Алгоритм численного решения задачи с сингулярностью

Ф. О. Найдюк
Ростовский государственный университет путей сообщения, Воронежский филиал
Воронеж, Россия
xakepph@ ya.ru

Е. Н. Десятирикова[1], С. А. Чепелев, О. В. Курипта
Воронежский государственный технический университет
Воронеж, Россия
[1]science2000@ya.ru

И. М. Губкин
Воронежский государственный медицинский университет
Воронеж, Россия
gubkin7@ya.ru

***Аннотация.* В статье рассмотрена задача с сингулярностью, благодаря которой возможно моделирование широкого класса процессов различной природы. Для этой задачи построен численный алгоритм пригодный к использованию вычислительных мощностей ЭВМ. Предложен к рассмотрению пример иллюстрирующий реализацию предложенного численного алгоритма в системе компьютерной алгебры Maxima, базирующейся на языке Common Lisp в приложении к задаче анестезиологического пособия при хирургических операциях на открытом сердце.**

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа; численное интегрирование; геометрический граф; смешанная задача; функция Грина; моделирование анестезиологического пособия

I. Актуальность

Широкий класс самых разнообразных физических, биологических и экономических процессов может быть смоделирован уравнением типа (см., например, [1])

$$u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad \left(x \in \Gamma, t > 0\right), \qquad (1)$$

в котором Γ – геометрический граф (сеть), а $q(x)$ – конечная линейная комбинация δ и δ' функций с носителями в точках из Γ

$$q(x) = \sum_i k_i \delta(x - x_i) + \sum_j \tilde{k}_j \delta'(x - \tilde{x}_j) \cdot$$

Перечень задач моделирования, использующих в качестве инструмента уравнение (1) охватывает: процессы в сетях волноводов [2], деформации и колебания стержневых решёток, деформации упругих сеток и струнно-стержневых систем (см., например [3, 4, 2]), диффузия в сетях (см., например [5]), распространение электрического потенциала в нейроне и нейронных сетях, бифуркация вихревых течений в жидкости, гемодинамика, колебания сложных молекул, расчёт гидравлических сетей.

Особым интересом при рассмотрении этих задач является прогнозирование состояния упругих связей в любой наперёд заданный промежуток времени для любого узла сети.

Подход, в котором решение уравнения (1) может быть представлено в виде, подходящем для построения вычислительных алгоритмов, наиболее пригодных к использованию вычислительных мощностей ЭВМ (см., например [6]) видится наиболее перспективным.

II. Базисная основа алгоритма численного решения задачи с сингулярностью

Рассматривается математическая модель:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (0 < x < \ell,\ t > 0) \\ l_1(u(\cdot,t)) = 0,\ l_2(u(\cdot,t)) = 0 \quad (t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \le x \le \ell) \end{cases}, \qquad (2)$$

где $\varphi \in C^2[0;\ell]$, $\psi \in C^1[0;\ell]$, l_1: $l_1 y = y(0)$ или $l_1 y = y'(0)$, $l_2 y = y'(\ell) + k\,y(\ell)$.

Модель (2) может являться описанием физического процесса колебания в вертикальной плоскости следующих систем:

Рис. 1. Колебания струны с подпружиненным концом

Система представляет растянутую струну, один конец которой жёстко закреплён (рис. 1*а*) или свободно (без

Статья подготовлена на основе научных исследований, выполненных при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда «Программно-целевое управление комплексным развитием Арктической зоны РФ (проект №14-38-00009)». Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

трения) движется только в вертикальном направлении (рис. 1*б*), а второй – подпружинен и скользит без трения по (несгибаемой) спице в вертикальном направлении. В состоянии равновесия струна расположена в горизонтальном положении.

Цель задачи (2) – получение решения подходящего для построения вычислительного алгоритма с любой наперёд заданной точностью.

Замечание. Условие $\psi(x) \equiv 0$ не сужает общность исследования задачи (2), поэтому будет рассмотрен именно такой случай.

