Logică computațională
Curs 3

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Logica propozițiilor

Propoziţiile logice sunt modele ale afirmaţiilor propoziţionale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.

Sintaxa logicii propoziţiilor

- alfabetul
  - $\Sigma_P = Var\_propoz \cup Conective \cup \{ (,) \}$
  - $Var\_propoz = \{ p, q, r, p_1, p_2, \ldots\}$
  - $Conective = \{ \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow \}$

prioritate

$\neg$ negația

$\wedge$ conjuncția

$\vee$ disjuncția

$\rightarrow$ implicația

$\leftrightarrow$ echivalența

- regulile de formare a Formulelor propoziționale
  - F_P = mulţimea formulelor propoziţionale corect construite

  = cea mai mică mulțime de formule ce se poate construi cu regulile:
    - *baza*: $p_i \in F_P$, i =1,2,…
    - *inducţia*: dacă $U,V \in F_P$ atunci:

      $\neg U \in F_P$, $U \wedge V \in F_P$, $U \vee V \in F_P$, $U \rightarrow V \in F_P$, $U \leftrightarrow V \in F_P$
    - *închiderea*: toate formulele din F_P se obţin doar prin aplicarea regulilor precedente de un număr finit de ori.

Semantica logicii propoziţionale

- Propoziţiile logice sunt modele ale afirmaţiilor propoziţionale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.

- **Scopul** definirii semanticii logicii propoziţionale este de a **atribui** un înţeles, **o valoare de adevăr**, formulelor propoziţionale.

- Domeniul semantic:

$$\{F(\text{fals}), T(\text{true, adevărat})\} \text{ a.î. } \neg F=T, \neg T=F$$

Semantica conectivelor

p	$\neg p$
T	F
F	T

$\uparrow$ - nand $p \uparrow q := \neg (p \wedge q)$

$\downarrow$ - nor $p \downarrow q := \neg (p \vee q)$

$\oplus$ - xor $p \oplus q := \neg (p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$	$p \oplus q$
T	T	T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T	F

Interpretarea (Def.)

- O ***interpretare*** a formulei $U(p_1,p_2,\ldots,p_n) \in F_P$ este o funcţie $i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\} \to \{T,F\}$ care asociază valori de adevăr variabilelor propoziţionale şi poate fi extinsă la o funcţie
  $i{:}F_P \to \{T,F\}$ folosind relaţiile:
  $i(\neg p) = \neg i(p)$ $\quad$ $i(p \wedge q) = i(p) \wedge i(q)$
  $i(p \vee q) = i(p) \vee i(q)$ $\quad$ $i(p \to q) = i(p) \to i(q)$ $\quad$ $i(p \leftrightarrow q) = i(p) \leftrightarrow i(q)$
- Interpretările <u>evaluează</u> formulele propoziţionale conform semanticii conectivelor componente, atribuindu-le valori de adevăr.
- Tabela de adevăr a unei formule propoziţionale $U(p_1,p_2,\ldots,p_n) \in F_P$ corespunde evaluărilor formulei în <u>toate</u> cele 2^n interpretări.

Concepte semantice (Def.)

Fie formula propoziţională $U(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in F_P$.

- O interpretare $i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\} \to \{T,F\}$ care evaluează formula U ca <u>adevărată</u>, $i(U)=T$, se numeşte ***model*** al formulei.

