Seminarul 13

1. Evaluați integralele:

a) $J = \int_0^1 (x^2 + xy + y^2)\, dy$

Integrăm în raport cu y, deci considerăm "x" ca fiind constantă.

$$J = \left(x^2 y + x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) - 0 = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$$

b) $J = \int_y^{y^2} (y-x)^4\, dx$

$$J = \frac{(y-x)^5}{5} \cdot (-1)\Big|_{x=y}^{x=y^2} = -\frac{(y-y^2)^5}{5} + \frac{(y-y)^5}{5} = \frac{(y^2-y)^5}{5}$$

2. Evaluați integralele iterate:

a) $$J = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\right)}_{J'} dy$$

J': $1 + x^2 + y^2 = t$ $\qquad x = 0 \Rightarrow t = 1 + y^2$

$2x\, dx = dt$ $\qquad x = 1 \Rightarrow t = 2 + y^2$

$x\, dx = \frac{1}{2}\, dt$

$$J' = \int_{1+y^2}^{2+y^2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/2}}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1/2}}{-1/2}\Big|_{1+y^2}^{2+y^2} = -\frac{1}{\sqrt{y^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+2}}\right) dy = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)\Big|_0^1 - \ln\left(y + \sqrt{y^2+2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{2})$$

b) $J = \underbrace{\int_1^2 \left(\int_0^{1/x} \frac{1}{1+x^2y^2}\, dy \right)}_{J'} dx$

$$J' = \int_0^{1/x} \frac{1}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)}\, dy = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{\frac{1}{x}} \Big|_0^{1/x} =$$

$$= \frac{1}{x} \operatorname{arctg} xy \Big|_0^{1/x} = \frac{1}{x}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$J = \int_1^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{\pi}{4} \ln x \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \ln 2$$

③ Evaluați integralele duble pe mulțimile specificate:

a) $J = \iint_A \frac{x}{1+xy}\, dx\, dy$, $A = [0,1] \times [0,2]$

Obs: $\int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{x}{1+xy}\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\, dx \right) dy$.

(T. Fubini)

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{x}{1+xy}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \ln(1+xy) \Big|_{y=0}^{y=2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \ln(1+2x)\, dx \quad = x \cdot \ln(1+2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{2x+1}\, dx$$

$f' = 1 \Rightarrow f = x$

$g = \ln(1+2x) \quad g' = \frac{2}{1+2x}$

$$= \ln 3 - \left(\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) dx \right) = \ln 3 - x\Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln(2x+1) \Big|_0^1$$

$$= \ln 3 - 1 + \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{3}{2} \ln 3 - 1$$

b) $J=\iint_A xy\,dx\,dy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 4,\ x\le y\le 2x\}$

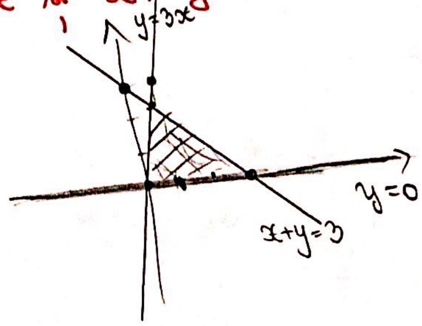
I dată.

$$J=\int_0^4\left(\int_x^{2x} xy\,dy\right)dx=\int_0^4 x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_x^{2x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 x\left(4x^2-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 3x^3\,dx=\frac{3x^4}{8}\Big|_0^4=$$

$$=\frac{3\cdot 4^4}{8}=3\cdot 32=96$$

c) $J=\iint_A (y+1)\,dx\,dy$, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ e regiunea mărginită de dreptele de ecuații $y=0$, $y=3x$ și $x+y=3$.



$$\begin{cases} y=3x \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &3x=3-x \\ &4x=3 \\ &x=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$\Rightarrow y\in[0,3x]$, $y\in[0,9/4]$