Пусть $G(x,s)$ – функция Грина краевой задачи:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x) \\ l_1 y = 0,\ l_2 y = 0 \end{cases}.$$

Определение. *Функция* $g(x,t,s)$ *называется фундаментальным решением задачи* (2), *если оно является решением задачи* (2) *заменой* $\varphi(x)$ *на* $G(x,s)$.

Утверждение 1. *Фундаментальное решение задачи* (2) *представимо в виде аналога формулы Даламбера-Эйлера* (см., например, [7])

$$g(x,t,s) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t,s) + \tilde{g}(x-t,s)\right), \qquad (3)$$

где $$\tilde{g}(y,s) = \begin{cases} \tilde{g}_1(y,s), & -\ell \le y - 2n\ell < -s \\ \tilde{g}_2(y,s), & -s \le y - 2n\ell < s \\ \tilde{g}_3(y,s), & s \le y - 2n\ell < \ell \end{cases},$$

$$\tilde{g}_1(y,s) = (-\mu)^n\left(\alpha_2(y-2n\ell)+s\right) - (-\mu)^n \sum_{i=1}^{n} \Re_i^n(2ky)e^{-ky} \cdot \Big(f_{n,i}(y,s,\alpha_2,s) -$$
$$- f_{n,i}((2n-1)\ell,s,\alpha_2,s)\Big) - \sum_{j=1}^{n-1}(-\mu)^j \sum_{i=1}^{j} \Re_i^j(2ky)e^{-ky} \cdot \Big(f_{j,i}(2j\ell-s,s,\alpha_2,s) -$$
$$- f_{j,i}((2j-1)\ell,s,\alpha_2,s) + f_{j,i}(2j\ell+s,s,\alpha_1,0) - f_{j,i}(2j\ell-s,s,\alpha_1,0) +$$
$$+ f_{j,i}((2j+1)\ell,s,\alpha_2,-s) - f_{j,i}(2j\ell+s,s,\alpha_2,-s)\Big),$$

$$\tilde{g}_2(y,s) = (-\mu)^n \alpha_1(y-2n\ell) - (-\mu)^n \sum_{i=1}^{n} \Re_i^n(2ky)e^{-ky} \cdot \Big(f_{n,i}(2n\ell-s,s,\alpha_2,s) -$$
$$- f_{n,i}((2n-1)\ell,s,\alpha_2,s) + f_{n,i}(y,s,\alpha_1,0) - f_{n,i}(2n\ell-s,s,\alpha_1,0)\Big) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n-1}(-\mu)^j \sum_{i=1}^{j} \Re_i^j(2ky)e^{-ky}\Big(f_{j,i}(2j\ell-s,s,\alpha_2,s) - f_{j,i}(2j\ell-s,s,\alpha_1,0) -$$
$$- f_{j,i}((2j-1)\ell-s,s,\alpha_2,s) + f_{j,i}((2j+1)\ell,s,\alpha_2,-s) +$$
$$+ f_{j,i}(2j\ell+s,s,\alpha_1,0) - f_{j,i}(2j\ell+s,s,\alpha_2,-s)\Big),$$

$$\tilde{g}_3(y,s) = (-\mu)^n \alpha_1(y-2n\ell) - (-\mu)^n \sum_{i=1}^{n} \Re_i^n(2ky)e^{-ky} \cdot \Big(f_{n,i}(2n\ell-s,s,\alpha_2,s) -$$
$$- f_{n,i}((2n-1)\ell,s,\alpha_2,s) + f_{n,i}(2n\ell+s,s,\alpha_1,0) - f_{n,i}(2n\ell-s,s,\alpha_1,0) +$$
$$+ f_{n,i}(y,s,\alpha_2,-s) - f_{n,i}(2n\ell+s,s,\alpha_2,-s)\Big) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n-1}(-\mu)^j \sum_{i=1}^{j} \Re_i^j(2ky)e^{-ky}\Big(f_{j,i}(2j\ell-s,s,\alpha_2,s) - f_{j,i}(2j\ell-s,s,\alpha_1,0) -$$
$$- f_{j,i}((2j-1)\ell-s,s,\alpha_2,s) + f_{j,i}((2j+1)\ell,s,\alpha_2,-s) +$$
$$+ f_{j,i}(2j\ell+s,s,\alpha_1,0) - f_{j,i}(2j\ell+s,s,\alpha_2,-s)\Big),$$

