Расчет потерь при принятии решений ЛПР в системе автоматического контроля квалификации управленческого персонала

А. М. Ходунов, М. Е. Царегородцев[1]
Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия
[1]science2000@ya.ru

Ф. А. Десятириков
Гимназия им. Н. Г. Басова при Воронежском государственном университете, Воронеж, Россия
felixdes@ieee.org

Н. И. Диденко
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Санкт-Петербург, Россия,
didenko.nikolay@mail.ru

А. С. Некипелова
Юго-Западный государственный университет
Курск, Россия
vertakova7@ya.ru

Аннотация. **Алгоритм различения гипотез с использованием критерия Неймана-Пирсона реализован в процедуре численного контроля качества принимаемых ЛПР решений.**

Ключевые слова: Байесовский риск; критерий Неймана-Пирсона; теория принятия решений; автоматизированная обучающая система

I. Введение

Качество процесса управления во многом определяется своевременностью принятия решений, квалификацией органов управления. В связи с этим ставится задача объективной оценки квалификации ЛПР. Для этого необходимо разработать автоматическое устройство, которое определяет оптимальное решение исходя из состояния системы и предыдущих наблюдений за ней. В работе приведены теоретические основания расчётов данного исследования, базирующихся на методике, предложенной в работах [1, 2], где установлены соотношения, при которых минимизируется риск и показано, что принятие решений проводится на основе сравнения отношения правдоподобия с порогом, зависящим от экономических потерь при принятии правильных или ложных решений и априорных вероятностей гипотез.

Целью работы является разработка алгоритмической процедуры оценки качества управленческого решения по критерию Неймана-Пирсона и методики расчёта экономического риска при ошибочном решении.

Статья подготовлена на основе научных исследований, выполненных при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда «Программно-целевое управление комплексным развитием Арктической зоны РФ (проект №14-38-00009)». Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

II. Алгоритм расчёта рисков и потерь при принятии решения

Будем считать, что ставится задача принятия решения по результатам долговременного наблюдения за состоянием системы. Поскольку результат наблюдения связан с длинным рядом значений, то целесообразно применить вероятностно-статистический подход к определению решающего правила.

При принятии решений в условиях неопределенности, когда вероятности возможных вариантов обстановки неизвестны, могут быть использованы ряд критериев, выбор каждого из которых, наряду с характером решаемой задачи, поставленных целевых установок и ограничений, зависит также от склонности к риску лиц, принимающих решения [3, 4]. Решения принимаются на основании принимаемой гипотезы о текущем и прогнозном состоянии системы [5, 6].

В общем случае априорные вероятности гипотез о состоянии наблюдаемой системы неизвестны. При этом каждая гипотеза является причиной принятия определённого решения. Рассмотрим систему с двухпозиционным управлением, т.е. имеются только две гипотезы H_0 и H_1, следствием которых являются противоположные решения. Критерий Неймана-Пирсона применяется, когда неизвестны априорные вероятности гипотез $P_0 = P(H_0)$ и $P_1 = P(H_1)$. Известно, что события принятия гипотез составляют полную группу, то есть

$$P_0 + P_1 = 1 \quad . \qquad (1)$$

Назначим плату за выбор гипотезы. При правильных решениях всегда обеспечивается доход или отсутствие убытков. При неправильных решениях – это экономические потери предприятия. Величина платы устанавливается по результатам длительных наблюдений. В таблице 1 представлены варианты выборов гипотез или решений. В обозначении платы за выбор гипотезы в подстрочном индексе первая цифра – номер выбранной гипотезы, вторая цифра – номер правильной гипотезы.

ТАБЛИЦА I ВАРИАНТЫ ВЫБОРА ГИПОТЕЗ

№	Верная гипотеза	Выбираемая гипотеза	Плата за выбор	Характер выбора
1	H_0	H_0	Π_{00}	правильный
2	H_0	H_1	Π_{10}	ошибочный
3	H_1	H_1	Π_{11}	правильный
4	H_1	H_0	Π_{01}	ошибочный

Для расчёта Байесовского риска необходимо знать матрицу потерь, априорные вероятности и условные вероятности гипотез. Пусть известна матрица потерь

$$\overline{\Pi} = \begin{vmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} \end{vmatrix} .$$

Известна вероятность принятия решения о гипотезе H_1 при условии, что истинной является гипотеза H_0. Это вероятность ошибки первого рода или вероятность ложной тревоги: $F = P(H_1|H_0)$.

