Аналитически-численный метод анализа и функциональный метод построения нелинейных моделей динамических систем

Ю. А. Бычков[1], Е. Б. Соловьева[2], С. В. Щербаков[3]
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
[1]rimelena@yahoo.com, [2]selenab@hotbox.ru, [3]gz52@pskovsobranie.ru

***Аннотация.* Рассмотрен аналитически-численный метод решения нелинейных интегро-дифференциальных систем уравнений, основанный на применении обобщённых функций, регулярные составляющие которых описываются рядами Тейлора. Представлена процедура нахождения параметров колебательных режимов в детерминированных, нелинейных, неавтономных, с сосредоточенными параметрами математических моделях динамических объектов. В рамках принципа «черного ящика», когда моделируется соотношение вход-выход объекта, построены функциональные модели нелинейных компенсаторов для усилителя мощности и представлены результаты их сравнительного анализа.**

Ключевые слова: нелинейная модель; динамическая система; аналитически-численный метод; нейронная сеть; нелинейный компенсатор

I. Введение

Задача построения конструктивной модели исследуемого объекта или явления чрезвычайно сложна и многогранна. Аналитически-численный метод совместного математического моделирования и расчёта динамических систем [1], а также методы моделирования сложных устройств, основанные на установлении соответствия между множествами входных и выходных сигналов [1]–[5], существенно расширяют возможности математического моделирования динамических систем.

Аналитически-численный метод предназначен для анализа и параметрического синтеза детерминированных, нелинейных, неавтономных, с сосредоточенными параметрами моделей динамических систем. В данном методе выполняются: варьирование степени полинома Тейлора и адаптация шага расчёта при анализе модели, контроль пределов локальной и полной абсолютных погрешностей расчёта [1]. Предложенный метод даёт ответы на следующие основные вопросы:

- какую необходимую и достаточную сложность математического описания модели динамической системы требует специфика выполняемых исследований и допускает выбранный для этих исследований математический аппарат;
- какая форма математического описания искомых решений целесообразна и предпочтительна;
- каким образом в заданном временном интервале исследовать существование и единственность искомого решения уравнения динамики модели, а также выяснить возможность его получения с помощью выбранного математического аппарата.

Функциональное моделирование сложных устройств на основе установления соответствия между множествами входных и выходных сигналов является перспективным, например, в следующих случаях. Во-первых, с учетом сложной компонентной структуры устройства математическая модель становится громоздкой и представляет собой систему уравнений высокого порядка. При решении этой системы появляется проблема плохой обусловленности. Во-вторых, в связи с отсутствием достаточной информации о структуре устройства невозможно создать модель на компонентном уровне. В указанных случаях применение математической модели, описывающей вход-выход, является эффективным способом моделирования сложных устройств [1]–[5].

II. Матричная форма модели в аналитически-численном методе

Рассмотрим математические модели детерминированных динамических систем, учитывающие неавтономности и нелинейности моделируемых объектов; разрывы первого рода для воздействий; разрывы первого и второго рода для координат фазового пространства модели и производных от них. Случайные изменения параметров моделей и воздействий, а также распределённые параметры моделей исключены из рассмотрения.

Динамика выделенного класса моделей описывается обыкновенными, неавтономными, нелинейными интегрально-дифференциальными уравнениями с нестационарными коэффициентами и детерминированными правыми частями. Система уравнений, в которой все координаты фазового пространства модели имеют определённый смысл и доступны наблюдению, записывается в матричной форме [1]:

$$\mathbf{A}(D, D^{-1})\,\mathbf{X}(t) = \mathbf{G}(D, D^{-1})\,\mathbf{F}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{F}, t), \qquad (1)$$

где D – оператор обобщённого дифференцирования по независимой переменной моделирования *t*; D^{-1} – оператор интегрирования по *t* до переменного верхнего предела *t*, нижний предел которого есть предначальный момент времени в каждом интервале интегрирования; $\mathbf{A}(D, D^{-1})$ – квадратная матрица размером $L_x \times L_x$ с полиномиальными элементами $a_{l,k}(D)$; $\mathbf{G}(D, D^{-1})$ – матрица размером $L_x \times L_f$ с полиномиальными элементами $g_{l,k}(D)$; $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{F}(t)$ – матрицы-столбцы координат фазового пространства модели и внешних воздействий соответственно; $\mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{F}, t)$ – матрица-столбец со строками в виде сумм произведений следующих сомножителей: времени, нестационарных коэффициентов, классических производных любого порядка и интегралов любой кратности, начиная с нулевого (нулевой), относительно фазовых координат (искомых решений) и внешних воздействий (при этом все сомножители имеют произвольные дробно-рациональные степени).

