Задачи со свободными границами в проблемах медицины

Ф. Х. Кудаева, А. А. Кайгермазов,
А. Ю. Паритов, Д. А. Хашхожева
Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х.М. Бербекова
Нальчик, Россия
e-mail: bsk@kbsu.ru

А. Х. Жемухов
Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет им. В.М. Кокова
Нальчик, Россия
e-mail: kbgsha@rambler.ru

Аннотация. **Предлагаемая работа посвящена исследованию задачи со свободными границами типа Стефана. В работе методом эквивалентной линеаризации получено приближенное решение задачи. С использованием матрично-ориентированной среды MatLab проведены численные расчеты.**

Ключевые слова: свободная граница; одномерная задача; стационарная задача

I. Введение

Криогенное замораживание используется в медицине для локального необратимого разрушения биологической ткани, для чего применяются криозонды с плоской, цилиндрической или с полусферической формами охлаждающей поверхности. Криохирургия считается точным и управляемым процессом, хотя полное решение ее тепловых аспектов не получено до настоящего времени. Решающее значение для решения таких проблем приобретают математические методы расчета и прогноза, основанные на исследовании специальных постановок задач Стефана относящихся к задачам математической физики. В таких задачах определению подлежат как температурное поле, так и его подвижные изотермические поверхности, закон движения которых заранее не известен. Предлагаемая работа посвящена исследованию одной такой краевой задачи со свободными границами для нелинейных эволюционных уравнений, возникающих при математическом моделировании проблем криохирургии.

В работе получено точное аналитическое решение стационарной задачи, которое определяет очень важные для хирурга максимальные размеры замораживания, криопоражения и теплового возмущения. Методом Ротэ для определения приближенного значения $u_k\ (x)$ и S_k функций $u\ (x,\ t),\ S\ (t)$ в точках $t{=}t_k$ получена аппроксимация краевой задачи (1)–(3)в виде системы краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Используя функцию и формулы Грина, задача сведена к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра на каждом временном слое. Применяя конечномерную аппроксимацию, задача сведена к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для определения приближенного решения особенно эффективным оказался метод эквивалентной линеризации, идеи которого восходят к работам Лейбензона в теории теплопроводности и Крылова–Боголюбова–Митропольского в теории нелинейных колебаний. Краевые условия выполняются. Потребовав, чтобы используемая конструкция удовлетворяла дифференциальному уравнению в смысле равенства нулю интегральной невязки приходим к задаче Коши для определения $x^*{=}x^*(t)$ и $s{=}s(t)$. Как известно, дифференциальные уравнения широко используются для математического моделирования процессов и явлений в различных областях науки и техники, где в процессе решения сталкиваемся с трудностями. На это тратится много времени и есть вероятность допустить ошибки, поэтому возникла идея применить средства матрично-ориентированного математического пакета MatLab для исследования задачи со свободными границами. В работе построена разностная схема задачи. Алгоритм решения разностной задачи реализован с использованием матрично-ориентированной среды MatLab, а также в работе имеются графики, построенные с использованием среды MatLab.

II. Постановка задачи

Определение динамики температурного поля в охлаждаемых и замораживаемых биологических тканях описывается решением следующей задачи со свободными границами: [1, 2, 3]:

$$0<t<t_1:\quad \begin{aligned} & u_{xx}-u_t=u^{\beta}, \quad 0<x<s(t) \\ & u(x,0)=u_0(x), \quad 0<x<s(0), \\ & u_x-Hu=-H\varphi(t), \quad x=0, \\ & u(s(t),t)=0, \quad u_x(s(t),t)=0, \\ & u(0,t_1)=1; \end{aligned} \tag{1}$$

$$t_1 < t < t_2: \quad \begin{aligned} & u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_t = 0, \quad 0 < x < x^*(t), \\ & u_{xx} - u_t = u^{\beta}, \quad x^*(t) < x < s(t), \\ & u_x - Hu = -H\varphi(t), \quad x = 0, \\ & [u]_{x^*} = 0, \quad [u_x]_{x^*} = P x_t^*, \quad u(x^*(t), t) = 1, \\ & u(s(t), t) = 0, \quad u_x(s(t), t) = 0, \\ & u(0, t_2) = u_n; \end{aligned} \qquad (2)$$

$$t > t_2: \quad \begin{aligned} & u_{xx} - u_t = u^{\beta}, \quad x^*(t) < x < s(t), \\ & u_x - Hu = -H\varphi(t), \quad x = 0, \\ & [u]_{x^{**}} = 0, \quad [u_x]_{x^{**}} = P_1 x_t^{**}, \quad u(x^{**}(t), t) = 1, \\ & u(s((t), t) = 0, \quad u_x(s((t), t) = 0, \\ & [u]_{x^*} = 0, \quad [u_x]_{x^*} = P x_t^*, \quad u(x^*(t), t) = 1. \end{aligned} \qquad (3)$$

