

# Моделирование и оптимизация процесса разделения зернистых материалов на ситах

Ф. Г. Ахмадиев, Р. Ф. Гиззятов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет  
akhmadiev@kgasu.ru

**Аннотация.** Построена математическая модель процесса разделения зернистых материалов по размерам на многокаскадных ситовых классификаторах на основе теории пуассоновских процессов. Для определения функции распределения частиц по размерам вдоль сит классификатора строится система стохастических дифференциальных уравнений. Полученные решения позволяют находить все интересующие характеристики процесса разделения, включая положение приемных бункеров для целевых фракций, а также установить степень эффективности разделения. Для установления конструктивных и режимных параметров классификатора рассмотрена задача оптимизации в многокритериальной постановке.

**Ключевые слова:** математическая модель; разделение; зернистый материал; вероятность просеивания; пуассоновский процесс; многокритериальная оптимизация

## I. ВВЕДЕНИЕ

Для разделения зернистых материалов по размерам используют различные классификаторы, в том числе многокаскадные аппараты. Рабочим органом многокаскадного классификатора является набор колеблющихся просеивающих поверхностей, выполненных в виде сита или решета, которые располагаются одно над другим, образуя ярусы. Принцип работы подобного оборудования основан на различной вероятности прохождения через отверстия сит зерен различных форм и геометрических размеров. В основном расчет классификатора заключается в определении конструктивных и режимных параметров аппарата в зависимости от формы и размеров разделяемого материала [1, 2].

Классификации зернистых материалов по размерам посвящены, например, работы [1–7]. В работах [1–3] изучение кинетики процесса разделения проводится на основе теории марковских процессов. Это позволяет определить функцию распределения частиц по размерам вдоль сит классификатора. Процесс разделения зернистых материалов рассматривается как диффузионный и для определения функции распределения частиц строится система уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка (Kolmogorov – Fokker – Planck) (К.-Ф.-П.). Изучению вероятности просеивания частицы в ячейку в зависимости от формы и геометрических размеров сита и разделяемого материала посвящены работы [1, 2, 4]. Тонкослойное

разделение зернистых материалов рассмотрено в работе [1]. Применение для разделения зернистых материалов вибрационных классификаторов связано с тем, что вибрация силы сухого трения преобразует в силы типа вязкого [5–7, 10]. Возникают условия для проявления различий в параметрах разделения. При отсутствии вибрации (в статических условиях) эти различия никак не проявляются. Под действием вибрации на частицы разделяемого материала начинают действовать вибрационные силы, которые приводят к увеличению интенсивности разделения. Возникают возможности разделять частицы с мало отличающимися параметрами разделения.

Таким образом, вероятностный характер самого процесса разделения и свойств частиц в разделяемом материале характеризует стохастичность процесса. Поэтому при моделировании этих процессов среди основных подходов особое место занимают стохастические методы, в частности, теория марковских процессов [1–3, 8]. Математическое моделирование процесса разделения зернистых материалов можно проводить на основе теории случайного блуждания частиц на плоскости, в частности, теории пуассоновских процессов [2, 9]. Моделирование процесса разделения зернистых материалов на многокаскадных классификаторах с большим числом ярусов на основе теории пуассоновских процессов позволяет преодолеть ряд трудностей, которые возникают при использовании для этих целей уравнений (К.-Ф.-П.) [2].

Целью работы является построение математической модели процесса разделения зернистых материалов на многокаскадных классификаторах с использованием теории пуассоновских процессов и оптимизация процесса для определения оптимальных технологических и конструктивных параметров аппарата на основе построенных моделей.

## II. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Просеивание частиц в ячейки сит можно рассматривать как испытания Бернулли с биномиальным распределением. Для биномиального распределения во многих работах, как правило, строят либо нормальное приближение, либо пуассоновское, поэтому для описания положения частицы на ситах классификатора воспользуемся теорией

пуассоновских процессов [2]. Обозначим  $\Delta X_i$  – расстояние, которое частица проходит при движении по поверхности  $i$ -го сита, где  $i = \overline{1, m}$ ,  $m$  – число ярусов многокаскадного классификатора. Если предположить, что  $\Delta X_i$  являются случайными величинами, распределенными по показательному закону, то их сумма  $\Delta X_1 + \dots + \Delta X_m$  подчиняется гамма распределению с плотностью [9]:

$$g_m(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \exp(-\lambda x). \text{ С учетом нормировки}$$

