

Инструменты численного исследования динамики хаотических систем

А. В. Тутуева, Д. Н. Бутусов, С. В. Горяинов, В. Г. Рыбин
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
avtutueva@etu.ru

Аннотация. Численный анализ хаотических систем – актуальная область нелинейной динамики. Увеличение сложности математических моделей приводят к росту вычислительных затрат при их моделировании. Динамический анализ является важным инструментом обнаружения и классификации режимов колебаний, наблюдаемых в системе. В статье исследуется производительность алгоритмов построения двумерных динамических карт для хаотической системы Хэдли. Сравниваются четыре подхода: вычисление показателей Ляпунова, статистический бифуркационный анализ, рекуррентные диаграммы и метод коммутационного анализа. Предлагаемый в работе алгоритм оценки производительности состоит из двух этапов. На первом этапе путем вычисления перцептивного хэша оценивается приемлемое время моделирования для каждого из методов. На втором шаге исследуется производительность сравниваемых методов при различных разрешениях получаемой динамической карты. Показано, что алгоритм на основе коммутаций демонстрирует наилучшую производительность из всех рассмотренных. Его применение для компьютерного моделирования и программного анализа может значительно ускорить вычисления, особенно в случае построения динамических карт высокого разрешения.

Ключевые слова: динамический хаос; система Хэдли; бифуркационный анализ; рекуррентный анализ; показатель Ляпунова; коммутационный анализ; полужавные методы интегрирования

I. ВВЕДЕНИЕ

Численный анализ хаотических систем является одной из наиболее важных областей нелинейной динамики. С ростом числа приложений теории хаоса, повышается и интерес к инструментам динамического [1] анализа. Большое значение приобретает проблема обнаружения в хаотических системах таких феноменов, как скрытые аттракторы и режимы колебаний. Также постоянно появляются новые математические модели процессов и явлений с хаотическим поведением. Благодаря развитию и усовершенствованию методов идентификации, современные модели хаотических систем обладают большей адекватностью, и, следовательно, процесс их численного моделирования усложняется. К примеру, в статье [2] рассмотрены несколько модификаций известной системы Лотки-Вольтерры, описывающей взаимодействие хищников и жертв в популяции. Для описания динамики

популяций было предложено использовать три дифференциальных уравнения с семью параметрами нелинейности вместо двух уравнений с четырьмя параметрами, как в оригинальной модели.

Таким образом, разработка эффективных методов численного анализа систем с детерминированным хаосом является важной задачей. Традиционные методы исследования включают бифуркационный анализ, расчет спектра ляпуновских показателей, оценку энтропии Колмогорова-Синяя и Цаллиса, расчет размерности пространства системы и др. Для получения достоверных результатов с помощью некоторых из этих методов необходимо долгосрочное моделирование. Наряду с традиционными методами, в литературе можно найти и новые подходы к исследованию динамических систем [3, 4]. Одним из них является алгоритм быстрого расчета показателей Ляпунова [4], однако он применим только при изучении гамильтоновых систем. К тому же, как правило, в статьях редко дается детальное описание предлагаемых алгоритмов [5], что приводит к трудностям при попытке повторить представленные результаты.

В работе [6] авторы представили новую методику исследования динамических систем, называемую методом коммутационного анализа (МКА). Предложенный алгоритм основан на особых свойствах полужавных численных методов интегрирования. Используя данный подход, был обнаружен новый режим колебаний в дискретной модели системы Декуана Ли. Интерес представляют не только качественные результаты, получаемые с помощью МКА, но и эффективность его применения для мультипараметрического анализа хаотических систем. Поскольку метод основан на оценке погрешности двух численных моделей, полученных применением одного и того же дискретного Д-оператора с различным порядком коммутации, можно ожидать получения достоверных результатов даже на небольшом временном интервале моделирования, т.е. быстрой сходимости метода.

