

Параметрический синтез ПИД-регуляторов с реальным дифференциатором на заданную степень колебательности

Г. К. Аязян¹, Е. В. Таушева²

Уфимский государственный нефтяной технический университет

¹ AyazyanGK@rambler.ru, ² TaushevaEV@mail.ru

Аннотация. Рассматривается алгоритм расчета настроек ПИД-регуляторов с реальным дифференциатором на заданную степень колебательности для случая низкочастотных возмущений действующих на объект. Для однозначного выбора коэффициента усиления дифференциальной части используются формулы, полученные на базе критерия компенсации низкочастотных возмущений (КНВ). В результате задача расчета сводится к оптимизации двух параметров. Использование пакета символьных вычислений Maple позволило исследовать особенности кривой заданной степени колебательности в плоскости настроечных параметров регулятора. Работоспособность алгоритма проверена на тестовых примерах.

Ключевые слова: ПИД-регулятор; реальный дифференциатор; степень колебательности; Maple

I. ВВЕДЕНИЕ

Процедура параметрического синтеза ПИД регуляторов осложняется наличием трех настроечных параметров. Это коэффициент усиления k_p , время интегрирования T_i и время дифференцирования T_d , или эквивалентные им параметры $k_1 = k_p$, $k_0 = k_i/T_i$, $k_2 = k_1 \cdot T_d$. Часто коэффициент T_d или k_2 определяется по формулам $T_d = \alpha T_i$ и $k_2 = \alpha k_1^2/k_0$ [1]. Параметр α выбирается, например, в диапазоне $\alpha = 0.15 \dots 0.25$, причем часто достаточно произвольно. Выбор оптимальных параметров (k_1, k_0) осуществляется из условия минимума дополнительного показателя качества, например интегрального критерия IE [1]. В [2] на базе критерия компенсации низкочастотных возмущений (КНВ) получены формулы, позволяющие однозначно определять коэффициент k_2 как функцию k_1 , k_0 и параметров модели объекта. В работе [3] на этой основе разработан алгоритм параметрического синтеза ПИД регулятора с идеальным дифференциатором. Процедура синтеза сводится к построению в плоскости двух параметров (k_1, k_0) кривой заданного значения корневого запаса устойчивости при различных значениях частоты. Выбор оптимальных параметров (k_1, k_0) осуществляется из

условия минимума интегрального критерия IE . В работах [4, 5] метод был использован для синтеза идеального ПИД регулятора, когда в качестве показателя запаса устойчивости (робастности) использовался максимум функции чувствительности $M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)|$ или дополнительной чувствительности $M_p = \max_{\omega} |T(j\omega)|$. В настоящей работе на основе этого метода синтезируется система управления с ПИД регулятором с реальным дифференциатором. Показателем запаса устойчивости является степень колебательности m – корневой критерий качества [6].

II. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система регулирования с одним входом и одним выходом. Обозначим $G(s)$, $G_c(s)$ – передаточные функции модели объекта и регулятора, x , y , $e = x - y$ – задание, регулируемая величина и ошибка регулирования, f_1 и f_2 – возмущения, приложенные ко входу и выходу объекта соответственно. Общий вид передаточной функции модели объекта

$$G(s) = \frac{1}{s^r} \tilde{G}(s) = \frac{1}{s^r} \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} e^{-s\tau}, \quad (1)$$

где $\tilde{G}(0) = |b_0/a_0| < \infty$; $r = 0, 1$; a_i, b_i – постоянные коэффициенты, $a_n > 0$, $b_0 > 0$; $m \leq n$; τ – транспортное запаздывание. Представим (1) в виде ряда Тейлора относительно s в точке $s = 0$

$$G(s) = \frac{1}{s^r} (\mu_0 + \mu_1 s + \dots + \mu_k s^k + \dots) \quad (2)$$

где $\mu_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \tilde{G}(s) \Big|_{s=0}$, $k = 0, 1, \dots$ – моменты передаточной функции $\tilde{G}(s)$.

Передаточная функция регулятора

$$G_c(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\gamma T_d s + 1} \right) = k_1 + \frac{k_0}{s} + \frac{k_2 s}{\gamma k_2 s / k_1 + 1}, \quad (3)$$

где коэффициент γ в промышленных системах изменяется в пределах $\gamma = 0.05 \dots 0.125$ [1, 2]. Из необходимого условия устойчивости замкнутой системы и $b_0 > 0$ в (1) следует, что $k_0 > 0$.