Полиномы $a_{l,k}(D)$, $g_{l,k}(D)$ формируются согласно выражениям:

$$a_{l,k}(D) = \sum_{m=-M}^{M} a_{l,k}^{[m]}(t) D^m ,$$

$$g_{l,k}(D) = \sum_{m=-M}^{M} g_{l,k}^{[m]}(t)\, D^m ,$$

где m – порядок дифференцирования (при $m > 0$) и интегрирования (при $m < 0$) по переменной *t*. Отдельные или все коэффициенты в представленных полиномах могут быть равны нулю.

Строка str_u с номером u, $u \in [1, L_x]$ матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{F}, t)$ по определению [1] записывается в виде

$$\mathrm{str}_u\ \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{F}, t) = \sum_{v=1}^{V_u} t^{k_{u,v}} h_{u,v}(t) \times \\ \times \prod_{l=1}^{L} \prod_{n=-N_{u,v}}^{N_{u,v}} \left(D^n x_l(t)\right)^{k_{u,v}^{l,n}} , \qquad (2)$$

где $L = L_x + L_f$; $k_{u,v}, k_{u,v}^{l,n} \in Q$, Q – множество рациональных чисел; $N_{u,v} \in Z$, Z – множество целых чисел.

В формуле (2) перебор координат фазового пространства модели и воздействий упорядочен так, что

$$x_l(t) = \begin{cases} x_l(t) \text{ для } \forall\ l \in [1,\ L_x], \\ f_l(t) \text{ для } \forall\ l \in [L_x + 1,\ L]. \end{cases}$$

Нижний предел операторов интегрирования D^{-n}, $n \in \left[-N_{u,v},\ N_{u,v}\right]$ в выражении (2) (в отличие от так же обозначенных операторов в матрицах $\mathbf{A}(D, D^{-1})$ и $\mathbf{G}(D, D^{-1})$) есть начальный момент времени в каждом интервале интегрирования.

III. Вычилительная процедура аналитически-численного метода

Процессы в динамических системах протекают в фазовом пространстве координат, доступных наблюдению и регистрации. В общем случае эти процессы характеризуют: разрывы первого рода для дифференцируемых фазовых координат модели и внешних воздействий; разрывы второго рода для фазовых координат; чередование временных интервалов быстрого и медленного изменения координат фазового пространства; неустойчивость фазовых координат в конечных или полубесконечных временных интервалах [1].

Для корректного учёта негладкостей процессов в динамических системах, например, при дифференцировании разрывов, решения уравнения (1) необходимо искать в классе обобщённых функций, в виде сумм сингулярных и регулярных составляющих [1]:

$$x_l(t) = x_l^-(t) + x_l^+(t) = \sum_{j=0}^{-J_l} S_{l,j}\ \delta_j(t) + \sum_{i=0}^{\infty} R_{l,i}\ t^i / i! , \qquad (3)$$

где $x_l^-(t)$, $x_l^+(t)$ – сингулярная и регулярная составляющие решения $x_l(t)$ соответственно; $\delta_j(t)$ – импульсная функция; $S_{l,j}$ – весовые коэффициенты импульсных функций, определённые в начальной точке с абсциссой $t = 0^+$ для рассматриваемого интервала расчёта; $R_{l,i}$ – коэффициенты степенного ряда с центром разложения в той же точке.

Для поиска решения уравнения (1) в классе обобщённых функций (3) с регулярными составляющими, описанными функционально-степенными рядами, разработан аналитически-численный метод. Вычислительная процедура метода включает аналитическую и численную части.

Сущность аналитически-численного метода состоит в замещении динамических систем детерминированными, неавтономными, нелинейными моделями с сосредоточенными нестационарными параметрами и в последующем поиске решений уравнений их динамики в виде обобщённых функций, регулярные составляющие которых описаны рядами Тейлора.

Процедура метода с аналитической и численной частями состоит в пошаговом (с оценкой) построении динамических процессов в математических моделях.

Верхняя оценка для абсолютной полной погрешности $|\Delta x_l^+(t_k, I_l)|$ расчёта приближенного значения искомого решения $x_l^+(t_k)$ формируется в следующем виде:

$$|\Delta x_l^+(t_k, I_l)| = (1 + h_k \chi_{l,k}) \, |\Delta x_l^+(0^+, I_l)| + |\Delta x_l^+(h_k, I_l)| \, , \quad (4)$$

где $\chi_{l,k}$ – коэффициент, учитывающий неточность начальных условий на шаге расчёта t_k, $k \geq 2$.

Используя приближённое значение искомого решения и вычисленную оценку (4), строим область, включающую неизвестное точное значение регулярной составляющей искомого решения уравнения (1).

