Строгий аналитический метод расчета анизотропного фотонного кристалла для оптических устройств систем обработки информации

К. А. Вытовтов[1], Е. А. Барабанова[2],
И. О. Барабанов[3]
Астраханский государственный технический университет
[1]vytovtov_konstan@mail.ru, [2]elizavetaalexb@yandex.ru,
[3]igorussia@list.ru

О. В. Кравченко[4], В. Ф. Кравченко[5]
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
[3]olekravchenko@gmail.com, [4]kvf-or@mail.ru

***Аннотация.* Приводится фундаментальная система решений анизотропного фотонного кристалла в строгом аналитическом виде и ее исследование, представлены условия устойчивости решений. Показано, что изменение порядка чередования слоев в периоде не влияет на структуру областей неустойчивости.**

Ключевые слова: одномерный фотонный кристалл; фундаментальная система решений; условия устойчивости решений

I. Введение

На сегодняшний день фотонные кристаллы широко используются в различных устройствах оптики, оптоэлектроники, микроволновой техники [1–9]. В частности, они являются основой для фильтров Брэга, оптических коммутационных ячеек, преобразователей поляризации, вентилей, световодов и т.д [1–9]. Понятие фотонных кристаллов впервые было введено Э. Яблоновичем в [4]. Фактически, фотонные кристаллы представляют собой периодические структуры. На сегодняшний день различают одномерные, двухмерные и трехмерные кристаллы в зависимости от числа направлений периодичности. Одномерные фотонные кристаллы в классической электродинамической модели представляют собой периодические слоистые структуры. В квантово-механической модели это кристаллическая решетка, свойства которой периодически изменяются только в одном направлении.

При исследовании фотонных кристаллов используются аналитические [5], численно-аналитические [6] и численные методы [7]. Наиболее распространенным аналитическим методом, используемым в электродинамике фотонных кристаллов, является метод матрицы преобразования [5, 8]. Фактически, эта матрица является фундаментальной системой решений уравнений Максвелла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-37-00059\18

В данной работе представлен строгий аналитический метод расчета и анализа одномерных фотонных кристаллов. Причем метод применим в любом диапазоне длин волн. Основанием для такого утверждения служит факт получения матрицы фундаментальных решений путем прямых тождественных преобразования из уравнений Максвелла в классическом варианте и из уравнения Шреденгера в квантово-механическом варианте. В общем случае речь идет о решении системы линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими кусочно-постоянными коэффициентами с произвольным числом интервалов с постоянными параметрами.

Система фундаментальных решений является унимодулярной 4x4-матрицей, которая представлена в виде конечной суммы унимодулярных матриц с некоторыми коэффициентами вклада. Для получения аналитического выражения матрицы фундаментальных решений использованы знаковые функции, введенные авторами [8].

II. Постановка задачи

Поведение волны в одномерном фотонном кристалле с периодом изменения параметров T описывается системой линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами ω_1^2, ω_2^2, α_1^2, α_2^2 [5, 8, 9]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial t} + \omega_1^2 U_1 + \alpha_1^2 U_2 = 0 \\ &\frac{\partial U_2}{\partial t} + \omega_2^2 U_2 + \alpha_2^2 U_1 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Нашей задачей является нахождение фундаментальной системы решений уравнений (1) в строгом аналитическом виде для произвольных кусочно-постоянных коэффициентов.

III. Фундаментальная система одномерного фотонного кристалла. Эквивалентные моды

Прежде всего, отметим, что с физической точки зрения фундаментальная система связывает тангенциальные компоненты электромагнитного поля в двух различных точках фотонного кристалла. Для однородной анизотропной среды такая система уже представлена в научной литературе [8, 9]. В этом случае решение исходной системы дифференциальных уравнений ищется в экспоненциальной форме. Для одномерного фотонного кристалла фундаментальная система может быть найдена как произведение фундаментальных решений интервалов с постоянными параметрами.