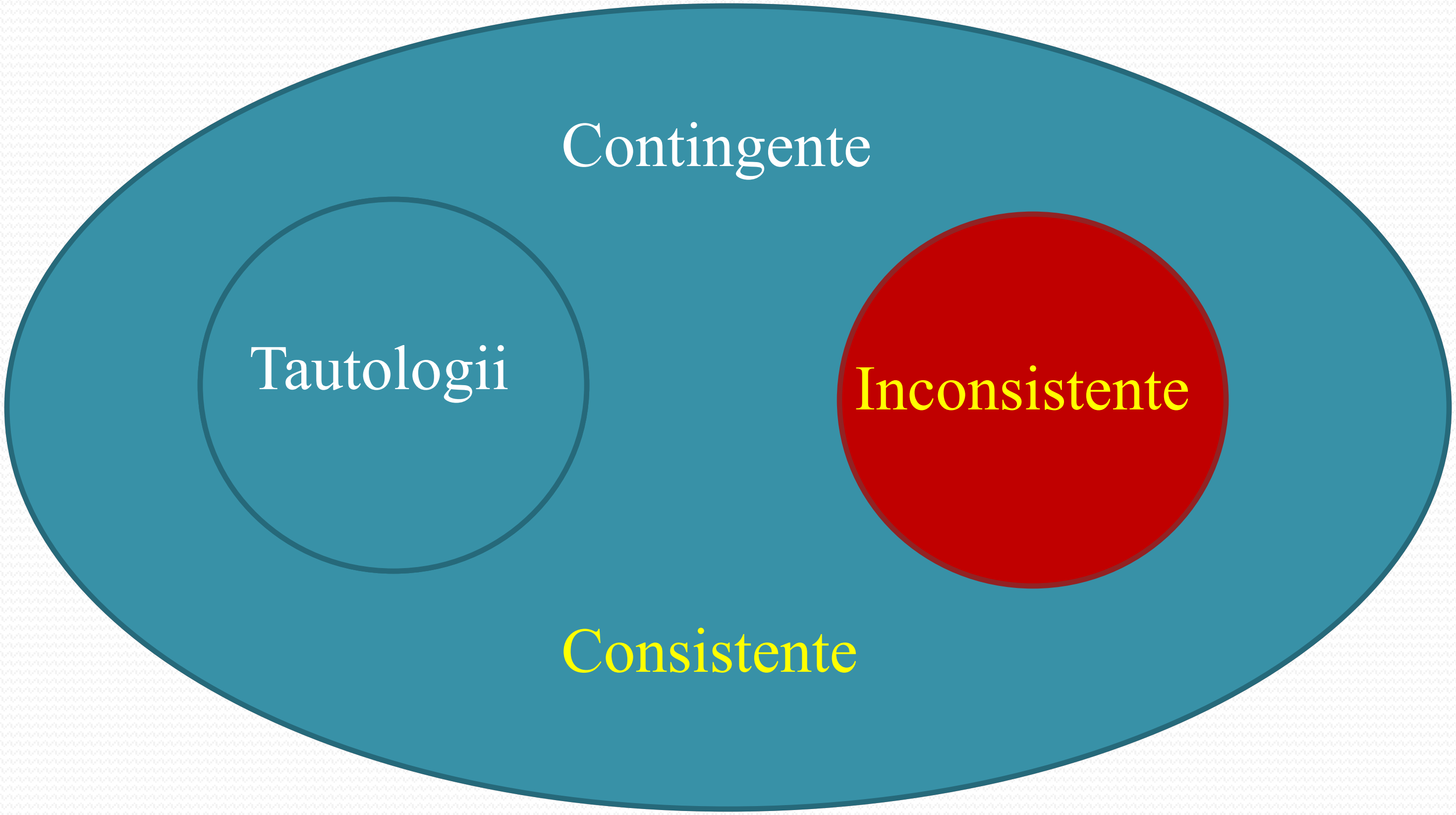
- O interpretare $i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\} \to \{T,F\}$ care evaluează formula U ca <u>falsă</u>, $i(U)=F$, se numeşte ***anti-model*** al formulei.

Concepte semantice (Def.) – cont.

Fie formula propoziţională $U(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in F_P$.

- U se numeşte ***consistentă (realizabilă)*** dacă şi numai dacă are cel puţin un model, deci poate fi evaluată ca adevărată: $\exists i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}\rightarrow\{T,F\}$ astfel încât $i(U)$=T.
- U se numeşte ***validă (tautologie)***, notaţie: $\models U$, dacă şi numai dacă U este evaluată ca adevărată în orice interpretare, adică: $\forall i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}\rightarrow\{T,F\}$, $i(U)$=T. Toate interpretările formulei U sunt modele ale formulei.
- Formula U se numeşte ***inconsistentă (nerealizabilă)*** dacă şi numai dacă U nu are niciun model, adică U este interpretată totdeauna ca falsă: $\forall i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}\rightarrow\{T,F\}$, $i(U)$=F.
- Formula U se numeşte ***contingentă*** dacă şi numai dacă este consistentă, dar nu este validă.

Tipuri de formule



Exemplu

- $U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p)$,
- $V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$
- $p \uparrow \neg p$
- $p \downarrow \neg p$

Tabela de adevăr - completarea

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

$U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p)$,

$V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$

Tabela de adevăr – interpretări

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

modele pt. U: i_1, i_2, i_5 şi i_7

$i_1 : \{p,q,r\} \rightarrow \{\mathrm{T},\mathrm{F}\}$, $i_1(p)=\mathrm{T}$, $i_1(q)=\mathrm{T}$, $i_1(r)=\mathrm{T}$ şi $i_1(U)=\mathrm{T}$

anti-modele pt. U: i_3, i_4, i_6 şi i_8

Tabela de adevăr – tip formule

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

$p \uparrow \neg p$ – tautologie
$p \downarrow \neg p$ – inconsistentă
U, V – contingente și consistente

Metasimboluri – relații semantice între formule

- Formula V este ***consecinţă logică*** a formulei U,
  notaţie: $U \models V$, dacă şi numai dacă $\forall i{:}F_P \rightarrow \{T,F\}$ astfel încât $i(U)=T$, are loc $i(V)=T$.