Риск – сумма рисков при всех возможных выборах гипотез [7]. Средний Байесовский риск определяется соотношением [1, 2]

$$\begin{aligned} R = P_0 \cdot P(H_0|H_0) \cdot \Pi_{00} + P_0 \cdot P(H_1|H_0) \cdot \Pi_{10} + \\ + P_1 \cdot P(H_1|H_1) \cdot \Pi_{11} + P_1 \cdot P(H_0|H_1) \cdot \Pi_{01}. \end{aligned} \tag{2}$$

Для расчёта Байесовского риска в задаче оценки эффективности управленческих решений по критерию Неймана-Пирсона необходимо определить условные вероятности гипотез.

Пусть при одном испытании наблюдается реализация из L результатов наблюдений. Например, каждодневные наблюдения в течение месяца курса валюты, акций или других ценных бумаг. По гипотезе H_1 реализация имеет среднее m и дисперсию σ_1^2, соответственно по гипотезе H_0 реализация имеет среднее m и дисперсию σ_0^2. Представим наблюдение вектором $\vec{Y} = [y_1, y_2, y_3, ..., y_L]^T$. Каждый компонент вектора является случайной величиной. Но у всех компонентов есть общее. Это среднее значение и дисперсия. Среднее значение результатов наблюдений определяется по формуле $m = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} y_k$. Дисперсия результатов наблюдений равна $d = \sigma^2 = \frac{1}{L-1}\sum_{k=1}^{L}(y_k - m)^2$.

Среднеквадратическое отклонение равно $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Рассмотрим частный случай равенства средних значений наблюдений по обеим гипотезам $m_1 = m_0 = m$. Решающее правило при различении двух гипотез при равенстве средних и различных дисперсиях результатов наблюдений имеет вид [1, 2]:

$$\xi \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \Pi \quad при \quad \sigma_1^2 > \sigma_0^2, \qquad и \qquad \xi \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} \Pi \quad при \quad \sigma_1^2 < \sigma_0^2, \tag{3}$$

где $\xi = \sum_{k=1}^{L}(y_k - m)^2$ – достаточная статистика, равная сумме квадратов разностей наблюдений и их среднего;

$$\Pi = \frac{2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_0^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \cdot \left(\ln h - L \cdot \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right) \tag{4}$$

– порог сравнения достаточной статистики;

$h = \frac{P_0 \cdot (\Pi_{10} - \Pi_{00})}{P_1 \cdot (\Pi_{01} - \Pi_{11})}$ – порог сравнения отношения правдоподобия.

Априорные вероятности P_0 и P_1 гипотез неизвестны.

Вероятность принятия гипотезы H_0 равна [1, 2]:

$$P(H_0|H_0) = \begin{cases} \Phi(\Pi, L, \sigma_0), & при \quad \sigma_1^2 > \sigma_0^2, \\ 1 - \Phi(\Pi, L, \sigma_0), & при \quad \sigma_1^2 < \sigma_0^2. \end{cases}$$

В этом выражении применена интегральная функция χ^2-распределения вероятностей как функция верхнего предела интегрирования, равного порогу сравнения достаточной статистики Π, с L степенями свободы и среднеквадратическом отклонении σ_0

$$\Phi(\Pi, L, \sigma_0) = \int_0^{\Pi} W(\xi_0) \cdot d\xi_0 = \frac{1}{2^{\frac{L}{2}} \cdot \sigma_0^L \cdot \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \cdot \int_0^{\Pi} \xi_0^{\left(\frac{L}{2}-1\right)} \cdot \exp\left\{ -\frac{\xi_0}{2 \cdot \sigma_0^2} \right\} \cdot d\xi_0$$

где $\Gamma\left(\frac{L}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{L}{2}-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$ – гамма-функция; L – число степеней свободы, равное числу дней наблюдения за состоянием критичных параметров системы.

