Seminar 6

1. Să se determine toate relațiile de ordine care se pot defini pe $A=\{a,b,c\}$. În fiecare caz, să se precizeze elementele minimale, maximale, cel mai mic și/sau cel mai mare element.

Soluție: $A=\{a,b,c\}$: $(A, \leq)$

cel mai mare și maximal

• $a \to b \to c$, $a \to c \to b$, $b \to a \to c$, $b \to c \to a$

cel mai mic și minimal

$c \to a \to b$, $c \to b \to a$

(6 relații)

$\leq_1 = \{(a,a);\ (b,b);\ (c,c);$
$(a,b);\ (a,c);\ (b,c)\}$

$\leq_2 = \{(a,a);\ (b,b);\ (c,c);(a,c);$
$(a,b);\ (c,b)\}$

$\vdots$

doar maximale

- $\begin{tikzcd} b & \\ a \arrow[u] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} a & \\ b \arrow[u] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$

cel mai mic
și minimal

$\begin{tikzcd} a & \\ c \arrow[u] \arrow[r] & b \end{tikzcd}$

(<u>3 relatii</u>)

$\leq_7 = \{(a,a);\ (a,b),(a,c),(b,b),$
$(c,c)\}$

$\leq_8 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,a),$
$(b,c)\}$

$\leq_9 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(c,a),$
$(c,b)\}$

- cel mai mare și maximal

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & a & \\ b \arrow[ur] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & b & \\ a \arrow[ur] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & c & \\ a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

doar minimale

$$\leq_{10} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,a), (c,a)\}$$

$\therefore$ (3 relații)

- $a \quad b \quad c$ (1 relație)

$$\leq_{13} = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$$

sunt simultan maximale și minimale

$\nexists$ cel mai mic sau cel mai mare element

- maximale

$$\begin{tikzcd} b \\ c \arrow[u] \\ a \arrow[u] \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} a & \\ b \arrow[u] & c \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} c & \\ a \arrow[u] & b \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} a & \\ c \arrow[u] & b \end{tikzcd} ,$$

minimale

$$\begin{tikzcd} c & \\ b \arrow[u] & a \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} b & \\ c \arrow[u] & a \end{tikzcd}$$

(6 relații)

$\leq_{14} = \{(a,a); (b,b), (c,c), (a,b)\}$

$\leq_{15} = \{(a,a); (b,b); (c,c); (b,a)\}$

$\vdots$

Total <u>19 relații</u>

② Să se arate că divizibilitatea pe $\mathbb{Z}$ este o preordine care <u>nu</u> este nici simetrică și nici antisimetrică

<u>Soluție</u>: relație de preordine = reflexivitate + tranzitivitate

Fie $a \in \mathbb{Z}$, $a = a \cdot 1 \Rightarrow a / a$

$\Rightarrow$ / este reflexivă (1)

O relație R pe A este tranzitivă: $\forall a, b, c \in A$, dacă aRb

și $bRc \implies aRc$

$\forall$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cu $a | b$ și $b | c \stackrel{?}{\implies} a | c$

$a | b \implies \exists\, x \in \mathbb{Z}$ a.î. $b = a \cdot x$

$b | c \implies \exists\, y \in \mathbb{Z}$ a.î. $c = b \cdot y$

$\implies c = a \cdot \underbrace{x \cdot y}_{\in \mathbb{Z}} \implies a | c$

$\implies$ $|$ este tranzitivă (2)

(1), (2) $\implies$ $|$ este o preordine

$\forall$ $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa (simetria)

$|$ nu este simetrică, deoarece, de exemplu, $2 | 4$, dar $4 \nmid 2$

$\forall$ $a, b \in A$, dacă aRb și bRA, atunci $a = b$ (antisimetria)

$/$ nu este antisimetrică, deoarece, de exemplu, $-10/10$ și $10/-10$, dar $-10 \neq 10$.

③ $(\mathbb{N}, /)$ este o latice.
(aici cu $/$ se notează divizibilitatea)
Este $(\mathbb{N}, /)$ completă?