Настройки регулятора будем определять из условия минимума линейного интегрального критерия IE , при ограничении на заданный запас устойчивости

$$IE = \min_{k_0, k_1, k_2} I_0, \quad m \geq m_{зад}, \quad (4)$$

где m – степень колебательности системы $m = \min_i \left| \frac{\text{Im } s_i}{\text{Re } s_i} \right|$;

s_i – корни характеристического полинома замкнутой системы.

Для решения задачи в плоскости (K_1, K_0) строится граница области $m \geq m_{зад}$ и на ней находится точка минимума IE .

Из критерия КНВ следуют следующие ограничения на коэффициенты регулятора k_0, k_2 [2, 3]

$$\begin{aligned} k_0 &= \max k_0 \\ k_2 &= \alpha \cdot \frac{k_1^2}{k_0} + \alpha_1 \cdot \frac{k_1}{k_0} + \frac{\alpha_1^2}{2 \cdot k_0} + \alpha_2 \cdot k_0 + \alpha_3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\mu_0}, \quad \alpha_2 = \frac{\mu_1^2 - 2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_2}{2 \cdot \mu_0^2}, \quad \alpha_3 = \frac{\mu_1}{\mu_0^2}.$$

Первое ограничение в (5) соответствует минимуму IE [1].

Формулы для $\alpha_i, i \in 1, 3$ зависят от свойств объекта и точки приложения возмущения. Для возмущения, действующего на входе объекта $\alpha_2 = 0$, для астатического объекта $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_3 = -1/\mu_0$. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и α константа, получим известную формулу $k_2 = \alpha k_1^2 / k_0$. Коэффициент α_2 может служить мерой колебательности объекта, а при $\alpha_2 \leq 0$ процесс является слабоколебательным [3].

III. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Уравнение границы области $m \geq m_{зад}$ (кривую D-разбиения) находим из характеристического уравнения замкнутой системы подстановкой $s = -m\omega + j\omega$ [2, 3, 6]

$$\left(k_1 + \frac{k_0}{-m\omega + j\omega} + \frac{k_2(-m\omega + j\omega)}{\gamma k_2(-m\omega + j\omega)/k_1 + 1} \right) \times \\ \times (V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega)) + 1 = 0 \quad (6)$$

где $W_y(-m\omega + j\omega) = V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega)$ – расширенная частотная характеристика объекта.

Здесь и в дальнейшем $m = m_{зад}, \omega \geq 0, j = \sqrt{-1}$. Подставив выражение для k_2 из (5) в (6), приняв $\alpha = 0.5$, выделяя действительную и мнимую часть, после преобразований получим систему полиномиальных уравнений третьего порядка относительно k_1

$$\begin{cases} F_1 = A_3 \cdot k_1^3 + A_2 \cdot k_1^2 + A_1 \cdot k_1 + A_0 = 0 \\ F_2 = B_3 \cdot k_1^3 + B_2 \cdot k_1^2 + B_1 \cdot k_1 + B_0 = 0 \end{cases}, \quad (7)$$

где

$$A_0 = -\omega \cdot \gamma (2\alpha_2 k_0^2 + 2\alpha_3 k_0 + \alpha_1^2) (\omega \cdot (1 - m^2) + (mV_1 + V_2)k_0),$$

$$A_1 = \varphi_1(V_1, V_2, \gamma, m, \omega, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$A_2 = -\omega(2 + \gamma)(mV_1 + V_2)k_0 + \\ + 2\omega^2 \alpha_1(1 + \gamma)((m^2 - 1)V_1 + 2mV_2) + \omega^2 \gamma(m^2 - 1)$$

$$A_3 = \omega^2(1 + \gamma)((m^2 - 1)V_1 + 2mV_2)$$

$$B_0 = \omega \cdot \gamma (2\alpha_2 k_0^2 + 2\alpha_3 k_0 + \alpha_1^2) (-2m\omega + (V_1 - mV_2)k_0)$$

$$B_1 = \varphi_2(V_1, V_2, \gamma, m, \omega, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$B_2 = (2 + \gamma)\omega(V_1 - mV_2)k_0 + \\ + 2\alpha_1 \omega^2(1 + \gamma)((m^2 - 1)V_2 - 2mV_1) - 2\gamma m \omega^2$$

$$B_3 = -\omega^2(1 + \gamma)((m^2 - 1)V_2 + 2mV_1).$$

Коэффициенты A_i и B_i слишком громоздки и в явном виде не приводятся.

