Математическая модель процесса пленочной конденсации

Ф. Г. Ахмадиев
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
akhmadiev@kgasu.ru

М. И. Фарахов, А. А. Ахмитшин
ООО Инженерно-внедренческий центр «Инжехим»
info@ingehim.ru

***Аннотация*. Разработана математическая модель тепломассообмена при пленочной конденсации в двухмерной постановке. В уравнениях сохранения учтено изменение свойств хладоагента и пленки конденсата в зависимости от температуры. Граничные условия сопряжения записаны на внутренней стенке области течения хладоагента, на внешней стенке, по которой течет пленка конденсата, а также на границе раздела пленка – газ. Построен алгоритм решения полученной краевой задачи. Математическая модель является основой для оптимального оформления процесса.**

Ключевые слова: математическая модель; сопряженный тепломассообмен; пленочная конденсация

I. Введение

Тепломассообменные процессы при конденсации, испарении широко используются в различных областях техники и технологии при охлаждении различных рабочих поверхностей, в технологических процессах, энергетике [1, 3]. Конденсация принадлежит к одному из наиболее распространенных технологических процессов. Процессы с конденсацией занимают большой удельный вес в химической технологии и смежных отраслях промышленности [1–3]. Изучению различных аспектов процессов конденсации посвящены многочисленные работы, в том числе обзорные работы [1–7].

Основополагающей работой по теплообмену при пленочной конденсации является работа Нуссельта [8] при целом ряде упрощающих допущений [1]. В результате определялись толщины пленки, коэффициент теплоотдачи и количество сконденсированного газа (расход конденсата). Данная работа дала вполне удовлетворительные результаты и служила базой для дальнейшего развития теории расчета плёночной конденсации [1]. В ней [8] не учитывались выделение теплоты аккумуляции при охлаждении пленки, неизотермичность поверхности охлаждения и изменение физических свойств жидкости [1].

Несмотря на многочисленные теоретические и экспериментальные исследования процессов пленочной конденсации в различных постановках [1–10], сопряженный тепломассообмен при пленочной конденсации с учетом неизотермического течения хладоагента внутри конденсатора, пленки конденсата и газовой фазы (пара) исследован недостаточно полно [1].

Целью данной работы является построение математической модели тепломассообмена при пленочной конденсации с учетом термогидродинамической обстановки во всех рабочих областях теплообменника.

II. Математическая модель

Рассматривается ламинарный установившийся режим пленочной конденсации, который может быть реализован, например, в теплообменниках, которые состоят из блоков, теплообменные элементы которых выполнены в форме прямой полой призмы из тонких металлических листов, с образованием внутреннего щелевого канала для теплоносителя (хладоагента) (рис. 1, 2) [1].

При работе теплообменника хладоагент течет внутри щелевого канала полой призмы. За счет охлаждения стенок канала и теплообмена через стенки канала с вертикально движущейся газовой фазой образуется пленка конденсата, которая стекает по поверхности канала (рис. 2) [1].

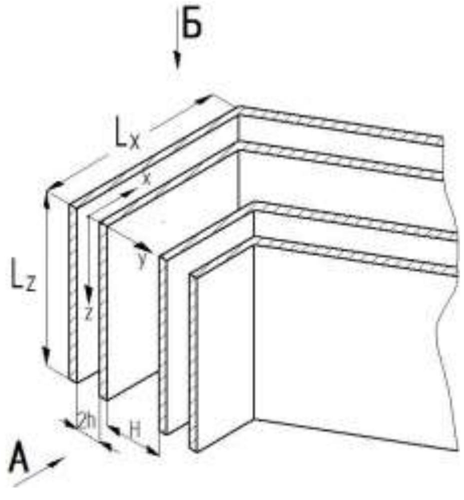

Рис. 1. Физическая модель конденсатора

Работа выполняется при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-43-160008

