Вычислительный алгоритм оптимального управления объектом с распределенными параметрами в негладкой области конечных состояний

М. Ю. Лившиц, А. В. Ненашев, Ю. Э. Плешивцева
ФБОУ ВО Самарский государственный технический университет
usat@samgtu.ru

***Аннотация*. Предложен эффективный вычислительный алгоритм для решения краевых задач оптимального быстродействия и оптимальной точности при минимаксной оценке отклонения результирующей траектории от заданного состояния. Задача сводится к невыпуклой задаче нелинейного программирования. Приведен пример решения тестовой задачи оптимального управления индукционным нагревом цилиндра.**

Ключевые слова: распределенные параметры; краевая задача; критерий оптимальности; поисковая процедура; локальный минимум; глобальный минимум

I. Введение

Практическая результативность методов и алгоритмов решения задач оптимального управления технологическими и производственными процессами определяется эффективностью вычислительных методов и соответствующего программного обеспечения.

Определяющим фактором при выборе вычислительного метода, является его адекватность поставленной оптимальной задаче. Поэтому требуют дополнительного и математически корректного обоснования широко распространенные, основанные на ограничении бесконечного числа соотношений, например, в распределенном методе моментов и (или) аппроксимации негладкого и невыпуклого критерия качества выпуклой областью [1, 10], численные методы приближенного решения оптимальных задач, в особенности применительно к бесконечномерным объектам с распределенными параметрами (ОРП). Строгий анализ показывает, что при этом зачастую происходит подмена постановки оптимальной задачи и вместо изначально поставленной краевой задачи с фиксированными концами оптимальной траектории фактически решается задача с подвижным или свободным правым концом оптимальной траектории в соответствующей области конечномерного или бесконечномерного пространства состояний, если речь идет об ОРП.

Основные затруднения при реализации вычислительных методов для ОРП связаны не только с необходимостью их конечномерной аппроксимации в большинстве известных методов, но и с проблемой адекватности удобных в вычислительной практике метрик, определяющих начальные и конечные области соответствующих оптимальных краевых задач, технологически обоснованным оценкам этих областей. Погрешности достижения заданной области, от некорректного выбора вычислительного метода решения, для некоторых оптимальных задач достигают 200% [1, 2, 8, 9].

II. Постановка задачи

Ограничимся здесь, для упрощения изложения предлагаемого численного метода, одномерной краевой задачей оптимального управления ОРП, что не ведет к потере общности алгоритма вычислительной процедуры. Существенно, что даже при теоретической фиксации правого конца оптимальной траектории ОРП, погрешности измерения, усечение бесконечномерных моделей, погрешность при численной реализации и т.п., не позволяют практически решить эту задачу точно. Поэтому фактически решается задача с подвижным правым концом траектории. Однако, при этом из-за некорректной подмены постановки задач происходит существенная потеря по критерию оптимальности. Эффективность решения определяется на этапе формулировки краевых оптимальных задач и во многом зависит от формулировки метрики оценки области конечных состояний [1, 9].

Пусть ОРП описывается линейным одномерным дифференциальным уравнением параболического типа

$$\frac{\partial\Theta(l,\varphi)}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2\Theta(l,\varphi)}{\partial l^2}-\Gamma l^{-1}\frac{\partial\Theta(l,\varphi)}{\partial l}=F(l,\varphi),\quad l\in(0,1),\ \varphi\in(0,\infty) \tag{1}$$

с краевыми условиями:

$$\Theta(l,0)=\Theta_0;\ \frac{\partial\Theta(0,\varphi)}{\partial l}=0;\ \frac{\partial\Theta(1,\varphi)}{\partial l}=q(\varphi) \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 17-08-00593и № 16-08-00945

Здесь l, φ относительные пространственный и временной (число Фурье) аргументы, Г – параметр формы (Г=1 для цилиндрической системы координат, Г=0 для декартовой системы координат), $F(l,\varphi)$ и $q(\varphi)$ заданные функции своих аргументов.