Алгоритм решения полиномиальной системы (7) базируется на теории исключения и подробно описан в [3, 4, 5]. Применяя его к системе (7) получим два уравнения

$$\begin{aligned} Res &= \gamma \omega k_0 (2\alpha_2 k_0^2 + 2\alpha_3 k_0 + \alpha_1^2) \times \\ &\times (\beta_5 k_0^5 + \beta_4 k_0^4 + \dots + \beta_1 k_0 + \beta_0) \\ k_1 &= \frac{\eta_4 k_0^4 + \eta_3 k_0^3 + \eta_2 k_0^2 + \eta_1 k_0 + \eta_0}{\lambda_3 k_0^3 + \lambda_2 k_0^2 + \lambda_1 k_0 + \lambda_0} \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты β_i, η_i и λ_i в уравнениях (8) зависят от частоты ω и постоянных параметров и ввиду их громоздкости здесь не приводятся. Первое уравнение (8) есть результат системы (7), сомножители k_0 и

$P_0 = 2\alpha_2 k_0^2 + 2\alpha_3 k_0 + \alpha_1^2$ определяют особые решения. Подстановка корней уравнения $P_0 = 0$ во второе уравнение (8) дает $k_1 = 0$. Основная кривая D-разбиения рассчитывается следующим образом. Задаваясь ω , определяем k_0 как положительные корни полинома

$$Res_1 = \beta_5 k_0^5 + \beta_4 k_0^4 + \dots + \beta_1 k_0 + \beta_0, \quad (9)$$

коэффициент k_1 определяется из второго уравнения (8). Расчеты произведенные для различных объектов показали, что положительных решений k_0 , как правило, не более трех. Решения, соответствующие неустойчивой системе легко отсеиваются. Структура «основной» кривой D-разбиения совпадает с аналогичной кривой для случая, когда значение k_2 определяется по формуле $k_2 = \alpha k_1^2 / k_0$. Этот случай детально исследован в [2]. Кривая имеет две основные ветви сходящиеся в одной точке, при частоте, когда полином (9) имеет кратный корень, рис. 1. В этой точке дискриминант полинома равен нулю. Область $m \geq m_{zao}$ выделяется по правилу штриховки [2, 6]. В точках верхней ветви согласно знаку якобиана системы (7) штрихуется правая сторона кривой, нижней ветви левая. Для ограничения диапазона частот получены формулы для определения значений ω , в которых кривая D-разбиения пересекает оси координат. Последовательно подставляя в уравнения (7) $k_1 = 0$ и $k_0 = 0$ и решая полученные системы методом исключения, получим при $k_1 = 0$

$$\begin{aligned} Res_{k_1} &= \omega(m^2 + 1)(V_1 + mV_2) = 0, \\ k_0 &= \frac{2m\omega}{V_1 - mV_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Частота находится как точка пересечения прямой $V_1 + mV_2 = 0$ с расширенной АФХ объекта.

При $k_0 = 0$ получим

$$\begin{aligned} Res_{k_0} &= \gamma \cdot \omega \cdot (m^2 + 1)^2 V_2 = 0, \\ k_1 &= \frac{2\gamma m}{(1 + \gamma)(2mV_1 + (1 - m^2)V_2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Частота находится как точка пересечения расширенной АФХ объекта с действительной осью.

Как уже отмечалось условие $k_0 = \max k_0$ (формулы (5)), соответствует минимуму критерия IE .

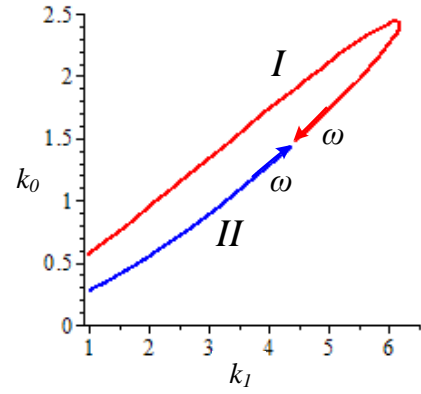


Рис. 1. Д-разбиение для системы управления с реальным ПИД регулятором

Запишем уравнения (7) следующим образом

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(k_1, k_0, \omega) = 0 \\ F_2 &= F_2(k_1, k_0, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

