

# Сглаживающая фильтрация изображений в системе остаточных классов

Н. И. Червяков<sup>1</sup>, П. А. Ляхов<sup>2</sup>, Н. Н. Нагорнов<sup>3</sup>

Северо-Кавказский федеральный университет

<sup>1</sup>k-fmf-primath@stavsu.ru, <sup>2</sup>ljahov@mail.ru,

<sup>3</sup>sparta1392@mail.ru<sup>3</sup>

Д. И. Каплун<sup>1</sup>, А. С. Вознесенский<sup>2</sup>,  
Д. В. Богаевский<sup>3</sup>

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет

«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

<sup>1</sup>dikaplun@etu.ru, <sup>2</sup>a-voznensky@yandex.ru,

<sup>3</sup>dan4ezz94@gmail.com

**Аннотация.** В данной статье мы предлагаем новый метод сглаживания изображений с использованием системы остаточных классов (СОК). Суть рассматриваемого подхода заключается в замене вычислительно сложной операции деления в СОК на умножение всех дробных чисел на степень двойки с последующим округлением. В результате выполнения этих действий все последующие вычисления производятся над числами в формате с фиксированной точкой. Проведенные теоретические и практические исследования показали, что при достижении определенной точности вычислений, погрешность, возникающая при округлении, не оказывает существенного влияния на результат фильтрации изображения. Это открывает возможности для эффективной аппаратной реализации на FPGA и ASIC.

**Ключевые слова:** система остаточных классов; цифровая обработка изображений; сглаживающие фильтры

## I. ВВЕДЕНИЕ

Методы цифровой обработки изображений широко используются в различных областях науки и техники: медицине, биологии, физике, астрономии, а также в промышленной, оборонной и правоохранительной сферах деятельности [1]. Большим потенциалом для повышения эффективности работы цифровых систем обработки изображений обладает система остаточных классов (СОК) [2]. Свойственные ей малоразрядность представления чисел и возможность независимой параллельной обработки данных [3] позволяют значительно повысить эффективность вычислений в приложениях с преобладающим количеством модульных операций сложения, вычитания и умножения за счет оптимального использования ресурсов интегральных схем, в частности FPGA [4]. Одним из таких приложений является цифровая обработка изображений [1].

Одной из актуальных задач цифровой обработки изображений является очистка изображений от шума, представляющего собой случайные изменения значений пикселей [5]. Для решения этой задачи на практике используются различные сглаживающие фильтры [6, 7]: фильтры Гаусса, медианные фильтры, биномиальные фильтры и т.д. Сглаживающие фильтры основаны на

выполнении операции свертки – вычислении значения пикселя на основе значений соседних пикселей, приводящему к необходимости выполнения операции деления. Так как деление является немодульной операцией, его выполнение в СОК имеет высокую вычислительную сложность. В последние годы активно развиваются новые методы и алгоритмы для повышения эффективности выполнения этой операции в СОК [6–8].

В настоящее время проведены различные исследования по повышению эффективности вычислений при использовании сглаживающих фильтров для обработки изображений в СОК. В [6] описан метод, согласно которому происходит разделение расчетов между СОК и позиционной системой счисления (ПСС). Операции сложения, вычитания и умножения выполняются в СОК, в то время как операция деления выполняется в ПСС. В [7] предложена модификация этого метода, реализующая деление в СОК, но накладывающая ограничения на основания СОК.

Мы предлагаем новый метод сглаживания изображений с использованием СОК. Основная идея рассматриваемого подхода заключается в замене вычислительно сложной операции деления в СОК на умножение всех дробных чисел на множитель определенной величины и последующее округление. В результате выполнения этих действий все последующие вычисления производятся только над целыми числами, что открывает возможность эффективной аппаратной реализации на FPGA [9].

## II. ВВЕДЕНИЕ В СОК

Числа в СОК представляются в виде совокупности остатков от деления  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  на набор взаимно простых чисел  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , называемых модулями

СОК. Произведение всех модулей СОК  $P = \prod_{i=1}^n p_i$ ,

называется рабочим диапазоном системы. Любое целое число  $0 \leq A < P$  в СОК представимо в виде  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_i = |A|_{p_i} = A \bmod p_i$  [2].

