Seminarul 4

① Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi (STP) utilizând criteriile indicate:

i) criteriul comparației*

a) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$ (comparăm cu $\sum \frac{1}{n}$)

$\sqrt{4n^2-1} < \sqrt{4n^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{4n^2}} = \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{divergentă}}$

Așadar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$ e divergentă

b) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ (comparăm cu $\sum \frac{1}{n^2}$)

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x_n\to 0} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1 . \in [0,\infty]$.

Cum $l < \infty$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e convergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ e convergentă.

---

* Criteriul comparației

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 2 S.T.P. Atunci

$\boxed{1°}$ Dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq y_n$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$

i) $\sum y_n$ convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ convergentă

ii) $\sum x_n$ divergentă $\Rightarrow \sum y_n$ divergentă

$\boxed{2°}$ Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0,\infty]$, atunci

i) dacă $l < \infty$ și $\sum y_n$ C $\Rightarrow \sum x_n$ C

ii) dacă $l > 0$ și $\sum y_n$ D $\Rightarrow \sum x_n$ D

(⇒ dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$, $l \in (0,\infty)$, atunci seriile $\sum x_n$ și $\sum y_n$ au aceeași natură)

ii) consecințe ale criteriului lui Kummer**

a) $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$\boxed{D = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} > 1}$$

Crit. raportului $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ convergentă

b) $S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

$$* \; D = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 0} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1.$$

$$* \; \boxed{R = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[2^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} - 1\right] \overset{\lim\limits_{x_n\to 0} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \underbrace{\frac{2^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}}_{\to \ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= \ln 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \ln 2 \cdot \infty = \boxed{\infty > 1}$$

Crit. Raabe-Duhamel $\Rightarrow$ seria e convergentă

c) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2$

$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdots 2n$
$(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)$

$\to D=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2\cdot\left[\frac{(2n+3)!!}{(2n+2)!!}\right]^2=$

$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\cancel{2\cdot4\cdots 2n}}{\cancel{1\cdot3\cdots(2n+1)}}\cdot\frac{\cancel{1\cdot3\cdots(2n+1)}\cdot(2n+3)}{\cancel{2\cdot4\cdots2n}\cdot(2n+2)}\right]^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^2=1$

$*R=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^2-1\right]=$

$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\cancel{4n^2}+12n+9-\cancel{4n^2}-8n-4}{4n^2+8n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n}{4n^2+8n+4}=1$

$*\boxed{B}=\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot\left[n\cdot\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right]=$

$=\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot\left[\frac{4n^2+5n}{4n^2+8n+4}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot\frac{\cancel{4n^2}+5n-\cancel{4n^2}-8n-4}{4n^2+8n+4}=$

$=\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot\frac{-3n-4}{4n^2+8n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\cdot\frac{-3n-4}{4n^2+8n+4}\cdot n=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\cdot\underbrace{\frac{-3n^2-4n}{4n^2+8n+4}}_{\to -3/4}=-\frac{3}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln n=\lim_{n\to\infty}\ln n^{\frac{1}{n}}=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)\underset{\text{vezi sem. trecut}}{=}$

$=\ln 1=0$

Deci $B=-\frac{3}{4}\cdot0=0\ \boxed{<1}$

$\Rightarrow$ seria e divergentă.

** Consecințe ale Criteriului lui Kummer.

1. Verificăm cu crit. raportului lui d'Alembert

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

1. $\underline{\underline{D>1}} \Rightarrow \sum x_n \ \underline{C}$
2. $\underline{\underline{D<1}} \Rightarrow \sum x_n \ \underline{\underline{D}}$
3. $D=1 \rightarrow$ trecem la pasul următor

2. Verificăm cu crit. lui Raabe-Duhamel

$$R = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \qquad R = \lim_{n\to\infty} n\cdot(D-1)$$

1. $\underline{\underline{R>1}} \Rightarrow \sum x_n \ \underline{C}$
2. $\underline{\underline{R<1}} \Rightarrow \sum x_n \ \underline{\underline{D}}$
3. $R=1 \Rightarrow$ trecem la pasul următor

3. Verificăm cu crit. lui Bertrand

$$B = \lim_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \qquad B = \lim_{n\to\infty} \ln n\,[R-1)$$

