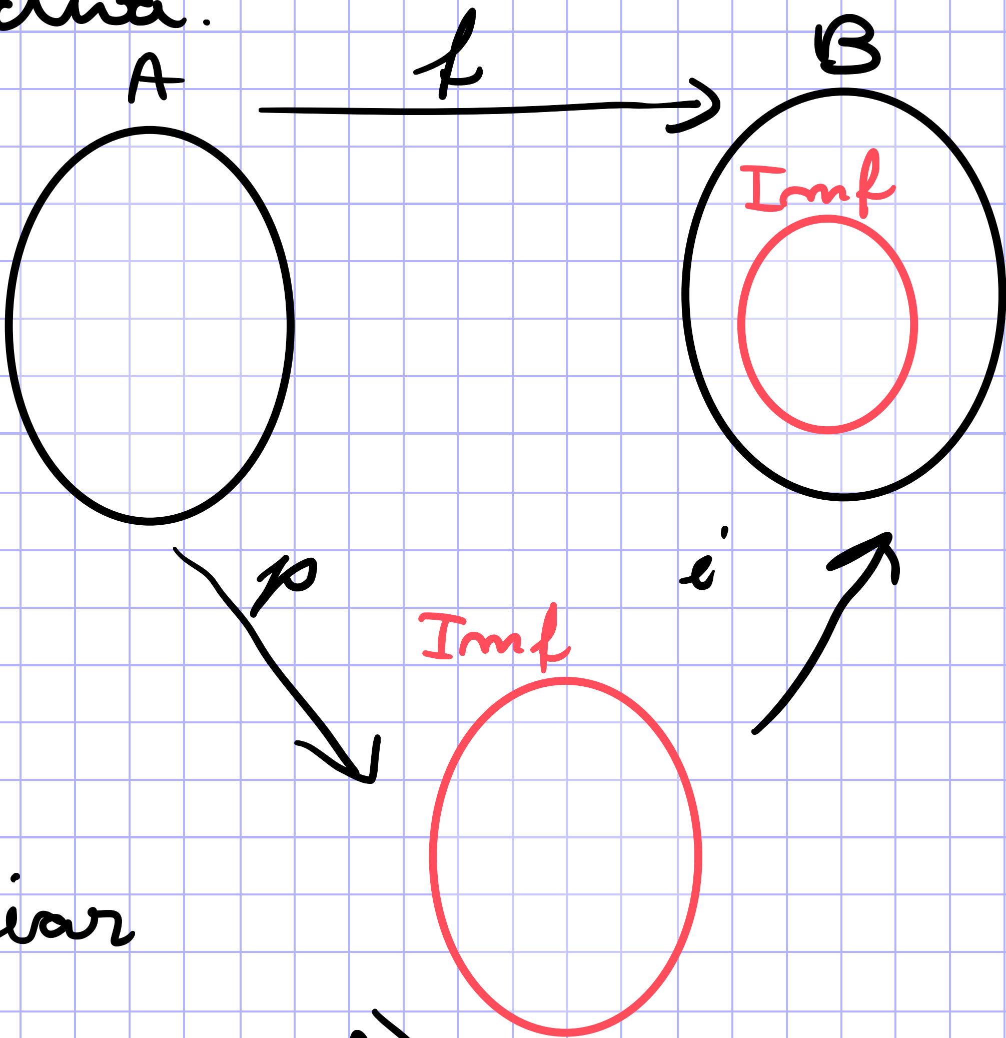
Seminar 3

$\boxed{1.3.41}$ Să se arate că orice funcție $f : A \to B$ poate fi scrisă ca o compunere $f = i \circ p$ unde i este injectivă, iar p este surjectivă.

Soluție:



$p : A \to Im f$

$p(x) = f(x)$

$i : Im f \to B$

$i(x) = x$, iar

p surj. ($Im\, p = Im f$)

i inj (fct. identitate)

$f = i \circ p$, $i \circ p : A \to B$

$\boxed{1.3.40}$ Să se găsească un exemplu de două funcții $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a.î. $g \circ f \neq f \circ g$.