Сложение, вычитание и умножение чисел в ПСС эквивалентно сложению, вычитанию и умножению остатков этих чисел в СОК по соответствующим модулям:

$$A \pm B = (|a_1 \pm b_1|_{p_1}, |a_2 \pm b_2|_{p_2}, \dots, |a_n \pm b_n|_{p_n}),$$

$$A \cdot B = (|a_1 \cdot b_1|_{p_1}, |a_2 \cdot b_2|_{p_2}, \dots, |a_n \cdot b_n|_{p_n}).$$

Обратный перевод из СОК в ПСС основан на использовании Китайской теоремы об остатках [13]:

$$A = \sum_{i=1}^n \left| P_i^{-1} \right|_{p_i} \cdot a_i \left| P_i \right|_{p_i} \cdot P_i \left| P \right|_P, \quad (1)$$

где  $P_i = P / p_i$  и  $\left| P_i^{-1} \right|_{p_i}$  мультипликативный обратный элемент числа  $P_i$  по модулю  $p_i$ .

### III. ОПТИМИЗАЦИЯ СГЛАЖИВАЮЩЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СОК

Изображение  $A$  состоит из  $X$  строк и  $Y$  столбцов и представимо как функция  $A(x, y)$ , где  $0 \leq x \leq X - 1$  и  $0 \leq y \leq Y - 1$  пространственные координаты, и величина  $A$  в любой точке с координатами  $(x, y)$  представляет собой значение яркости изображения в этой точке. Элементы  $A(x, y)$  называются пикселями изображения  $A$ . Фильтрация изображения представима в виде:

$$A_2(x, y) = \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k A_1(x+i, y+j) \cdot f_{i,j}$$

для всех пар значений  $(x, y)$ , где  $A_1$  – исходное изображение,  $A_2$  – отфильтрованное, и  $f_{i,j}$  – коэффициенты фильтра размера  $(2k+1) \times (2k+1)$ :

$$F = 1/d \cdot \begin{pmatrix} f_{-k,-k} & \dots & f_{-k,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{k,-k} & \dots & f_{k,k} \end{pmatrix},$$

где сумма всех коэффициентов фильтра равна единице и  $d$  – усредняющий коэффициент, определяемый по

$$\text{формуле } d = \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k f_{i,j}.$$

Для фильтрации данным методом необходимо предварительно преобразовать исходные коэффициенты фильтра. Первым шагом является умножение всех коэффициентов фильтра  $f_{i,j}$  на множитель  $2^n$ . Данный множитель эффективен с точки зрения аппаратной реализации, так как выполнение операций умножения и деления в двоичной записи числа соответствует сдвигу запятой на  $n$  знаков вправо или влево соответственно.

Все коэффициенты фильтра  $2^n f_{i,j}$  округляются в большую сторону. В результате выполнения этих действий

мы избавляемся от дробных величин и все последующие операции на интегральной схеме производятся только над числами с фиксированной точкой. При этом степень  $n$  множителя  $2^n$  представляет собой разрядность коэффициентов фильтра.

После этого коэффициенты фильтра переводятся из ПСС в СОК с выбранной системой модулей  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ . Схема самого процесса фильтрации представлена на рисунке 1.

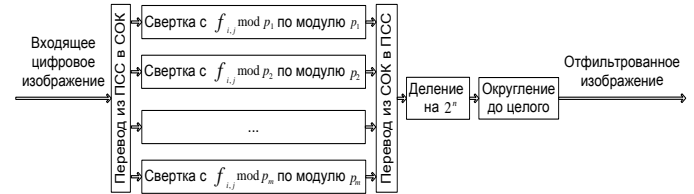


Рис. 1. Схема сглаживающей фильтрации в СОК

Вначале значения яркости входящего цифрового изображения переводятся из ПСС в СОК. После чего по каждому модулю системы  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  производится свертка с преобразованными коэффициентами фильтра. Результат выполнения этой операции переводится обратно из СОК в ПСС согласно формуле (1). Далее полученные значения делятся на  $2^n$  и округляются в меньшую сторону.

В результате выполнения операции округления появляется погрешность. Возникает вопрос о величине этой погрешности и о ее влиянии на результат фильтрации изображения. Точность вычислений возрастает с увеличением разрядности  $n$ . Необходимо выяснить, какую разрядность необходимо использовать для того, чтобы погрешность вычислений не оказывала существенного влияния на конечный результат фильтрации изображения. В качестве критерия оценки качества фильтрации изображений использована числовая характеристика  $PSNR$  [5].

