Негладкие операторы минимизации нормы на пересечении линейных многообразий и параллелепипеда

В. Н. Козлов, А. А. Ефремов, В. Н. Волкова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Россия, Санкт-Петербург
saiu@ftk.spbstu.ru

***Аннотация*. Рассматриваются разностные уравнения с негладкими операторами для вычисления оптимального управления с обратной связью на основе методов математического программирования. Представленные результаты расширяют классы математических моделей для синтеза оптимальных систем управления.**

Ключевые слова: математическое программирование; управление с обратной связью; негладкие проекторы; минимизация евклидовой нормы

I. Введение

В настоящее время широко используются подходы к оптимизации динамических систем на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [14, 15], теории оптимального управления [2, 13, 15 и др.], метода динамического программирования Р. Беллмана [1] и методов математического программирования [4–7, 10 и др.].

При этом важное место в случае применения математического программирования занимает качественное исследования оптимальности и устойчивости замкнутых систем методами функционального анализа [7, 8, 10].

Представляемые в данной статье результаты расширяют классы математических моделей для синтеза оптимальных систем управления.

Рассмотрены модели замкнутых оптимальных систем с ограничениями на координаты и управления, синтезированных на основе негладких операторов для решения задач математического программирования, сформулированные на основе негладких операторов оптимизации [7].

II. Модели замкнутых оптимальных систем с ограничениями на координаты и управления

Модели замкнутых оптимальных систем с ограничениями на координаты и управления синтезируются на основе негладких операторов для решения задач математического программирования и сформулированы на основе негладких операторов оптимизации [7].

При этом негладкие проекционные операторы формируются на основе классических ортогональных проекторов на линейные многообразия и негладких проекторов на параллелепипеды. Решениями являются предельные точки фундаментальных минимизирующих последовательностей релаксационного типа.

Задача оптимизации сформулирована в виде: вычислить на непустом множестве пространства вектор, который минимизирует функционал в виде квадрата евклидовой нормы при ограничениях типа равенств и двусторонних неравенств на переменные. Таким образом, требуется сформировать оператор для вычисления.

$$x_* = \arg\min\left\{\varphi = \|X - C\|_2^2 \,\middle|\, AX = b,\ A \in R^{m\times n},\ rang\,A = m,\ X^- \le X \le X^+\right\} =$$
$$= \arg\min\left\{\varphi = \|X - C\|_2^2 \,\middle|\, X \in D = D^0 \cap D^1 \ne \varnothing,\right.$$
$$D^0 = \left\{X \,\middle|\, AX = b\right\} \ne \varnothing,\ D^1 = \left\{X \,\middle|\, X^- \le X \le X^+\right\} \ne \varnothing\right\} \in R^n. \qquad (1)$$

Задача (1) в виде минимизации квадратичного функционала на непустом пересечении линейного многообразия и параллелепипеда часто решается релаксационно-проекционным методом [7].

$$X_{k+1}^0 = P^0\left(X_k^0\right) \in D^0,\ X_{k+1}^1 = P^1\left(X_{k+1}^0\right) \in D^1,\ k = 0,1,2,\dots,\ X_0^0 = P^0(C). \quad (2)$$

Соотношения (2) определяют рекуррентную последовательность векторов.

$$\begin{array}{lll}
1).\ k=0: & X_1^0 = P^0\left(X_0^0\right) \in D^0, & X_1^1 = P^1\left(X_1^0\right) = X_1^1 \in D^1; \\
 & \dots\dots\dots & \\
s-1).\ k=s-1: & X_s^0 = P^0\left(X_{s-1}^1\right) \in D^0, & X_s^1 = P^1\left(X_s^0\right) = X_s^1 \in D^1; \qquad (3) \\
s).\ k=s: & X_{s+1}^0 = P^0\left(X_s^1\right) \in D^0, & X_{s+1}^1 = P^1\left(X_{s+1}^0\right) = X_{s+1}^1 \in D^1; \\
s+1).\ k=s+1: & X_{s+2}^0 = P^0\left(X_{s+1}^1\right) \in D^0, & X_{s+2}^1 = P^1\left(X_{s+1}^0\right) = X_{s+2}^1 \in D^1; \\
 & \dots\dots\dots . &
\end{array}$$

Элементы последовательности (3) неограниченно сближаются, образуя фундаментальную последовательность в пространстве R^n, которая сходится к предельному вектору $x_* = \lim x_n,\ n \to \infty,$ как решению задачи (1). Верхние индексы «0» или «1» в (3) указывают на принадлежность элемента последовательности множествам D^0 или D^1. Ортогональный проектор на линейное многообразие D^0 равен

$$P^0\left(C\right)=P^0C+P_Ab,\ P^0=E_n-P^{\perp},\ P^{\perp}=P_AA,\ P_A=A^T\left(AA^T\right)^{-1}, \qquad (4.а)$$