A. Фундаментальная система однородной анизотропной среды

Фундаментальная система решения для однородной анизотропной среды имеет вид [8, 10]:

$$\mathbf{L}(T)=\begin{vmatrix}\sum\limits_{k_i=2i-1}^{2i}(-1)^{k_i+1}\eta_{k_i}^{(1,1)}\mathbf{M}_{k_i} & \sum\limits_{k_i=2i-1}^{2i}(-1)^{k_i+1}\eta_{k_i}^{(1,1)}\mathbf{M}_{k_i}\\ \sum\limits_{k_i=2i-1}^{2i}(-1)^{k_i+1}\eta_{k_i}^{(1,1)}\mathbf{M}_{k_i} & \sum\limits_{k_i=2i-1}^{2i}(-1)^{k_i+1}\eta_{k_i}^{(1,1)}\mathbf{M}_{k_i}\end{vmatrix} \quad (2)$$

где

$$\mathbf{M}_{k_i}=\begin{vmatrix}\cos\left(\Omega_{k_i}\Delta t_i\right) & -\frac{j}{\Omega_{k_i}}\sin\left(\Omega_{k_i}\Delta t_i\right)\\ -j\Omega_{k_i}\sin\left(\Omega_{k_i}\Delta t_i\right) & \cos\left(\Omega_{k_i}\Delta t_i\right)\end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\eta_{k_i}^{(m,n)}=\frac{1}{\Omega_{2i}-\Omega_{2i-1}}\Big[\left(1-|m-n|\right)\left(\omega_{2i-n+1}^2-\Omega_{k_i}\right)+ +\omega_{2i-n+1}^2\alpha_{2i-n+1}\Big] \quad (4)$$

Здесь $\Omega_{2i}=j\lambda_2$, $\Omega_{2i-1}=j\lambda_1$ – нормальные моды системы; $\eta_{2i-1}^{(1,2)}/\eta_{2i-1}^{(1,1)}$, $\eta_{2i}^{(1,2)}/\eta_{2i}^{(1,1)}$ коэффициенты распределения амплитуд на частотах Ω_{2i} и Ω_{2i-1}; λ_2, λ_1 – характеристические числа исходной системы дифференциальных уравнений.

Матрица фундаментальных решений (2) здесь записана в виде удобном для дальнейших преобразований.

B. Фундаментальная система для одномерного фотонного кристалла

Матрица фундаментальных решений одномерного фотонного кристалла с N элементами, имеющими постоянные параметры, может быть найдена, как произведение матриц элементов с постоянными параметрами [10]:

$$\mathbf{L}(T)=\prod_{i=N}^{1}\mathbf{L}\left(\Delta t_i\right) \quad (5)$$

Однако такой вид матрицы не позволяет проводить ее дальнейшее аналитической исследование и эффективно решать обратные задачи. Поэтому авторами была получена фундаментальная матрица в виде конечной суммы 4x4 унимодулярных матриц. Для этого были произведены прямые тождественные преобразований и использованы две знаковые функции $f_{q,i}$, $F_{p,i}$, введенные автором [8]:

$$\mathbf{L}(T)=\sum_{p=1}^{2^N}(-1)^{\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{k_i=2i-1}^{2i}k_iF_{p,i}\right]}\sqrt{\det\boldsymbol{\eta}_{N,p}}\times\sum_{q=1}^{2^{N-1}}\frac{1}{2^{N-1}}\varsigma_{pq}\mathbf{L}_{pq} \quad (6)$$

$$\mathbf{L}_{pq}=\begin{vmatrix}\frac{\eta_{N,p}^{(1,1)}}{\sqrt{\det\eta_{N,p}}}\mathbf{M} & \frac{\eta_{N,p}^{(1,2)}}{\sqrt{\det\eta_{N,p}}}\mathbf{M}\\ \frac{\eta_{N,p}^{(2,1)}}{\sqrt{\det\eta_{N,p}}}\mathbf{M} & \frac{\eta_{N,p}^{(2,2)}}{\sqrt{\det\eta_{N,p}}}\mathbf{M}\end{vmatrix} \quad (7)$$