### IV. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СГЛАЖИВАЮЩЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Изначально погрешность возникает при округлении коэффициентов фильтра, затем она возрастает при выполнении операции свертки, так же оказывает влияние округление после деления в ПСС. Введем следующие обозначения [10]:  $LAE_1$  – предельная абсолютная погрешность (ПАП) округления коэффициентов фильтра;  $LAE_2$  – ПАП нормированных (деленных на  $2^n$ ) результатов свертки;  $AE_2 \in [0, LAE_2]$  – абсолютная погрешность (АП) нормированных результатов свертки;  $LAE_3$  – ПАП округления нормированных результатов свертки;  $\lambda \in [0,1)$  – дробная часть точного результата свертки;  $LAE_4$  – ПАП округленных нормированных результатов свертки. Проведем теоретические расчеты для оценки максимальной погрешности вычислений метода

сглаживающей фильтрации для фильтров Гаусса  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  (с размерами  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  и  $7 \times 7$  соответственно).

Вычислим  $LAE_1 = \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k \left( \lceil 2^n f_{i,j} \rceil - 2^n f_{i,j} \right)$ . Далее определим  $LAE_2 = LAE_1 \cdot M / 2^n$ . Следующим шагом будет вычисление  $LAE_3 = LAE_2 + \lambda - \lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor$ . В результате выполнения операции свертки точное значение редко будет целым числом. Таким образом, значение  $LAE_3$  зависит не только от  $LAE_2$ , но и от  $\lambda$ . Результирующая погрешность представляет собой  $LAE_4$ .

$$LAE_4 = |LAE_2 - LAE_3|. \quad (2)$$

Выразим  $LAE_3$  через  $LAE_2$  и  $\lambda$  в формуле (2).

$$LAE_4 = |LAE_2 - (LAE_2 + \lambda - \lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor)| = \lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor - \lambda. \quad (3)$$

Рассмотрим два случая:

1.  $\lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor - \lambda > 0 \Rightarrow \lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor \geq 1$ . Чем больше  $\lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor$ , тем больше  $LAE_4$ . Таким образом,  $\lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor = \lfloor LAE_2 \rfloor + 1$  и  $\lambda$  представляет собой дополнение дробной части числа  $LAE_2$  до единицы:  $\lambda = \lfloor LAE_2 \rfloor + 1 - LAE_2$ . Подставим это выражение в (3).

$$LAE_4 = \lfloor LAE_2 + \lfloor LAE_2 \rfloor + 1 - LAE_2 \rfloor - (\lfloor LAE_2 \rfloor + 1 - LAE_2) = LAE_2. \quad (4)$$

2.  $\lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor - \lambda \leq 0 \Rightarrow \lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor \leq \lambda \Rightarrow \lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor = 0 \Rightarrow LAE_4 = |0 - \lambda| = \lambda$ . Чем больше  $\lambda$ , тем больше  $LAE_4$ . Но  $\lfloor LAE_2 + \lambda \rfloor = 0 \Rightarrow LAE_2 + \lambda = 1 - \varepsilon \Rightarrow \lambda = 1 - \varepsilon - LAE_2$ . Используя  $AE_2$  вместо  $LAE_2$ , и положим его равным нулю. В этом случае формула (3) примет вид:

$$LAE_4 = \lfloor 0 + 1 - \varepsilon \rfloor - (1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon. \quad (5)$$

Так как величина  $LAE_4$  представляет собой максимально возможное значение погрешности, то формулу (4) используем для  $LAE_2 > 1 - \varepsilon \geq 1$ . Таким образом, из формул (4) и (5) можно однозначно определить  $LAE_4$  через  $LAE_2$ :

$$LAE_4 = \begin{cases} LAE_2, LAE_2 \geq 1, \\ 1 - \varepsilon, LAE_2 < 1. \end{cases}$$

$PSNR$  в данном случае вычисляется по формуле  $PSNR = 20 \lg(M / LAE_4)$ , где  $MSE = LAE_4^2$ .

В результате проведения расчетов для 13 различных разрядностей  $n$  ( $n = 1, \dots, 13$ ) коэффициентов фильтров

$F_1$ ,  $F_2$  and  $F_3$  и  $M = 255$  получены следующие значения  $PSNR$  (табл. 1).

Из табл. 1 мы можем заключить следующее.

Чем больше размер фильтра, тем большая разрядность нужна для сохранения уровня точности вычислений.