Структура статьи выглядит следующим образом. В разделе II описывается тестовая задача Хэдли и показана процедура ее динамического анализа. В разделе III представлен алгоритм сравнительного исследования производительности различных методов построения двумерных динамических карт. В разделе IV показаны экспериментальные результаты, полученные при численном моделировании с использованием рассматриваемых методик. В разделе V сделаны выводы и дано заключение по работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №17-07-00862

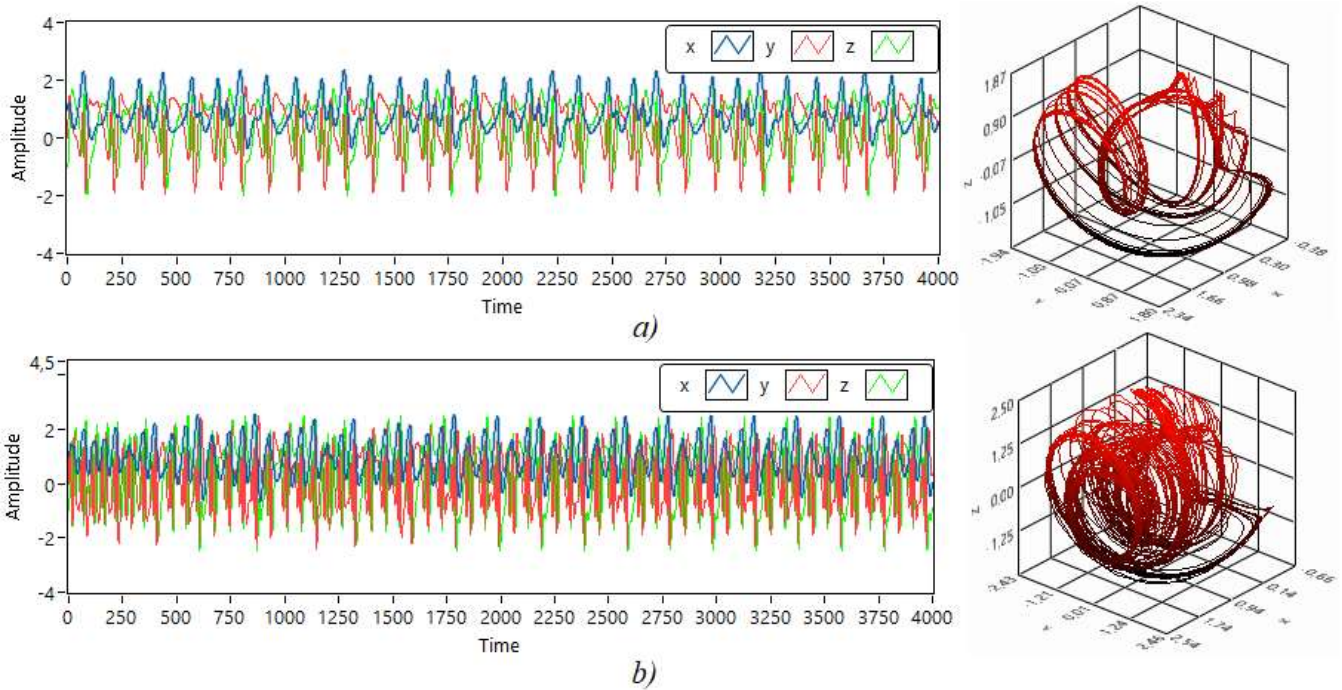


Рис. 1. Поведение переменных во временной области и фазовый портрет системы Хэдли при $a = 0.2, d = 1$ и а) $b = 2.5, c = 10$ б) $b = 4.5, c = 13$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХАОТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ХЭДЛИ

В качестве исследуемой системы была выбрана математическая модель циркуляции Хэдли, предложенная Лоренцем в 1984 [7]. Она состоит из трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y^2 - z^2 - ax + ab; \\ \dot{y} &= xy - cxz - y + d; \\ \dot{z} &= cxy + xz - z,\end{aligned}\quad (1)$$

где $a = 0.2, b = 4, c = 8, d = 1$ – параметры нелинейности, при которых наблюдается хаотическое поведение системы. При изменении этих значений, поведение системы существенно меняется (рис. 1). Известно несколько способов получить динамические карты хаотической системы, но из-за особенностей дискретных вычислений различные подходы дают схожие, но неидентичные результаты (рис. 2).

Наиболее распространенной методикой является вычисление старшего показателя Ляпунова (LLE) и отображение этого значения на двумерной карте в качестве цвета (рис. 2а). Метод LLE оценивает скорость расхождения двух траекторий, берущих начало в близких точках. Главным недостатком этого алгоритма является необходимость относительно долгосрочного моделирования. В зависимости от свойств исследуемой системы, требуемый интервал моделирования может достигать тысяч секунд. Существуют также другие методики вычисления оценки LLE, но они обладают большей вычислительной сложностью и нетривиальны при программной реализации.