Рассмотрим две краевые задачи оптимального управления объектом (1)-(2) с подвижным правым концом траектории в бесконечномерной негладкой области $\bar{\Omega}_{\Theta} = \left\{ \Theta(l,\varphi) : \max_{l\in[0,1]} \left| \Theta(l,\varphi_0) - \Theta^*(l) \right| \le \varepsilon \right\}$ допустимых результирующих состояний для заданной $\varepsilon = \varepsilon_з$ или предельно достижимой в i-ом классе управлений $\varepsilon = \varepsilon_{min}^{(i)}$ погрешности в области

$$\bar{\Omega}_u = \left\{ u(\varphi) : U_{min} \le u(\varphi) \le U_{max} \right\} \quad (3)$$

допустимых управлений $u(\varphi)$:

задача быстродействия

$$j_{\varphi}^{опт} = \min_{u(\varphi)\in\Omega_u} \varphi_0 \Big|_{\Theta\in\bar{\Omega}_{\Theta},\ \varepsilon=\varepsilon_з} \quad (4)$$

задача максимальной точности

$$j_{\varepsilon}^{опт} = \min_{u(\varphi)\in\Omega_u} \max_{l\in[0,1]} \left| \Theta(l,\varphi_0) - \Theta^*(l) \right| \quad (5)$$

Здесь $\Theta^*(l)$ заданное результирующее распределение $\Theta(l,\varphi) = \Theta^*(l)$ в момент $\varphi = \varphi_0$ окончания процесса $0 < \varphi_0 < \infty$.

В качестве подлежащего определению управления $u(\varphi)$ можно рассматривать временную компоненту $v(\varphi)$ правой части уравнения (1) в мультипликативной форме[3]: $F(l,\varphi) = w(l)v(\varphi)$ имеющую смысл интенсивности теплоисточников, если интерпретировать объект (1)-(2) как краевую задачу теплопроводности.

Возможны и другие варианты назначения управляющего воздействия в задаче управления при анализе соответствующей технологической или производственной ситуации.

Эффективным средством решения этих задач является альтернансный метод оптимизации (АМО)[1]. Этот метод получил широкое распространение для решения прикладных задач оптимального управления различными технологическими процессами, однако наиболее эффективным является его применение для ОРП, к которым относятся процессы тепло- и массопереноса технологической теплофизики (различные виды нагрева, химико-термическая обработка, фильтрация и т.п.). АМО адекватно учитывает неполную управляемость процесса и негладкость априори заданной области $\bar{\Omega}_{\Theta}$ конечных состояний $\Theta(l,\varphi_0)$ и позволяет определить оптимальную траекторию, приводящую внутрь этой области в классе реализуемых управлений. Необходимым условием использования АМО является параметрический характер управления $u(\varphi)$. Параметризовать управление удается либо из физических соображений, когда в качестве управляющих воздействий рассматривают конструктивные или режимные характеристики (толщина футеровки, длина печи и т.п.), естественным образом параметризуемые, либо с использованием принципа максимума Понтрягина в форме Ю.В. Егорова[11], либо решением бесконечномерной проблемы моментов [4]. Параметрический характер управления позволяет свести решение задач (4) и (5) к поиску количества i и численного значения $\Delta^{(i)} = \left(\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)}, \ldots\ldots, \Delta_i^{(i)} \right)$ параметров управления и предельно достижимой в каждом i-ом подмножестве управлений погрешности $\varepsilon = \varepsilon_{min}^{(i)} = \max_{l\in[0,1]} \left| \Theta\left(l, \varphi_0^{(i)}, \Delta^{(i)}\right) - \Theta^*(l) \right|$ равномерного приближения результирующего профиля $\Theta\left(l, \varphi_0^{(i)}, \Delta^{(i)}\right)$ к заданному из условий удовлетворения производственно-технологическим требованиям профилю $\Theta^*(l)$. Причем достижимое в каждом параметрическом i-м классе управления время окончания процесса $\varphi_0 = \varphi_0^{(i)}$ является минимально возможным. Неизвестные параметры управления $\Delta^{(i)}$ и достижимая в i-ом классе управления погрешность $\varepsilon_{min}^{(i)}$ в поставленных оптимальных задачах (4) и (5), согласно процедуре АМО, определяются решением системы трансцендентных уравнений:

$$\tilde{\Theta}\left(l, \Delta^{(i)}\right)\Big|_{l=l_{nj}} = (-1)^j \vartheta\varepsilon; \quad \frac{\partial\Theta\left(l,\Delta^{(i)}\right)}{\partial l}\Bigg|_{l=l_{эm}} = 0 \quad (6)$$

где $\tilde{\Theta}\left(l, \varphi_0^{(i)}\right) = \Theta\left(l, \varphi_0^{(i)}\right) - \Theta^*(l)$, $j = \overline{1,R}\,\big(R = i \text{ if } \varepsilon_{min}^{(i-1)} > \varepsilon = \varepsilon_з > \varepsilon_{min}^{(i)}; R = i+1 \text{ if } \varepsilon = \varepsilon_{min}^{(i)}\big)$, $m = \overline{1,r}$ $l_{nj} \in \left\{ l_{nj} : [0, l_{э1}, \ldots \ldots l_{эr}, 1], r = R-1, r = R \right\}$, $0 \le l_{n1} < l_{n2} < \ldots < l_{nR}$, $\vartheta = \pm 1$

Решение последовательности задач максимальной точности (5) позволяет сформировать ряд неравенств:

$$\varepsilon_{min}^{(1)} > \varepsilon_{min}^{(2)} > \ldots > \varepsilon_{min}^{(\alpha)} = \varepsilon_{inf} \ge 0 \quad (7)$$

Ряд (7) служит основой для выбора количества i параметров управляющих воздействий т.к. выявляет минимальную достижимую абсолютную погрешность $\varepsilon_{min}^{(i)}, i = 1, 2, \ldots, \alpha$ при достижении результирующего профиля в каждом i-м классе оптимального управления.

III. Вычислительный алгоритм АМО

Основой алгоритма служит последовательное решение системы трансцендентных алгебраических уравнений (6) для определения членов ряда (7). При этом каждый член $\varepsilon_{min}^{(i)}$ ряда (7) определяется в ходе решения задачи (5) путем минимизации невязок $f_j\left(l_{nj}, \Delta^{(i)}, \varepsilon\right), f_m\left(l_{эm}, \Delta^{(i)}, \varepsilon\right)$ решения системы (6): $\tilde{\Theta}\left(l,\Delta^{(i)}\right)\Big|_{l=l_{nj}} -(-1)^{j}\vartheta\varepsilon = f_{j}\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)$,

$$\left.\frac{\partial\Theta\left(l,\Delta^{(i)}\right)}{\partial l}\right|_{l=l_{эm}} = f_{m}\left(l_{эm},\Delta^{(i)},\varepsilon\right).$$

Для этого введем оценку невязок в форме штрафной функции:

$$J\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)=J_{big}\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)+J_{small}\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right) \qquad (8)$$

где $J_{big}\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)=K\left[f_{abs}\right]^{2}$; $J_{small}\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)=K\sqrt{f_{abs}}$;

$$f_{abs}=\sum_{j=1}^{R}\left|f_{j}\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)\right|+\sum_{m=1}^{r}\left|f_{m}\left(l_{эm},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)\right|.$$

Вид оценки в форме (8) сформулирован с целью снижения вероятности возникновения «оврагов», так компонента $J_{big}\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)$ существенно увеличивает значения $J\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)$, если $f_{abs}>1$ и уменьшает, если $f_{abs}<1$. $J_{small}\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)$ действует наоборот. Коэффициент масштабирования К обеспечивает увеличение приращения оценки на отрезке $f_{abs}\in(\gamma;\delta)$, где скорость изменения оценки (8) принимает минимальные значения, что может приводить к возникновению оврагов в указанном диапазоне.