- Formulele $U(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in F_P$ şi $V(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in F_P$ sunt ***logic echivalente***, notaţie: $U\equiv V$, dacă şi numai dacă tabelele lor de adevăr sunt identice, adică: $\forall i{:}F_P \rightarrow \{T,F\}$, $i(U) = i(V)$.

Tabela de adevăr – tip formule

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

$U \equiv V$

$U \models \neg p \vee q$

Concepte semantice pentru mulțimi de formule

- O ***mulţime*** $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$ de formule se numeşte ***consistentă (realizabilă)*** dacă şi numai dacă formula $U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n$ este consistentă, adică: $\exists i{:}\mathrm{F_P}\rightarrow\{\mathrm{T,F}\}$ astfel încât $i\,(U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n)=\mathrm{T}$, ***i*** se numeşte ***model*** al mulţimii $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$.
- O ***mulţime*** $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$ de formule se numeşte ***inconsistentă (nerealizabilă, contradictorie)*** dacă şi numai dacă formula $U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n$ este inconsistentă, adică , $\forall i{:}\mathrm{F_P}\rightarrow\{\mathrm{T,F}\}$ astfel încât $i\,(U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n)=\mathrm{F}$, ***i*** se numeşte ***anti-model*** al mulţimii $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$.
- Formula V este ***consecinţă logică*** a mulţimii de formule $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$ şi se notează $U_1,U_2,\ldots,U_n \models V$, dacă şi numai $\forall i{:}\mathrm{F_P}\rightarrow\{\mathrm{T,F}\}$ astfel încât $i\,(U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n)=\mathrm{T}$, are loc $i\,(V)=\mathrm{T}$. Formulele $U_1,U_2,\ldots,U_n$ se numesc *premize, ipoteze, fapte*, iar V se numeşte *concluzie*.

Teoremă

Fie $S=\{U_1,U_2,...,U_n\}$ o mulţime de formule propoziţionale.

1. Dacă S este o *mulţime consistentă*, atunci $\forall j,\ 1\leq j\leq n,\quad S \setminus \{U_j\}$ este o *mulţime consistentă*.
2. Dacă S este o *mulţime consistentă* şi V este o *formulă validă*, atunci *mulţimea* $S\cup\{V\}$ este *consistentă*.
3. Dacă S este o *mulţime inconsistentă*, atunci $\forall V\in \mathrm{F_p}$ *mulţimea* $S\cup\{V\}$ este *inconsistentă*.
4. Dacă S este o *mulţime inconsistentă* şi U_j este o *formulă validă*, unde $1\leq j\leq n$, atunci *mulţimea* $S \setminus \{U_j\}$ este *inconsistentă*.

Teoremă

Fie $U_1, U_2, \ldots, U_n$, U, V formule propoziţionale.

- $\models U$ ***dacă şi numai dacă*** $\neg U$ este *inconsistentă*
  (O formulă este *tautologie* ***dacă şi numai dacă*** *negaţia* sa este o formulă *inconsistentă).*
- $U \models V$ ***dacă şi numai dacă*** $\models U \to V$ ***dacă şi numai dacă*** mulţimea $\{U, \neg V\}$ este *inconsistentă.*
- $U \equiv V$ ***dacă şi numai dacă*** $\models U \leftrightarrow V$.
- $U_1, U_2, \ldots, U_n \models V$ ***dacă şi numai dacă*** $\models U_1 \wedge U_2 \wedge \ldots \wedge U_n \to V$ ***dacă şi numai dacă*** mulţimea $\{U_1, U_2, \ldots, U_n, \neg V\}$ este *inconsistentă.*

Echivalenţe logice în logica propoziţională

- Legile lui DeMorgan

  $\neg(U \wedge V) \equiv \neg U \vee \neg V$ și $\neg(U \vee V) \equiv \neg U \wedge \neg V$
- Legile de absorbţie

  $U \wedge (U \vee V) \equiv U$ și $U \vee (U \wedge V) \equiv U$
- Legile de comutativitate

  $U \wedge V \equiv V \wedge U$ și $U \vee V \equiv V \vee U$
- Legile de asociativitate

  $U \wedge (V \wedge Z) \equiv (U \wedge V) \wedge Z$ și $U \vee (V \vee Z) \equiv (U \vee V) \vee Z$
- Legile de distributivității

