Exerciții suplimentare (Seminar 2)

① Justificați cu definiția valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^3+n} = 1.$$

Vom arăta că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{n^3-n}{n^3+n} - 1\right| < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales.

Căutăm n_0.

$$\left|\frac{n^3-n}{n^3+n} - 1\right| = \left|\frac{n^3-n-n^3-n}{n^3+n}\right| = \frac{2n}{n^3+n} = \frac{2n}{n(n^2+1)} = \frac{2}{n^2+1}.$$

$\frac{2}{n^2+1} < \varepsilon \iff \frac{n^2+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$, $n^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$, $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$, dacă $\varepsilon \leq 2$.

$n > 0$, dacă $\varepsilon > 2$.

$$n_0 = \begin{cases} \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}\right]+1, & \varepsilon \leq 2. \\ 0, & \varepsilon > 2. \end{cases}$$

ε a fost ales arbitrar, afirmația are loc $\forall \varepsilon > 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^3+n} = 1$.

② Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și calculați limita sa acolo unde este posibil.

a) $x_n = 1.\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ ori}}$

$x_{n+1} - x_n = 1.\underbrace{99\ldots99}_{n+1 \text{ ori}} - 1.\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ ori}} = 0.\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ ori}}9 > 0$, deci $(x_n) \uparrow$.

Șirul e mărg. inf. de $x_1 = 1.9$ și superior de 2, deci e mărg., fiind și crescător $\Rightarrow$ convergent. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

$x_n = 2 - 10^{-n}$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Căutăm n_0:

$|x_n - 2| = |-10^{-n}| = 10^{-n}$

$10^{-n} < \varepsilon \iff 10^n > \frac{1}{\varepsilon} \iff$ ①

$\frac{1}{10^n}$

① $n > \lg\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Rightarrow n_0 = \left[\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] + 1$.

ε arb. ales $\Rightarrow x_n \to 2$, $n \to \infty$.

b) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

[~~$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow$ șir crescător.~~

~~- mărg. inf. de $x_1 = 1$.~~]

Vom arăta că șirul e fundamental.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n+p-1}} - \frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Cum $\frac{1}{n}$ e convergent spre 0 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, deci $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$,

iar (x_n) e fundamental. În concluzie, e convergent.

Limita acestui șir e $\frac{\pi^2}{6}$.

c) $x_n = \frac{\sin(1)}{5} + \frac{\sin(2)}{5^2} + \dots + \frac{\sin(n)}{5^n}$

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{5^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{5^{n+p}}\right| \leq \left|\frac{\sin(n+1)}{5^{n+1}}\right| + \dots + \left|\frac{\sin(n+p)}{5^{n+p}}\right|$$

$$\leq \frac{1}{5^{n+1}} + \dots + \frac{1}{5^{n+p}} < \underbrace{\frac{1}{5^n} + \dots + \frac{1}{5^n}}_{p \text{ termeni}} = \frac{p}{5^n}.$$

Cum $\frac{p}{5^n} \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n, p \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, deci șirul e fundamental $\Rightarrow$ convergent.

d) $x_{n+1} = \sqrt{2x_n+3}$, $x_1 = \sqrt{3}$.

$l = \sqrt{2l+3} \Rightarrow l^2 - 2l - 3 = 0 \quad \Delta = 16 \quad l_1 = \frac{2+4}{2} = 3$

$l_2 = \frac{2-4}{2} = -1$, nu convine.

Demonstrăm prin inducție că $x_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(i) $P(1)$. $x_1 = \sqrt{3} < 3$ „A"

(ii) Pp. $P(n)$ adev. și dem. că $P(n+1)$ adev.

$x_n < 3$.

$x_{n+1} = \sqrt{2x_n+3}$.

$\sqrt{2x_n+3} - 3 < 0$?

$$\sqrt{2x_n+3} - 3 \overset{\text{amplificăm cu conjugata}}{=} \frac{2x_n+3-9}{\sqrt{2x_n+3}+3} = \frac{2\overbrace{(x_n-3)}^{<0}}{\sqrt{2x_n+3}+3} < 0$$

$\Rightarrow x_{n+1} < 3$.

Deci șirul e mărg. superior. Arătăm că e crescător.

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2x_n+3} - x_n = \frac{2x_n+3-x_n^2}{x_n+\sqrt{2x_n+3}} = -\frac{x_n^2-2x_n-3}{x_n+\sqrt{2x_n+3}} =$$

$$= -\frac{\overbrace{(x_n-3)}^{<0}(x_n+1)}{x_n+\sqrt{2x_n+3}} > 0 \Rightarrow \text{șir crescător.}$$

În concluzie, șirul e convergent, cu limita 3.

e) $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$.

$x_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$l = 1 + \frac{1}{l} \mid \cdot l \quad l^2 - l - 1 = 0 \quad \Delta = 1+4 = 5 \quad l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$l_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

③ Determinați mulțimea punctelor limită, limita inferioară, limita superioară pt. șirurile:

a) $x_n = \dfrac{1}{2+\sqrt{n}\cos(n\pi)}$

n-par $\Rightarrow n = 2k \qquad \cos(2k\pi) = 1$

$$x_n = \frac{1}{2+\sqrt{n}} \to 0,\ n\to\infty$$

n-impar $\Rightarrow n = 2k+1 \qquad \cos[(2k+1)\pi] = -1$

$$x_n = \frac{1}{2-\sqrt{n}} \to 0,\ n\to\infty$$

$\mathrm{Lim}(x_n) = \{0\} \Rightarrow \liminf = \limsup = 0.$

b) $x_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n\cdot \sin\frac{n\pi}{3}}$

$n = 6k \Rightarrow \sin\frac{6k\pi}{3} = \sin 2k\pi = 0 \qquad \Rightarrow x_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^0 = 1$

$n = 6k+1 = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$n = 6k+2 \Rightarrow \sin\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$n = 6k+3 \Rightarrow \sin(2k\pi + \pi) = \sin\pi = 0 \qquad \Rightarrow x_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^0 = 1$

$n = 6k+4 \Rightarrow \sin\left(2k\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$n = 6k+5 \Rightarrow \sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{3}\right) = \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}n}{2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\frac{\sqrt{3}n}{2}} = e^{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}n}{2}\right)} = e^{-\sqrt{3}}$$

$\liminf = e^{-\sqrt{3}}$

$\mathrm{Lim}(x_n) = \{e^{-\sqrt{3}}, 1, e^{\sqrt{3}}\} \qquad \limsup = e^{\sqrt{3}}$

⑤