Результат фильтрации не содержит значительных искажений ( $PSNR \geq 40$ ) при использовании разрядностей  $n = 10$ ,  $n = 11$  и  $n = 12$  для обработки фильтрами размеров  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  и  $7 \times 7$  соответственно.

ТАБЛИЦА 1 РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ (дБ)

$n$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
1	-10,881	-21,214	-27,421
2	-1,938	-14,403	-21,023
3	2,499	-7,044	-14,403
4	6,021	0,561	-7,739
5	13,201	7,180	-1,493
6	22,144	15,296	5,242
7	26,581	23,059	11,774
8	30,103	29,080	18,917
9	37,283	31,907	25,886
10	46,227	37,927	31,579
11	48,131	43,948	39,378
12	48,131	48,131	43,304
13	48,131	48,131	48,131

Таким образом, мы можем определить наименьшую разрядность  $n$  коэффициентов фильтров размера  $(2k+1) \times (2k+1)$ , при которой результат обработки не содержит значительных искажений:

$$n = 9 + k. \quad (6)$$

Результат фильтрации содержит минимальные искажения ( $PSNR \approx 48.131$ ) при использовании разрядностей  $n = 11$ ,  $n = 12$  и  $n = 13$  для обработки фильтрами размеров  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  и  $7 \times 7$  соответственно. Таким образом, мы можем определить наименьшую разрядность  $n$  коэффициентов фильтров размера  $(2k+1) \times (2k+1)$  при которой результат обработки содержит минимальные искажения:

$$n = 10 + k. \quad (7)$$

Проведем моделирование рассматриваемого метода фильтрации для сверки с полученными результатами теоретических расчетов.

#### V. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДА СГЛАЖИВАЮЩЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Моделирование проведено в программной среде MatLab версии R2015b для 8-битного изображения в оттенках серого: «Лена» (рис. 2а). Использована СОК с модулями  $\{2^r - 1, 2^r, 2^r + 1\}$  [2] с  $r = 8$  и динамическим диапазоном  $P = 16776960$ .

На исходное изображение с помощью команды `wgn` наложен дискретный белый гауссов шум мощностью 5, 10, ..., 50 дБ. Далее, с помощью команды `imfilter`,

осуществлена фильтрация изображений в ПСС и в СОК с разрядностями  $n = 1, \dots, 13$  коэффициентов фильтров  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ .

Пример моделирования представлен на рис. 2. Из результатов обработки изображения, показанных на рис. 2в-2д, видно, что при увеличении разрядности  $n$  качество фильтрации в СОК постепенно улучшается.

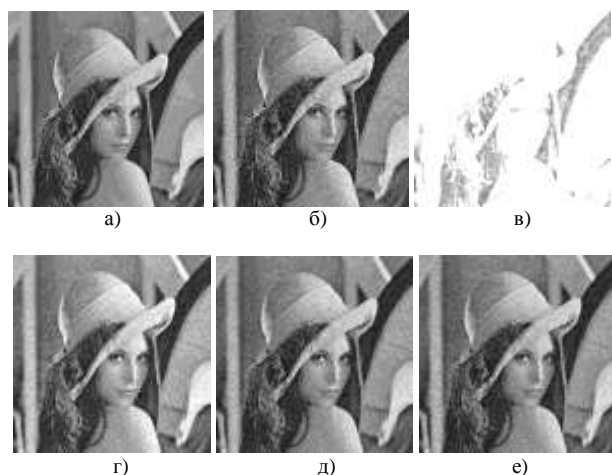


Рис. 2. Результаты моделирования изображения «Лена» с использованием фильтра  $F_3$ : а) исходное изображение; б) зашумленное изображение (30 дБ); результаты фильтрации: в) СОК,  $n = 4$ ,  $PSNR = -2,01$  дБ; г) СОК,  $n = 8$ ,  $PSNR = 23,21$  дБ; д) СОК,  $n = 12$ ,  $PSNR = 27,86$  дБ; е) ПСС,  $PSNR = 27,84$  дБ.

Значения  $PSNR$ , полученные в результате обработки изображений фильтром  $F_3$ , представлены в табл. 2. Разрядность коэффициентов выбрана в соответствии с формулами (6) и (7). Как показано в табл. 2, результаты обработки изображений в СОК с разрядностью  $n \geq 9 + k$  сопоставимы с результатами обработки в ПСС по качеству. Таким образом, результаты моделирования подтверждают результаты расчетов.

