Использование методов АКАР и АКОР для синтеза оптимальных систем управления

А. А. Колесников[1], А. А. Кузьменко[2]
Институт компьютерных технологий и информационной безопасности
Южного федерального университета
[1]ankolesnikov@sfedu.ru , [2]aakuzmenko@sfedu.ru

Аннотация. **В докладе приводится сравнение известного метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) с методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР). Показано, что метод АКАР обладает значительными преимуществами, связанными с более простой процедурой аналитического конструирования нелинейных законов оптимального управления, ясной физической трактовкой весовых коэффициентов критериев оптимальности и устойчивостью замкнутых оптимальных систем.**

Ключевые слова: нелинейные системы управления; синтез управления; метод АКОР; синергетическая теория управления; метод АКАР

I. Введение

Методы АКОР, наряду с принципом максимума Понтрягина, и в настоящее время составляют наиболее важный раздел теории и практики синтеза систем оптимального управления. Однако необходимо отметить, что эти методы нашли своё приложение в основном для линейных объектов и квадратичных функционалов: критерия Летова-Калмана, функционала обобщённой работы (ФОР), критерия взвешенной обобщённой работы (КВОР) и др. При высокой размерности даже линейных объектов решение задачи АКОР встречает определённые трудности, связанные с численным решением уравнений Риккати [1]. Решение же задачи АКОР для нелинейных объектов наталкивается на принципиальные трудности, связанные с нахождением решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Именно этим и объясняется отсутствие достаточного количества публикаций с аналитическим синтезом (без использования численных методов) законов управления нелинейными объектами методами АКОР. В имеющихся же публикациях решению задачи синтеза оптимального управления предшествует линеаризация исходной нелинейной математической модели объекта или использование прогнозирующих линейных моделей и дальнейшее применение численных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Но, тем не менее, интерес к практическому применению методов АКОР по-прежнему высок: так поисковый запрос «LQR or LQG» в реферативной системе Scopus только за период 2000–2016 гг. выдаёт более 5000 уникальных ссылок на научные работы.

Отметим, что обозначенные выше проблемы АКОР усугубляются проблемой выбора весовых коэффициентов оптимизирующих функционалов, которая так и не получила приемлемого для проектировщиков решения: выбор этих коэффициентов заранее не определён физически ясными рекомендациями. Если в линейном случае подбор весовых коэффициентов квадратичных критериев можно каким-то образом организовать путём моделирования на ЭВМ переходных процессов в замкнутой линейной системе, то в нелинейном случае такой подход математически некорректен. Это объясняется тем общеизвестным фактом, что для нелинейных систем несправедлив принцип суперпозиции, а их поведение, в отличие от линейных, существенным образом зависит от начальных условий. В этой связи, выбрав в результате моделирования нелинейной системы на ЭВМ те или иные подходящие, на первый взгляд, весовые коэффициенты соответствующих критериев, можно получить практически неработоспособную нелинейную систему, т.к. при других начальных условиях ее поведение может качественно измениться. Удивительно, но этот общеизвестный факт в литературе затушёвывается, хотя его влияние на поведение синтезируемых систем носит, вообще говоря, принципиальный характер. По-видимому, в головах многих исследователей продолжает доминировать идеология классической линейной теории управления. В настоящее время востребованным направлением теории оптимального управления является управление на основе прогнозирующих моделей [2–4]. А для дискретных систем управления удаётся решить многие задачи оптимального управления на основе полиэдральной методологии [5].

Современная наука показала, что поведение нелинейных систем наиболее адекватно может быть отражено не столько путём моделирования ее переходных процессов во времени, а, в первую очередь, с помощью фазовых портретов, инвариантных многообразий и аттракторов в их фазовом пространстве. В настоящее время становится очевидным, что следует переходить к новым взглядам на проблему аналитического конструирования регуляторов, опираясь на базовые понятия современной нелинейной динамики и

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ – грант №18-08-00924-А.

синергетики, а именно: на инвариантные многообразия, аттракторы, самоорганизацию, асимптотические свойства синтезируемых систем и др. [6]. Это позволяет весьма эффективно решить проблему формирования структуры и выбора весовых коэффициентов оптимизирующих функционалов, имеющих, как правило, сопровождающий характер.

II. Постановка задачи управления в методах АКОР и АКАР

Пусть объект управления описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)^T, \mathbf{u}=(u_1,...,u_m)^T$ – векторы фазовых координат и управления; $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),...,f_n(\mathbf{x}))^T$ – вектор-функция; $\mathbf{G}(\mathbf{x})=(g_{ij}(\mathbf{x}))_{n\times m}$ – функциональная матрица.