значение интеграла  $\int_{x_1}^{x_2} g_m(x) dx$  определяет вероятность

попадания частицы в ячейки  $m$ -го сита на отрезке  $[x_1, x_2]$ . При этом параметр интенсивности  $\lambda$  гамма распределения связан с вероятностью просеивания в ячейку  $p$  соотношением  $\lambda = p / 2a$ , где  $2a$  – размер ячейки в направлении движения частиц, а среднее значение интенсивности для выбранной фракции с линейными размерами  $(l_1, l_2) \in (l_{\min}, l_{\max})$  вычисляется по формуле

$$[2]: \bar{\lambda} = \left( \int_{l_1}^{l_2} f(l) p(l) dl \right) / \left( 2a \times \int_{l_1}^{l_2} f(l) dl \right), \text{ где } f(l) -$$

плотность распределения частиц по размерам в исходном материале,  $p(l)$  – вероятность просеивания частиц в ячейку в зависимости от линейных размеров.

Вероятность просеивания частицы в ячейку  $p$  в первом приближении можно рассматривать в виде произведения вероятностей двух независимых событий [2,4]:  $p = p_g \times p_v$ , где  $p_g$  – геометрическая вероятность, зависящая от размеров и формы отверстия сита и частиц разделяемого материала и  $p_v$  – вероятность, зависящая от скорости движения частицы, которая определяется по формуле [2]:  $p_v = 2 - (\Phi(z) + \Phi(z_0))$ , (1)

где  $z = (V_a - V_k) / \sigma$ ,  $z_0 = V_k / \sigma$ ,  $V_k, \sigma$  – параметры нормального закона, определяются по экспериментальным данным в процессе идентификации построенных моделей,  $V_a$  – амплитуда скорости частицы относительно сита,  $\Phi(x)$  – стандартная нормальная функция распределения. Эти вопросы рассмотрены в работах [1, 2].

Для определения амплитуды относительной скорости  $V_a$  необходимо изучить вибрационное движение зернистых материалов. Перемещение зернистых материалов под действием вибрации рассмотрено в работах [1, 4–7, 10]. В зависимости от физико-механических свойств разделяемого материала, гранулометрического состава и т.д. движение зернистых материалов по вибрирующей поверхности можно моделировать как в приближении одиночной материальной точки [1, 4], так и на основе методов механики гетерогенных сред [10]. Моделирование движения частиц зернистого материала как материальной

точки можно проводить при тонкослойном движении разделяемых материалов. С целью наиболее полного использования времени пребывания разделяемого материала на поверхности сит классификатора используется регулярный режим двухстороннего движения с мгновенными остановками без подбрасывания [1, 4].

Просеивание частиц вдоль сит многокаскадного классификатора в общем случае можно рассматривать как нестационарный пуассоновский процесс плотностью распределения [2]:

$$f(x, \Delta x) = \Lambda(x, \Delta x) \frac{\bar{\Lambda}^{(m-1)}(x, \Delta x)}{(m-1)!} \exp(-\bar{\Lambda}(x, \Delta x)),$$