$$f_{n,i}(y,s,b,\alpha_p) = e^{ky}\left(\frac{b}{k}y^i + \sum_{m=0}^{i-1}(-1)^{m+1}y^{i-m-1}\left\{b\frac{i\cdot\ldots\cdot(i-m)}{k^{m+2}} - (\alpha_p - 2n\ell\cdot b)\cdot \cdot\frac{(i-1)\cdot\ldots\cdot(i-m)}{k^{m+1}}\right\}\right),\ (p=1,2),$$

$$\mu = \mp 1,\ \alpha_1 = \frac{1+k(\ell-s)}{1+k\ell},\ \alpha_2 = \frac{2+k(2\ell-s)}{1+k\ell}.$$

$$\Re_i^j(y) = \frac{(2k)^i}{(i-1)!}L_{j-i}^i(y),$$

$L_p^q(y)$ – *ортогональные многочлены Лагерра*.

Утверждение 2. *Решение* $u(x,t)$ *задачи* (2) *представимо в виде*

$$u(x,t) = -\int_0^l g(x,t,s)\varphi''(s)\,ds \qquad (4)$$

Представление (4) решения задачи (2) позволяет построить вычислительный алгоритм, основанный на применении (на выбор) алгоритмов численного интегрирования, что позволяет находить решение задачи с любой наперёд заданной точностью.

III. Дедукция алгоритма численного решения задачи с сингулярностью

Рассматривается математическая модель:

$$\begin{cases} u_{yy}(y,t) = u_{tt}(y,t) \quad (0 < y < \ell,\ t > 0) \\ u_y(0,t) - k_1 u(0,t) = 0,\ u_y(\ell,t) + k_2 u(\ell,t) = 0 \quad (t > 0), \\ u(y,0) = \varphi(y),\ u_t(y,0) = 0 \quad (0 \le y \le \ell) \end{cases} \qquad (5)$$

$k_1, k_2 \ge 0$ (не исключена возможность и $k_1 = +\infty$ и/или $k_2 = +\infty$).

Задача (2) – частный случай рассматриваемой задачи (5), которую будем обозначать через $S(\ell;k_1;k_2;\varphi(y))$ (случай $k_1 = +\infty$ или $k_1 = 0$).

Утверждение 3. *Применение аналога вычислительного алгоритма задачи* (2) *возможно для задачи* (5) *в некоторой комбинации* $k_1, k_2 \ge 0$.

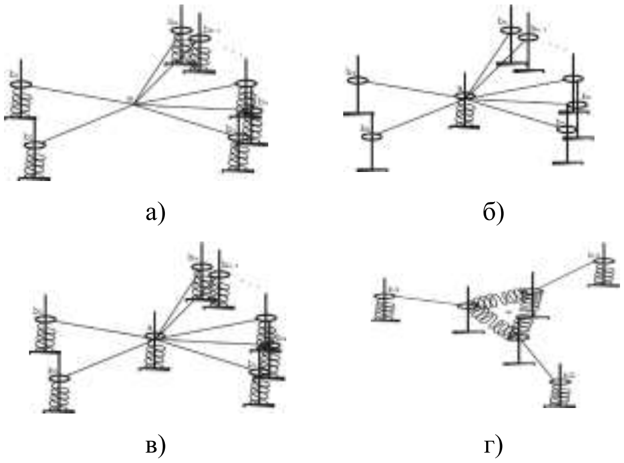
Рассмотрим основную математическую модель задачи с сингулярностью:

$$u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \Gamma, t > 0),$$
$$u(x + 0\cdot h, t) = 0 \quad (x \in \partial\Gamma,\ h \in D(x),\ t \ge 0) \qquad (6)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=0\ \ \left(x\in\overline{\Gamma}\right). \qquad (7)$$

По аналогии с (5), обозначим её через $B_m\left(\ell;Y;k_1;k_2;\varphi(x)\right)$.