  $U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z)$ și

  $U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$
- Legile de idempotenţă

  $U \wedge U \equiv U$ și $U \vee U \equiv U$

Alte echivalențe logice

- Legile de simplificare

$\neg\neg U \equiv U$ $\qquad U \to U \equiv \mathrm{T}$

$U \wedge \neg U \equiv \mathrm{F}$ $\qquad U \vee \neg U \equiv \mathrm{T}$

$\mathrm{T} \wedge U \equiv U$ $\qquad \mathrm{F} \vee U \equiv U$

$U \to \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$ $\qquad U \to \mathrm{F} \equiv \neg U$

$T \to U \equiv U$ $\qquad \mathrm{F} \to U \equiv \mathrm{T}$

$U \leftrightarrow \mathrm{T} \equiv U$ $\qquad U \leftrightarrow \mathrm{F} \equiv \neg U$

$U \oplus \mathrm{T} \equiv \neg U$ $\qquad U \oplus \mathrm{F} \equiv U$

$U \leftrightarrow U \equiv \mathrm{T}$ $\qquad U \oplus U \equiv \mathrm{F}$

- Definirea conectivelor

$U \to V \equiv \neg U \vee V$

$U \to V \equiv \neg(U \wedge \neg V)$

$U \to V \equiv U \leftrightarrow (U \wedge V)$

$U \to V \equiv V \leftrightarrow (U \vee V)$

$U \leftrightarrow V \equiv (U \to V) \wedge (V \to U)$

$U \oplus V \equiv \neg(U \to V) \vee \neg(V \to U)$

$U \leftrightarrow V \equiv (U \vee V) \to (U \wedge V)$

$U \vee V \equiv \neg(\neg U \wedge \neg V)$

$U \wedge V \equiv \neg(\neg U \vee \neg V)$

$U \vee V \equiv \neg U \to V$

$U \wedge V \equiv \neg(U \to \neg V)$

$\neg U \equiv U \uparrow U \equiv U \downarrow U$

$U \vee V \equiv (U \uparrow U) \uparrow (V \uparrow V) \equiv (U \downarrow V) \downarrow (U \downarrow V)$

$U \wedge V \equiv (U \downarrow U) \downarrow (V \downarrow V) \equiv (U \uparrow V) \uparrow (U \uparrow V)$

Principiul dualității

- Pentru orice echivalenţă logică $U \equiv V$ care conţine doar conectivele $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\uparrow$, $\downarrow$ există o altă echivalenţă logică, $U' \equiv V'$, unde U',V' sunt formule obţinute din U,V prin <u>interschimbarea</u> conectivelor logice duale: ($\wedge$, $\vee$), ($\uparrow$, $\downarrow$) şi a valorilor de adevăr: T, F.

- *Conective duale*: ($\wedge$, $\vee$) , ($\uparrow$, $\downarrow$), ($\leftrightarrow$, $\oplus$).
- *Valori de adevăr duale*: T şi F.
- *Concepte duale*: tautologie şi formulă inconsistentă.

Forme normale în logica propoziţiilor

1. Un ***literal*** este o variabilă propoziţională sau negaţia sa.
2. O ***clauză*** este disjuncţia unui număr finit de literali.
3. Un ***cub*** este conjuncţia unui număr finit de literali.
4. ***Clauza vidă***, simbolizată prin □, este clauza fără literali, fiind singura clauză inconsistentă.

5. O formulă este în ***formă normală disjunctivă*** (***FND***), dacă

   aceasta este scrisă ca o disjuncţie de cuburi $\vee_{i=1}^{p} (\wedge_{j=1}^{q_i} l_{ij})$

   unde l_{ij} sunt literali.

6. O formulă este în ***formă normală conjunctivă*** (***FNC***), dacă

   aceasta este scrisă ca o conjuncţie de clauze: $\wedge_{i=1}^{n} (\vee_{j=1}^{m_i} l_{ij})$

   unde l_{ij} sunt literali.

Exemple FN în logica propoziţiilor

- Un ***literal*** este o variabilă propoziţională sau negaţia sa. $p, \neg q$
- O ***clauză*** este disjuncţia unui număr finit de literali. $p \vee \neg q \vee r$
- Un ***cub*** este conjuncţia unui număr finit de literali. $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
- O formulă este în ***formă normală disjunctivă*** (***FND***), dacă aceasta este scrisă ca o disjuncţie de cuburi.

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

- O formulă este în ***formă normală conjunctivă*** (***FNC***), dacă aceasta este scrisă ca o conjuncţie de clauze.

$$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q)$$

Sunt în FNC și/sau FND?