где  $\Lambda(x, \Delta x)$  – интенсивность просеивания частиц вдоль сит на отрезке  $[x, x + \Delta x]$ ,  $\bar{\Lambda}(x, \Delta x)$  – ее среднее значение,  $m$  – количество сит. Для случайных величин  $\Delta X_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , строится функция распределения  $F_i(x)$ . Поскольку сита работают совместно, эти вероятности для  $i \geq 2$  будут условными. Математическое ожидание числа частиц, прошедших сквозь сито, зависит не только от длины участка, но и от его положения по длине сита. Определим закон распределения для первого сита  $F_1(x) = 1 - F_0(x)$ , где  $F_0(x) = P\{\Delta X_1 \geq x\}$  – вероятность того, что на участке сита  $(0; x)$  по направлению движения частиц и шириной  $2b$  (размер ячейки в поперечном направлении) не появится ни одного события. С учетом отсутствия последствия для пуассоновского процесса (для непересекающихся интервалов выполняется условие: число произошедших событий на одном участке не зависит от числа событий на другом) функция распределения  $F_0(x)$  должна удовлетворять уравнению [2]:  $F_0(x + \Delta x) = F_0(x)F_0(\Delta x)$ , где интервал  $(0, x)$  является длинным,  $\Delta x$  – коротким. В первом приближении можно принять, что интенсивность событий в точке  $x$  определяется в виде линейной функции:  $\mu(x) = \lambda_0 x / \Delta x_{av}$ , где  $\Delta x_{av}$  – расстояние, которое частица проходит в среднем при движении по поверхности сита, определяется по выражению  $\Delta x_{av} = 1 / \bar{\lambda}$ ,  $\lambda_0$  – интенсивность поступления выбранных частиц на рассматриваемый участок. Таким образом, мгновенную плотность можно определять по выражению  $\mu(x) = Cx$ , где параметр  $C = \lambda_0 \bar{\lambda}$ , который, как и интенсивность  $\bar{\lambda}$ , зависит от вероятности просеивания в ячейку  $p$ . Вероятность отсутствия события в интервале  $\Delta x$ , с учетом нестационарности и ординарности потока событий, в первом приближении можно оценить по выражению  $F_0(\Delta x) = 1 - Cx\Delta x$ , вероятность одного события  $Cx\Delta x$ .

Тогда для определения вероятности отсутствия события  $F_0(x)$  разностное уравнение можно записать в виде [2]:  $F_0(x + \Delta x) = (1 - Cx\Delta x)F_0(x)$ . Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , для вероятности  $F_0(x)$  можно записать

следующее стохастическое дифференциальное уравнение  $F'_0(x) = -Cx F_0(x)$ . Его решение с учетом начального условия  $F_0(0) = 1$  имеет вид  $F_0(x) = \exp(-Cx^2/2)$ . Таким образом, функция распределения для первого сита имеет вид  $F_1(x) = 1 - \exp(-Cx^2/2)$ . Закон распределения величины  $\Delta X_i$  для значений  $i = \overline{2, m}$  определяется из системы стохастических дифференциальных уравнений [2]:

$$F'_j(x) = -Cx F_j(x) + Cx F_{j-1}(x), j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

В первую очередь нас интересует закон распределения величины  $\Delta X_m$  на нижнем ярусе. С учетом начальных условий  $F_0(0) = 1$  и  $F_j(0) = 0$  для всех  $j = \overline{1, m}$  из системы стохастических дифференциальных уравнений находим функцию и плотность распределения для  $\Delta X_m$  [2]:

$$F_m(x) = 1 - \exp(-Cx^2/2) \times \sum_{i=0}^{m-1} (Cx^2/2)^i / i!,$$

$$f_m(x) = Cx(Cx^2/2)^{m-1} \exp(-Cx^2/2) / (m-1)!. \quad (3)$$

Координаты положения приемного бункера  $x_1$  и  $x_2$  для целевой фракции определяются на основании закона распределения  $\Delta X_m$  и при заданных значениях на извлечение целевой фракции  $\eta_*$ :  $F_m(x_1) = (1 - \eta_*)/2$  и  $F_m(x_2) = (1 + \eta_*)/2$ . (4)

Значение параметра  $C$  определяется из второго уравнения (4) при значении  $x_2 = L$ , где  $L$  – длина сита, далее, из первого уравнения (4) определяется координата  $x_1$ . Таким образом, коэффициент извлечения целевой фракции и эффективность разделения определяются по формулам [2]:  $\eta = \int_{x_1}^{x_2} f_m(x) dx$ ,  $E = \eta(1 - \delta) \times 100\%$ , (5)

где  $\delta$  – относительное содержание нецелевых продуктов в целевом бункере (чистота разделения).

Расчеты показывают (рис. 1), что математические ожидания  $\Delta X_m$  для рассматриваемых фракций с увеличением количества ярусов классификатора  $m$  расходятся. Это положительно влияет на процесс разделения. На рис.2 приводится распределение  $\Delta X_m$  для выбранных фракций вдоль нижнего сита. Показано, на каком участке нижнего сита происходит просеивание частиц выбранных фракций в его ячейки. Расчеты показывают, что если заданы (первоначально рассчитаны) значения конструктивных параметров: форма и размеры отверстий, длина и число сит, также задано требование на извлечение целевой фракции, то можно подобрать оптимальное значение амплитуды скорости  $V_a$ . Режимные

параметры работы аппарата: амплитуду и частоту колебаний  $A$  и  $\omega$ , углы наклона и вибрации  $\alpha$  и  $\beta$  следует подобрать таким образом, чтобы эффективность или коэффициент извлечения принимали наибольшее значения.