<u>Soluție</u>: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = x^2$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$$

$$= g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad f \circ g \neq g \circ f$$

(Deci compunerea este definită bilateral, ea nu este comutativă)

$\boxed{1.3.42}$ Să se găsească un exemplu care constă dintr-o funcție $f : A \to B$, astfel încât:

(1) f este injectivă, dar nu

are inversă la stânga

(2) f are exact o inversă la stânga dar nu este bijectivă

(3) f are exact două inverse la stânga

(4) f are o infinitate de inverse la stânga

<u>Soluție</u>: (1) Prop. 1 (Seminar 2)

$\Longrightarrow$ $A = \emptyset$, B mulț. oarecare

$\exists!\ f : A \to B$ inj.

<u>Observații</u>: ① $|B^A| = |B|^{|A|} = |B|^{|\emptyset|} = 1$

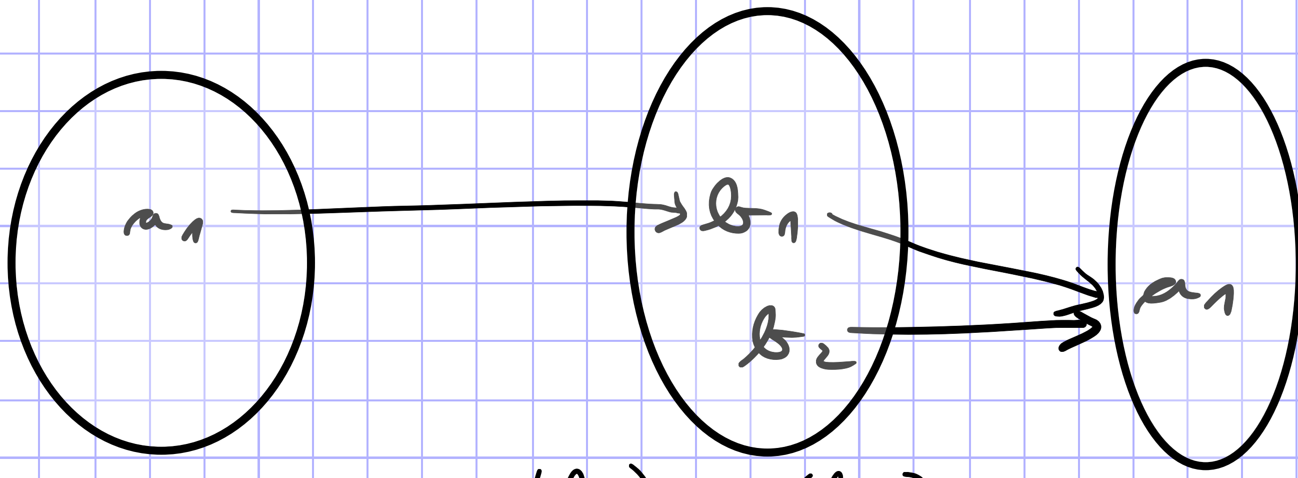
② Dacă $B \neq \emptyset$, atunci:

$\nexists\ B \xrightarrow{g} \emptyset$

③ Dacă $B = \emptyset$, atunci:

$1_\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ bij.

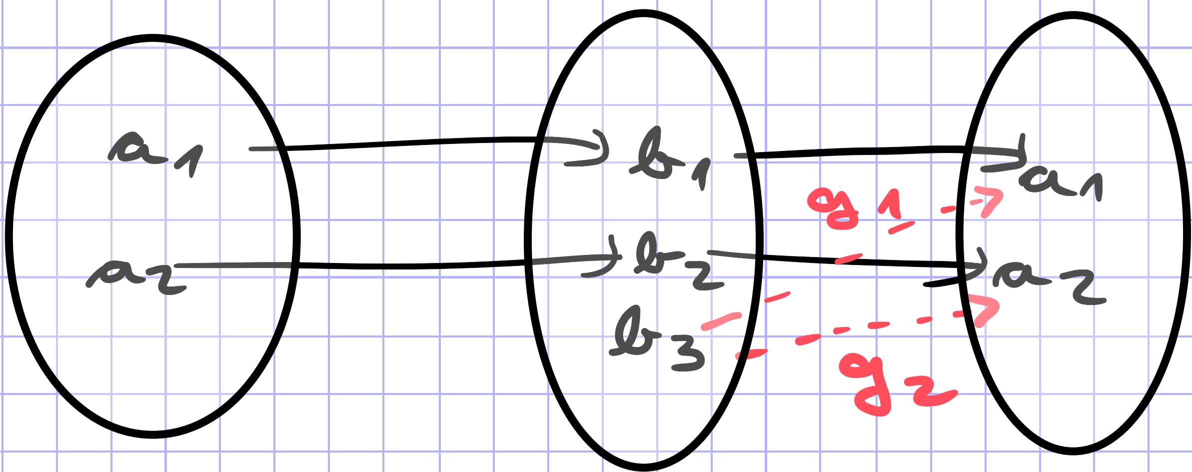
(2): $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$