$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$ FNC, 3 clauze

$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q)$ FND, 4 cuburi

p FNC, 1 clauză; FND, 1 cub

$\neg q$ FNC, 1 clauză; FND, 1 cub

$\neg p \vee q \vee \neg r$ FND, 3 cuburi; FNC, 1 clauză

$p \wedge \neg q \wedge \neg r$ FNC, 3 clauze; FND, 1 cub

Proprietate

Fie mulţimea de literali $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- clauza $\vee_{i=1}^{n} l_i$ este validă;
- cubul $\wedge_{i=1}^{n} l_i$ este inconsistent;
- în mulţimea $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ există cel puţin o pereche de literali opuşi, adică: $\exists i, j \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $l_i = \neg\, l_j$.

Proprietate - exemple

Fie mulţimea de literali $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- clauza $\vee_{i=1}^{n} l_i$ este validă;
- cubul $\wedge_{i=1}^{n} l_i$ este inconsistent;
- în mulţimea $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$ există cel puţin o pereche de literali opuşi, adică: $\exists i, j \in \{1, ..., n\}$ astfel încât $l_i = \neg\, l_j$.

$$\neg p \vee q \vee p \equiv \mathrm{T}$$

$$p \wedge r \wedge \neg r \equiv \mathrm{F}$$

Teoremă

- *Orice formulă* admite *o formă normală conjunctivă* şi *o formă normală disjunctivă* logic echivalente cu ea.

Algoritmul de normalizare

Pas1:

Înlocuirea formulelor de tip $\boldsymbol{U} \rightarrow \boldsymbol{V}$ cu forma echivalentă: $\neg U \vee V$

Înlocuirea formulelor de tip $\boldsymbol{U} \leftrightarrow \boldsymbol{V}$ cu forma echivalentă:

$$(\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee U).$$

Pas2:

Aplicarea legilor lui **DeMorgan** (se recomandă aplicarea dinspre exterior spre interior) ==> negaţia va preceda doar variabilele propoziţionale.

Eliminarea negaţiilor multiple folosind echivalenţa logică: $\neg\neg U \equiv U$.

Pas3: Aplicarea legilor **distributivităţii**.

Pentru FND FNC

$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge \mathrm{V}) \vee (U \wedge Z)$ respectiv $U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee \mathrm{V}) \wedge (U \vee Z)$

Pas4: Simplificarea formei obţinute folosind alte echivalenţe logice: legile de simplificare, legile absorbţiei, legile de idempotenţă.

Exemplu de aducere la FNC & FND

$U = p \to r \vee \neg(\neg q \vee r)$

$U = p \to (r \vee \neg(\neg q \vee r))$

Pas1: Înlocuirea formulelor de tip $U \leftrightarrow V$, $\boldsymbol{U \to V}$ cu forma echivalentă: …, $\neg U \vee V$

$U \equiv \neg p \vee (r \vee \neg(\neg q \vee r))$

Pas2: Aplicarea legilor lui **DeMorgan**

$U \equiv \neg p \vee (r \vee (\neg\neg q \wedge \neg r))$

$U \equiv \neg p \vee (r \vee (q \wedge \neg r))$

$U \equiv \neg p \vee r \vee (q \wedge \neg r) \qquad - FND$

Pas3: Aplicarea legilor **distributivității**

$U \equiv (\neg p \vee r \vee q) \wedge (\neg p \vee \underline{r} \vee \underline{\neg r}) \qquad - FNC$

Pas4: Simplificarea formei obținute folosind alte echivalențe logice

$U \equiv \neg p \vee r \vee q \qquad - FND \ \& \ FNC$

Teoremă

- O *formulă* în *forma normală conjunctivă* (*FNC*) este *tautologie* dacă şi numai dacă *toate clauzele* sale sunt *valide.*
- O *formulă* în *forma normală disjunctivă* (*FND*) este *inconsistentă* dacă şi numai dacă *toate cuburile* sale sunt *inconsistente.*

Observații

- Prima parte a teoremei furnizează o ***metodă directă*** de rezolvare a problemei decizionale (verificarea dacă o formulă este tautologie) în logica propozițiilor.
- FND a unei formule propoziționale furnizează toate <u>modelele</u> formulei inițiale, prin găsirea interpretărilor care evaluează cuburile componente ca adevărate.
- FNC a unei formule propoziționale furnizează toate <u>anti-modelele</u> formulei inițiale prin găsirea interpretărilor care evaluează clauzele componente ca false.
- Cele două formulări din teorema precedentă sunt afirmații duale.