где элементы матрицы **M** имеют вид:

$$M_{11}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{k_N=2N-1}^{2N}\left(\Omega_{k_N}F_{p,N}f_{q,N}\right)}{\sum\limits_{k_1=1}^{2}\left(\Omega_{k_1}F_{p,1}\right)}}\times\cos\phi_{pq}=$$

$$\eta_{pq}^{(1,1)}\cos\varphi_{pq};$$

$$M_{12}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{k_1=1}^{2}\left(\Omega_{k_1}F_{p,1}\right)}{\sum\limits_{k_N=2N-1}^{2N}\left(\Omega_{k_N}F_{p,N}f_{q,N}\right)}}\times\cos\phi_{pq}= \quad (8)$$

$$\eta_{pq}^{(1,2)}\cos\varphi_{pq};$$

$$M_{21}=-\frac{j}{\sqrt{\sum\limits_{k_1=1}^{2}\left(\Omega_{k_1}F_{p,1}\right)\times\sum\limits_{k_N=2N-1}^{2N}\left(\Omega_{k_N}F_{p,N}f_{q,N}\right)}}\times\sin\phi_{pq}=$$

$$\eta_{pq}^{(2,1)}\cos\varphi_{pq};$$

$$M_{22}=-j\sqrt{\sum_{k_1=1}^{2}\left(\Omega_{k_1}F_{p,1}\right)\times\sum_{k_N=2N-1}^{2N}\left(\Omega_{k_N}F_{p,N}f_{q,N}\right)}\times\sin\phi_{pq}$$

$$\eta_{pq}^{(2,2)}\cos\varphi_{pq};$$

Коэффициент ς_{pq} записывается как

$$\varsigma_{pq}=\sqrt{\frac{\sum_{k_N=2N-1}^{2N}\left(\Omega_{k_N}F_{p,N}f_{q,N}\right)}{\sum_{k_N=1}^{2}\left(\Omega_{k_1}F_{p,1}\right)}}\times$$

$$\prod_{i=1}^{N-1}\left(1+\sum_{k_i-2i-1}^{2i}\frac{\Omega_{k_i+1}F_{p,i+1}f_{q,i+1}}{\Omega_{k_i}F_{p,i}f_{q,i}}\right) \quad (9)$$

Элементы $\left|\eta_{N,p}^{(m,n)}\right|_1^2$ определяются как элементы матрицы, равной произведению матриц с элементами (4) каждого из интервалов с постоянными коэффициентами:

$$\left|\eta_{N,p}^{(m,n)}\right|_1^2=\prod_{i=1}^{N}\left\{\sum_{k_i=2i-1}^{2i}\left[\left|\eta_{k_i}^{(m,n)}\right|_1^2 F_{q,i}\right]\right\} \quad (10)$$

Величина φ_{pq} равна:

$$\varphi_{pq}=\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{k_i=2i-1}^{2i}\left(\Omega_{k_i}F_{p,i}f_{q,i}\Delta t_i\right)\right] \quad (11)$$

C. *Эквивалентные моды*

Матрица $\mathbf{L}(T)$ представляет собой конечную сумму унимодулярных 4x4-матриц $\mathbf{L}_{pq}$ с некоторыми коэффициентами $\sqrt{\det\boldsymbol{\eta}_{N,p}}$ и $\left(1/2^{N-1}\right)\varsigma_{pq}$. Таким образом, результирующая волна может быть представлена, как суперпозиция 2^{2N-1} мод, которые, в соответствии с (6) могут быть разложены в p групп по q мод в каждой. Вводя обозначения

$$\alpha_p=\frac{1}{T}\mathrm{Ln}\sqrt{\det\eta_{N,p}};\ \alpha_{pq}=\frac{1}{T}\mathrm{Ln}\frac{\varsigma_{pq}}{2^{N-1}} \quad (12)$$

получим

$$\mathbf{L}(T)=\sum_{p=1}^{2^N}(-1)^{\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{k_i=2i-1}^{2i}k_iF_{p,i}\right]}\times e^{\alpha_p t}\sum_{q=1}^{2^{N-1}}\frac{1}{2^{N-1}}e^{\alpha_{pq}}\mathbf{L}_{pq} \quad (13)$$

Назовем α_p характеристическим показателем p-й группы, а α_{pq} – характеристическим показателем q-й волны в p-й группе. Таким образом, результирующее колебание можно представить как спектр колебаний из 2^N групп по 2^{N-1} мод в каждой группе. Величина φ_{pq} имеет физический смысл электромагнитной толщины моды pq. Другими словами, мы разложили результирующее колебание в фотонном кристалле в конечный спектр.

Необходимо отметить, что матрица (6) является унимодулярной на основании теоремы Остроградского–Лиувилля [10], поскольку след матрицы коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений равен нулю. С физической точки зрения унимодулярность матрицы фундаментальных решений означает выполнение закона сохранения энергии [11].