Вероятность принятия гипотезы H_1, если истинна гипотеза H_0 или вероятность ошибки первого рода (вероятность ложной тревоги) равна.

$$P(H_1|H_0) = 1 - P(H_0|H_0) = \begin{cases} 1 - \Phi(\Pi, L, \sigma_0), & при \quad \sigma_1^2 > \sigma_0^2, \\ \Phi(\Pi, L, \sigma_0), & при \quad \sigma_1^2 < \sigma_0^2. \end{cases}$$

В соответствии с критерием Неймана-Пирсона эта вероятность задана и равна F.

Задача состоит в том, чтобы подобрать такое значение Π, при котором выполняется равенство

$$F = \begin{cases} 1 - \Phi(\Pi, L, \sigma_0), & при \quad \sigma_1^2 > \sigma_0^2, \\ \Phi(\Pi, L, \sigma_0), & при \quad \sigma_1^2 < \sigma_0^2. \end{cases}$$

Один из путей решения задачи – это использование обратной функции интегрального χ^2-распределения вероятности

$$\Pi = \begin{cases} \Phi^{-1}((1-F), L, \sigma_0), & при \quad \sigma_1^2 > \sigma_0^2, \\ \Phi^{-1}(F, L, \sigma_0), & при \quad \sigma_1^2 < \sigma_0^2. \end{cases} \quad (5)$$

При найденном значении порога сравнения достаточной статистики Π определяется порог сравнения отношения правдоподобия из уравнения (4):

$$\ln h = -L \cdot \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - \Pi \cdot \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_0^2}.$$

Порог сравнения отношения правдоподобия равен

$$h = \exp\left\{ -L \cdot \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - \Pi \cdot \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_0^2} \right\}. \quad (6)$$

В методике [1, 2] априорные вероятности гипотез, соответствующие заданной вероятности ложной тревоги определяются следующим образом. Из выражения для порога сравнения отношения правдоподобия выразим одну из априорных вероятностей гипотез, например, P_1, из этого соотношения

$$P_1 = \frac{P_0 \cdot (\Pi_{10} - \Pi_{00})}{h \cdot (\Pi_{01} - \Pi_{11})}.$$

Учтём (1), тогда найдём P_1 (а значит, и P_0):

$$P_1 = \frac{1}{1 + h \cdot \dfrac{\Pi_{01} - \Pi_{11}}{\Pi_{10} - \Pi_{00}}} \quad (7)$$

Таким образом, по заданной вероятности ложной тревоги F определены порог сравнения достаточной статистики Π, порог сравнения отношения правдоподобия h и априорные вероятности гипотез P_1 и P_0.

Вероятность принятия гипотезы H_1, если она истинна, или вероятность правильного решения о гипотезе H_1 равна

$$P(H_1|H_1) = \begin{cases} 1 - \Phi(\Pi, L, \sigma_1), & при \quad \sigma_1^2 > \sigma_0^2, \\ \Phi(\Pi, L, \sigma_1), & при \quad \sigma_1^2 < \sigma_0^2. \end{cases} \quad (8)$$

В этом выражении применена интегральная функция χ^2-распределения вероятностей как функция верхнего предела интегрирования, равного порогу сравнения достаточной статистики Π, с L степенями свободы и среднеквадратическом отклонении σ_1

$$\Phi(\Pi, L, \sigma_1) = \int_0^{\Pi} W(\xi_1) \cdot d\xi_1 = \frac{1}{2^{\frac{L}{2}} \cdot \sigma_1^L \cdot \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \cdot \int_0^{\Pi} \xi_1^{\left(\frac{L}{2}-1\right)} \cdot \exp\left\{ -\frac{\xi_1}{2 \cdot \sigma_1^2} \right\} \cdot d\xi_1$$

Вероятность принятия гипотезы H_0, если истинна гипотеза H_1, или вероятность ошибки второго рода (вероятность пропуска сообщения)

$$P(H_0|H_1) = 1 - P(H_1|H_1) = \begin{cases} \Phi(\Pi, L, \sigma_1), & при \quad \sigma_1^2 > \sigma_0^2, \\ 1 - \Phi(\Pi, L, \sigma_1), & при \quad \sigma_1^2 < \sigma_0^2. \end{cases}$$

Таким образом [1, 2], определены расчётные соотношения для определения условных вероятностей, входящих в выражение для среднего байесовского риска, и априорных вероятностей гипотез, соответствующих известной вероятности ложной тревоги по критерию Неймана-Пирсона.