а равенство (2) задает ортогональную проекцию вектора X^0 на параллелепипед

$$P^1\left(x^0\right)=0{,}5\left(\left|x^0-X^-\right|-\left|x^0-X^+\right|+X^-+X^+\right). \qquad (4.б)$$

на основе минимизации отдельных слагаемых квадратичного функционала $\varphi=\|X-C\|_2^2=\sum_{j=1}^n\left(x_j-C_j\right)^2$ на каждом из ортогональных подпространств пространства R^n. При этом минимум на подпространствах достигается с помощью ортогонального проектора (4.б), где $X^0=C-$ вектор безусловного минимума функционала типа нормы.

Таким образом, из равенств (1) – (4) следует, что данная релаксационная вычислительная схема порождает две последовательности X_{k+1}^1 и X_{k+1}^0, первая из которых принадлежит множеству D^1. а вторая – множеству D^0

Эти две последовательности асимптотически сходятся к непустому пересечению линейного многообразия и параллелепипеда, поскольку формируются совокупностью ортогональных проекторов на множества, а предельный элемент последовательностей является решением задачи (1) на основе ортогональных проекторов на линейные многообразия и кусочно-линейных проекторов на ограничивающий параллелепипед.

III. Алготритм решения задачи

Для формулировки операторов минимизации нормы на непустое пересечении линейного многообразия и параллелепипеда требуется определить оператор для предельной точки фундаментальной последовательности сформулированного релаксационного метода. Тогда задача (1) решается с помощью кусочно-линейного оператора на основе алгоритма:

1. Вычисление $p_0=P^0\left(C\right),\ p_1=P^1\left(p_0\right)$,

где $P^0(\mathrm{C})-$ вектор проекции параметра функционала $C\in R^n$ на линейное многообразие $Ax=b$.

2. Вычисление с помощью линейного и негладкого проекционных операторов, задающих вектор $p_2=P^1\left[P^0\left(p_1\right)\right]$.

3. Формирование вектора направления в виде разности векторов

$$p=p_2-p_1=P^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0\left(C\right)\right)\right]\right]-P^1\left(P^0\left(C\right)\right).$$

4. Вычисление предельного вектора-решения

$$x_*\left(\alpha\right)=p_2+\alpha_*p\in D^0=\left\{x\left(\alpha_*\right)\,\middle|\,Ax\left(\alpha_*\right)=b\right\},$$

где параметр $\alpha_*=\left[b-\left(A_i,p_2\right)\right]\left(A_i,p\right)^{-1}\in R$ такой, что выполнено условие

$$x_*\left(\alpha_*\right)=p_2+\alpha_*p\in D^0=\left\{x\left(\alpha\right)\,\middle|\,A_i\,x\left(\alpha\right)=b,\ \alpha_*=\left[b-\left(A_i,p_2\right)\right]\left(A_i,p\right)^{-1}\right\},$$

поскольку имеют место соотношения

$$A_ix\left(\alpha_*\right)=A_i\left(p_0+\alpha_*p\right)=A_ip_0+\alpha_*A_ip=b,$$

из которых следует значение параметра

$$\alpha_*=\left[b-\left(A_i,p_0\right)\right]\left(A_i,p\right)^{-1}.$$

Значения параметра α_* справедливы для матрицы

$$A\in R^{1\times n}.$$

Для матриц общего вида, которые представлены в векторно-строчной записи:

$$A=\left(A_i\right)_{i=1}^{i=m}\in R^{m\times n},\ rang\ A=m,$$

при условии совместности ограничений типа равенств в (1) можно использовать вектор-строку этой матрицы, задающей совместную систему линейных уравнений. Можно также заметить, что предлагаемый вариант учета ограничений типа неравенств, обладающий универсальностью, позволяет выполнить раздельный учет ограничений на группы компонент вектора решения при соответствующем преобразовании линейного многообразия.