Модель (1), (6)–(7) может являться описанием физического процесса колебания в вертикальной плоскости следующих механических систем:



а) б) в) г)

Рис. 2. Устойчивые системы с вертикальной вибрацией

Пусть $(F\varphi)(x)$ и $(G_i\varphi)(x)$ операторы на Γ:

$$(F\varphi)(x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi\left(a+\|x-a\|h_i\right), \quad x\in\overline{\Gamma}$$

$$(G_i\varphi)(x)=\begin{cases}(F\varphi)(x)-\varphi\left(a+\|x-a\|h_i\right) & x\in\overline{\gamma}_1\\ \varphi\left(a+\|x-a\|h_i\right)-(F\varphi)(x) & x\in\overline{\gamma}_i\\ 0 & x\in\overline{\Gamma\setminus\left(\gamma_1\bigcup\gamma_i\right)}\end{cases}$$

где $h_i=\dfrac{1}{\|b_i-a\|}(b_i-a)$ – ориентация на Γ.

Определение. $K_m^B\left(\ell;Y;k_1;k_2\right)$ *– класс начальных данных задачи* $B_m\left(\ell;Y;k_1;k_2;\varphi(x)\right)$, *определяемый условиями* $\varphi(x)\in\widetilde{C}^2\left(R(\Gamma)\right)$, $\varphi(x)=0$, $\varphi_{hh}^{++}(x)=0$ для $x\in\partial\Gamma$; $\sum\limits_{h\in D(z)}\varphi_h^{+}(z)-k_z\varphi(z)=0$, $\varphi_{hh}^{++}(z)=\varphi_{h_1h_1}^{++}(z)$ для $z\in J(\Gamma)$ и $\forall$ $h,h_1\in D(z)$ $\left(D(z)=\left\{h\in\boldsymbol{R}^n:\|h\|=1,\forall(\varepsilon>0)\forall(a\in\Gamma)\left[a+\varepsilon h\in\Gamma\right]\right\}\right)$, $\varphi_h(y+0\cdot h)=\sum\limits_{\eta\in D(y)\setminus\{h\}}\widetilde{k}_y\left(\varphi(y+0\cdot h)-\varphi(y+0\cdot\eta)\right)$ для $y\in Y$ $\left(Y\subset\left\{a,b_1,\ldots,b_m\right\}\right)$.

Утверждение 4. *Решение задачи* $B_m\left(\ell;Y;k_1;k_2;\varphi(x)\right)$ $u^{\varphi}(x,t)$ *(* $x\in\Gamma$, $t>0$ *) представимо в виде*

$$u^{\varphi}(x,t)=u^{(F\varphi)}(x,t)+\sum_{i=2}^{m}u^{(G_i\varphi)}(x,t),$$

где $u^{(F\varphi)}(x,t)$ *– решение задачи* $B_m\left(\ell;Y;k_1;k_2;(F\varphi)(x)\right)$, *а* $u^{(G_i\varphi)}(x,t)$ *– решение задачи* $B_m\left(\ell;Y;k_1;k_2;(G_i\varphi)(x)\right)$ *(* $i=\overline{2,m}$ *).*

Утверждение 5. *Пусть* $\varphi(x)\in K_m^B\left(\ell;\emptyset;k_1;k_2\right)$, *где пара* $\left(k_1,k_2\right)=\left\{(0,k),(k,0),(k,+\infty),(mk,k)\right\}$ $(k>0)$. *Тогда:* $u^{(F\varphi)}(x,t)$ *– решение задачи* $B_m\left(\ell;\emptyset;k_1;k_2;(F\varphi)(x)\right)$ *существует, причём для любого* $h\in D(a)$ *функция* $u^{(F\varphi)}(a+yh,t)$ *не зависит от выбора* h *и является решением задачи* $S\left(\ell;\dfrac{k_1}{m};k_2;(F\varphi)(a+yh)\right)$; $\forall\left(i=\overline{2,m}\right)$ $u^{(G_i\varphi)}(x,t)$ *– решение задачи* $B_m\left(\ell;\emptyset;k_1;k_2;(G_i\varphi)(x)\right)$ *существует, причём функция* $u^{(G_i\varphi)}(a+yh_1,t)$ *является решением задачи* $S\left(\ell;+\infty;k_2;(G_i\varphi)(a+yh_1)\right)$ *и, кроме того,* $u^{(G_i\varphi)}(a+yh_i,t)=-u^{(G_i\varphi)}(a+yh_1,t)$ *и, если* $h\notin\left\{h_1,h_i\right\}$, *то* $u^{(G_i\varphi)}(a+yh,t)\equiv 0$.