$x\in[y/3,\ 3-y]$

$$J=\int_0^{9/4}\left(\int_{y/3}^{3-y}(y+1)\,dx\right)dy=\int_0^{9/4}(y+1)\cdot x\Big|_{y/3}^{3-y}\,dy=$$

$$=\int_0^{9/4}(y+1)\left(3-y-y/3\right)dy=\int_0^{9/4}(y+1)\left(\frac{9-4y}{3}\right)dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{9/4}\left(9y-4y^2+9-4y\right)dy=\frac{1}{3}\left(\frac{5y^2}{2}-\frac{4y^3}{3}+9y\right)\Big|_0^{9/4}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{81}{16}-\frac{4}{3}\cdot\frac{9^3}{4^3}+\frac{81}{4}\right)=\ldots$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{5\cdot 81}{32}-\frac{3\cdot 81}{4^2}+\frac{81}{4}\right)=\frac{5\cdot 81-6\cdot 81+8\cdot 81}{3\cdot 32}=\frac{7\cdot \overset{27}{\cancel{81}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot 32}=\frac{189}{32}$$

d) $\mathcal{J}=\iint\limits_A dx\,dy$, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ e regiunea mărginită de curbele de ecuații $y^2=2x$ și $x^2=2y$

$x, y \geq 0$

$y=\sqrt{2x}$

$y=\frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow y\in\left[\frac{x^2}{2}, \sqrt{2x}\right]$

$\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=2x \Rightarrow \frac{x^4}{4}=2x \quad |\cdot 4$

$x^4=8x$

$x^4-8x=0 \Rightarrow x(x^3-8)=0 \Rightarrow x=0$, $x=2$

$x\in[0,2]$

$$\mathcal{J}=\int_0^2\left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}} dy\right)dx = \int_0^2 y\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}} dx =$$

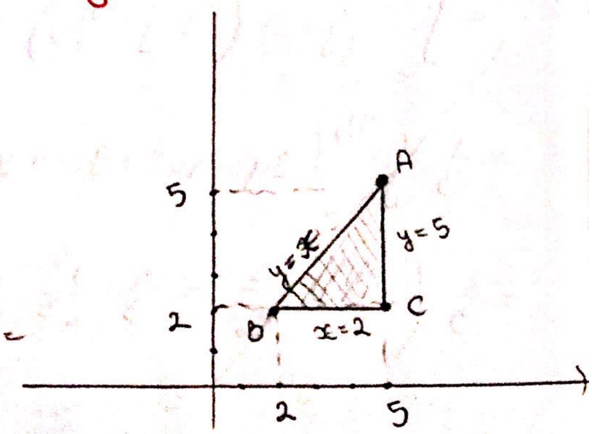
$$=\int_0^2\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\sqrt{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2-\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{2}-\frac{8}{6}=\frac{8}{3}-\frac{8}{6}=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

e) $\mathcal{J}=\iint\limits_A \frac{y}{x}\,dx\,dy$, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ e placa triunghiulară de vârfuri $(5,5)$, $(2,2)$ și $(5,2)$

$x\in[2,5]$, $y\in[2,x]$

$$\mathcal{J}=\int_2^5\left(\int_2^x \frac{y}{x}\,dy\right)dx =$$

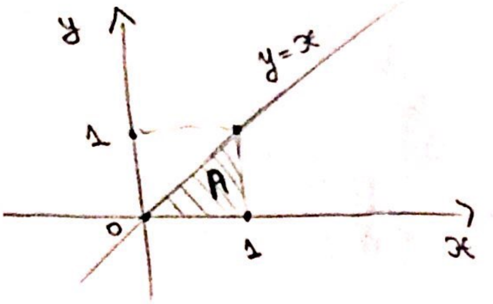


$$=\int_2^5 \frac{1}{x}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_2^x dx=\int_2^5\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}-2\right)dx=$$

$$=\int_2^5\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)dx=\frac{x^2}{4}\Big|_2^5-2\ln x\Big|_2^5 \; 4 =\frac{21}{4}-2\ln\frac{5}{2}$$