IV. Аппроксимация оператора по соотношению вход-выход

Сложное нелинейное устройство можно представить как динамическую систему, ввод-вывод которой описывается нелинейным оператором F_S. При математическом моделировании требуется аппроксимировать оператор F_S оператором F_ε, который отображает входное множество X в выходное множество Y^O с погрешностью ε, $\varepsilon > 0$, так что $y(n) = F_\varepsilon\left[x(n)\right]$, при условии $\left\| y^O(n) - y(n) \right\| \leq \varepsilon$ для всех $x(n) \in X$, $y^O(n) \in Y^O$, где n – нормированное дискретное время. Параметры нелинейного оператора F_ε (математической модели) находятся в результате решения задачи аппроксимации, как правило, в среднеквадратичной или равномерной метрике [1], [4], [5].

Решение задачи аппроксимации зависит от формы математической модели. Универсальные формы нелинейных моделей можно разделить на два класса. Первый класс включает полиномиальные модели: функциональный ряд и полином Вольтерры, многомерные полиномы расщепленных сигналов, регрессионные модели [1], [4]–[6]. Второй класс нелинейных моделей включает различные типы нейронных сетей [1]–[3]. Нейронные сети полезны, когда при увеличении степени полинома погрешность аппроксимации нелинейного оператора убывает медленно.

На основе операторного подхода могут быть построены нелинейные модели разных устройств (фильтров, компенсаторов, детекторов, эквалайзеров и т.д. [1]–[6]), в том числе и компенсаторов нелинейных искажений сигналов для усилителей мощности (УМ), включенных в каналы связи (КС) [1], [7]. Усилитель мощности является линейным устройством лишь в узкополосном частотном диапазоне и в маломощном рабочем режиме. На практике усилитель работает с широкополосными сигналами, и его характеристики близки к насыщению для достижения максимальной выходной мощности. Нелинейность УМ приводит к появлению интермодуляционных компонент, которые проникают в соседние каналы связи. Такое проникновение возможно из-за расширения спектра входного сигнала в результате его нелинейного преобразования [1], [7].

Полосовой фильтр и УМ образуют структуру Винера (каскадное соединение линейной динамической цепи и безынерционной нелинейности), описывающую канал связи. Методы помехозащищенного кодирования, применяемые в каналах связи, не обеспечивают требуемый уровень надежности передачи информации. Для борьбы с нелинейными искажениями целесообразно применять компенсаторы, синтезированные в соответствии с операторным подходом на наборах входных и выходных сигналов [7].

Рассмотрим синтез компенсаторов для борьбы с нелинейными искажениями на примере канала связи, описанного низкочастотной моделью Винера с представленными ниже уравнениями [1]:

$$\dot{x}(n) = d_1 \dot{\xi}_1(n) + d_2 \dot{\xi}_1^2(n) + d_3 \dot{\xi}_1^3(n) \, ,$$

где $d_1 = 1$, $d_2 = 0.2$, $d_3 = 0.1$; $"\cdot"$ – знак комплексности переменной; $\dot{x}(n)$ – выходной сигнал нелинейного канала связи при входном сигнале $\dot{\xi}(n)$, являющимся комплексной огибающей модулированного сигнала; $\dot{\xi}_1(n)$ – выходной сигнал линейной динамической цепи со следующей передаточной функцией:

$$H(z) = (1{,}0119 - 0{,}7589\, j) + (-0{,}3796 + 0{,}5059\, j) \cdot z^{-1} \, .$$

8PSK- and 4QAM-сигналы – входные сигналы $\dot{\xi}(n)$ КС.

Для подавления нелинейных искажений сигналов в модели КС построены следующие модели нелинейных компенсаторов:

- Полином Вольтерры (ПВ) [1], [4], [5]

$$\dot{y}(n) = \sum_{i_1=0}^{I_1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \dots \sum_{i_{m/2}=0}^{I_{m/2}} \sum_{i_{m/2+1}=0}^{I_{m/2+1}} \dots$$
$$\dots \sum_{i_m=0}^{I_m} \dot{C}_{i_1 i_2 \dots i_{m/2} i_{(m/2+1)} \dots i_m} \dot{x}^{i_1}(n) \dot{x}^{i_2}(n-1) \dots$$
$$\dots \dot{x}^{i_{m/2}}(n - m/2) \left[\dot{x}^*(n)\right]^{i_{m/2+1}} \dots \left[\dot{x}_m^*(n - m/2)\right]^{i_m} ,$$

где $\dot{y}(n)$ – выходной сигнал модели компенсатора, $I = I_1 + I_2 + \dots + I_{m/2} + I_{(m/2+1)} + \dots + I_m$ – степень полинома ($I = 3$), $*$ – знак комплексного сопряжения, $m/2$ – длина памяти ($m = 10$);

