0,1,1)]$ - bază în S

$2-3+1=0 \Rightarrow s \in S$

coordonatele în funcție de b:

$(2,3,1) =$ (împărțim cum am făcut când am găsit baza):

$= (2,3,3-2) = (2,0,-2) + (0,3,3) = 2(1,0,-1) + 3(0,1,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$ coordonatele căutate

4. $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2-x_3+x_4, -2x_1-3x_2+2x_3+x_4, -x_1-2x_2+x_3+2x_4)$

a) $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$

$x, y \in \mathbb{R}^4$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$f(\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4) + \beta(y_1,y_2,y_3,y_4)) \overset{?}{=} \alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) + \beta f(y_1,y_2,y_3,y_4)$

$f(\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4) + \beta(y_1,y_2,y_3,y_4)) = f(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3, \alpha x_4+\beta y_4)$

$= (\alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2-\alpha x_3-\beta y_3+\alpha x_4+\beta y_4, -2\alpha x_1-2\beta y_1-3\alpha x_2-3\beta y_2+2\alpha x_3$
$+2\beta y_3+\alpha x_4+\beta y_4, -\alpha x_1-\beta y_1-2\alpha x_2-2\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3+2\alpha x_4+2\beta y_4) =$

$= (\alpha(x_1+x_2-x_3+x_4)+\beta(y_1+y_2-y_3+y_4), \alpha(-2x_1-3x_2+2x_3+x_4)+\beta(-2y_1-3y_2+2y_3+y_4),$
$\alpha(-x_1-2x_2+x_3+2x_4)+\beta(-y_1-2y_2+y_3+2y_4)) =$

$= (\alpha(x_1+x_2-x_3+x_4), \alpha(-2x_1-3x_2+2x_3+x_4), \alpha(-x_1-2x_2+x_3+2x_4)) +$
$(\beta(y_1+y_2-y_3+y_4), \beta(-2y_1-3y_2+2y_3+y_4), \beta(-y_1-2y_2+y_3+2y_4)) =$

$= \alpha(\dots) + \beta(\dots) = \alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) + \beta(y_1,y_2,y_3,y_4$

b) $[f]_{\bar{e},e}$

$\bar{e}, e$ - baze canonice în $\mathbb{R}^4$ și $\mathbb{R}^3$

$[f]_{\bar{e},e} = [f(\bar{e})]_e^t \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$

$f(\bar{e}) = [f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)] =$

$= [f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)] =$

$= [(1,-2,-1), (1,-3,-2), (-1,2,1), (1,1,2)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow [f]_{\bar{e},e} = \begin{bmatrix} [(1,-2,-1)]_e \\ [(1,-3,-2)]_e \\ [(-1,2,1)]_e \\ [(1,1,2)]_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$[(1,-2,-1)]_e = 1(1,0,0) + (-2)(0,1,0) + (-1)(0,0,1) = (1,-2,-1)$

(baza canonică nu schimbă vectorul)

c) $\bar{b} = [(1,-1,0,2), (2,3,0,1), (1,1,-1,1), (2,3,-1,1)]^t$

$\bar{b}$ - bază în $\mathbb{R}^4$ dacă $[\bar{b}]$ - inversabilă $\Rightarrow \det \bar{b} \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{l_4 - l_3 \to l_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1 \to c_2} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1+6 = 5 \neq 0$$

$b = [(1,0,1), (-2,1,3), (-4,1,2)]^t$ b - bază în $\mathbb{R}^3$ dacă $[b]$ - inversabilă $\Rightarrow \det b \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - c_3 \to c_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -5+6 = 1 \neq 0$$

$$[f]_{\bar{b},b} = [\bar{b}]_{\bar{e}} \cdot [f]_{\bar{e},\bar{e}} \cdot [b]_e^{-1}$$

$$[\bar{b}]_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [f]_{\bar{e},e} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[b]_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [b]_e^{-1} = \frac{1}{\det [b]_e} \cdot [b]_e^{*} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[b]_e^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\bar{b}]_{\bar{e}} \cdot [f]_{\bar{e},e} \cdot [b]_e^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot [b]_e^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & -12 & -2 \\ 4 & -6 & 0 \\ 7 & -14 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 13 & -10 \\ 86 & -64 & 52 \\ 44 & -32 & 26 \\ 99 & -74 & 60 \end{bmatrix}$$