Оценка (8) всегда положительна, в зависимости от оптимизируемого процесса может быть невыпуклой, однако, если система (6) имеет решение, абсолютный минимум $J_{inf}=J\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)=0$. Задача поиска параметров $\Delta^{(i)}$ в каждом i-ом классе управления сводится к поиску координаты абсолютного минимума $J_{inf}=0$ оценки (8), определенной в многомерной области $R_{1}^{c}=\left(l_{nj}\in[0,\,1],\Delta^{(i)}\in(0,\,\infty),\varepsilon\right),c_{1}=\dim R_{1}^{c}=2(i+1)$ в случае решения задачи (5) и $R_{2}^{c}=\left(l_{nj}\in[0,\,1],\Delta^{(i)}\in(0,\,\infty)\right)$, $c_{2}=$ $=\dim R_{2}^{c}=2i$ в случае решения задачи (4).

Т.о. для решения системы (6) следует решить нелинейную невыпуклую задачу математического программирования: $J\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)\to\min\limits_{R_{1,2}^{c}}J\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)$ в условиях (1), (2), (3). Для упрощения введем обозначения: $x_{1}=l_{n1},\ldots,x_{R}=l_{nR},x_{R+1}=\Delta_{1}^{(i)},\ldots,x_{R+i}=\Delta_{i}^{(i)},x_{R+i+1}=\varepsilon$ тогда: $R_{1,2}^{c}=\left\{x_{1},\ldots,x_{c_{1,2}}\right\}$, $J\left(l_{nj},\Delta^{(i)},\varepsilon\right)=J\left(x_{1},\ldots,x_{c_{1,2}}\right)=J\left(X\right),X=$ $=\left(x_{1},\ldots,x_{c_{1,2}}\right)$.

Процедура определения глобального минимума функции (8) должна удовлетворять следующим требованиям:

- учитывать невыпуклый и нелинейный характер $J\left(X\right)$;
- обеспечивать поиск в зоне «оврагов»;
- достаточно эффективно обеспечивать поиск в условиях повышенной размерности области определения $R_{1,2}^{c}$;
- выполнять свои функции в условиях ограниченных вычислительных ресурсов.

Известны современные и достаточно эффективные алгоритмы поиска [1, 6, 12] абсолютного в замкнутой области экстремума многомерных нелинейных невыпуклых функций. Наиболее популярные из которых методы случайного поиска, например, метод отжига, генетические алгоритмы, интервальный метод ветвей и границ и другие. Все они характеризуются высокой вычислительной сложностью, причем количество требуемых для поиска вычислительных операций находится в степенной зависимости от размерности $\dim R_{1,2}^{c}$ области определения оптимизируемой функции.

Подобных недостатков лишен разработанный В.К. Чичинадзе алгоритм Ψ-преобразования [7], суть которого в преобразовании оптимизируемой многомерной функции (8) в одномерную непрерывную, монотонно убывающую численно заданную метрику $\Psi\left(\varsigma\right)$ оптимизируемой функции, нуль которой совпадает с абсолютным экстремумом $J\left(X\right)$. Вычислительная сложность алгоритма Ψ-преобразования невелика. Основные затраты времени вычислений происходят на этапе подготовки данных, поскольку на начальном этапе алгоритма Ψ-преобразования необходимо произвести вычисление $J\left(X\right)$ в S равномерно и регулярно распределенных в пространстве $R_{1,2}^{c}$ точках $X_{k}\in R_{1,2}^{c},k=1,2,\ldots,S$. Количество S точек X_{k} напрямую влияет на точность поиска экстремума методом Ψ-преобразования.

Среди вычисленных значений $J\left(X_{k}\right)$ находим минимальное J_{min} и максимальное J_{max} значения, после чего интервал $\left[J_{min};(J_{max}-J_{min})2^{-1}\right]$ делим на N равных частей.