В (1)–(3) температурное поле $u=u(x,t)$ и границы $x^{**}=x^{**}(t)$, $x^*=x^*(t)$, $s=s(t)$ являются искомыми функциями. a, H, P_1, P – известные параметры, $U_0(x), \varphi(t)$ – известные функции,

$0 \le \beta < 1$, $a^2 = \underline{\lambda}\bar{c}\bar{\rho} / \bar{\lambda}\underline{c}\underline{\rho}$,

$H = (\alpha / \underline{\lambda})\sqrt{\bar{\lambda}/W}$, $\quad W = \tilde{a} W_0$, $\quad W_0 = c_k m_k$,

$\tilde{a} = \left[\bar{T} - \left(\bar{T} - T^*\right)\right]^{1-\beta}$,

$\varphi = 1 + \underline{\lambda}/\bar{\lambda} u_A(t) - \underline{\lambda}/\bar{\lambda}$, $\quad u_A(t) = u_A\,(1 - \exp(-\chi t))$,

$u_A = \left(\bar{T} - T_A\right) / \left(\bar{T} - T^*\right)$, $\quad P = P / \bar{c}\bar{\rho}\left(\bar{T} - T^*\right)$, $\quad P = \Lambda \bar{\rho}$,

$\bar{T} = 36{,}7^0 C$, $\quad T^{**} = 0 \div -30^0 C$,

$T^* = 0 \div -3^0 C$, $\quad u_n = \left(\bar{T} - T^{**}\right) / \left(\bar{T} - T^*\right)$, $\quad T_A$ – температура аппликатора; λ, c, ρ, Λ _ теплофизические характеристики биологической ткани; c_k, m_k – теплоемкость и скорость массы крови; $\chi > 0$ – параметр выхода на заданный режим охлаждения; β – параметр нелинейности; знак черты относится к не замороженной, а снизу к замороженной области биологической ткани; [ ] – означает скачок стоящей под ним функции.

Соответствующая (1)–(3) стационарная задача допускает точное аналитическое решение. Задачу (1)-(3) методом Ротэ сводим к системе дифференциальных уравнений. Используя функцию и формулы Грина для дальнейшего исследования задачи получены нелинейные интегральные уравнения, которые с использованием конечномерной аппроксимации, сведены к системе нейлинейных алгебраических уравнений.

Считая $x^*=x^*(t)$ и $s=s(t)$, приближенное решение задачи (1)-(3) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{H(\varphi-1)x^*(t)}{1+Hx^*(t)} + \dfrac{H(\varphi-1)x^*(t)}{1+Hx^*(t)} \dfrac{x}{x^*(t)}, & 0 < x < x^*(t), \\ \left(\dfrac{s(t) - x}{s(t) - x^*(t)}\right)^{\frac{2}{1-\beta}}, & x^*(t) < x < s(t). \end{cases} \qquad (4)$$

При этом краевые условия для $x=0$, $x=x^*(t)$, $x=s(t)$ выполняются автоматически. Дифференциальные уравнения и оставшиеся краевые условия удовлетворимы в смысле общих тепловых балансов по каждой из областей биоткани с учетом условия сопряжения:

$$\begin{aligned} & u_x(x^*+0,t) - P x_t^* - H\left(1 + \frac{H(\varphi-1)x^*(t)}{1+Hx^*(t)} - \varphi\right) - \frac{1}{a^2}\int_0^{x^*} u_t(x,t)dx = 0, \\ & u_x(x^*+0,t) + \int_0^{x^*} u_t(x,t)dx + \int_{x^*}^{s} u^{\beta}(x,t)dx = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Полагая в (5) $u(x,t) \approx \tilde{u}(x,t)$, после вычисления производных и интегралов для определения $x^*=x^*(t)$ и $s=s(t)$ приходим к задаче Коши:

$$\begin{aligned} & \frac{ds}{dt} + \frac{2}{1-\beta}\frac{dx^*}{dt} + \frac{3-\beta}{1+\beta}(s - x^*) - \frac{2(3-\beta)}{(1-\beta)^2}\cdot\frac{1}{s - x^*} = 0, \quad t > t_1, \\ & \frac{d}{dt}\left\{\left[\frac{(\varphi-1)x^*}{2a^2(H^{-1}+x^*)} + P\right]x^*\right\} - \frac{\varphi-1}{H^{-1}+x^*} + \frac{2}{1-\beta}\cdot\frac{1}{s-x^*} = 0, t > t_1 \\ & x^*(t_1) = 0, \quad s(t_1) = s_0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Заменяя производные конечными разностями, получаем систему нелинейных уравнений относительно $x^*=x^*(t)$ и $s=s(t)$ на данном временном слое.

