TABLĂ DREAPTA

1. Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}{n!}\right)^2$ - convergentă

I D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\cancel{a(a+1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(a+n-1)}}{\cancel{n!}}\cdot\frac{\overset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}}{\cancel{a(a+1)}\cdot\ldots\cdot(a+n)}\right]^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n+a}\right]^2 = 1$$

II Raabe Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\left[\frac{n+1}{n+a}\right]^2-1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2an+a^2}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}-2an-a^2}{n^2+2an+a^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-2an^2-a^2n}{n^2+2an+a^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2-2a)-a^2n+n}{n^2+2an+a^2} = 2-2a \text{ pt } a\neq 1$$

I dacă $a=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{-n+n}{n^2+2n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \Sigma$ - divergentă

II $2-2a<1 \Rightarrow$

$1-a<\frac{1}{2}$

$a>1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow a>\frac{1}{2} \Rightarrow \Sigma$ - divergentă

III $2-2a>1 \Rightarrow a<\frac{1}{2} \Rightarrow \Sigma$ - convergentă

IV $a=\frac{1}{2} \Rightarrow$ Raabe Duhamel nu decide

Bertrand: $\lim_{n\to\infty}\ln n\left(\frac{n^2-\frac{n}{4}+n}{n^2+n+\frac{1}{4}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\ln n\,\frac{\cancel{n^2}-\frac{n}{4}\cancel{+n}\cancel{-n^2}\cancel{-n}-\frac{1}{4}}{n^2+n+\frac{1}{4}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln n\,\frac{-\frac{n}{4}-\frac{1}{4}}{n^2+n+\frac{1}{4}} =$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n \cdot \pi\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)} = 0<1 \Rightarrow \Sigma$ - divergentă

2. Studiați convergența în funcție de α și calculați $I\left(\frac{3}{2}\right)$

$$I(\alpha) = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^\alpha}$$

(1) pentru convergență folosim proprietăți cu p și λ

$\lim_{x\to\infty} x^p \cdot \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^\alpha}$ (când avem nedefinire în ∞)

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \lim_{x\to\infty} x^{p-\alpha}$

vrem să obținem o limită $\in (0,\infty)$ - adică nici 0, nici ∞

alegem $p = \alpha \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^0 = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow \lambda > 0$ și $\lambda < \infty$

$\Rightarrow$ depinde doar de p dacă $\int$ este sau nu convergentă

I $p > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int$ - convergentă

II $p \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int$ - divergentă

(2) calculăm $I\left(\frac{3}{2}\right) = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{v\to\infty} \int_1^{\sqrt{v}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2 \cdot \cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\,dt = \lim_{v\to\infty} 2\int_1^{\sqrt{v}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\,dt =$

not $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$

$x = 1 \Rightarrow t = 1$

$x = v \Rightarrow t = \sqrt{v}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2t}dx \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$= 2\lim_{v\to\infty} \int_1^{\sqrt{v}} \left(-\frac{1}{t}\right)' \cdot \operatorname{arctg} t\,dt =$

$= 2\lim_{v\to\infty} \left[-\frac{\operatorname{arctg} t}{t}\Big|_1^{\sqrt{v}} + \int_1^{\sqrt{v}} (\operatorname{arctg} t)' \cdot \frac{1}{t}\,dt\right]$

$\frac{1}{t^2} = t^{-2} = (t^{-1})' \cdot (-1)$

$= 2\lim_{v\to\infty} \left[-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{v}}{\sqrt{v}} + \frac{\operatorname{arctg} 1}{1} + \int_1^{\sqrt{v}} \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt\right] =$

$=$

$$\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{At^2+A+B\,t^2+C\cdot t}{t(t^2+1)}=\frac{t^2(A+B)+t\cdot C+A}{t(t^2+1)} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \Rightarrow B=-1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\sqrt{v}} \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{\sqrt{v}}\left(\frac{1}{t}+\frac{-t}{t^2+1}\right)dt=\ln t\Big|_1^{\sqrt{v}}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{v}}\frac{2t}{t^2+1}\,dt=$$

$$=\ln\sqrt{v}-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_1^{\sqrt{v}}=\ln\sqrt{v}-\frac{1}{2}\ln(v+1)-\frac{1}{2}\ln 2$$

$\Rightarrow$ avem $$2\cdot\lim_{v\to\infty}\left(-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{v}}{\sqrt{v}}+\frac{\overset{\frac{\pi}{4}}{\operatorname{arctg} 1}}{1}+\ln\sqrt{v}-\frac{1}{2}\ln(v+1)-\frac{1}{2}\ln 2\right)=$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{4}-\ln 2+2\lim_{v\to\infty}\left[\overset{=\frac{\pi/2}{\infty}=0}{-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{v}}{\sqrt{v}}}+\ln\sqrt{v}-\frac{1}{2}\ln(v+1)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\ln 2+2\lim_{v\to\infty}\underbrace{\ln\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v+1}}}_{0}=\frac{\pi}{2}-\ln 2$$

3. Puncte de extrem condiționat relativ la S.

$f:(0,\infty)^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=2x+3y$

$S=\{(x,y)\in(0,\infty)^2 \mid \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\} \Rightarrow F(x)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-5$

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y)=2x+3y+\lambda(\sqrt{x}+\sqrt{y}-5)=2x+3y+\lambda\sqrt{x}+\lambda\sqrt{y}-5\lambda$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2+\lambda\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=3+\lambda\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-5$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2+\lambda\frac{1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow 2+\lambda\frac{1}{2(5-\sqrt{y})}=0 \\ 3+\lambda\frac{1}{2\sqrt{y}}=0 \Rightarrow \lambda=-3\cdot 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}-5=0 \Rightarrow \sqrt{x}=5-\sqrt{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2+(-6\sqrt{y})\cdot\frac{1}{10-2\sqrt{y}}=0 \Leftrightarrow 2=\frac{6\sqrt{y}}{10-2\sqrt{y}} \Rightarrow \dots \Rightarrow y=4 \Rightarrow x=9$$

$\Rightarrow (9,4)$ – punct critic $\quad$ sigur punctele de extrem sunt printre punctele critice

$f(9,4)=30$ $\quad$ minimul funcției f restricționat la S se atinge în $(9,4)$

(știm că e minim pt. că maxim e când x sau $y\to 0$)