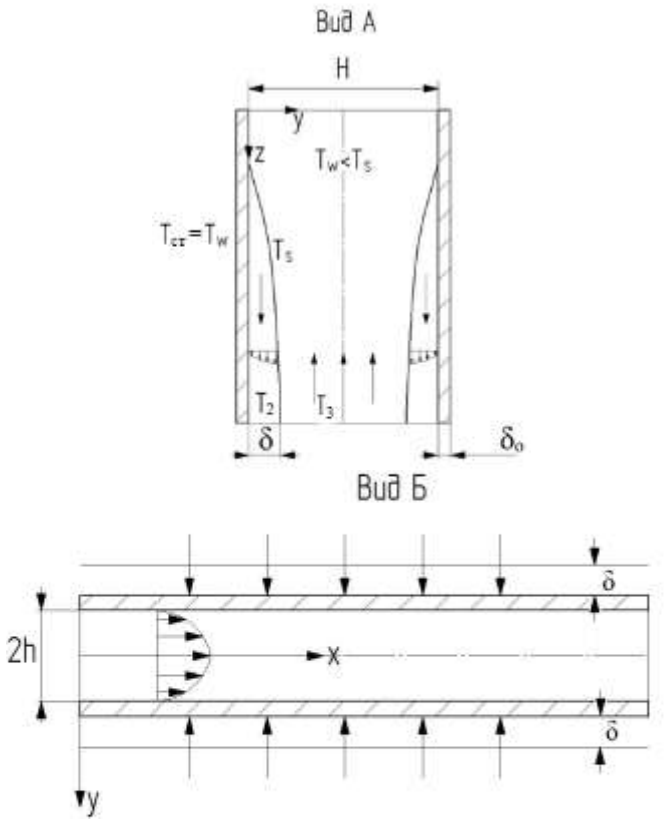

Рис. 2. Схема работы теплообменника при пленочной конденсации

В области течения хладоагента и газа (рис. 2) выполняются соотношения $L_z \approx L_x \gg 2h(H>2h)$. Тогда исходная система уравнений, описывающая установившееся плоское ламинарное течение хладоагента внутри призмы, пленки конденсата и газовой фазы (пара) в декартовой системе координат x, y, z записывается в виде [1]

$$\frac{\partial V_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial V_{1y}}{\partial y} = 0, \qquad (1.1)$$

$$\rho_1\left(V_{1x}\frac{\partial V_{1x}}{\partial x} + V_{1y}\frac{\partial V_{1x}}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + F_{1x} + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_1\frac{\partial V_{1x}}{\partial y}), \qquad (1.2)$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial y} + F_{1y} = 0, \qquad (1.3)$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial z} + F_{1z} = 0, \qquad (1.4)$$

$$\rho_1 c_{1p_1}(V_{1x}\frac{\partial T_1}{\partial x} + V_{1y}\frac{\partial T_1}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y}), \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial V_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} = 0, \qquad (2.1)$$

$$\rho_2\left(V_{2y}\frac{\partial V_{2z}}{\partial y} + V_{2z}\frac{\partial V_{2z}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p_2}{\partial z} + F_{2z} + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_2\frac{\partial V_{2z}}{\partial y}), \qquad (2.2)$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial x} + F_{2x} = 0, \qquad (2.3)$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial y} + F_{2y} = 0, \qquad (2.4)$$

$$\rho_2 c_{2p_2}(V_{2y}\frac{\partial T_2}{\partial y} + V_{2z}\frac{\partial T_2}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial y}), \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial V_{3y}}{\partial y} + \frac{\partial V_{3z}}{\partial z} = 0, \qquad (3.1)$$

$$\rho_3\left(V_{3y}\frac{\partial V_{3z}}{\partial y} + V_{3z}\frac{\partial V_{3z}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p_3}{\partial z} + F_{3z} + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_3\frac{\partial V_{3z}}{\partial y}), \qquad (3.2)$$

$$-\frac{\partial p_3}{\partial x} + F_{3x} = 0, \qquad (3.3)$$

$$-\frac{\partial p_3}{\partial y} + F_{3y} = 0, \qquad (3.4)$$

$$\rho_3 c_{3p_3}(V_{3y}\frac{\partial T_3}{\partial y} + V_{3z}\frac{\partial T_3}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_3\frac{\partial T_3}{\partial y}), \qquad (3.5)$$

$$\lambda_4\frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} = 0. \qquad (3.6)$$

Уравнения (1.1) – (1.5) описывают движение хладоагента внутри полой прямой призмы, уравнения (2.1) – (2.5) течение стекающей пленки, а уравнения (3.1) – (3.5) движение газа (пара), а (3.6) – теплопередачу через стенку. $F_{1y} = F_{1x} = 0$, $F_{1z} = \rho_1 g$; $F_{2y} = F_{2x} = 0$, $F_{2z} = \rho_2 g$; $F_{3x} = F_{3z} = 0$, $F_{3z} = \rho_3 g$; $\mu_i = \mu_i(T_i), i = \overline{1,3}$ (учитывается только изменение вязкости от температуры), индексы 1,2,3 соответственно относятся к хладоагенту, пленке жидкости и газовой фазе [1].