Определяем оценочные уровни по аргументу ς по формуле: $\varsigma_{\nu}=(J_{max}-J_{min})2^{-1}-(\nu-1)\Delta\varsigma,\ \Delta\varsigma=\varsigma_{\nu-1}-\varsigma_{\nu}$, $\nu=1,2,3,\ \ldots,N$. После чего вычислим значения $\Psi_{\nu}=\xi_{\nu}/S$, где $\xi_{\nu}=\sum\limits_{k=1}^{S}g_{k}^{\nu}$, $g_{k}^{\nu}=\begin{cases}1, & J\left(X_{k}\right)\le\varsigma_{\nu}\\ 0, & J\left(X_{k}\right)>\varsigma_{\nu}\end{cases}$.

Введем функцию $\Psi\left(\varsigma\right)$ в аналитическом виде через аппроксимацию по множеству ς_{ν} значений Ψ_{ν}, например, полиномом второго порядка

$$\Psi\left(\varsigma\right)=\alpha_{0}\varsigma^{2}+\alpha_{1}\varsigma+\alpha_{2} \qquad (9)$$

коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ которого получим, например, методом наименьших квадратов.

Находим наименьший $\varsigma_m = J(X_m)$ корень полинома (9) близкий значению глобального минимума J_{inf} функции (8).

На следующем шаге найдем вектор $X_m = \left\{x_1^m, x_2^m, \ldots, x_{c_{1,2}}^m\right\} \in R_{1,2}^c$, члены которого найдем путем подстановки ς_m в аппроксимирующие полиномы: $x_t^m(\varsigma) = \beta_0^t \varsigma^2 + \beta_1^t \varsigma + \beta_2^t, \quad t = 1, 2, \ldots, c_{1,2}$ введенные аналогично полиному (9).

Для снижения погрешности определения X_m и повышения вероятности определения глобального экстремума $J_{inf} = 0$ используем полученные результаты в качестве начальных условий для алгоритма локального поиска.

При подборе алгоритма локального поиска руководствуемся требованиями. Наиболее эффективными в условиях этих требований представляются алгоритмы прямого поиска [9, 10]. Из которых в наибольшей степени удовлетворяет требованиям алгоритм Дж. Недлера и Р. Мида [13]. Он представляет собой улучшенный вариант алгоритма симплекс-метода и не требователен к форме симплекса, в отличие от классического алгоритма или алгоритма Хука-Дживса[1], что позволяет снять проблему сопоставимости размерностей переменных. Этот алгоритм предлагает простую и гибкую систему изменения размеров симплекса, без пересчета всех значений целевой функции, входящих в симплекс и работает существенно быстрее классического алгоритма поиска симплекс-методом, за счет использования информации предыдущих итераций.

Параметры алгоритма: коэффициент отражения α>0; коэффициент сжатия β>0; коэффициент растяжения γ>0; погрешность поиска ε_n. Значения коэффициентов выбираются произвольно. Обычно принимают α=1; β=0,5; γ=2.

В качестве опорной точки используем X_m. Отбираем $c_{1,2} = \dim R_{1,2}^c$ точек с координатами:

$$\begin{gathered}
X_1 = \left\{x_1^m + \varepsilon_\varphi x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_{c_{1,2}}^m\right\} \\
X_2 = \left\{x_1^m, x_2^m + \varepsilon_\varphi x_2^m, x_3^m, \ldots, x_{c_{1,2}}^m\right\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{c_{1,2}} = \left\{x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_{c_{1,2}}^m + \varepsilon_\varphi x_{c_{1,2}}^m\right\}
\end{gathered} \tag{10}$$

образующих симплекс в пространстве $R_{1,2}^c$ аргументов функции (8). В точках (10) определим значения $J(X_z)$, $z = \overline{0, c_{1,2}}$, $X_0 = X_m$. Получаем массив вершин симплекса $V\left[c_{1,2}+1\right]$, где каждый член массива представляет собой точку X_z. Затем выполним последовательность действий:

1. Сортируем массив $V\left[c_{1,2}+1\right]$ по убыванию величины $J\left(V\left[z\right]\right)$.