Первая форма кусочно-линейного проекционного оператора для вектора $c\in R^n$ на непустое компактное пересечение линейного многообразия и параллелепипеда определяется равенствами

$$x_*\left(\alpha_*\right)=p_2+\alpha_*p=P^1\left[P^0\left[p_1\right]\right]+\alpha_*\left\langle P^1\left[P^0\left(p_1\right)\right]-p_1\right\rangle= \qquad (5.а)$$

$$=P^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0\left(C\right)\right)\right]\right]+\alpha_*\left\langle P^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0\left(C\right)\right)\right]\right]-P^1\left(P^0\left(C\right)\right)\right\rangle,$$

где вектор

$$p_1=P^1\left(p_0\right)=P^1\left(P^0\left(C\right)\right),$$

$$\alpha_*=\left[b-\left(A_i,p_2\right)\right]\left(A_i,p\right)^{-1},\ \left(A_i,p\right)\neq 0,$$

$$p_2=P^1\left[P^0\left[p_1\right]\right],$$

а скалярное произведение – не равно нулю.

Вторая форма оператора, следующая из (5.а), имеет вид

$$x_*=\left(1+\alpha_*\right)P^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0\left(C\right)\right)\right]\right]-\alpha_*P^1\left(P^0\left(C\right)\right). \qquad (5.б)$$

Алгоритм, соответствующий оператору (5.а), представлен в форме:

Шаг 1: вычислить вектор

$$p_1 = P^1(p_0) = P^1\left(P^0(\mathrm{C})\right),$$

где $p_0 = P^0(C)-$ вектор проекции $C \in R^n$ на многообразие $Ax = b.$

Шаг 2: вычислить вектор как суперпозицию проекторов

$$p_2 = P^1\left[P^0\left[p_1\right]\right].$$

Шаг 3: вычислить вектор направления

$$p = p_2 - p_1 = P^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0(C)\right)\right]\right] - P^1\left(P^0(C)\right).$$

Шаг 4: вычислить вектор решения задачи минимизации

$$x_*(\alpha) = p_2 + \alpha_* p \in D^0 = \left\{x(\alpha_*)\,\middle|\,Ax(\alpha_*) = b\right\}.$$

где вещественный параметр $\alpha_* \in R$ такой, что выполнено «условие принадлежности» линейному многообразию для решения в виде

$$x_*(\alpha_*) = p_2 + \alpha_* p \in D^0 =$$

$$= \left\{x(\alpha)\,\middle|\,A_1 x(\alpha) = b,\ \alpha_* = \left[b - (A_1, p_2)\right](A_1, p)^{-1}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_* = \left[b - (A_1, p_2)\right](A_1, p)^{-1},$$

поскольку имеют место соотношения

$$A_1 x(\alpha_*) = A_1\left(p_0 + \alpha_* p\right) = A_1 p_0 + \alpha_* A_1 p = b \Rightarrow \alpha_* = \left[b - (A_1, p_0)\right](A_1, p)^{-1}.$$

IV. Пример

Вычислить вектор решения задачи типа (1), равный

$$x_* = \arg\min\left\{\varphi = \|X - C\|_2^2\,\middle|\,AX = b,\ A \in R^{m\times n},\ rang\,A = m,\ X^- \le X \le X^+\right\},$$

где ограничения типа равенства и неравенства имеют вид

$$Ax = \begin{pmatrix}1 & | -1\end{pmatrix} x = b = -1,$$

$$D^1 = \left\{x\ \middle|\ x^- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = x^+\right\}.$$

Решение.

Шаг 1: вычисление вектора на основе двойного проецирования – на линейное многообразие и параллелепипед

$$p_1 = P^1(p_0) = P^1\left(P^0(\mathrm{C})\right) = 0.5\left(\left|p_0 - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right| - \left|p_0 - \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right| + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right) =$$

$$= 0.5\left(\left|\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right| - \left|\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right| + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix},$$

где вектор $p_0 -$ проекция вектора $C \in R^n,$ определенного в (1), на линейное многообразие

$$p_0 = P^0(C) = 0{,}5\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \times \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} + P_A b = 0{,}5\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \times \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix},\ b = -1.$$

Шаг 2: вычисление вектора

$$p_2 = P^1\left[P^0\left[p_1\right]\right] = 0.5\left(\left|\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right| - \left|\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right| + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix},$$

причем вектор $P^0\left[p_1\right]$ имеет вид

$$P^0(p_1) = 0{,}5\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \times \begin{pmatrix}p_1^1\\p_2^1\end{pmatrix} + P_A b = 0{,}5\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}.$$

Шаг 3: вычисление «вектора направления»

$$p = p_2 - p_1 = P^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0(C)\right)\right]\right] - P^1\left(P^0(C)\right) = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

Шаг 4: вычисление вектора оптимального решения

$$x_*(\alpha) = p_2 + \alpha_* p \in D^0 = \left\{x(\alpha_*)\,\middle|\,Ax(\alpha_*) = b\right\} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},$$

где параметр $\alpha_* \in R$ определен в (4.a) соответствующим условием типа «включения».