Система уравнений (1.1) – (3.6) решается при соответствующих граничных условиях, которые имеют вид [1]:

$$\frac{\partial V_{1x}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0,\ V_{1y} = 0 \text{ при } y = 0; \qquad (4.1)$$

$$V_{1x} = V_{1y} = 0,\ \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_4\frac{\partial T_4}{\partial y} \text{ при } y = \pm h; \qquad (4.2)$$

$$T_4 = T_2,\ \lambda_4\frac{\partial T_4}{\partial y} = \lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial y},\ V_{2y} = V_{2z} = 0,$$

$$-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial y} = \alpha(T_{10} - T_c) \approx \alpha(T_{1sr} - T_{4sr})$$

при $y = h + \delta_0$; (4.3)

$$\mu_2\frac{\partial V_{2z}}{\partial y} = \mu_3\frac{\partial V_{3z}}{\partial y} + \frac{d\sigma_2}{\partial z},\ V_{2z} = V_{3z},\ T_2 = T_3 = T_{2S},$$

$$p_2 = p_3 + \sigma_2 \frac{d^2\delta}{dz^2} \text{ при } y = h + \delta_0 + \delta ; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial y} = 0 , \; \frac{\partial V_{3z}}{\partial y} = 0 , \; V_{3y} = 0$$

$$\text{при } y = \delta_1 = h + \delta_0 + \frac{H}{2} ; \quad (4.5)$$

$$V_{1x} = V_{1xvh} , \; T_1 = T_{1vh} , \; p_1 = p_{1vh} \text{ at } x = x_{vh} ; \quad (5.1)$$

$$V_{2z} = V_{2zvh} , \; T_2 = T_{2vh} \text{ at } z = z_{vh} = z_0 ; \quad (5.2)$$

$$V_{3z} = V_{3zvh} , \; T_3 = T_{3vh} , \; V_{3y} = 0 , \; p_3 = p_{3vh}$$

$$\text{при } z = L_z , \quad (5.3)$$

где α – коэффициент теплоотдачи (с учетом термического сопротивления стенки), σ_2 – коэффициент поверхностного натяжения пленки, T_{10} – температура охлаждающей среды (хладогента); T_c, T_{2S} – температуры стенки и насыщения,

$$T_{10} \approx T_{1sr} = \frac{1}{h}\int_0^h T_1 dy = B_1 \frac{h^2}{6} + C_1 ,$$

$$T_c = T_{4sr} = \frac{1}{\delta_0}\int_h^{h+\delta_0} T_4 dy = C_4 \left(h + \frac{\delta_0}{2} \right) + C_5 . \quad (5.4)$$

Решение краевой задачи (1.1) – (1.5), (2.1) – (2.5), (3.1) – (3.6), (4.1) – (4.5) и (5.1) – (5.3) представляет собой сложную задачу. Поэтому рассмотрим решение этой задачи в частном случае.

III. Тепломассообмен при медленных режимах течения

В этом случае задача существенно упрощается и в уравнениях сохранения импульса можно пренебречь инерционными членами. Тогда уравнения сохранения (1.1) – (1.5), (2.1) – (2.5), (3.1) – (3.6) удается решить при граничных условиях (4.1) – (4.5) и (5.1) – (5.3) [1].

Приведем схему решения уравнений (1.1) – (1.5), (2.1) – (2.5), (3.1) – (3.6):

1. Из уравнений (1.3) – (1.4), (2.3) – (2.4), (3.3) – (3.4) соответственно следует, что

$$p_1(x,z) = \rho_1 g z + p_1(x) , \; p_2 = p_2(z) , \; p_3 = p_3(z) , \quad (6)$$

где $p_1(x), p_2(z), p_3(z)$ – пока неизвестные функции, которые будут определены в дальнейшем.

2. Для интегрирования уравнений сохранения энергии (1.5), (2.5), (3.5) используем приближенный метод Слезкина, согласно которому соответственно вводятся функции [1, 11]

$$B_1(x) = \frac{\rho_1 c_{1p_1}}{\lambda_1 \cdot h} \int_0^h (V_{1x} \frac{\partial T_1}{\partial x} + V_{1y} \frac{\partial T_1}{\partial y}) dy , \quad (7.1)$$

$$B_2(z) = \frac{\rho_2 c_{2p_2}}{\lambda_2 \cdot \delta} \int_{h+\delta_0}^{h+\delta_0+\delta} (V_{2y} \frac{\partial T_2}{\partial y} + V_{2z} \frac{\partial T_2}{\partial z}) dy , \quad (7.2)$$

$$B_3(z) = \frac{\rho_3 c_{3p_3}}{\lambda_3 \left(\frac{H}{2} - \delta \right)} \int_{h+\delta_0+\delta}^{h+\delta_0+\frac{H}{2}} (V_{3y} \frac{\partial T_3}{\partial y} + V_{3z} \frac{\partial T_3}{\partial z}) dy , \quad (7.3)$$

где $B_1(x), B_2(z), B_3(z)$ и $\delta(z)$ – пока неизвестные функции.

