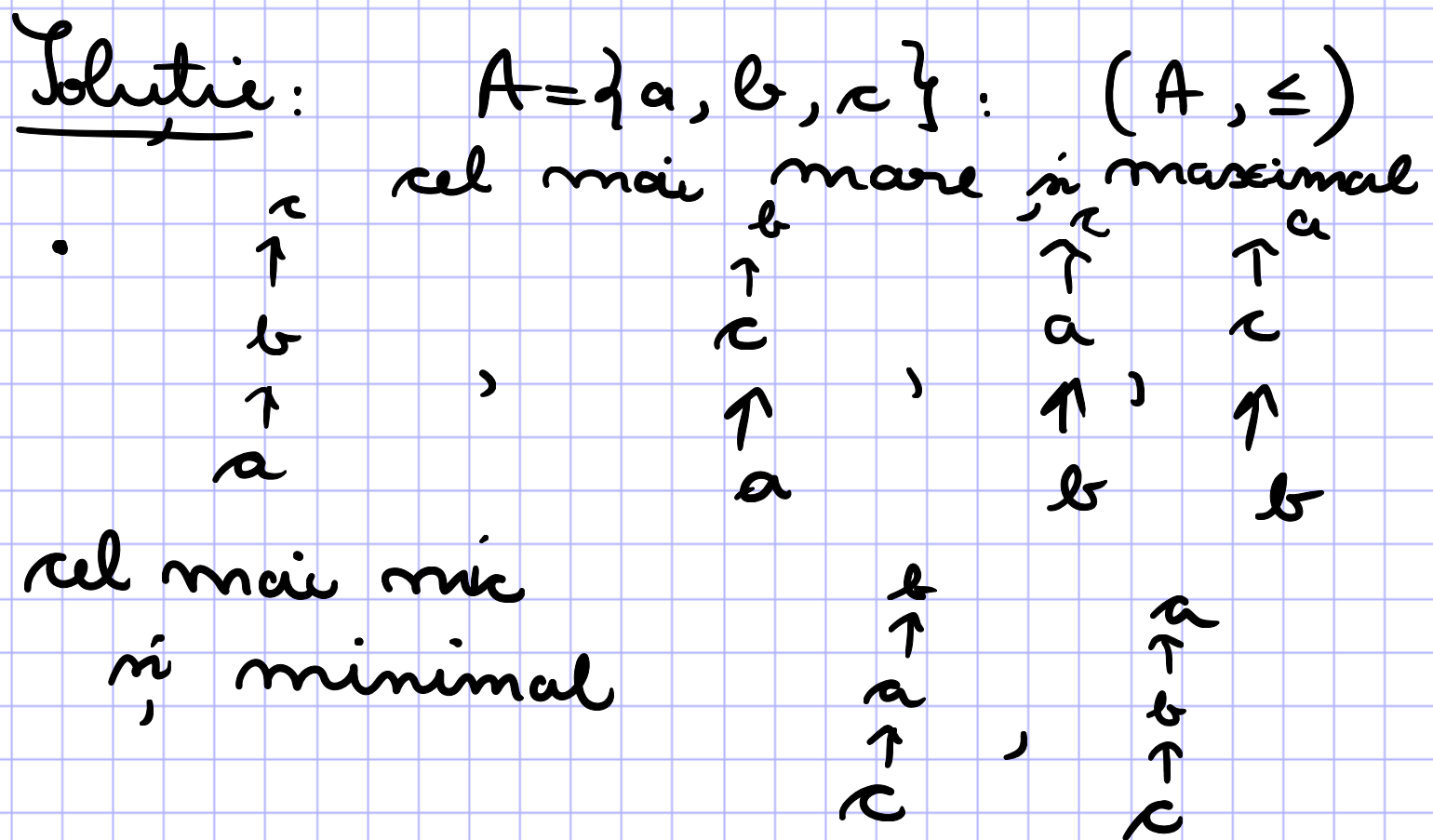


## Terminar 6

① Să se determine toate relațiile de ordine care se pot defini pe  $A = \{a, b, c\}$ . În fiecare caz, să se precizeze elementele minimale, maximele, cel mai mic și/cu cel mai mare element.



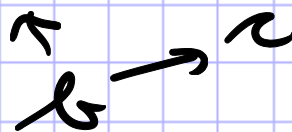
(6 relații)

$$\leq_1 = \{(a, a); (b, b); (c, c); (a, b); (a, c); (b, c)\}$$

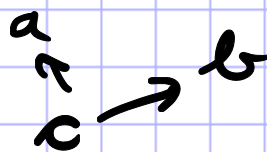
$$\leq_2 = \{(a, a); (b, b); (c, c); (a, c); (a, b); (c, b)\}$$