Утверждение 6. *Пусть* $\varphi(x)\in K_m^B\left(\ell;\{a\};k_1;k_2\right)$, *где пара* $\left(k_1,k_2\right)=\left\{\left(\dfrac{k}{m},0\right),\left(\dfrac{k}{m},k\right),\left(\dfrac{k}{m},+\infty\right)\right\}$ $(k>0)$. *Тогда:* $u^{(F\varphi)}(x,t)$ *– решение задачи* $B_m\left(\ell;\{a\};k_1;k_2;(F\varphi)(x)\right)$ *существует, причём для любого* $h\in D(a)$ *функция* $u^{(F\varphi)}(a+yh,t)$ *не зависит от выбора* h *и является решением задачи* $S\left(\ell;0;k_2;(F\varphi)(a+yh)\right)$; $\forall\left(i=\overline{2,m}\right)$ $u^{(G_i\varphi)}(x,t)$ *– решение задачи* $B_m\left(\ell;\{a\};k_1;k_2;(G_i\varphi)(x)\right)$ *существует, причём функция* $u^{(G_i\varphi)}(a+yh_1,t)$ *является решением задачи* $S\left(\ell;k;k_2;(G_i\varphi)(a+yh_1)\right)$ *и, кроме того,* $u^{(G_i\varphi)}(a+yh_i,t)=-u^{(G_i\varphi)}(a+yh_1,t)$ *и, если* $h\notin\left\{h_1,h_i\right\}$, *то* $u^{(G_i\varphi)}(a+yh,t)\equiv 0$.

Последние утверждения доказывают возможность применения для задач $B_m\left(\ell;Y;k_1;k_2;\varphi(x)\right)$ вычислительного алгоритма полученного для задачи (2).

IV. ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА

Предложенный численный алгоритм может применяться для расчетов колебаний в системе упруго связанных элементов [8, 9] Рассмотрим пример реализации введённого численного алгоритма на отдельной системе анестезиологического обеспечения у больных, перенесших прямую реваскуляризацию миокарда [10]. Моделью выбора анестезиологического пособия с целью снижения частоты осложнений различного характера и этиологии в периоперационном периоде может служить струнная система, изображённая на рис. 3 (центральная часть имеет упругую опору с коэффициентом жёсткости k, а границы могут свободно перемещаться в вертикальной плоскости):

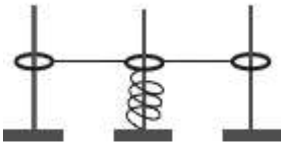


Рис. 3. Система для анализа работы алгоритма

В модели, пружина жёсткости k является средством управления и регулирования всей системы в целом и отражает стратегию, с помощью которой анализируется поведение системы. При выборе стратегии интра- и послеоперационного обезболивания пружина или растягивается, или сжимается, что обусловливает прогноз хирургического лечения.