Алгоритмы получения приближенных решений реализованы на ЭВМ с использованием матрично-ориентированного пакета MatLab. Численные расчеты показывают, что вполне удовлетворительные результаты дают простейшие приближенные решения.

III. Реализация алгоритмов решения задачи в системе MATLAB

```
>>b=0.01;
>> h=0.5;
>> u1=-1:0.5:5;
>> ua=-3;
>> f=u1+(1/h).*sqrt((2/(1+b)).*exp((1+b)/2).*log(u1))-ua;
>> plot(u1,f,['R','*','-.']);
>> grid on;
>> s=(2/(1-b)).*sqrt((1+b)/2).*exp((1-b)/2.*log(u1));
>> plot(u1,s,['R','*','.-']);
>> grid on;
0.0225 + 1.4354    0.0160 + 1.0185    0         1.0187
1.4356             0.7547             2.0233    2.2595
2.4730             2.6690             2.8514    3.0226
3.1844
```

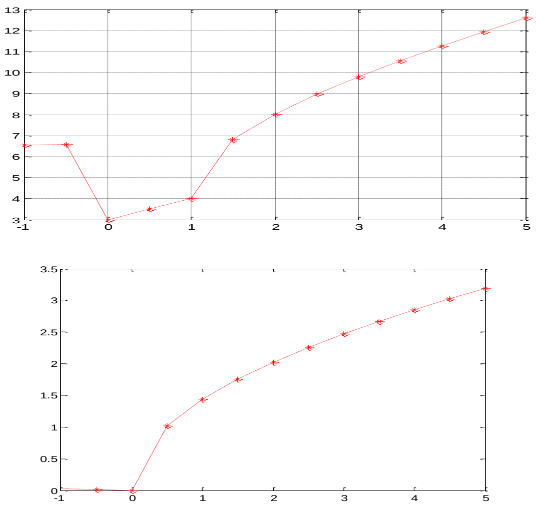

Рис. 1. Динамика температурного поля

IV. Заключение

Рассмотренные одномерные задачи позволяют просчитать ряд типичных случаев замораживания биологических тканей, с достаточной точностью определить частные и общие закономерности процесса охлаждения и замораживания, составить серии монограмм, необходимых для использования в практической медицине, наметить дальнейшее направление исследований, а использование пакета MatLab позволяет расширить диапазон реальных приложений. С помощью используемого пакета MatLab можно сэкономить время, провести анализ и обработку данных задачи, визуализировать результаты исследований, разработать графические и расчетные приложения. Применение матрично-ориентированного пакета MatLab сокращает работу поиска решения, в отличие от поиска решения аналитическим математическим способом. В пакет уже встроены функции, которые отделяют интервал, который является областью допустимых значений подзадач при исследовании искомой задачи. С помощью данного пакета также можно определить количество итераций, приводящее к решению задачи.

Дальнейшая работа по данной тематике предполагает применение полученных результатов в различных областях: исследование математических моделей в экономике, экологии.

Список литературы

[1] Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х., Кармоков М.М., Нахушева Ф.М. Математическая модель плоской криодеструкции биологической ткани. Современные проблемы науки и образования. №2, URL: www.science-education.ru/129-21683, 2015 г.

[2] Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Karmokov M.M. , Kerefov M.A. , Edgulova E.K., Bechelova A.R. Information and Communication Technologies Solving a Free Boundaries Problems/ Proceedings of the 2017 International Conference «Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies» (IT&QM&IS) September, 23-30, 2017 St. Petersburg, Russia, 2017, ISIN 978-1-5386-0703-9, Стр. 226.

[3] Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Edgulova E.K., Bechelova A.R., Tkhabisimova M.M., Kerefov M.A. Study of Spherically Symmetric Hypothermia and Biological Cryodestruction Tissues Using matlab/ Proceedings of the 2017 International Conference «Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies» (IT&QM&IS) September, 23-30, 2017 St. Petersburg, Russia, 2017, ISIN 978-1-5386-0703-9, Стр. 388.