III. Пример реализации алгоритма

Модельная задача представляет расчёт рисков и потерь предприятия от операций на рынке ценных бумаг. Исходные данные к расчёту следующие.

1. Среднеквадратическое отклонение курса акций равно:

– по гипотезе H_0 «покупать акции» σ_0 =28.6900 у.е.

– по гипотезе H_1 «продавать акции» σ_1=16.5300 у.е.

2. Среднее значение курса акций предприятия m определяется по результатам наблюдений в истекшем месяце.

3. Потери при правильных решениях равны:

– при выборе H_0, когда правильная H_0: Π_{00}=41400.0 у.е.

– при выборе H_1, когда правильная H_1: Π_{11}=28200.0 у.е.

Потери при неправильных решениях равны:

– при выборе H_0, когда правильная H_1:

Π_{01}= .411000E+07 у.е.

– при выборе H_1, когда правильная H_0:

Π_{10}= .286000E+07 у.е.

4. Вероятность выбора гипотезы H_1, когда верная гипотеза H_0 (вероятность ложной тревоги), равна: $F = P(H_1|H_0)$= .100

5. Результаты наблюдений курса акций y_k за истекший месяц равны:

k	1	2	3	4	5
y_k	971.000	985.900	1010.60	1017.10	999.500
k	6	7	8	9	10
y_k	1001.70	981.200	994.200	974.800	1000.50
k	11	12	13	14	15
y_k	999.100	993.800	1004.10	1003.50	992.100
k	16	17	18	19	20
y_k	970.900	993.000	959.000	1010.90	1009.10
k	21	22	23	24	25
y_k	1002.30	958.300	997.800	1001.60	998.500
k	26	27	28	29	30
y_k	996.300	977.100	987.800	986.300	993.600

Число значений наблюдений равно $L = 30$.

Отметим, что $m_1 = m_0 = m$, $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$.

1. Среднее значение курса акций предприятия

$$m = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} y_k = 992.387.$$

2. Дисперсия результатов наблюдений

$$\sigma^2 = \frac{1}{L-1}\sum_{k=1}^{L}(y_k - m)^2.$$

Среднеквадратическое отклонение курса акций

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 14.7505.$$

3. Порог сравнения достаточной статистики из (5)

$$\Pi = \Phi^{-1}(F, L, \sigma_0) = 16955.6.$$

4. Достаточная статистика равна

$$\xi = \sum_{k=1}^{L}(y_k - m)^2 = 6309.77.$$

5. Правила принятия решений при равенстве средних значений $m_1 = m_0$ в зависимости от соотношения дисперсий $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ или $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ имеют вид (3). Это значит, при $m_1 = m_0$ и $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ принимается решение в пользу гипотезы H_1 если достаточная статистика ξ меньше или равна порогу сравнения Π. В ходе решения установлено, что достаточная статистика меньше порога $\xi < \Pi$, поэтому при $m_1 = m_0$ и $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ принятое решение: 1 – гипотеза H_1 «продавать акции».

Признаки принятия решения: дисперсия по гипотезе H_1 меньше дисперсии по гипотезе H_0, $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$; среднее по гипотезе H_1 равно среднему по гипотезе H_0, $m_1 = m_0$; достаточная статистика меньше или равна порогу, $\xi \le \Pi$.

6. Порог сравнения отношения правдоподобия из (6):

$h = 65.7585$.

7. Априорная вероятность гипотезы H_1 из (7):

$P_1 = 0.0103919$.

8. Априорная вероятность гипотезы H_0 из (1):

$P_0 = 1 - P_1 = 0.989608$.