$g(b_1) = g(b_2) = a_1$
$b_1 \neq b_2$ (nu este inj)

$\exists!\ g: B \to A$, $g(x) = a_1$, $\forall x \in B$
a.î. $g \circ f = 1_A$

(3): $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$

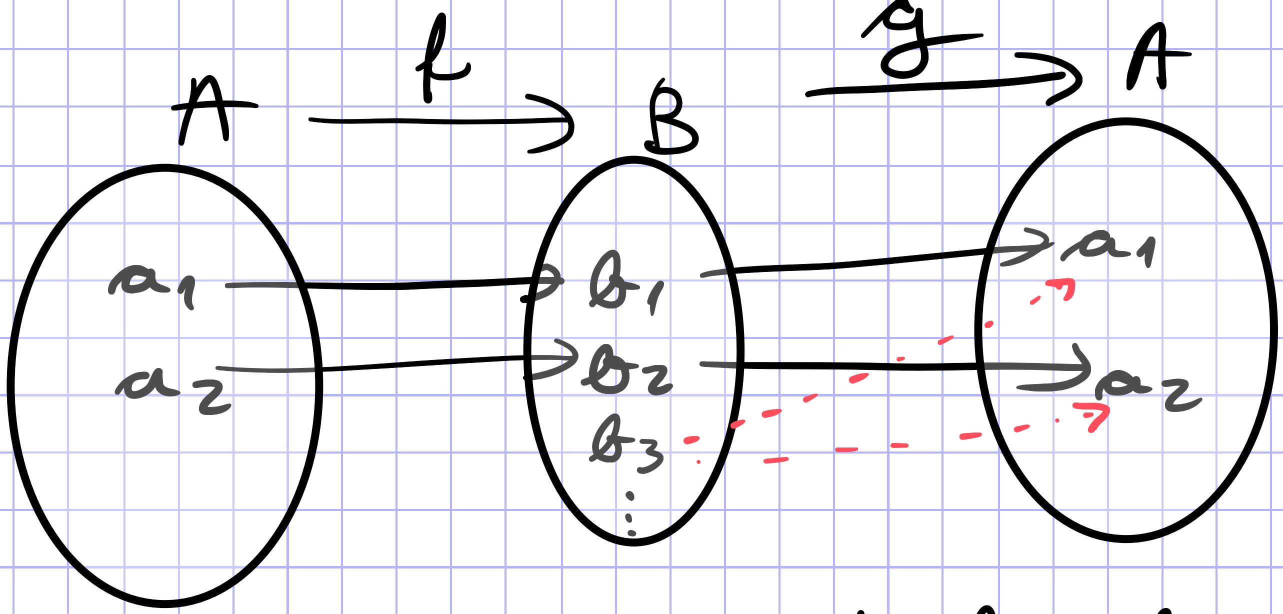


x	a_1	a_2
$f(x)$	b_1	b_2

$g: B \to A$ inv. la stânga
$\Longleftrightarrow$ $g \circ f = 1_A$

$g(b_1) = a_1$ și $g(b_3) \in \{a_1, a_2\}$
$g(b_2) = a_2$ (2 posibilități)

$\Rightarrow$ f are exact două inverse la stânga

(4): 

$\exists$ o infinitate de funcții $g: B \to A$ a.î.