Задача АКОР формулируется в следующем виде [7]: найти закон управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$, который переводит объект (1) из любого начального состояния $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$ в начало координат фазового пространства $\mathbf{x}=0$, обеспечивая асимптотическую устойчивость замкнутой системы, и доставляет минимум функционалу

$$J=\int_0^\infty\left(\mathbf{F_0}(\mathbf{x})+\langle\mathbf{u},\mathbf{Du}\rangle\right)dt,$$

где $\mathbf{F_0}(\mathbf{x})$ – знакоопределённая по $\mathbf{x}$ положительная функция; $\langle,\rangle$ – скалярное произведение векторов, $\mathbf{D}=\operatorname{diag}(d_{ij})_{m\times m}$ – диагональная матрица.

Процедура решения задачи АКОР базируется на методе динамического программирования Р. Беллмана. Ключевыми моментами этой процедуры является выбор соответствующей функции Ляпунова и решение алгебраических или дифференциальных уравнений типа Риккати.

Задача аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) формулируется следующим образом [6, 7]: требуется определить такой вектор управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$, который обеспечивает перевод изображающей точки (ИТ) объекта (1) из произвольного исходного состояния (в некоторой допустимой области) сначала на многообразия $\psi_k(\mathbf{x})=0$, а затем движение вдоль них в заданное состояние (в частности в начало координат $\mathbf{x}=0$). При этом движение ИТ обязательно должно удовлетворять системе основных функциональных уравнений метода АКАР:

$$T_k\dot{\psi}_k(t)+\phi_k(\psi_k)=0. \tag{2}$$

Функции $\phi_k(\psi_k)$ выбираются таким образом, чтобы, помимо асимптотической устойчивости (2), обеспечить желаемые показатели качества движения ИТ к притягивающим многообразиям $\psi_k(\mathbf{x})=0$. В простейшем случае $\phi_k(\psi_k)=\psi_k$. В общем случае, ИТ системы движется от одного многообразия к другому пока не достигнет либо финишного многообразия, которое задаёт желаемый инвариант объекта (1), при скалярном управлении, либо финишных многообразий, которые задают желаемые инварианты объекта (1), при векторном управлении. Представленная выше задача АКАР может быть также сформулирована в терминах оптимального управления: функциональные уравнения (2) являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для следующего обобщённого сопровождающего функционала (СОФ):

$$J_0=\int_0^\infty\left[\phi_k^2(\psi_k)+T_k^2\dot{\psi}_k^2(t)\right]dt. \tag{3}$$

Таким образом, синтезированный методом АКАР вектор управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$ обеспечивает минимум СОФ, т.е. является оптимальным по СОФ. Однако, в отличие от метода АКОР, функционал (3) играет второстепенную (сопровождающую) роль и в процедуре аналитического синтеза вектора управления непосредственно не участвует.

Проиллюстрируем на конкретных примерах системного синтеза сравнение методов АКОР и АКАР, исторически следовавших друг за другом и обладающих как определённой аналогией, так и существенной разницей в подходах к сущности и процедурам аналитического синтеза законов управления.

III. Сравнительные примеры синтеза законов управления методами АКОР и АКАР

Рассмотрим задачу синтеза законов оптимального управления объектом третьего порядка

$$\dot{x}_1(t)=x_2;\quad \dot{x}_2(t)=bf(x_1)+x_3;\quad \dot{x}_3(t)=u. \tag{4}$$

В работе [8] рассмотрена задача оптимизации системы управления объектом (4) при $b=0$, т.е.

$$\dot{x}_1(t)=x_2;\quad \dot{x}_2(t)=x_3;\quad \dot{x}_3(t)=u. \tag{5}$$

Уравнениями (5) в первом приближении описывается, в частности, процесс аэродинамического торможения при баллистическом входе в атмосферу искусственного спутника Земли. Ставится задача синтеза автопилота, оптимального по критерию

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left(q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2 + u^2 \right). \qquad (6)$$

В [8] приведены величины коэффициентов p_k уравнения автопилота

$$u_1 = -p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3, \qquad (7)$$

рассчитанные путём численного решения уравнения Риккати для различных комбинаций весовых коэффициентов q_i критерия качества (6) и построены соответствующие им переходные процессы.