Тогда после интегрирования уравнений

$B_1(x) = \frac{\partial^2 T_1^2}{\partial y^2}$, $\quad B_2(z) = \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}$, $\quad B_3(z) = \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2}$ и $\lambda_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} = 0$ при соответствующих граничных условиях получаются следующие выражения для температур T_1, T_2 и T_3, T_4:

$$T_1 = B_1(x)\frac{y^2}{2} + C_1 , \; T_2 = B_2(z)\frac{y^2}{2} + C_2 \cdot y + \tilde{C}_2 ,$$

$$T_3 = B_3(z)(\frac{y^2}{2} - \delta_1(z) \cdot y) + C_3 , \; T_4 = C_4 \cdot y + C_5 ,$$

$$\delta_1(z) = h + \delta_0 + \frac{H}{2} , \quad (8)$$

где $C_1, C_2, \tilde{C}_2, C_3, C_4, C_5$ – постоянные интегрирования, определяются из граничных условий (4.1) – (4.5).

3. По уравнениям (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2), (3.1) – (3.2) находятся поля скоростей $V_{1x}, V_{1y}, V_{2y}, V_{2z}, V_{3y}, V_{3z}$ при известных зависимостях температуры T_1, T_2, T_3 (8). При этом были использованы полиномиальные зависимости вязкостей $\mu_i(T_i)$ от температуры [1]

$$\frac{\mu_i(T_{i0})}{\mu_i(T_i)} = 1 + \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} T_{ik}^{k} , \; (T_i = T_i - T_{i0}) \quad (9.1)$$

3.1. Из уравнения (1.2) определяется V_{1x} с учетом зависимости (9.1)

$$V_{1x}(x,y) = \int_h^y \frac{p_1'(x) \cdot y}{\rho_1 \cdot \mu_1(T_1)} dy = \tilde{p}_1'(x) \left\{ \frac{\left(y^2 - h^2\right)}{2} + \right.$$

$$+ a_{11} \left[B_1 \frac{\left(y^4 - h^4\right)}{8} + \left(C_1 - T_{10}\right) \cdot \frac{\left(y^2 - h^2\right)}{2} \right] +$$

$$+ a_{12} \left[B_1^2 \frac{\left(y^6 - h^6\right)}{24} + 2B_1\left(C_1 - T_{10}\right) \cdot \frac{\left(y^4 - h^4\right)}{8} + \right.$$

$$+\left(C_1-T_{10}\right)^2\cdot\frac{\left(y^2-h^2\right)}{2}\Bigg]\Bigg]\Bigg\},\qquad(9.2)$$

где $\tilde{p}_1'(x)=\dfrac{p_1'(x)}{\rho_1\mu_1(T_{10})}$, $n=2$ в зависимости (9.1).

3.2. При найденном $V_{1x}(x,y)$ из уравнения (1.1) с учетом граничного условия $V_{1y}(x,h)=0$ определяется поперечная скорость $V_{1y}(x,y)$ в виде

$$V_{1y}(x,y)=\int_h^y[\int_y^h[\frac{p_1'(x)\cdot y}{\rho_1\mu_1(T_1)}]_x'dy]dy=$$
$$=\tilde{p}_1''(x)\left[W_{11}(x,y,z)-W_{11}(x,h,z)\right]+\qquad(10.1)$$
$$+\tilde{p}_1'(x)\left[W_{12}(x,h,z)-W_{12}(x,y,z)\right],$$

где

$$W_{11}(x,y,z)=\left(\frac{h^2y}{2}-\frac{y^3}{6}\right)+a_{11}\left[B_1\left(\frac{h^4y}{8}-\frac{y^5}{40}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(C_1-T_{10}\right)\cdot\left(\frac{y^3}{6}-\frac{h^2y}{2}\right)\right]+a_{12}\left[B_1^2\left(\frac{y^7}{168}-\frac{h^6\cdot y}{24}\right)+\right.\qquad(10.2)$$
$$\left.+2B_1\left(C_1-T_{10}\right)\cdot\left(\frac{y^5}{40}-\frac{h^4\cdot y}{8}\right)+\left(C_1-T_{10}\right)^2\cdot\left(\frac{y^3}{6}-\frac{h^2\cdot y}{2}\right)\right],$$