$g(b_1) = a_1$

$g(b_2) = a_2$

și $g(b_i) \in \{a_1, a_2\}, i \geq 3$

$\left(|A^B| = |A|^{|B|} = 2^{\infty} \text{ funcții} \right)$

$\boxed{1.3.43.}$ Să se găsească un exemplu care constă dintr-o funcție $g: B \to A$, astfel încât:

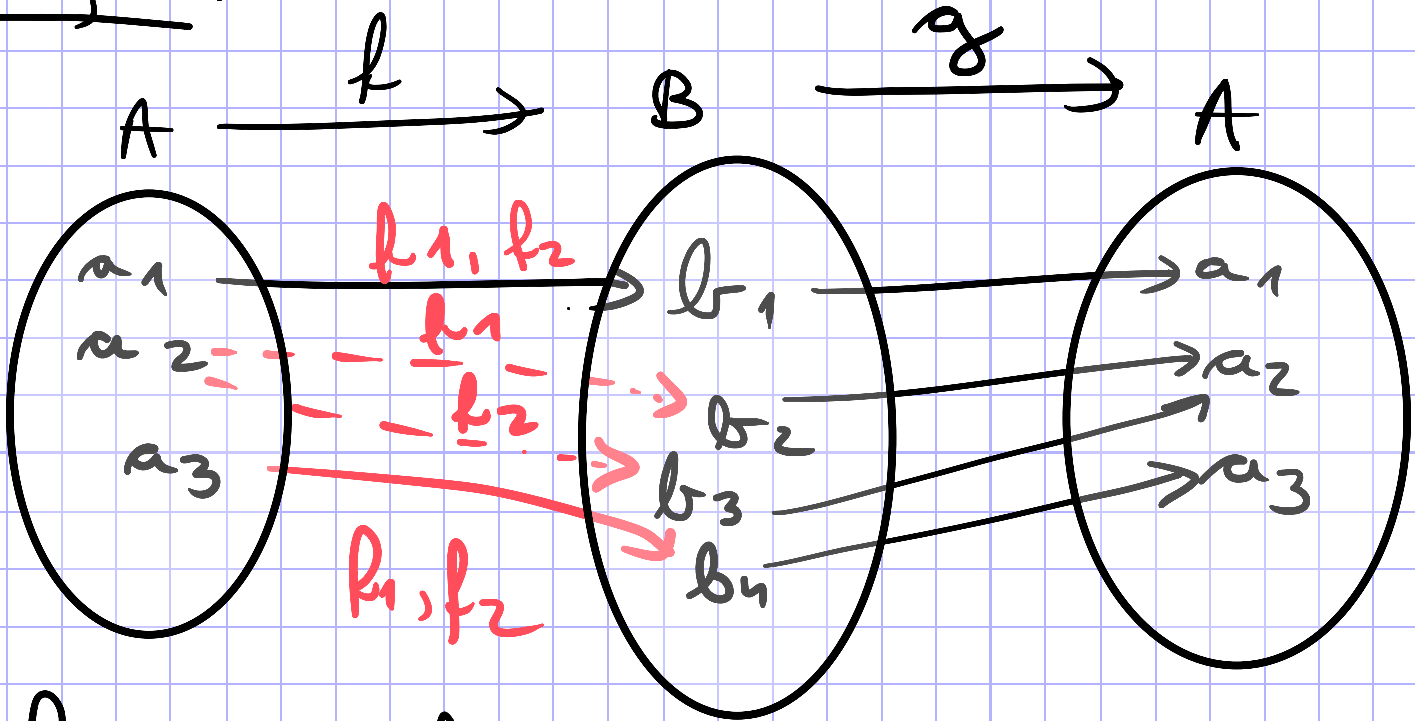
(1) g are exact două

inverse la dreapta

(2) g are o infinitate de inverse la dreapta

Să se arate că g are exact o inversă la dreapta dacă g este bijectivă.

<u>Soluție</u>: (1):