Soluție: teorie
$\boxed{1.}$ $\forall\ a \in \mathbb{N}$, $a = a \cdot 1$
$\Rightarrow a/a$ (reflexivitatea)

$\boxed{2}$ $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$, a/b și $b/c \overset{?}{\Rightarrow} a/c$

$a/b \Rightarrow b = a \cdot x$
$b/c \Rightarrow c = b \cdot y$
$\Rightarrow c = a \cdot x \cdot y \Rightarrow a/c$
(tranzitivitatea)

$\boxed{3}$ $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$, a/b și b/a

$\overset{?}{\Longrightarrow} \quad a=b$

$a / b \Rightarrow b = a \cdot x$

$b / a \Rightarrow a = b \cdot e \quad , \quad x, y \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a = a \cdot x \cdot y$

I. $a \neq 0$: $\quad x \cdot y = 1$

$\Rightarrow x = y = 1$

$\Rightarrow a = b$ ✓

II. $a = 0 \Rightarrow b = 0 \cdot x = 0$

$\Rightarrow a = b$

(antisimetria)

$\Rightarrow (\mathbb{N}, /)$ rel. de ordine

<u>teorie</u>: • O latice este o mulțime ordonată $(L, \leq)$ cu prop. că $\exists \inf\{x, y\}$ și $\sup\{x, y\}$, $\forall x, y \in L$

• L este <u>completă</u> dacă pt. $\forall A \subseteq L$, $\exists \inf(A)$ și $\sup(A)$

$a, b \in \mathbb{N}$

$d = \inf\{a, b\} \iff \begin{cases} d/a \text{ și } d/b \\ d_1 \in \mathbb{N} : \\ d_1/a \text{ și } d_1/b \\ \Rightarrow d_1 / d \end{cases}$

$\Rightarrow d = (a, b)$ c.m.m.d.c.

$m = \sup\{a, b\} \iff \begin{cases} a/m \text{ și } b/m \\ m_1 \in \mathbb{N} : \\ a/m_1 \text{ și } b/m_1 \\ \Rightarrow m/m_1 \end{cases}$

$\Rightarrow m = [a, b]$ c.m.m.m.c.

(4.) Arătați că $(\mathbb{N}, \leq)$ este o latice care <u>nu</u> este completă. Explicați de ce acest exemplu <u>nu</u> contrazice Prop. 1.4.32.

<u>Soluție</u>: $\forall$ $x, y \in \mathbb{N}$, $x \leq y$ sau $y \leq x$

$\Rightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ lanț $\Rightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ latice

Orice lanț este o latice

$A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$

$\sup \mathbb{N}$ nu există în $\mathbb{N}$
(nu este completă)

$A = \emptyset \subseteq \mathbb{N}$

$\inf \emptyset$ nu există în $\mathbb{N}$
(nu contrazice 1.4.32)

O mulț. ordonată $(L, \leq)$ este o latice completă dacă $\exists$ $\inf X$ pt. orice $X \subseteq L$.

⑤ $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ este o latice care este completă pt. orice mulțime A.

Soluție: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

$\boxed{1.}$ $Y \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow Y \subseteq Y$
(reflexivitate)

$\boxed{2}$ $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$

$$\left.\begin{array}{l} X \subseteq Y \\ Y \subseteq Z \end{array}\right\} \Rightarrow X \subseteq Z$$

(tranzitivitate)

$\boxed{3.}$ $X, Y \in \mathcal{P}(A)$

$X \subseteq Y$ și $Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$

(principiul dublei incluziuni)

1, 2, 3 $\Rightarrow$ relații de ordine

$\Rightarrow$ lanț $\Rightarrow$ latice

$\inf \{X, Y\} = X \cap Y$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} X \cap Y \subseteq X, \quad X \cap Y \subseteq Y \\ Z \subseteq A: \ Z \subseteq X \text{ și } Z \subseteq Y \\ \qquad \Rightarrow Z \subseteq X \cap Y \end{cases}$$

$\sup \{X, Y\} = X \cup Y$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} X \subseteq X \cup Y, \quad Y \subseteq X \cup Y \\ Z \subseteq A: \ X \subseteq Z, \ Y \subseteq Z \end{cases}$$

$\Rightarrow X \cup Y \subseteq Z$

$\Rightarrow (\mathcal{P}(A), \subseteq)$ latice completă

⑥ Dacă $(A, \leq)$ este o mulțime ordonată, atunci tot așa este și $(A, \geq)$

Soluție: $(A, \leq)$ mulțime ordonată $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $(A, \geq)$ ordonată

$\boxed{1.}$ $\forall a \in A$, $a \leq a$

$a \geq a$, $\forall a \in A$

$\Rightarrow$ este reflexivă

$\boxed{2.}$ $\forall a, b, c \in A$, $a \leq b$ și $b \leq c$

$\Rightarrow a \leq c$

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \Rightarrow b \geq a \\ b \leq c \Rightarrow c \geq b \end{array}\right\} c \geq a$$

$\Rightarrow$ este transitivă

$\boxed{3.}$ $a \leq b$ și $b \leq a \Rightarrow a = b$

$b \geq a$ și $a \geq b \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow$ este antisimetrică

$\Rightarrow$ $(A, \geq)$ este ordonată