1. $\underline{\underline{B>1}} \Rightarrow \sum x_n \ \underline{C}$
2. $\underline{\underline{B<1}} \Rightarrow \sum x_n \ \underline{\underline{D}}$

---

iii) criteriul radicalului ***

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$c = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\overset{\nearrow 1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2}{2+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}}} = \frac{1^2}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$c = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ seria e convergentă

***Criteriul radicalului

(x_n) șir cu termeni strict pozitivi și $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = c \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. $c<1 \Rightarrow \sum x_n \ C$
2. $c>1 \Rightarrow \sum x_n \ D$

(iv) Criteriul condensării **

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p}, \quad p > 0$$

* (x_n) descrescător

$$\sum x_n \sim \sum 2^n \cdot x_{2^n} \iff \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p} \sim \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot (\ln 2^n)^p} =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot (\ln 2^n)^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n} \cdot n^p \cdot (\ln 2)^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \cdot (\ln 2)^p}$$

$$= \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}}_{\text{convergentă} \iff p > 1.}$$

Pt. $p \in [0,1]$ seria e divergentă.

** Criteriul condensării al lui Cauchy:

Fie (x_n) un șir descrescător de nr. pozitive. Seriile $\sum x_n$ și $\sum 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași natură.

② Studiați convergența și absolut convergența următoarelor serii cu termeni oarecare.

a) $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{3^n}$.

* Seria $\sum x_n$ e absolut convergentă dacă seria $\sum |x_n|$ e convergentă.

absolut conv. $\Rightarrow$ conv.
$\not\Leftarrow$

- verificăm dacă S e absolut convergentă.

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{3^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}.$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+3}{2n+3} = 3 > 1 \Rightarrow$$

seria S e absolut convergentă și în concluzie și convergentă.

b) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

$S'=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{2^n}\right|$

$\left|\frac{\sin n}{2^n}\right|\leq\frac{1}{2^n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e convergentă (seria geom. cu rația $\frac{1}{2}$), deci

conform Crit. Comparației $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{2^n}\right|$ e convergentă, deci

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$ e abs. conv. și în concluzie și convergentă.

③ (Criteriul rap. pt. șiruri). Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir cu termeni strict pozitivi pt. care $\exists\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=l$. Au loc afirmațiile:

i) Dacă $l>1$, atunci $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

ii) Dacă $l<1$, atunci $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

i) Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$, STP

Dacă $l=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}>1$, atunci conform Crit. Raportului seria $\sum x_n$ e convergentă, deci $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

ii) Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x_n}$, STP.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}}{\frac{1}{x_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{l}>1$, deoarece $l<1$.

Atunci, conform Crit. Raportului seria $\sum \frac{1}{x_n}$ e convergentă, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(4) Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Arătați că

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n}.$$

$x_n > \frac{x_n}{1+x_n}$. („A", $x_n + x_n^2 > x_n \Leftrightarrow x_n^2 > 0$)

(*) Așadar, conform criteriului comparației, dacă $\sum x_n$ C $\Rightarrow$ $\sum \frac{x_n}{1+x_n}$ C, iar dacă $\sum \frac{x_n}{1+x_n}$ D $\Rightarrow$ $\sum x_n$ D.

Totodată, știm că dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0,\infty)$, atunci $\sum x_n$ și $\sum y_n$ au aceeași natură.

Pp. $\sum \frac{x_n}{1+x_n}$ C. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x_n}}{\cancel{x_n}\left(\frac{1}{x_n}+1\right)} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n}+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(*) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x_n}}{\frac{\cancel{x_n}}{1+x_n}} = \lim_{n\to\infty} (1+x_n) = 1 \in (0,\infty). \quad (1)$$

Așadar $\sum \frac{x_n}{1+x_n}$ și $\sum x_n$ au aceeași natură și cum $\sum \frac{x_n}{1+x_n}$ am presupus convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ C.

(*) Dacă $\sum x_n$ D, atunci limita din (1) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x_n) = l$ va fi

$l \in (0,\infty)$, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \infty$, deci $\sum x_n$ și $\sum \frac{x_n}{1+x_n}$ au aceeași natură (ambele D)

$l = +\infty$, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Atunci (+) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{x_n}}{\cancel{x_n}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum \frac{x_n}{1+x_n}$ D.