Другой способ был предложен в работе [8] как развитие идей статистического бифуркационного анализа. В данном методе (рис. 2б) для расчета числа кластеров в сечении Пуанкаре используется ядерная оценка плотности распределения (KDE). При расчете KDE необходимо применять сглаживающий шаг. Существует несколько стандартных способов подбора данного параметра, в т. ч. правило Сильвермана [9]. При этом возможность применения такой оценки ограничивается типом рассматриваемого распределения. Правило Сильвермана подходит для сглаживания выборки данных, распределенных по нормальному закону [9], поэтому при его применении к хаотическим выборкам могут возникнуть дополнительные трудности.

Для исследования систем с многовитковыми и многопетлевыми аттракторами в [10] было предложено использовать расчет рекуррентной плотности (рис. 2с). Несмотря на то, что полученные значения хорошо коррелируют с поведением хаотической системы, рекуррентная природа подобного алгоритма придает ему сложность N^2 для выборки размера N .

Предположительно, упомянутый выше метод коммутационного анализа (МКА, CAM) является более быстрым способом построения динамических карт (рис. 2д). Метод основан на оценке погрешности между парой численных моделей, полученных с помощью одного и того же полувыводного дискретного оператора, но взятого с различной матрицей коммутаций [6]. Теоретически, данный подход позволяет получить корректные результаты анализа даже на коротких временных интервалах моделирования. Сравним производительность описанных алгоритмов построения динамических карт для системы (1).

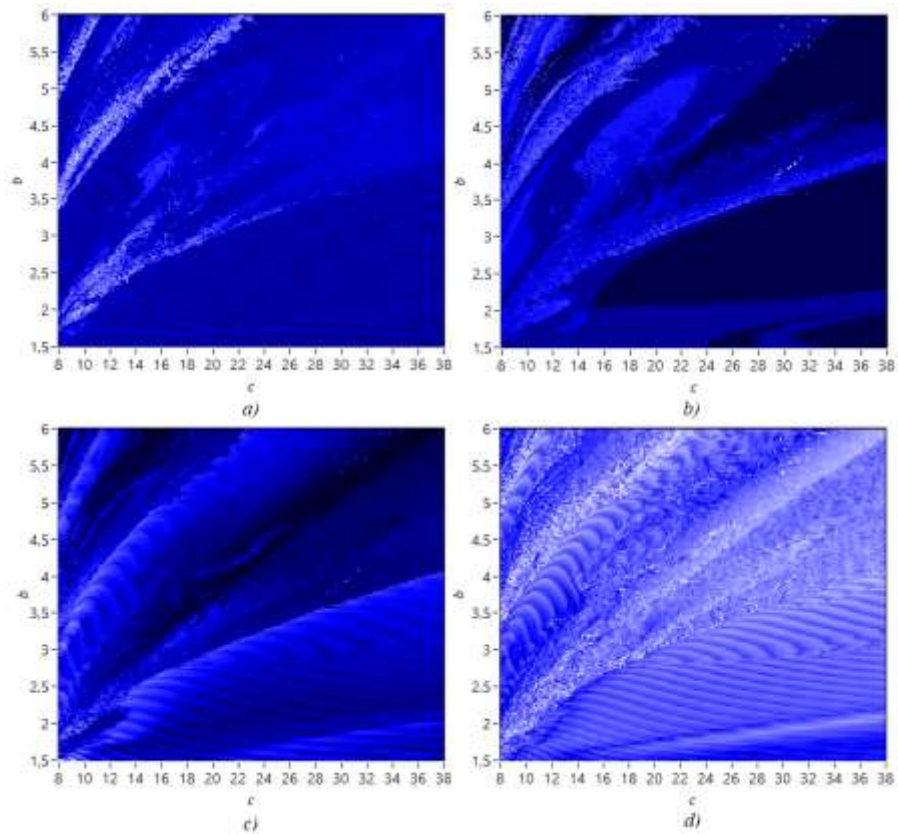


Рис. 2. Динамические карты системы Хэдли, полученные методом *a)* LLE *b)* KDE *c)* MKA *d)* оценки рекуррентной плотности