2. Из вершин симплекса выбираем три точки $V[0], V[1], V\left[c_{1,2}\right]$. Для уменьшения величины $J_{V[0]}$ определим центр тяжести всех точек, за исключением $V[0]: X_h = \left\{x_{h1}, x_{h2}, x_{h3}, \ldots, x_{hc_{1,2}}\right\}$, где $x_{ht} = (1/c_{1,2})\sum_{z=1}^{c_{1,2}} x_{zt}$, $t = \overline{1, c_{1,2}}$, при этом существенно, что $J\left(X_h\right)$ – не вычисляем.

3. Отразим точку $V[0]$ относительно X_h с коэффициентом отражения α, получим точку X_H с координатами $x_{Ht} = (1+\alpha)x_{ht} - \alpha x_{V[0]t}, t = 1, 2, \ldots, c_{1,2}$

4. Последовательно сравним значение $J\left(X_H\right)$ с $J_{V[0]}, J_{V[1]}, J_{V\left[c_{1,2}\right]}$:

4a. Если $J\left(X_H\right) < J_{V\left[c_{1,2}\right]}$, то растягиваем симплекс. Получаем новую точку X_e с координатами $x_{et} = (1+\gamma)x_{ht} - \gamma x_{Ht}$, $t = 1, 2, \ldots, c_{1,2}$. Если $J\left(X_e\right) < J_{V\left[c_{1,2}\right]}$, то $V\left[c_{1,2}\right] = X_e$. Переходим на шаг 8. Если $J\left(X_e\right) > J_{V\left[c_{1,2}\right]}$, то $V[0] = X_H$. Переходим на шаг 8.

4b. Если $J_{V\left[c_{1,2}\right]} < J\left(X_H\right) < J_{V[1]}$, то $V[0] = X_H$. Переходим на шаг 8.

4c. Если $J_{V[1]} < J\left(X_H\right) < J_{V[0]}$, то $V[0] = X_H$. Переходим на шаг 5.

4d. Если $J\left(X_H\right) > J_{V[0]}$, то переходим на шаг 5.

5. Сжимаем симплекс к точке X_s с координатами $x_{st} = (1-\beta)x_{ht} + \beta x_{V[0]t}$, $t = 1, 2, \ldots, c_{1,2}$

6. Если $J\left(X_s\right) < J_{V[0]}$, то $V[0] = X_s$. Переходим на шаг 8.

7. Если $J\left(X_s\right) > J_{V[0]}$, то производим сжатие симплекса к точке $V\left[c_{1,2}\right]$. Производим пересчет координат остальных точек $V[z]$, $x_t^z = x_{V\left[c_{1,2}\right]t} + (x_{V[z]t} - x_{V\left[c_{1,2}\right]t})/2$, $t = \overline{1, c_{1,2}}, z = \overline{0, c_{1,2}-1}$.

8. Вычисляем длину ребер симплекса. Если хотя бы одно ребро длиннее чем ε_n, выполняем алгоритм с шага 1, иначе $X_{rez} = V\left[c_{1,2}\right]$. Завершаем поисковую процедуру.

Большое значение для поиска локального экстремума алгоритмом Недлера-Мида имеет выбор начальной длины ребра симплекса. С одной стороны ребро должно быть существенно меньше расстояния между точками X, с другой, достаточно большим, для того чтобы миновать множество мелких локальных экстремумов, которые могут находиться в области спуска.