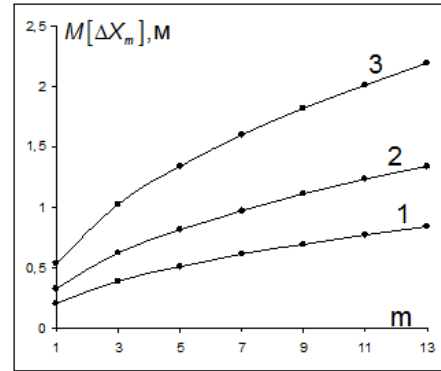


Рис. 1. Математическое ожидание  $\Delta X_m$  в зависимости от количества ярусов  $m$  при среднем квадратичном отклонении для мелкой (1) – 0,117 м; средней (2) – 0,185 м; крупной (3) – 0,269 м фракций

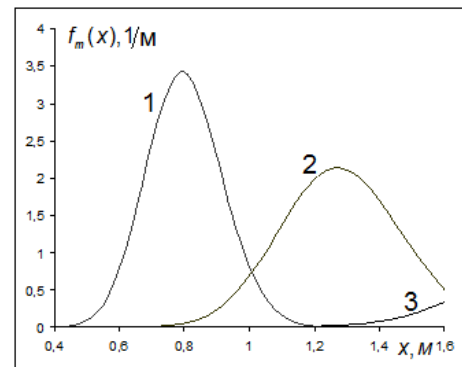


Рис. 2. Распределение числа частиц мелкой (1), средней (2) и крупной (3) фракций вдоль нижнего сита при  $m=12$  и среднем квадратичном отклонении  $\Delta X_m$  для мелкой (1) – 0,117 м; средней (2) – 0,185 м; крупной (3) – 0,269 м фракций

Параметры скоростного режима  $V_k$  и  $\sigma$  в зависимости (1) определяются в процессе идентификации построенных моделей, расчетные значения коэффициента извлечения для целевой фракции или эффективности разделения можно сравнить с экспериментальными значениями. Экспериментальные значения определяются по выбранной модели движения по режимным параметрам в процессе работы классификатора: амплитуде и частоте колебаний  $A$  и  $\omega$ , углам наклона и вибрации  $\alpha$  и  $\beta$ .

### III. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАЗДЕЛЕНИЯ

Для определения оптимальных конструктивных и режимных параметров классификатора задача оптимизации рассматривается в многокритериальной постановке, в качестве критериев выбираются

эффективность разделения и производительность многокаскадного классификатора [1, 2]:

$$\begin{aligned} \max Q(A, \omega, \alpha, \beta, h, B) &= \rho_c h B V_{cp}, \\ \max E(A, \omega, \alpha, \beta, D, L, \eta, m) &= \eta(1 - \delta) \times 100\%, \\ \text{при условиях: } x_j^{\min} &\leq x_j \leq x_j^{\max}, \\ \varphi_k^{\min} &\leq \varphi_k(A, \omega, \alpha, \beta) \leq \varphi_k^{\max}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $x_j^{\min}$ ,  $x_j^{\max}$  – наименьшее и наибольшее значение компонент вектора  $\bar{x} = (A, \omega, \alpha, \beta, D, L, h, \eta, m)$ ,  $\varphi_k$  – функциональные ограничения, связанные с выбранным скоростным режимом,  $\rho_c$  – сыпучая плотность,  $B$  – ширина сита,  $L$  – длина сита,  $m$  – количество сит,  $A$  и  $\omega$  – амплитуда и частота колебаний,  $\alpha$  и  $\beta$  – углы наклона и вибрации,  $V_{av}$  – средняя скорость перемещения зернистого материала на сите,  $h$  – толщина слоя зернистого материала, подаваемого из загрузочного бункера,  $\eta$  – извлечение целевой фракции.