III. МЕТОДИКА СРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

Предлагаемая методика состоит из двух этапов. На первом этапе мы определяем оптимальное время моделирования для каждого рассматриваемого алгоритма. Это время должно позволять построить динамическую карту с заданной точностью. Для исследования системы (1) было выбрано время моделирования $t = 500$ с. На данном времени все рассматриваемые алгоритмы позволяют получить динамическую карту, которая не будет существенно изменяться при дальнейшем увеличении времени моделирования. Далее выполняется построение динамической карты с разрешением 50×50 пикселей, которая будет использована в качестве эталона. На каждой итерации метода сравнения мы изменяем время моделирования с инкрементом 20 с. и выполняем сравнение получаемой динамической карты с эталонной. Сравнение динамических карт основывается на вычислении перцептивного хэша изображения. Для матрицы чисел, задающей динамическую карту, мы рассчитываем среднее значение и используем его в качестве порогового. Числам матрицы, превышающим 1, мы сопоставляем единицу, остальным сопоставляем ноль. Таким образом, хэш оцениваемой карты может быть сравнен с хэшем эталона путем вычисления расстояния Хэмминга (рис. 3). Для упрощения процедуры сравнения, мы нормализуем полученные значения относительно максимума. Время моделирования для каждого исследуемого алгоритма выбиралось по критерию совпадения карты с эталоном на 90 %.

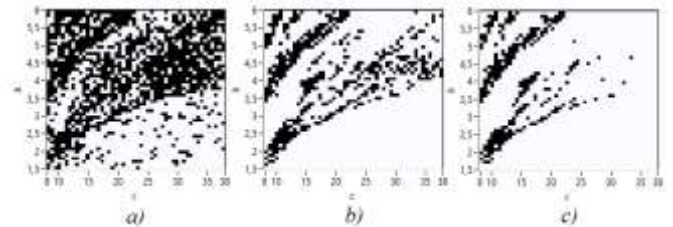


Рис. 3. Хэш динамической карты, полученной методом LLE на интервале моделирования *a)* $t = 20$ с *b)* $t = 200$ с *c)* $t = 500$ с (эталон)

Следующий этап оценки производительности алгоритмов заключается в измерении времени, затрачиваемого на построение динамических карт разного разрешения с заданной точностью. Мы измеряем затраченное время, изменяя разрешение по каждой из осей от 20 до 200 значений.

IV. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Все вычислительные эксперименты были выполнены в среде разработки NI LabVIEW 2017 на процессоре Intel Core i5 4-го поколения. На рис. 4 показана зависимость нормализованного расстояния Хэмминга от времени моделирования, используемого каждым из алгоритмов для построения корректной динамической карты системы Хэдли по параметрам b и c . В качестве решателя ОДУ во всех методах анализа мы использовали полувывный численный метод интегрирования CD второго порядка точности [11]. Можно отметить, что метод LLE наиболее

затратен в сравнении с другими алгоритмами, позволяющими получить динамическую карту с 90% точностью примерно за 30 с. моделирования.

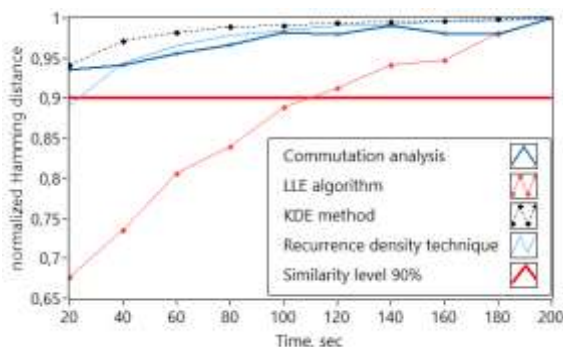


Рис. 4. Зависимость нормализованного расстояния Хэмминга от времени моделирования для сравниваемых алгоритмов

В табл. I представлена оценка времени моделирования, требуемого для достижения точности 90% каждым из рассматриваемых алгоритмов.

ТАБЛИЦА I ТРЕБУЕМОЕ ВРЕМЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Алгоритм	Требуемое время, с
Алгоритм МКА	20
Алгоритм LLE	110
Метод KDE	20
Метод рекуррентной плотности	30

Оценивая производительность рассматриваемых алгоритмов, выведем график зависимости временных затрат от разрешения динамической карты. Из рис. 5 видно, что наихудшей производительностью обладает метод оценки рекуррентной плотности. Для получения карты разрешением 200x200 пикселей (рис. 2) ему требуется в 25 раз больше времени, чем алгоритму МКА, который является наиболее быстрым из рассматриваемых методов. Метод LLE в два раза медленнее, чем МКА, а метод KDE сравним с последним по временным затратам. Отметим, что полученные результаты могут различаться при моделировании других систем.