Синтезируем законы управления объектом (5) на основе идеологии метода АКАР в его первой, простейшей версии, т.е. с использованием одного притягивающего многообразия. Для этого сначала введём в рассмотрение линейную макропеременную

$$\psi_1 = x_3 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2. \qquad (8)$$

Тогда, подставляя ψ_1 (8) в функциональное уравнение (2) при $\psi_k = \psi_1, \varphi_k(\psi_k) = \psi_1, T_k = T_1$ с учётом уравнений объекта (5) находим закон управления

$$\begin{aligned} u_1 = u = -(\beta_1 / T_1) x_1 - \\ -\left(\beta_1 + \beta_2 / T_1\right) x_2 - \left(\beta_2 + 1/T_1\right) x_3. \end{aligned} \qquad (9)$$

Отсюда следует, что управление (7) будет эквивалентно (9) при выборе

$$p_1 = \beta_1 / T_1, \quad p_2 = \beta_1 + \beta_2 / T_1, \quad p_3 = \beta_2 + 1/T_1. \qquad (10)$$

Управление u_1 (9), согласно (2), за время $(4 \div 5) T_1$ переводит ИТ системы в окрестность многообразия $\psi_1 = 0$ (8), движение вдоль которого описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{2\psi}, \quad \dot{x}_{2\psi}(t) = -\beta_1 x_{1\psi} - \beta_2 x_{2\psi}.$$

Очевидно, что при $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ эта система устойчива, а, следовательно, при $T_1 > 0$ устойчива и замкнутая система (5), (9). В зависимости от выбранных значений коэффициентов β_1, β_2 в замкнутой системе можно обеспечить желаемое время и требуемый характер переходных процессов. Выполнение соотношений (10) означает эквивалентность оптимизации системы (5), (9) по квадратичному критерию J_1 (6) и СОФ вида

$$J_2 = \int_0^{\infty} \left[\psi_1^2 + T_1^2 \dot{\psi}_1^2(t) \right] dt, \qquad (11)$$

где макропеременная ψ_1 определяется выражением (8).

Следует подчеркнуть, что расчёт коэффициентов p_i закона управления (7) при оптимизации системы по критерию J_1 (6) требует численного решения нелинейного уравнения типа Риккати, а при оптимизации по СОФ J_2 (11) используются простые аналитические соотношения при синтезе эквивалентного закона управления (9). Ещё более возрастают преимущества метода АКАР с повышением размерности систем управления и появления нелинейных компонент в модели объекта управления.

Рассмотрим далее задачу синтеза оптимальной системы управления нелинейным объектом (4), когда $b > 0$ и $f(x_1) = \sin x_1$, т.е. уравнения возмущённого движения имеют вид

$$\dot{x}_1(t) = x_2; \quad \dot{x}_2(t) = b \sin x_1 + x_3; \quad \dot{x}_3(t) = u. \qquad (12)$$

Уравнениями (12) описывается, в частности, движение математического маятника в верхнем неустойчивом положении, при этом x_1 – угол отклонения маятника от вертикали; x_2 – скорость отклонения; x_3 – момент, приложенный к маятнику. Ставится задача стабилизации маятника моментом, приложенным к нему на оси подвеса. Указанный момент развивается исполнительным механизмом, который представлен интегрирующим звеном. Требуется найти управление $u(\mathbf{x})$ на входе исполнительного механизма, которое стабилизирует маятник в верхнем положении равновесия, т.е. $x_1 = 0$, и обеспечивает асимптотическую устойчивость системы. Выберем следующий критерий оптимальной стабилизации:

$$J_3 = \int_0^{\infty} \left[\psi_2^2 + T_2^2 \dot{\psi}_2^2(t) \right] dt, \qquad (13)$$

где $\psi_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + x_3$. Применяя метод АКАР, на основе функционального уравнения вида (2) при $\psi_k = \psi_2$, $\varphi_k(\psi_k) = \psi_2$, $T_k = T_2$ находим закон управления:

$$\begin{aligned} u_2 = u = -(\beta_1 / T_2) x_1 - \beta_2 b \sin x_1 - \\ -\left(\beta_1 + \beta_2 / T_2\right) x_2 - \left(\beta_2 + 1/T_2\right) x_3, \end{aligned} \qquad (14)$$

доставляющий минимум критерию качества (13). Исследуем устойчивость движения синтезированной системы, уравнения движения которой вдоль многообразия $\psi_2 = 0$ принимают следующий вид