IV. Заключение

Протестируем предлагаемую вычислительную процедуру на известной решенной задаче процесса индукционного нагрева бесконечного цилиндрического стержня [3], в условиях $\Theta_0(l) \equiv \Theta_0 = \Theta_a = const$, $W(\xi, l) =$

$$= \xi\left(ber'^2(\xi l) + bei'^2(\xi l)\right) / \left(ber(\xi) ber'(\xi) + bei(\xi) bei'(\xi)\right),$$

$$\xi = 4, Bi = 0,7, \Theta^*(l) = \Theta^* = 0.5$$

Параметры управления $\Delta^{(i)}$ для этой задачи представляют собой длительности интервалов постоянства управления $u(\varphi)$ принимающего значения $u = U_{max} = 1$, $U_{min} = -U_{max}$ на этих интервалах.

В результате (Рис.1) предлагаемой поисковой процедуры получены параметры оптимального по точности управления: $\Delta_1^{(1)} = 0.3475, \Delta_1^{(2)} = 0.3506, \Delta_2^{(2)} = 0.0403$

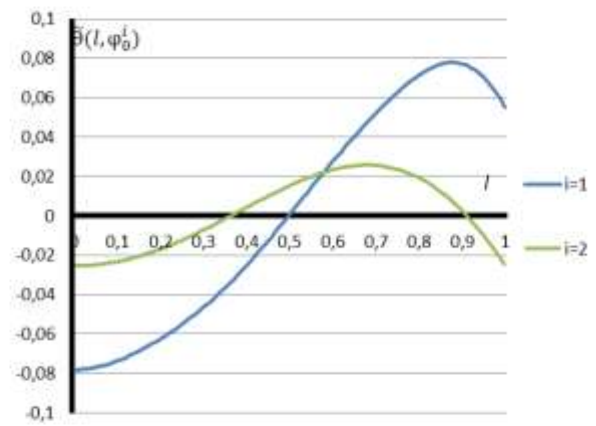

Рис. 1. Результирующее оптимальное распределение температур в тестовой задаче [7] для одно (i=1) и двух (i=2) интервального управления

Известное решение [3] этой же задачи дает: $\Delta_1^{(1)} = 0.349, \Delta_1^{(2)} = 0.35, \Delta_2^{(2)} = 0.04$

Таким образом, можно констатировать, что предложенный алгоритм обладает достаточно высокой точностью, отвечает требованиям и обеспечивает эффективный процесс поиска параметров $\Delta^{(i)}$ оптимального управления.

Список литературы

[1] Рапопорт Э.Я. Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М: Наука, 2000. 335с.

[2] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М: Наука, 1980. 520 с.

[3] Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М: Наука, 2012. 309 с.

[4] Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М: Наука, 1965. 474 с.

[5] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. / Пер. с англ. М: Мир, 1985. 509 с.

[6] Самарский А.А. Введение в численные методы. М: Наука, 1982. 271 с.

[7] Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. М: Наука, 1983. 256 с.

[8] Livshitc M.Y., Yakubovich E.A. Optimal Control of Technological Process of Carburization of Automotive Gears // Materials Science Forum. 2016. V. 870, P. 647-653.

[9] Лившиц М.Ю. Системная оптимизация процессов тепло- и массопереноса технологической теплофизики: сб. трудов XXIX Междунар. науч. конф. / под общ. ред. А.А. Большакова. // Математические методы в технике и технологиях-ММТТ-29. 2016. Т. 11. С. 104-114.

[10] Livshitc M.Y., Sizikov A.P. Multi-Criteria Optimization of Refinery: EPJ Web of Conferences // Thermophysical Basis of Energy Technologies 2015. 2016. V. 110. Article Number 01035. DOI 10.1051/epjconf/201611001035

[11] Егоров Ю.В. Необходимые условия оптимальности управления в банаховом пространстве // Математический сборник (новая серия). 1964. Т. 64 (106), № 1. С. 79-101.

[12] Захарова Е.М., Минашина И.К., Обзор методов многомерной оптимизации. // Информационные процессы. 2014. Т. 14, №3 2014. С. 256-274

[13] Nelder J.A., Mead R. A simplex method for function minimization. // Computer Journal. 1965. V. 7, P. 308-313.