5 Evaluați integrala iterata, schimbând în prealabil ordinea de integrare:

$$J = \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{1}{1+x^4}\, dx \right) dy$$



$y \in [0,1]$

$x \in [y,1]$

$\downarrow$ schimbăm

$x \in [0,1]$

$y \in [0,x]$

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x^4+1}\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{x^4+1} \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\, dx$$

$x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$x\,dx = \frac{1}{2}\, dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = 1$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

① Este mulțimea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 2x\}$ simplă în raport cu vreuna dintre axe? Descompuneți mulțimea A în submulțimi simple în raport cu una din axe, având interioarele disjuncte.

$x^2+y^2=1$

$\Rightarrow$ cerc de rază 1 și centru $(0,0)$

Ec. cercului cu centrul în (a,b) și rază R:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 \ge 1$ - exteriorul cercului

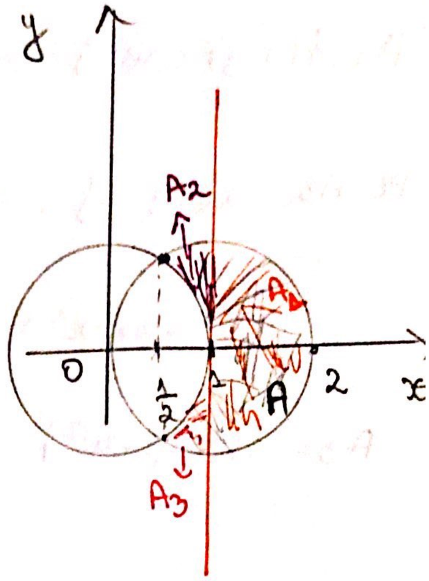
$x^2+y^2=2x$

$x^2-2x+y^2=0 \mid +1$

$\underline{x^2-2x+1}+y^2=1$

$(x-1)^2+y^2=1$

$\Rightarrow$ cerc cu centrul în $(1,0)$ și rază 1.



[?] Conform curs 13: A simplă în raport cu

- Ox dacă $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \alpha_1(x) \le y \le \alpha_2(x)\}$
  α_1, α_2 fc. de cls. C^1 pe (a,b)
- Oy dacă $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \beta_1(y) \le x \le \beta_2(y)\}$
  β_1, β_2 fc. de cls. C^1 pe (c,d)

A nu e simplă în rap. cu Ox sau Oy.

- Ducem paralela la Oy care trece prin $(1,0)$ și obținem în dreapta ei mulțimea A_1.
- Ox ne dă mulțimile A_2 și A_3.

Pt. A_1: Cum $x^2+y^2 \le 2x \Rightarrow y^2 \le 2x-x^2$

De pe desen avem $x \in [1,2]$

$\Rightarrow y \in [-\sqrt{2x-x^2}, \sqrt{2x-x^2}]$

(radicalii sunt bine definiți pt. $x \in [1,2]$)

$\Rightarrow A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \mid -\sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{2x-x^2}\}$ ☑

Pt. A_2: de pe desen, $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

și cum $1 \le x^2+y^2 \le 2x \Rightarrow$

$1-x^2 \le y^2 \le 2x-x^2 \Rightarrow$

$y \in [\sqrt{1-x^2}, \sqrt{2x-x^2}]$

$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\frac{1}{2}, 1], y \in [\sqrt{1-x^2}, \sqrt{2x-x^2}]\}$ ☑

Pt. A_3: $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $y < 0 \Rightarrow$

$-\sqrt{2x-x^2} \le y \le -\sqrt{1-x^2}$

$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \le x \le 1; -\sqrt{2x-x^2} \le y \le -\sqrt{1-x^2}\}$ ☑