На основе теоретических и практических результатов мы можем сделать следующие выводы:

Разрядность  $n$  коэффициентов фильтров, при которой результат фильтрации изображения не содержит значительных искажений ( $PSNR \geq 40$ ), может быть найден по формуле (6).

ТАБЛИЦА 2 РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ С ФИЛЬТРОМ  $F_3$  (дБ)

Шум	Зашумленное изображение	ПСС	СОК		ПСС - СОК	
			$n = 12$	$n = 13$	$n = 12$	$n = 13$
нет	$\infty$	33.524	33.560	33.571	-0.037	-0.048
5	43.028	33.488	33.521	33.532	-0.033	-0.045
10	38.099	33.406	33.439	33.448	-0.033	-0.042

15	33.103	33.153	33.188	33.196	-0.035	-0.043
20	28.138	32.480	32.503	32.515	-0.022	-0.034
25	23.123	30.773	30.790	30.797	-0.017	-0.024
30	18.285	27.844	27.858	27.858	-0.014	-0.014
35	13.753	23.956	23.970	23.965	-0.014	-0.009
40	10.152	19.896	19.915	19.906	-0.020	-0.010
45	7.918	16.722	16.729	16.726	-0.007	-0.004
50	6.760	14.845	14.844	14.846	0.001	0.000

Можно добиться сокращения ресурсов, используемых в аппаратной реализации этого метода, поскольку наивысшие биты коэффициентов равны нулю.

## VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы предлагаем новый подход к сглаживанию изображений с использованием СОК. Суть рассматриваемого подхода заключается в замене вычислительно сложной операции деления в СОК на умножение всех дробных чисел на множитель определенной величины и последующее округление. В результате выполнения этих действий все последующие вычисления производятся только над целыми числами.

Проведенные теоретические и практические исследования показали, что при разрядности коэффициентов фильтра  $n = 9 + k$ , где  $k$  определяется размером сглаживающего фильтра  $(2k + 1) \times (2k + 1)$ , погрешность вычислений, возникающая при округлении, не оказывает существенного влияния на результат фильтрации изображения ( $PSNR \geq 40$ ). Это открывает возможности для эффективной аппаратной реализации на FPGA и ASIC.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bovik A.C. Handbook of image and video processing, 2<sup>nd</sup> ed. San Diego: Elsevier Academic Press, 2005. 1429 p.
- [2] Chang C.-H., Molahosseini A.S., de Sousa L.S. Embedded Systems Design with Special Arithmetic and Number Systems. Cham: Springer International Publishing, 2017. 389 p.
- [3] Chang C.-H., Molahosseini A.S., Zarandi A.A.E., Tay T.F. Residue Number Systems: A New Paradigm to Datapath Optimization for Low-Power and High-Performance Digital Signal processing Applications // IEEE Circuits and Systems Magazine. 2015. vol. 15, no. 4. pp. 26-44.
- [4] Bailey G. Design for embedded image processing on FPGAs. Singapore: Wiley-IEEE Press, 2011. 496 p.
- [5] Chervyakov N.I., Lyakhov P.A., Babenko M.G. Digital Filtering of Images in a Residue Number System Using Finite-Field Wavelets // Automatic Control and Computer Sciences. 2014. vol. 48, no. 3. pp. 180-189.
- [6] Vasalos E., Bakalis D., Vergos H.T. RNS Assisted Image Filtering and Edge Detection // IEEE 18th International Conference on Digital Signal Processing (DSP). 2013. pp. 1-6.
- [7] Chervyakov N.I., Lyakhov P.A., Ionisyan A.S., Valueva M.V. High-Speed Smoothing Filter in the Residue Number System // Digital Information Processing, Data Mining, and Wireless Communications (DIPDMWC). 2016. pp. 121-126.
- [8] Chang C.-C., Lai Y.-P. A division algorithm for residue numbers // Applied Mathematics and Computation. 2006. vol. 172, no. 1. pp. 368-378.
- [9] Talbi F., Alim F., Seddiki S., Mezzah I., Hachemi B. Separable Convolution Gaussian Smoothing Filters on a Xilinx FPGA platform // IEEE Fifth International Conference on Innovative Computing Technology (INTECH). 2015. pp. 112-117.
- [10] Burden R.L., Faires J.D., Burden A.M. Numerical Analysis, 10th ed. Boston: Cengage Learning, 2016. 896 p.