$$W_{12}(x,y,z)=a_{11}\left[B_1'\left(\frac{h^4y}{8}-\frac{y^5}{40}\right)+C_1'\cdot\left(\frac{y^3}{6}-\frac{h^2y}{2}\right)\right]+$$
$$+a_{12}\left[2B_1B_1'\left(\frac{y^7}{168}-\frac{h^6\cdot y}{24}\right)+\right.$$
$$2B_1'\left(C_1-T_{10}\right)\left(\frac{y^5}{40}-\frac{h^4\cdot y}{8}\right)+\qquad(10.3)$$
$$\left.+2B_1C_1'\left(\frac{y^5}{40}-\frac{h^4\cdot y}{8}\right)+2C_1'\left(C_1-T_{10}\right)\left(\frac{y^3}{6}-\frac{h^2\cdot y}{2}\right)\right],$$

3.3. По уравнениям (2.1) – (2.2), (3.1) – (3.2) при соответствующих граничных условиях аналогичным образом определяются поля скоростей $V_{2y},V_{2z},V_{3y},V_{3z}$.

4. Во всех решениях для полей скоростей и температур присутствуют неизвестные величины $B_1(x),B_2(z),B_3(z)$ и $\delta(z)$. Их определяем используя зависимости (7.1) – (7.3) и условие изменения расхода конденсата Q по длине конденсатора z с учетом потока массы при конденсации Q_g и условие баланса энергии в пленке конденсата:

$$\frac{dQ}{dz}=Q_g\ ,\ Q=\rho_2\int_{h+\delta_0}^{h+\delta_0+\delta}V_{2z}dy\ ,\qquad(11.1)$$

где Q_g – определяется из соотношения:

$$q=-\lambda_2\left.\frac{\partial T_2}{\partial y}\right|_{h+\delta_0}=Q_gc_{p_2}\left(T_3-T_{2s}\right)+h_2Q_g\ ,\qquad(11.2)$$

$T_{2s},T_w=T_c$ - температура насыщения и стенки.

Данная система из четырех дифференциальных уравнений решается численными методами на каждом шаге алгоритма.

5. Перепады давлений в этих выражениях определяются из условий сохранения массы хладоагента, конденсата и газовой фазы.

IV. Заключение

Математическая модель в конкретных частных случаях согласуется с ранее известными решениями, приведенными в работах [1–3, 8]. Например, если не рассматривать течение охлаждающей среды внутри полой призмы и взять ее температуру $T_1=T_0$ и стенки $T_4=T_c$ и пренебречь конвективным переносом тепла в уравнении (2.5) ($B_2(z)=0$) и трением на границе раздела газ-жидкость при граничных условиях (4.3)–(4.4), то наше решение полностью совпадает с решением [8].

Список литературы

[1] Ахмадиев Ф.Г., Фаррахов М.И., Ахмитшин А.А. Математическое моделирование процесса пленочной конденсации // Вестник Технологического университета. 2017. Т. 20, №17. С.32-35.

[2] Теплопередача в двухфазном потоке /Под ред. Д. Баттерворса, Г. Хьюитта. Пер. с англ. М.: Энергия, 1980. 328 с.

[3] Михалевич А.А. Математическое моделирование массо-теплопереноса при конденсации. Минск: Наука и техника, 1982. 216 с.

[4] Кутателадзе С.С. Теплопередача при конденсации и кипении. Москва-Ленинград: Машгиз, 1952. 232 с.

[5] Справочник по теплообменникам/ Под. ред. Б.С. Петухова, В.К. Шикова. Пер. с англ. Т. 1. М: Энергоатомиздат, 1987. 560 с.

[6] Холпанов Л.П. Шкадов В.Я. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. М.:Наука, 1990. 271 с.

[7] Лабунцов Д.А. О влиянии на теплоотдачу при пленочной конденсации пара зависимости физических параметров конденсата от температуры // Теплоэнергетика. 1957. №1. С 49-52.

[8] Nusselt W. Surface condensation of water vapours// Z. Ves. Dt. Ing. 1916. V. 60(26). P. 569-575; Vol. 60(27). P. 541-546.

[9] Z.A. FI-Zassah, A.F. Khadrawe, H.A. AL-Nims Film on condensation on a vertical microchannel // International communications in Heat and Transfer. 2008. Vol 35. pp.1172 - 1181.

[10] Hassaninejadafarahani F. Ormiston. S. Numerical analyses of laminar reflux condensation from gas-vapour mixtures in vertical parallel plate channels // Inf. J. Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing. Eng. 2015. Vol. 9, No. 5. pp. 794-803.

[11] Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.: ГИТТЛ. 1951. С. 420