Для решения многокритериальной задачи (6) можно использовать различные подходы [11]. Например, на первом этапе определяют оптимальные значения конструктивных параметров классификатора: количество ярусов  $m$ , длину и ширину сит  $L$  и  $B$ , форму и размер ячейки сита  $D$ . Зная требование на извлечение  $\eta$ , вычисляется параметр  $L$ , а число ярусов  $m$  определяется по чистоте разделения. Далее, значения настроечных параметров  $A, \alpha$  могут быть выбраны перед эксплуатацией, а оптимальные значения управляющих параметров  $\omega, \beta$  выбираются лицом, принимающим решение, из решения оптимизационной задачи (6), например, из некоторого множества оптимальных по Парето решений [2]. При построении множества Парето составляется линейная свертка из нормированных целевых функций (6) и определяется ее максимум для различных значений весовых коэффициентов. В пространстве критериев строится отображение множества Парето и из него выбираются оптимальные значения управляющих параметров  $\omega, \beta$ . Множество Парето содержит большое количество элементов, в связи с этим возникает необходимость в дальнейшем сужении этого множества. Для этого можно использовать различные процедуры [11].

Для определения оптимальных значений режимных и конструктивных параметров классификатора на основе построенной математической модели проводится вычислительный эксперимент. Рассматривается зернистый материал на полимерной основе с частицами цилиндрической формы в диапазоне от 0.2 мм до 1.4 мм и одинаковыми диаметрами 0.5 мм и сыпучей плотностью 1150 кг/м<sup>3</sup>. Содержание целевой фракции размерами 0,5–0,9 мм в нем составляет 60–75%.

Вычислительный эксперимент проводился при значениях параметров:  $L = 1.6$  м;  $B = 1.0$  м;  $m = 12$  штук;  $A = 5$  мм;  $\alpha = -5^\circ$ ;  $h = 3$  мм;  $\eta_* = 0.9$ ; размеры ячеек  $2a \times 2b = 3.5 \times 3.5$  мм с круглым отверстием диаметра  $D = 1.5$  мм. Решение многокритериальной задачи (6) дает компромиссное решение:  $E = 81.5\%$ ,  $Q = 1490$  кг/ч при оптимальных значениях параметров:  $\omega = 54.6$  с<sup>-1</sup> и  $\beta = 10.5^\circ$ . Средняя скорость принимает значение  $V_{av} = 0.118$  м/с, амплитуда относительной скорости равна 0.36 м/с, координаты положения приемного бункера для целевой фракции равны:  $x_1 = 0.98$  м,  $x_2 = 1.6$  м, а чистота разделения (относительное содержание не целевых продуктов в целевом бункере)  $\delta = 10.4\%$ .

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория случайных процессов, в частности пуассоновских, при дополнении экспериментальными исследованиями для определения параметров модели, позволяет строить математические модели и на этой основе проводить оптимизацию процесса разделения зернистых материалов по размерам на многокаскадных ситовых классификаторах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахмадиев Ф.Г., Гизязтов Р.Ф., Назипов И.Т. Гидрогазодинамика и кинетика разделения дисперсных сред на ситовых классификаторах. // Инженерно-физический журнал. 2017. Т.90. №5. С. 1135-1145
- [2] Ахмадиев Ф.Г., Гизязтов Р.Ф. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент разделения зернистых материалов на ситовых классификаторах. // Вестник Технологического университета. 2017. Т.20. №19. С. 29-34.
- [3] Непомнящий Е.А. Кинетика некоторых процессов переработки дисперсных материалов. // Теоретические основы химической технологии. 1973. Т.7. №5. С. 754-763.
- [4] Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях. М.: Колос, 1973. 304 с.
- [5] Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
- [6] Вайсберг Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов. М.: Недра, 1986. 144 с.
- [7] Мизонов В.Е., Огурцов В.А., Федосов С.В. Моделирование классификации полидисперсных материалов на виброгрохотах. // Строительные материалы, 2007, № 11. С. 26-28.
- [8] Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения: пер. с англ./ под ред. А.Н. Ширяева. М.: Наука, 1969. 511 с.
- [9] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 528 с.
- [10] Генералов М.Б. Истечение сыпучих материалов из аппаратов // Теорет. основы хим. технологии. 1985. Т.19. № 1. С. 53-58
- [11] Ахмадиев Ф.Г. Некоторые задачи многокритериальной оптимизации технологических процессов. // Теоретические основы химической технологии. 2014. Т.48. № 5. С. 574-582