⋮

doar maxime



cel mai mic  
și minimal



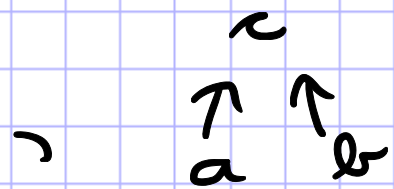
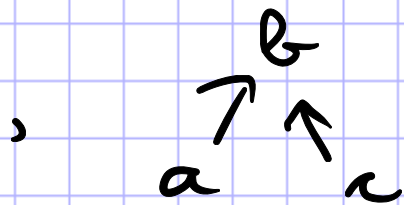
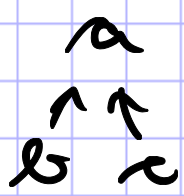
(3relatii)

$$\leq_7 = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, b); (c, c)\}$$

$$\leq_8 = \{(a, a); (b, b); (c, c); (b, a); (b, c)\}$$

$$\leq_9 = \{(a, a); (b, b); (c, c); (c, a); (c, b)\}$$

cel mai mare și maximal



doar minimale

$$\leq_{10} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (c, a)\}$$

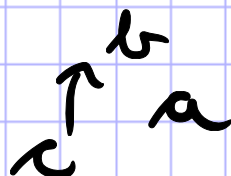
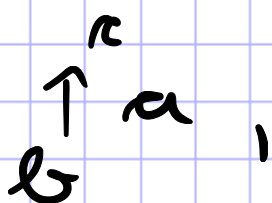
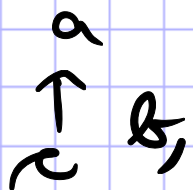
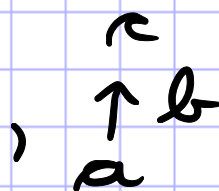
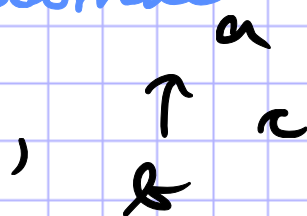
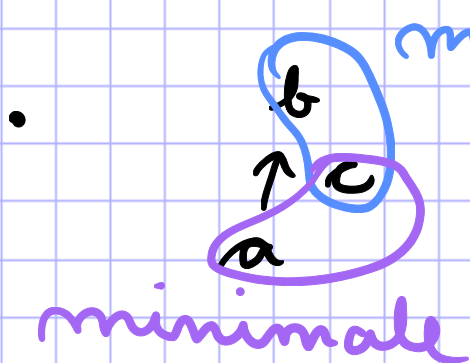
$\therefore$  (3 relatii)

• a b c (1 relatie)

$$\leq_{13} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

sunt simultan maximele  
si minimale

$\nexists$  cel mai mic sau  
cel mai mare element



(6 relatii)

$$\leq_{14} = \{(a, a); (b, b), (c, c), (a, b)\}$$

$$\leq_{15} = \{(a, a); (b, b); (c, c); (b, a)\}$$

⋮

Total 19 relații

(2) Să se arate că divizibilitatea pe  $\mathbb{Z}$  este o preordine care nu este nici simetrică și nici antisimetrică

Soluție:      relație de preordine  
= reflexivitate + transitivitate

Fie  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a = a \cdot 1 \Rightarrow a / a$

$\Rightarrow$  / este reflexivă (1)

(1) relații  $R$  pe  $A$  este  
transitivă :

$\forall a, b, c \in A$ , dacă  $a R b$

$$n; b R c \Rightarrow a R c$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ cu } a/b \text{ și } b/c \stackrel{?}{=} a/c$$

$$a/b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \text{ a.c. } b = a \cdot x$$

$$b/c \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z} \text{ a.c. } c = b \cdot y$$

$$\Rightarrow c = a \cdot \underbrace{x \cdot y}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow a/c$$

$$\Rightarrow / \text{ este tranzitivă (2)}$$

$$(1), (2) \Rightarrow / \text{ este o preordine}$$

$$\forall a, b \in A, \text{ dacă } a R b, \text{ atunci } b R a \text{ (simetrie)}$$

$$/ \text{ nu este simetrică, deoarece, de exemplu, } 2/4, \text{ dar } 4 \not/ 2$$

$$\forall a, b \in A, \text{ dacă } a R b \text{ și } b R a, \text{ atunci } a = b \text{ (antisimetrie)}$$

/ nu este antisimetrică,  
deoarece, de exemplu,  
 $-10/10$  și  $10/-10$ , dar  
 $-10 \neq 10$ .

③  $(\mathbb{N}, /)$  este o latice.  
(aici cu  $/$  se notează  
divizibilitatea)

Este  $(\mathbb{N}, /)$  completă?