9. Вероятность правильного решения о гипотезе H_0 равна

$$P(H_0|H_0) = 1 - F = 0.90.$$

10. Вероятность неправильного решения о гипотезе H_1 в принципе задана – это вероятность ложной тревоги

$$P(H_1|H_0) = F = 0.10.$$

11. Вероятность правильного решения о гипотезе H_1 из (8) (для расчёта интегральной функции χ^2-распределения с порогом $\Pi = 16955.6$, с числом степеней свободы $L = 30$, со среднеквадратическим отклонением $\sigma_1 = 16.5300$ и при $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ искомая вероятность равна

$$P(H_1|H_1) = \Phi(\Pi, L, \sigma_1) = 0.999485.$$

12. Вероятность неправильного решения о гипотезе H_0 при $m_1 > m_0$

$$P(H_0|H_1) = 1 - P(H_1|H_1) = 0.514984E–03.$$

13. Средние потери или средний Байесовский риск из (2):

$R = 320216.0$ у.е.

Заключение

Показано, что минимальный риск соответствует принятию решений на основе сравнения отношения правдоподобия с порогом, зависящим от экономических потерь при принятии правильных или ложных решений и априорных вероятностей гипотез. Проведен расчёт потерь при принятии решений по критерию Неймана-Пирсона при равных средних значениях и неравных дисперсиях результатов наблюдений. Полученные решения реализованы в системе компьютерного определении квалификации управленческого персонала.

Список литературы

[1] Lutin V.I., Mager V.E., Desyatirikova E.N. “The Processing of Signals from Sensors to Observe Objects in Various Physical Fields”, in Proc. 2018 IEEE ElConRus, St. Petersburg and Moscow, Russia, Jan.29 – Febr.1, 2018, pp.1132-1137. Doi:

[2] Lutin V.I., Shipilova E.A., Chernenkaya L.V., Mager V.E., Desyatirikova E.N., Makeeva O. B. The Effectiveness of Complex Signal Processing from Object Observation Sensors in Various Physical Fields, in Proc. 2018 XXI International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM), St. Petersburg, Russia, May.24-26, 2018, pp.77-80.

[3] A.V. Loginova, E.K. Algazinov, V.V. Garshina, A.V. Sychev,E.N. Desyatirikova and A.V. Smoljyaninov, “Collaboration with Employers in IT Training,” *2017 IEEE VI Forum Strategic Partnership of Universities and Enterprises of Hi-Tech Branches (Science. Education. Innovations) (SPUE)*, St. Petersburg, 2017, pp. 88-91. doi: 10.1109/IVForum.2017..8246059

[4] Y. S. Klochkov, N. I. Didenko, K. M. Makov, I. O. Zapivahin, M. S. Ostapenko and A. D. Volgina, "Employment and professional adaptation of specialists," *2017 IEEE VI Forum Strategic Partnership of Universities and Enterprises of Hi-Tech Branches (Science. Education. Innovations) (SPUE)*, St. Petersburg, 2017, pp. 162-164. doi: 10.1109/IVForum.2017.8246080

[5] Y.S. Klochkov, A.I. Lepehin, D.S. Vasilega, N.A. Vasilega, K.Z. Nonieva and S.E. Vasilyeva, "Professional orientation of students," 2017 IEEE VI Forum Strategic Partnership of Universities and Enterprises of Hi-Tech Branches (Science. Education. Innovations) (SPUE), St. Petersburg, 2017, pp. 165-167. doi: 10.1109/IVForum.2017.8246081

[6] E.S. Klochkova, B.M. Alasas, R.R. Esedulaev, A.M. Tveryakov, D.V. Vasily'ev and R.K. Krayneva, "Assessment of the quality of higher professional education on the basis of professional and social accreditation," 2017 IEEE VI Forum Strategic Partnership of Universities and Enterprises of Hi-Tech Branches (Science. Education. Innovations) (SPUE), St. Petersburg, 2017, pp. 137-140. doi: 10.1109/IVForum.2017.8246073

[7] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. 479 с.