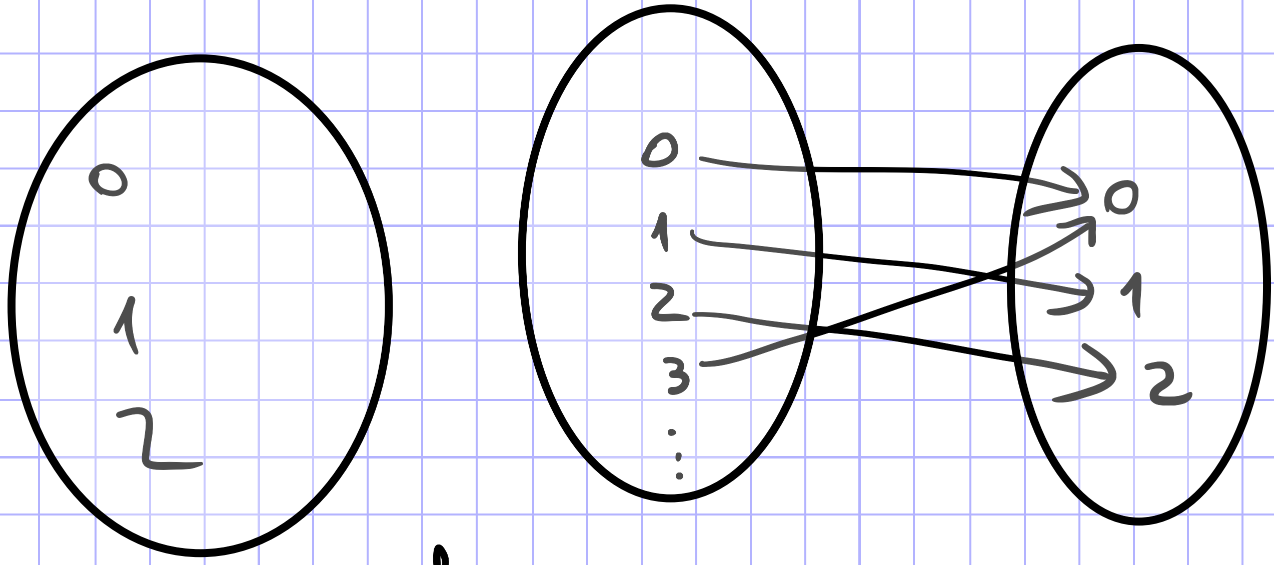
$$f_i(a_1) = b_1, \quad i = \overline{1,2}$$

$$f_1(a_2) = b_2$$

$$f_2(a_2) = b_3$$

$$f_i(a_3) = b_4, \quad i = \overline{1,2}$$

(2):



$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$$

Căutăm $f:\{0,1,2\} \to \mathbb{N}$ a.î.

$g \circ f = 1_A \implies \forall\ x \in \{0,1,2\}$

$$g(f(x)) = x$$

$$\implies f(x) \equiv x \pmod 3$$

$f(0) = 3n_0, \quad n_0 \in \mathbb{N}$

$f(1) = 3n_1 + 1, \quad n_1 \in \mathbb{N}$

$f(2) = 3n_2 + 2, \quad n_2 \in \mathbb{N}$

$g : B \to A$ bijectivă $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ $\exists!\ f : A \to B$

a.î. $g \circ f = 1_A$

"$\implies$" $\exists$ $g : B \to A$ bij

$\implies \exists\ g^{-1} : A \to B$

a.î. $g \circ g^{-1} = 1_A$ și $g^{-1} \circ g = 1_B$

$\Rightarrow$ g^{-1} este o inversă la dreapta pt. g

! Presupunem $f: A \to B$ o altă inversă la dreapta a.î.

$$g^{-1} \circ / \; g \circ f = 1_A$$

$$f = g^{-1} \quad \text{abs.}$$

"$\Leftarrow$" Știm $\exists!\, f: A \to B$

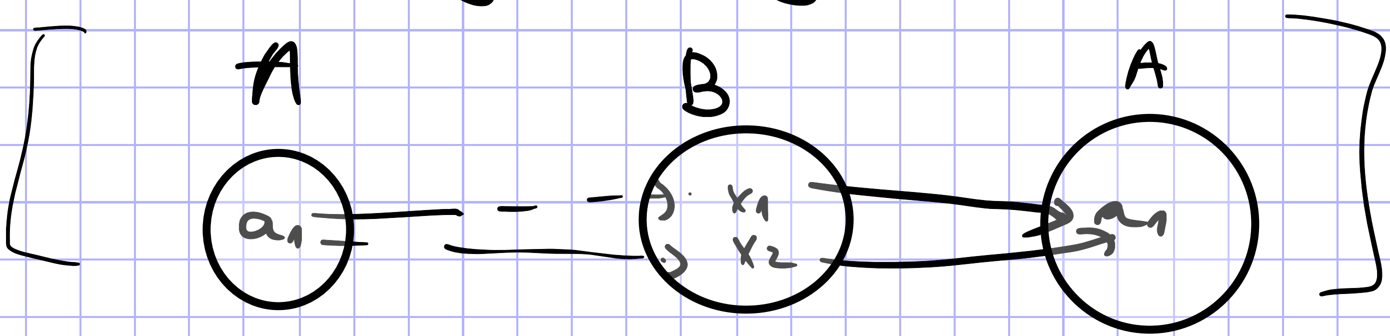
a.î. $g \circ f = 1_A$

$\overset{\text{Prop 2}}{\underset{S_2}{\Rightarrow}}$ g surj (1)