Soluție: Teorie ①  $\forall a \in \mathbb{N}, a = a \cdot 1$   
 $\Rightarrow a/a$  (reflexivitatea)

②  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a/b$  și  
 $b/c \stackrel{?}{\Rightarrow} a/c$

$$a/b \Rightarrow b = a \cdot x$$

$$b/c \Rightarrow c = b \cdot y$$

$$\Rightarrow c = a \cdot x \cdot y \Rightarrow a/c$$

(transitivitatea)

③  $\forall a, b \in \mathbb{N}, a/b$  și  $b/a$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} a = b$$

$$a \mid b \Rightarrow b = a \cdot x$$

$$b \mid a \Rightarrow a = b \cdot c, \quad x, y \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a = a \cdot x \cdot y$$

$$\text{I. } a \neq 0: \quad x \cdot y = 1$$

$$\Rightarrow x = y = 1$$

$$\Rightarrow a = b \quad \checkmark$$

$$\text{II. } a = 0 \Rightarrow b = 0 \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow a = b$$

(antisimetria)

$\Rightarrow (\mathbb{N}, \mid)$  rel. de ordine

Teorie: • O lattice este o multime ordonata  $(L, \leq)$  cu prop. ca  $\exists \inf \{x, y\}$  si  $\sup \{x, y\}$ ,  $\forall x, y \in L$

•  $L$  este completă dacă pt.  $\forall A \subseteq L$ ,  $\exists \inf(A)$  si  $\sup(A)$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$d = \inf \{a, b\} (=) \left\{ \begin{array}{l} d/a \text{ și } d/b \\ d_1 \in \mathbb{N} : \\ d_1/a \text{ și } d_1/b \\ \Rightarrow d_1 \mid d \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow d = (a, b) \quad \text{c.m.m.d.c.}$$

$$m = \sup \{a, b\} (\Leftarrow) \left\{ \begin{array}{l} a/m \text{ și } b/m \\ m_1 \in \mathbb{N} : \\ a/m_1 \text{ și } b/m_1 \\ \Rightarrow m/m_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow m = [a, b] \quad \text{c.m.m.m.c.}$$

④. Demonstrați că  $(\mathbb{N}, \leq)$  este o lattice care nu este completă. Explicați de ce acest exemplu nu contrazice Prop. 1.4.32.

Soluție:  $\forall x, y \in \mathbb{N}, x \leq y \text{ sau } y \leq x$

$$\Rightarrow (\mathbb{N}, \leq) \text{ lant} \Rightarrow (\mathbb{N}, \leq) \text{ lattice}$$

Orice lant este o lattice



$$A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$$

$\sup \mathbb{N}$  nu există în  $\mathbb{N}$   
(nu este completă)

$$A = \emptyset \subseteq \mathbb{N}$$

$\inf \emptyset$  nu există în  $\mathbb{N}$   
(nu contrazice 1.4.32)

←  
O mult. ordonată  $(L, \leq)$  este  
o latice completă dacă  $\exists$   
 $\inf X$  pt. orice  $X \subseteq L$ .

⑤  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  este o latice  
care este completă pt.  
orice multime  $A$ .

Soluție:  $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

1.  $Y \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow Y \subseteq Y$   
(reflexivitate)

$$\boxed{2} \quad X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$$

$$\left. \begin{array}{l} X \subseteq Y \\ Y \subseteq Z \end{array} \right\} \Rightarrow X \subseteq Z$$

(transitivitate)

$$\boxed{3} \quad X, Y \in \mathcal{P}(A)$$

$$X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$$

(principiul dublei  
inclusiuni)

1, 2, 3  $\Rightarrow$  relații de ordine  
 $\Rightarrow$  lanț  $\Rightarrow$  latice

$$\inf \{X, Y\} = X \cap Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \cap Y \subseteq X, & X \cap Y \subseteq Y \\ Z \subseteq A: Z \subseteq X \wedge Z \subseteq Y \\ \Rightarrow Z \subseteq X \cap Y \end{cases}$$

$$\sup \{X, Y\} = X \cup Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq X \cup Y, & Y \subseteq X \cup Y \\ Z \subseteq A: X \subseteq Z, Y \subseteq Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{X \cup Y\} \subseteq Z$$

$$\Rightarrow (\mathcal{P}(A), \subseteq) \text{ latrice completă}$$

⑥ Dacă  $(A, \leq)$  este o mulțime ordonată, atunci tot așa este și  $(A, \geq)$

Soluție:  $(A, \leq)$  mulțime ordonată  $\stackrel{?}{\Rightarrow} (A, \geq)$  ordonată

1.  $\forall a \in A, \quad a \leq a$   
 $\quad \quad \quad a \geq a, \quad \forall a \in A$   
 $\Rightarrow$  este reflexivă

2.  $\forall a, b, c \in A, \quad a \leq b \text{ și } b \leq c$   
 $\Rightarrow a \leq c$

$a \leq b \Rightarrow b \geq a$   
 $b \leq c \Rightarrow c \geq b$  }  $c \geq a$   
 $\Rightarrow$  este transitivă

3.  $a \leq b$  și  $b \leq a \Rightarrow a = b$

11

$$b \geq a \text{ și } a \geq b \Rightarrow a = b$$

$\Rightarrow$  este antisimetrică

$\Rightarrow (A, \geq)$  este ordonată