IV. ЗНАКОВЫЕ ФУНКЦИИ

Отметим, что выражение (6) и (13) были получены благодаря знаковым функциям $f_{q,i}$, $F_{p,i}$ [8]:

$$f_{q,i}=sign\left\{\sin\left[\frac{\pi}{2^{N+1-i}}(2q-1)\right]\right\}$$

$$F_{p,i}=\frac{1}{2}\left\langle 1+(-1)^{k_i+1}sign\left\{\sin\left[\frac{\pi}{2^{N+1-i}}(2q-1)\right]\right\}\right\rangle \quad (14)$$

Функция $f_{q,i}$ детально описана в [12]. С физической точки зрения она определяет фазы, с которыми взаимодействуют собственные моды интервалов. С математической точки зрения она описывает двоичный закон изменения знака фазы собственных мод в результирующей фазе эквивалентной моды.

Описание функции $F_{p,i}$ мы представляем здесь впервые. Эта функция определяет порядок взаимодействия собственных мод интервалов с постоянными параметрами. Так, например, в случае классической модели между собой взаимодействуют только собственные волны правой поляризации интервалов с постоянными параметрами или только собственные волны левой поляризации. Волны правой поляризации не могут взаимодействовать с волнами левой поляризации. Таким образом, функция $F_{p,i}$ может принимать два значения: один и ноль. Значения функции для трех интервалов с постоянными параметрами представлены в таблице 1.

ТАБЛИЦА I ЗНАЧЕНИЯ $F_{p,i}$

p	***i*=1 *k*₁=1**	***i*=2 *k*₂=3**	***i*=3 *k*₃=5**	***i*=1 *k*₁=2**	***i*=2 *k*₂=4**	***i*=3 *k*₃=6**
1	1	1	1	0	0	0
2	1	1	0	0	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	1	0	0	0	1	1
5	0	1	1	1	0	0
6	0	1	0	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	0	0	1	1	1

Здесь p – номер группы, i – номер интервала, k_i с нечетными индексами имеет отношение к модам правой поляризации, а k_i с четными индексами имеют отношение к модам левой поляризации.

V. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ

В соответствии с теорией Ляпунова [13] решения системы дифференциальных уравнений будут устойчивы, если все собственные числа матрицы фундаментальных решений по модулю меньше либо равны единице $\lambda_i\le|1|$. Собственные числа находятся как корни характеристического уравнения матрицы фундаментальных решений

$$\lambda^4+C_3\lambda^3+C_2\lambda^2+C_1\lambda+C_0=0\ , \quad (15)$$

где $C_0 = \det \mathrm{L}(\Lambda) = 1$; $C_1 = -\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} \sum_{k=j+1}^{4} \big(l_{ii} l_{jj} l_{kk} +$

$l_{ij} l_{jk} l_{ki} + l_{ik} l_{ji} l_{kj} - l_{ik} l_{ji} l_{ki} - l_{ij} l_{ji} l_{kk} - l_{ii} l_{jk} l_{kj} \big)$; $C_2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} \big(l_{ii} l_{jj} -$;

$l_{ij} l_{ji} \big)$; $C_3 = -tr\, \mathrm{L}(\Lambda)$. Здесь l_{ij} –элементы матрицы фундаментальных решений, причем $C_1 = C_3$, поскольку матрица является унимодулярной.

Нашей задачей является нахождение условий устойчивости через элементы матрицы фундаментальных решений. Возвратное уравнение (15) распадается на два квадратных уравнения

$$\lambda^2 + b_1 \lambda + 1 = 0 \ ; \ \lambda^2 + b_2 \lambda + 1 = 0 \ , \qquad (17)$$

коэффициенты которых удовлетворяют соотношениям $b_1 + b_2 = C_1$, $2 + b_1 b_2 = C_2$. Выразив b_1, b_2 через C_1, C_2 получим:

$$b_1 = \frac{C_1}{2} + \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - (C_2 - 2)}; \ b_2 = \frac{C_1}{2} - \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - (C_2 - 2)}. \quad (18)$$

Тогда собственные числа матрицы преобразования за период могут быть записаны в аналитическом виде

$$\lambda_{1,2} = -\frac{C_1}{4} \mp \sqrt{\frac{C_1^2}{16} - \frac{C_2 - 2}{4}} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{C_1}{2} + \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - (C_2 - 2)}\right]^2 - 1} \qquad (19)$$

При этом система будет устойчивой, если выполняются условия

$$\left| C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4(C_2 - 2)} \right| \le 4; \left| C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4(C_2 - 2)} \right| \le 4 \quad (20)$$

С физической точки зрения области устойчивости решений системы соответствуют областям распространения волны (разрешенные зоны в кристалле), области неустойчивости – областям непрохождения волны или запрещенным зонам в кристалле.