Указанное условие может быть представлено следующими соотношениями

$$x_*(\alpha_*) = p_2 + \alpha_* p \in D^0 =$$

$$= \left\{x(\alpha)\,\middle|\,A_1 x(\alpha) = b,\ \alpha_* = \left[b - (A_1, p_2)\right](A_1, p)^{-1}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_* = \left[b - (A_1, p_2)\right](A_1, p)^{-1} = \left[-1 - \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right)\right] \times \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)^{-1} = 1,$$

поскольку имеют место соотношения для определения параметра, при котором предельная точка принадлежит одной из гиперплоскостей линейного многообразия, из которых для определения параметра α следует равенство

$$A_1 x(\alpha) = A_1\left(p_0 + \alpha p\right) = A_1 p_0 + \alpha A_1 p = b \Rightarrow \alpha = \left[b - (A_1, p_0)\right](A_1, p)^{-1}.$$

Сформулированные негладкие проекционные операторы могут применяться для решения различных задач.

В частности, они могут применяться в разностных операторах динамической системы с негладкими операторами оптимизации для переходных состояний.

Это соотношение справедливо, по крайней мере, для многообразия размерности $(n-1).$

Соответствующие разностные операторы динамических оптимальных систем с ограничениями на координаты и управления и негладкими проекционными операторами управления можно представить задачами Коши

$$x_{k+1} = Hx_k + \gamma FTP^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0(c)\right)\right]\right] +$$
$$+\alpha_*(x_k)\left\langle P^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0(c)\right)\right]\right] - P^1\left(P^0(c)\right)\right\rangle,\ x_0 = x^0.$$

При этом операторы могут реализовать локальное или интервальное оптимальное управление динамическими объектами.

На основе математических моделей этого класса можно исследовать устойчивость как сходимость счетной последовательности замкнутых дискретных систем управления с операторами оптимизации при ограничениях на координаты и управления.

Эти модели дополняют аналитические представления операторов оптимизации и соответствующие условия устойчивости замкнутых систем управления для различных типов задач математического программирования, исследованных в [4,7, 8, 12 и др.].

Излагаемые в данной статье исследования развиваются в рамках научно-педагогической школы «Системный анализ в проектировании и управлении [3, 5, 9, 14].

Представленные результаты расширяют классы математических моделей для синтеза оптимальных систем управления.

Заключение

Таким образом, негладкие проекционные операторы допустимых и оптимальных решений для задач с непустыми компактными областями определяют допустимые или оптимизирующие векторы управлений, вычисляемых проекторами с линейными и кусочно-линейными координатными функциями.

Проекционные операторы можно также обобщить для минимизации линейных и квадратичных функционалов на основе проецирования «точек безусловного минимума функционалов» на семейства пересечений линейных многообразий и параллелепипедов.

Это позволяет расширить класс операторов для решения динамических или стационарных задач конечномерной оптимизации при управлении динамическими объектами.

Список литературы

[1] Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во ИЛ, 1960.

[2] Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, Физ.-мат. лит., 1969. 408 с.

[3] Волкова В.Н., Козлов В.Н., Научно-педагогическая школа «Системный анализ в проектировании и управлении» СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2018. 72 с.

[4] Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: ЛГУ, 1939. 69 с.

[5] Classification of Methods and Models in System analysis / Volkova V.N., Kozlov V.N., Mager V.E., Chernenkaya L.V. // Proceedings of 2017 20th IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2017 20. 2017. С. 183-186.

[6] Kirk D. Optimal Control Theorie and Introduction. Mineola. Nev York. 1998. 452 p.

[7] Козлов В.Н. Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость энергетических систем. СЛб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.- 180 с.

[8] Козлов В.Н. Системный анализ, оптимизация и принятие решений. М.: Проспект, 2010. 176 с.

[9] Моделирование систем и процессов. Практикум: учеб. пособие для академического бакалавриата / Под ред. В.Н. Волковой и В.Н. Козлова. М.: Издательство Юрайт, 2015. 449 с.

[10] Первозванский А.А., Гайцгори В.Г. Декомпозиция, координация и приближенная оптимизация. М.: Наука. 1979.- 480 с.

[11] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 254 с.

[12] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянкий, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. Изд. 3-е. М.: Наука, 1976. – 392 с.

[13] Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Наука, 1989. 60 с.

[14] Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник / Под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. М.: Высшая школа, 2004. 616 с.

[15] Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления. М.: МГУ, 1966. 319 с.