p.p că g nu este injectivă

$\Rightarrow$ $\exists$ $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in B$

cu $g(x_1) = g(x_2)$



putem construi 2 inverse la dreapta $\Rightarrow$ ctr. cu unicitatea

$\Rightarrow$ g este injectivă (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ g este bijectivă

$\boxed{1.3.44}$ Să se găsească un exemplu care constă din două funcții:

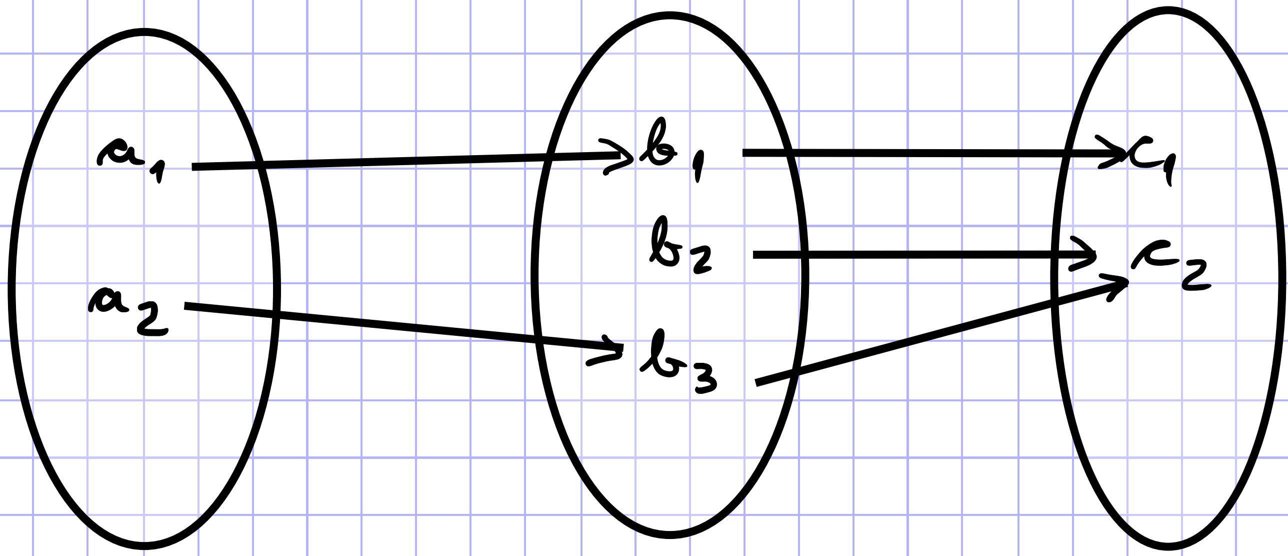
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, așa încât:

(1) $g \circ f$ injectivă, dar g nu este injectivă

(2) $g \circ f$ surjectivă, dar f nu este surjectivă

Soluție:

(1) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$



$g \circ f : A \to C$

$A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$C = \{c_1, c_2\}$

$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_1) = c_1$

$(g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(b_3) = c_2$

$a_1 \neq a_2$, $c_1 \neq c_2$

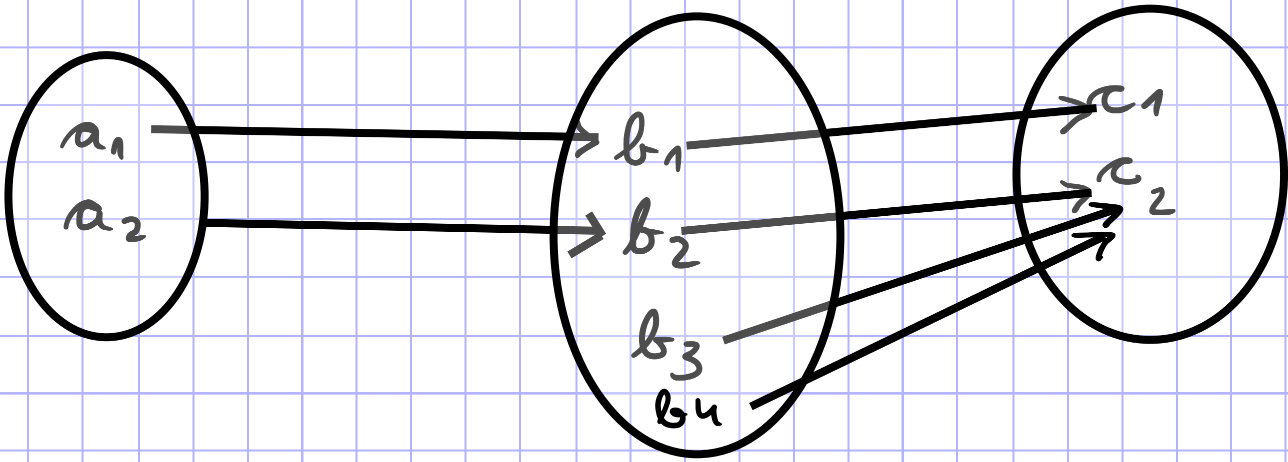
$\Rightarrow$ $g \circ f$ este injectivă

$$\left.\begin{array}{l} g(b_2) = g(b_3) = c_2 \\ b_1 \neq b_3 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ $g : B \to C$ <u>nu</u> este injectivă

(2):

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$



$g \circ f : A \to C$

$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_1) = c_1$

$(g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(b_2) = c_2$

$\mathrm{Im}(g \circ f) = \{c_1, c_2\} = C$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ este surjectivă

$f : A \to B$, $f(a_1) = b_1$ și $f(a_2) = b_2$

$\mathrm{Im} f = \{b_1, b_2\} \subset B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

$\Rightarrow$ $f : A \to B$ <u>nu</u> este surjectivă

$\boxed{1.3.45.}$ Fie $f : A \to B$ o funcție și fie $X, X_1, X_2 \subseteq A$ și $Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$ submulțimi:

Să se arate că:

(1): $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

(2): $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

(3): $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

(4): $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Soluție: • $f: A \to B$, $C \subseteq A$

$f(C) = \{y \in B \mid \exists\, x \in C : f(x) = y\}$

• $\forall\ D \subseteq B$

$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$

(1): $X \subseteq A$

Fie $x \in X$, notăm $f(x) = y \in B$

$\Rightarrow f(x) = y \in f(X) \subseteq B$

$x \in f^{-1}(f(X))$

Dar $x \in X$

$\Rightarrow X \subseteq f^{-1}(f(X))$

(2): Metoda dublei incluziuni

„$\subseteq$": vrem: $f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$

Fie $\underline{y \in f(X_1 \cup X_2)}$

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} (\exists\, x \in X_1 \cup X_2)\ f(x) = y$

$\Longleftrightarrow \exists\, x \in A : (x \in X_1$ sau $x \in X_2)$, $f(x) = y$

$\Longleftrightarrow (\exists\, x \in A,\ x \in X_1,\ f(x) = y)$ sau $(\exists\, x \in A, x \in X_2, f(x) = y)$

$\Longleftrightarrow y \in f(X_1)$ sau $y \in f(X_2)$

$\Longleftrightarrow \underline{y \in f(X_1) \cup f(X_2)}$

$\Longrightarrow f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$ (1)

„$\supseteq$": vrem: $f(X_1) \cup f(X_2) \subseteq f(X_1 \cup X_2)$

Fie $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$

$\Longleftrightarrow y \in f(X_1)$ sau $y \in f(X_2)$

...

Obs: $P(x)$, $Q(x)$ predicate logice

$$\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \Longleftrightarrow (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

$$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \Longrightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$$

(3): temă

(4): Fie $y \in f(\underbrace{f^{-1}(\mathcal{Y})})$

$\Longrightarrow \exists\ x \in f^{-1}(\mathcal{Y}) : f(x) = y$

$\Longrightarrow f(x) \in \mathcal{Y}$

Dar $y \in \mathcal{Y}$

$\Longrightarrow f(f^{-1}(\mathcal{Y})) \subseteq \mathcal{Y}$