На рис. 4 представлено начальное возмущение в системе:

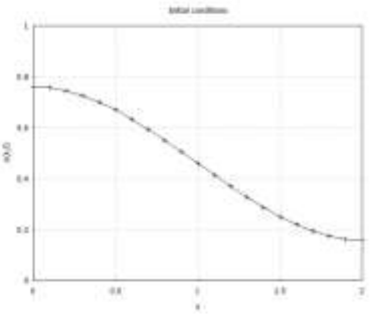
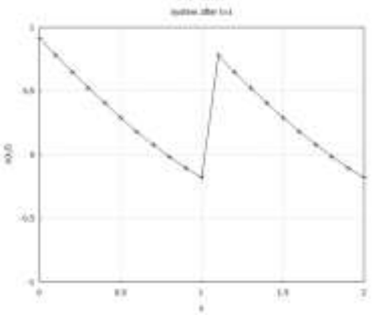
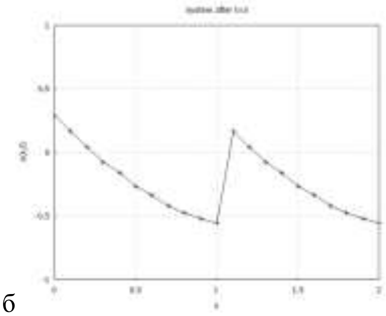


Рис. 4. Начальное возмущение

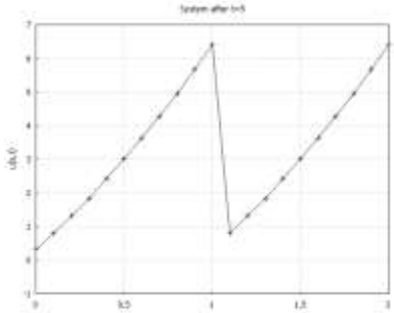
Реализация алгоритма, основанного на утверждениях 5 и 1 была осуществлена в системе компьютерной алгебры Maxima, базирующейся на языке Common Lisp [11]. Вычисление решения в форме интеграла (4) реализовано с использованием квадратурной формулы трапеций, обеспечившей погрешность порядка 0,01. Результаты такой реализации приведены на рис. 5:



а



б



в

Рис. 5. Поведение системы: а – система после t = 1; б – система после t=3; в – система после t = 5.

Список литературы

[1] Рябенький В.С., Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит., 1956. 171 с.

[2] Покорный Ю.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В. Волновое уравнение на пространственной сети // Доклады РАН. 2003. Т.388, №1. С.16-18.

[3] Найдюк Ф.О. Исследование формулы Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода / Воронеж. гос. ун-т. Воронеж, 2003. Деп. в ВИНИТИ 07.07.03, 23 с. № 1288-В2003.

[4] Провоторов В.В. Математическое моделирование колебательных процессов поддерживающих растяжек упругой мачты // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный Анализ и Информационные Технологии. 2006 . № 2 . С. 28-35.

[5] Боровикова М.М., Задорожний В.Г. Моделирование диффузии вещества в плоской случайно-неоднородной среде // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный Анализ и Информационные Технологии. 2006. № 2. С. 10-18.

[6] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003. 316 с.

[7] Найдюк Ф.О., Десятирикова Е.Н., Проскурин Д.К. Численное решение задач о колебаниях // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2013. № 1. С. 55-60.

[8] A.V. Shymchenko, V.V. Tereshchenko, Y.A. Ryabov, S.V. Salkutsan, and A.I. Borovkov, “Review of the computational approaches to advanced materials simulation in accordance with modern advanced manufacturing trends,” *Materials Physics and Mechanics*, 2017, vol. *32, no.* 3, pp. 328-352.

[9] A.U. Zobacheva, A.S. Nemov, and A.I. Borovkov, “Multiscale simulations of novel additive manufactured continuous fiber-reinforced threecomponent composite material,”. *Materials Physics and Mechanics, 2017, vol. 32, no.* 1, pp. 74-82.

[10] Губкин И.М. Высокая эпидуральная блокада как спинальный компонент анестезиологического пособия при операциях аорто-коронарного шунтирования: Дис. ... канд. мед.наук / Воронеж. госуд.медицинская академия. Воронеж, 2003. 134с.

[11] Y. Klochkov, A. Gazizulina, N. Golovin, A. Glushkova, and S. Zh, “Information model-based forecasting of technological process state,” *2017 International Conference on Infocom Technologies and Unmanned Systems: Trends and Future Directions, ICTUS 2017, 2018,* pp. 709-712. doi:10.1109/ICTUS.2017.8286099