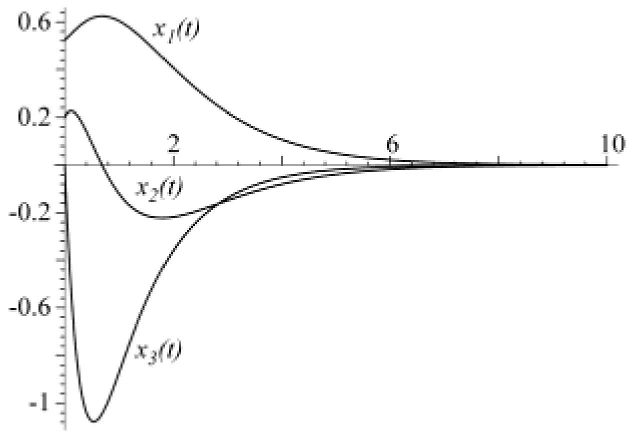

Рис. 1. Графики изменения переменных состояния

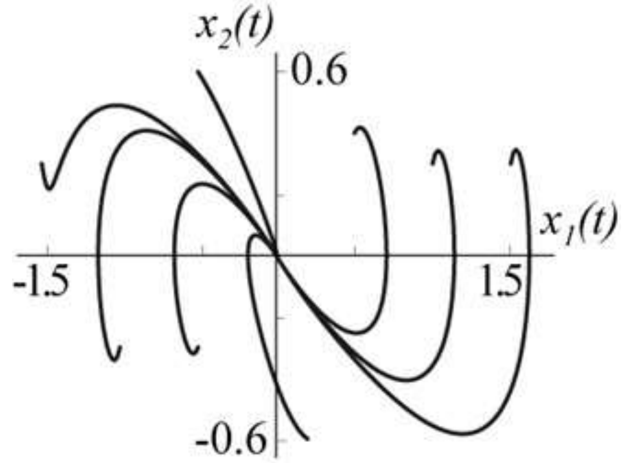

Рис. 2. Фазовый портрет системы

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{2\psi}, \quad \dot{x}_{2\psi}(t) = b \sin x_{1\psi} - \beta_1 x_{1\psi} - \beta_2 x_{2\psi}.$$

Отсюда следуют неравенства $\beta_1 > b, \beta_2 > 0, T_2 > 0$, которые являются условиями асимптотической устойчивости в целом синтезированной системы.

Разумеется, что если параметр $b = 0$, то тогда уравнения объектов (5) и (12), а также законы управления (9) и (14) совпадут. Критерий J_3 (13) с учётом уравнений объекта (12) принимает вид

$$J_3 = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \beta_1^2 x_1^2 + \left(\beta_2^2 + T_2^2 \beta_1^2 - 2\beta_1\right) x_2^2 + \\ + \left(1 + \beta_2^2 T_2^2 - 2\beta_1 T_2^2\right) x_3^2 + \\ + T_2^2 \left(b^2 \sin^2 x_1 + 2b \sin x_1 + u^2\right) \end{bmatrix} dt.$$

Это означает, что для объекта (5) при выполнении соотношений $q_1 = \beta_1^2 / T_2^2$, $q_2 = \beta_2^2 / T_2^2 + \beta_1^2 - 2\beta_1 / T_2^2$, $q_3 = 1/T_2^2 + \beta_2^2 - 2\beta_1$ критерии J_1 (6) и J_3 (13) точно совпадут и, следовательно, будут эквивалентны оптимальные переходные процессы в синтезированной системе.

На рис. 1, 2 представлены результаты моделирования замкнутой системы (12), (14) при $b = 1$, $\alpha = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 4, T_2 = 1$.

IV. Заключение

В работе проведено сравнение методов АКАР и АКОР на конкретных примерах синтеза систем. Показана как эквивалентность этих методов, так и существенная разница в подходах к аналитическому синтезу законов управления: в отличие от методов АКОР, в методе АКАР оптимизирующий функционал является конструируемым критерием качества, структура и параметры которого определяются проектировщиком системы управления, исходя из физических свойств объекта и предъявляемых к системе инженерных требований.

На примерах синтеза проиллюстрированы явные преимущества метода АКАР как в отношении процедур аналитического конструирования законов управления для нелинейных объектов, обоснованности и однозначности выбора настроечных параметров регуляторов, так и в отношении обеспечения свойств асимптотической устойчивости замкнутых систем.

Список литературы

[1] Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.

[2] Åström K.J., Kumar P.R. Control: A perspective // Automatica. 2014. Vol. 50, iss. 1. Pp. 3-43.

[3] Hull D.G. Optimal Control Theory for Applications. New York: Springer-Verlag, 2003. 384 p.

[4] Burghes D., Graham A. Control and Optimal Control Theories with Applications. London: Woodhead Publishing, 2004. 400 p.

[5] Филимонов Н.Б. Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. №12. С. 2-11.

[6] Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.

[7] Современная прикладная теория управления: Ч. II. Синергетический подход в теории управления / Под ред. А.А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. 559 с.

[8] Летов А.М. Синтез оптимальных систем // Труды II Международного конгресса ИФАК «Оптимальные системы. Статистические методы». М.: Наука, 1965. 456 с.