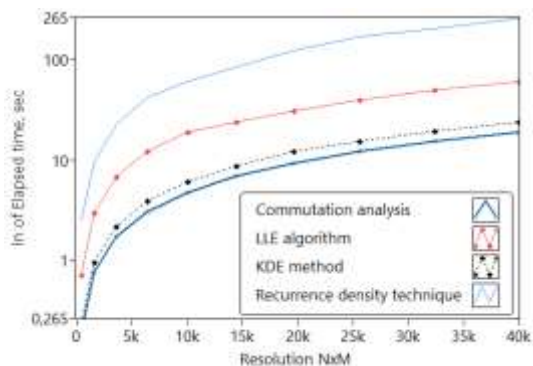


Рис. 5. Производительность методов построения динамических карт

Таким образом, наиболее эффективным способом расчета динамических карт для хаотической системы (1)

является метод коммутационного анализа, что соответствует теоретическим предположениям.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главной задачей данного исследования было сравнение различных способов построения динамических карт хаотических систем. Была предложена методика экспериментального сравнения алгоритмов построения динамических карт, состоящая из двух этапов и основанная на расчете перцептивного хэша карты. На примере системы Хэдли мы показано, что наиболее быстрым является алгоритм МКА, использующий особенности полуявных методов интегрирования, и поэтому не требующий долгосрочного моделирования. Также в алгоритм МКА встроено начальное расхождение траекторий двух параллельных решений, поэтому отсутствует необходимость выбора времени и вектора нормализации. Качественная оценка режимов колебаний хаотических систем, которые можно обнаружить и классифицировать, используя динамические карты, является предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Skiadas C.H., Skiadas C. *Handbook of applications of chaos theory*. CRC Press, 2017.
- [2] Llibre J., Zhang X. Dynamics of Some Three-Dimensional Lotka–Volterra Systems. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2017, V. 3, no. 14, pp. 1–13. DOI: 10.1007/s00009-017-0927-5
- [3] Deleanu D. Dynamic Lyapunov Indicator: a practical tool for distinguishing between ordered and chaotic orbits in discrete dynamical systems. *Proc. 10 th WSEAS International Conference on Non-Linear Analysis, Non-Linear Systems and Chaos (NOLASC'11)*. 2011, pp. 1–3.
- [4] Froeschlé C., Lega E. On the structure of the Hamiltonian systems. The Fast Lyapunov Indicator: a new very sensitive tool. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 2000, V. 32, p. 1115.
- [5] Sprott J.C. A proposed standard for the publication of new chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, V. 21, no. 09, pp. 2391–2394. DOI: 10.1142/S021812741103009X.
- [6] Butusov D.N., Fedorov M.O., Chernyshov A.A., Tutueva A.V., Rybin V.G. Semi-implicit integration of Dequan Li chaotic system. *Proc. XXI IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM)*. Saint Petersburg, 2018.
- [7] Lorenz E.N. Irregularity: a fundamental property of the atmosphere. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 1984, V. 36, no. 2, pp. 98–110.
- [8] Butusov D.N., Ostrovskii V.Y., Tutueva A.V., Savelev A.O. Comparing the algorithms of multiparametric bifurcation analysis. *Proc. XX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM)*. Saint Petersburg, 2017, pp. 194–198. DOI: 10.1109/SCM.2017.7970536.
- [9] Sheather S. J. Density estimation. *Statistical science*, 2004, V.19, no. 4, pp. 588–597. DOI: 10.1214/088342304000000297.
- [10] Tutueva A.V., Butusov D.N., Karimov A.I., Andreev V.S. Recurrence density analysis of multi-wing and multi-scroll chaotic systems. *Proc. Research Monograph of the 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO) including 6th EUROMICRO/IEEE Workshop on Embedded and Cyber-Physical Systems (ECYPS'2018)*. Budva, Montenegro, 2018.
- [11] Butusov D.N., Andreev V.S., Pesterev D.O. Composition semi-implicit methods for chaotic problems simulation. *Proc. XIX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM)*. Saint Petersburg, 2016, pp. 107–110. DOI: 10.1109/SCM.2016.751969