- Двухслойный персептрон (ДП) [1]–[3]

$$\dot{y}(n) = G\left(c_0 + \sum_{i=1}^{I} c_i\, G\left(\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\dot{x}_j(n)\right)\right),$$

где входной сигнал модели – вектор

$$\left[\dot{x}_0(n), \dot{x}_1(n), ..., \dot{x}_m(n)\right] = \left[1, \dot{x}(n), ..., \dot{x}\left(n-(m-1)\right)\right], \quad (5)$$

G – функция активации (гиперболический тангенс), I – число нейронов ($I = 5$), $(m-1)$ – длина памяти ($m = 5$);

- Рекуррентная нейронная сеть Гаммерштейна (РНСГ) [1]

$$\dot{y}(n) = \sum_{r_b=0}^{R_b} b_{r_b} n\dot{e}t^{(2)}(n-r_b) - \sum_{r_a=1}^{R_a} a_{r_a}\dot{y}(n-r_a),$$

где

$$n\dot{e}t^{(2)}(n) = \sum_{k=0}^{I} c_k n\dot{e}t_k^{(1)}(n), \; n\dot{e}t_0^{(1)}(n) = 1,$$

$$n\dot{e}t_k^{(1)}(n) = G\left(\dot{u}_k^{(1)}(n)\right), \; \dot{u}_k^{(1)}(n) = \sum_{l=0}^{m} w_{kl}\dot{x}_l(n), \; k = 1, 2, ..., I,$$

$\dot{x}_0(n) = 1$, входной сигнал модели компенсатора – вектор, описанный выражением (5), G – сигмоидальная функция активации (гиперболический тангенс), I – число нейронов ($I = 3$), $(m-1)$ – длина памяти ($m = 2$), $R_b = 1$, $R_a = 1$.

Среднеквадратичная погрешность нелинейной компенсации вычисляется на основе следующего выражения:

$$\varepsilon = \frac{1}{998}\sqrt{\sum_{n=3}^{1000}\left|\dot{y}(n) - \dot{\xi}(n)\right|^2}.$$

Значения ε погрешности моделирования и число Q параметров в моделях нелинейных компенсаторов представлены в таблице.

ТАБЛИЦА I РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОМПЕНСАТОРОВ

Модель	**Погрешность моделирования и число параметров модели**	
	Погрешность	***Число параметров***
ПВ	$0.2*10^{-3}$	286
ДП	$0.6*10^{-3}$	36
РНСГ	$0.2*10^{-3}$	16

Из анализа результатов подавления нелинейных искажений сигналов в канале связи со структурой Винера видно, что рекуррентная нейронная сеть Гаммерштейна, как модель нелинейного компенсатора, превосходит двухслойный персептрон по точности обработки сигналов и полином Вольтерры по простоте реализации.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный аналитически-численный метод анализа детерминированных, нелинейных, неавтономных, с сосредоточенными параметрами моделей динамических систем обладает следующими достоинствами:

- решения уравнений динамики сформированной модели описываются обобщёнными функциями с регулярными составляющими в виде рядов (полиномов) Тейлора;
- существование и единственность решения уравнения динамики модели (1) и возможность его получения с помощью выбранного математического аппарата доказаны в рамках рядов Тейлора;
- разработаны процедуры нахождения параметров колебательных режимов в динамических моделях, а также исследованы регулярности и устойчивости таких режимов.

Модели в виде нейронных сетей, которые описывают однозначное соответствие между множествами входных и выходных сигналов динамических систем, разнообразны. На примере синтеза нелинейного компенсатора искажений сигналов для усилителя мощности показано, что среди разных типов нейронных сетей удается можно найти такую сеть, которая обеспечивает высокую точность обработки сигналов и является более простой по сравнению с полиномиальными моделями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Analysis of mathematical models of continuous and discrete non-linear systems / U.A. Bichkov, U.M. Inshakov, E.B. Solovyeva, S.A. Scherbakov. St. Petersburg: Saint-Petersburg Electrotechnical University “LETI”, 2017. 174 p.

[2] Haykin S. Neural networks and learning machines. New York: Pearson Education Inc., 2009. 906 p.

[3] Bianchini M., Maggini M., Jain L.C. Handbook on neural information processing. Betlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. 538 p.

[4] Mathews V.J., Sicuranza G.L. Polynomial signal processing. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000. 452 p.

[5] Ogunfunmi T. Adaptive nonlinear system identification. The Volterra and Wiener model approaches. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 229 p.

[6] Billings S.A. Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2013. 555 p.

[7] Schreurs D., O’Droma M.,. Goacher A.A., Gadringer M. RF power amplifier behavioral modelling. New York: Cambridge university press, 2009. 269 p.