Исследование матрицы фундаментальной системы решений приводит к следующему интересному результату: изменение порядка чередования интервалов с постоянными параметрами в периоде при сохранении длительности периода не изменяет структуры областей устойчивости решений. Физическое объяснение данного явления основывается на том, что в фотонном кристалле наблюдается многократное переотражение волны. Значения параметров системы, при которых переотраженные волны складываются в фазе в конце периода, соответствуют областям прохождения волны. Изменение порядка чередования интервалов не изменяет набега фаз за период. Следовательно, структура областей прохождения не изменяется.

VI. Выводы

В данной работе представлен строгий аналитический метод исследования одномерных фотонных кристаллов. Найдена фундаментальная система решений дифференциальных уравнений, описывающих поведение волны в фотонном кристалле. Матрица фундаментальных решений в данном случае является унимодулярной. С физической точки зрения этот факт является следствием закона сохранения энергии. Система получена в виде конечной суммы унимодулярных матриц с соответствующими коэффициентами вклада. Таким образом, результирующее колебание в системе представлено в виде конечного спектра так называемых эквивалентных мод объединенных в 2^N группы по 2^{N-1} моды в каждой группе. Найдено, что закон изменения знака фазы собственных мод интервалов с постоянными параметрами в эквивалентных модах является двоичным.

Исследованы условия устойчивости решений. С физической точки зрения области устойчивых решений являются областями прохождения волны в рассматриваемом фотонном кристалле (разрешенными зонами), области неустойчивости соответствуют областям непрохождения волны (запрещенным зонам).

Также показано, что изменение порядка чередования слоев в периоде не влияет на структуру областей устойчивости решений.

Список литературы

[1] Joannopoulos J.D., Photonic crystals. Molding the flow of light.

[2] Барабанова Е.А., Вытовтов К.А., Мальцева Н.С., Барабанов И.О., Фотонная коммутационная ячейка / Патент №179015 опубликован 21.04.2018.

[3] I.O. Barabanov, N.S. Maltseva, E.A. Barabanova. Switching cell for information transmission optical systems// Conference Proceedings - 2016 International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering, APEDE 2016. pp. 343-347.

[4] Yablonovich E., Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics in Electronics // Phys. Rev. Letters. 1987. V.53 (20). p. 2059.

[5] Vytovtov K.A., Bulgakov A.A., Investigation of photonic crystals containing bianisotropic layers. Proc. 35th European Microwave Conference 2005 V.2 // Paris, France 2005. p.1359-1362.

[6] Yasumoto K., Watanabe K., Numerical Modeling of Two-Dimensional Photonic Crystal Circuits Using Fourier Modal Method Based on Floquet Modes // Proc. of 2008 China-Japan Microwave Conf./ China. 2008. p.3-8.

[7] Dems M., Chung I., Nyakas P., Bischoff S., Panajotov K., Numerical Methods for modeling Photonic-Crystal VCSELs // Optics Express. 2010. V. 18 (15). p. 16042-16054

[8] Vytovtov K.A., An analytical method for investigating periodic stratified media with uniaxial bianisotropy // Radiotekhnika i Electronica 2001. V.46(2). p. 159-165.

[9] Photonic crystals / Edited by A. Massaro. Publisher InTech. 2012. 344p.

[10] Бугров Я.С., Никольский С.М., Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. 3-е изд., М.: Наука, 1988. 432 с.

[11] Vytovtov K.A., Analytical investigation of one-dimensional magnetoelectronic photonic crystals. The 2x2 matrix approach // Journal of the Optical Society of America A. 2007. V.24 (11). p.3564-3572.

[12] Vytovtov K.A., Analytical investigation of stratified isotropic media // Journal of the Optical Society of America A. 2005. V.22 (4). p.689-696.

[13] Gantmacher F.R., Theory of matrices. Chelsea Publishing Company, New York. 1959. 374 p.