В точке минимума IE $dk_0/dk_1 = 0$. Считая k_1 и k_0 функциями частоты продифференцируем уравнения (12) по ω

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{d\omega} &= \frac{\partial F_1}{\partial k_0} \cdot \frac{dk_0}{d\omega} + \frac{\partial F_1}{\partial k_1} \cdot \frac{dk_1}{d\omega} + \frac{dF_1}{d\omega} = 0 \\ \frac{dF_{12}}{d\omega} &= \frac{\partial F_2}{\partial k_0} \cdot \frac{dk_0}{d\omega} + \frac{\partial F_2}{\partial k_1} \cdot \frac{dk_1}{d\omega} + \frac{dF_2}{d\omega} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Система (13) линейна относительно $dk_0/d\omega$ и $dk_1/d\omega$, решая ее методом Крамера получим

$$\frac{dk_0}{d\omega} = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad \frac{dk_1}{d\omega} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

где Δ – Якобиан системы, в общем случае не равный нулю, Δ_0 , Δ_1 – соответствующие определители метода Крамера. Из последних уравнений находим условие оптимума $dk_0/dk_1 = 0$

$$F_3(k_0, k_1, \omega) = \frac{dk_0}{dk_1} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} = 0 \quad (14)$$

Уравнения (12) и (14) определяют оптимальные настройки регулятора и частоту ω .

IV. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ НАСТРОЕК

Эффективность предложенного алгоритма проектирования ПИД регулятора была протестирована для $m = 0.3$, $\gamma = 0.125$ на следующих моделях объектов:

$$G_1 = \frac{1}{(s+1)^4}; G_2 = \frac{1}{s \cdot (s+1)^3}; G_3 = \frac{1-2s}{(s+1)^3};$$

$$G_4 = \frac{1}{(4s-1) \cdot (s+1)^2}; G_5 = \frac{1}{(s+1)^3}.$$

Модели 1, 3 и 5 устойчивы, модель 3 имеет правый нуль, модель 2 содержит интегратор, а модель 4 неустойчива. На рис. 1 изображена кривая D-разбиения для модели 5.

Оптимальные настройки реального ПИД регулятора k_0 и k_1 рассчитывались по уравнениям (12) и (14), k_2 – по формуле (5). Результаты расчетов приведены в таблице I.

Там же для сравнения приведены оптимальные настройки идеального ПИД регулятора, когда $\gamma = 0$. На рис. 2 изображены кривые D-разбиения идеального (пунктирная линия) и реального (сплошная) ПИД регуляторов для модели 2. На рис. 3 приведены переходные процессы в замкнутой системе с идеальным и реальным регулятором и моделью 2 для ступенчатого возмущения на входе объекта. Корни характеристического полинома замкнутой системы управления с реальным дифференциатором для этой модели равны

$$s_{1,2} = -0.185225 \pm j0.617416, s_{3,4} = -0.317890 \pm j0.234623,$$

$$s_5 = -2.040609, s_6 = -5.957241.$$

Как видно, доминирующими являются пара комплексно-сопряженных корней со степенью колебательности $m=0.3$. Другая пара имеет $m=1.348$. Действительные корни далеки от мнимой оси. Такое распределение корней характерно для данного метода.

Результаты расчетов подтверждают эффективность предложенного алгоритма. Достоинством рассмотренного метода является автоматический выбор коэффициента K_2 , значение которого зависит от характеристик объекта.

Отметим, что программа расчетов реализована на языке символьных вычислений Maple 14. Например, уравнения (8) получены «вручную» и проверены с помощью команды eliminate пакета Maple 14.

ТАБЛИЦА I ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НАСТРОЕК РЕГУЛЯТОРА для $m = 0.3$, $\gamma = 0.125$

Модель объекта	Тип ПИД	Частота, ω	k_0	k_1	k_2
G_1	реал.	0.936	0.935	2.326	1.917
	идеал.	1.584	1.081	2.752	2.510
G_2	реал.	0.617	0.131	0.717	0.955
	идеал.	1.140	0.166	0.867	1.259
G_3	реал.	0.822	0.299	0.816	0.521
	идеал.	1.795	0.312	0.872	0.618
G_4	реал.	1.071	1.527	6.130	6.615
	идеал.	2.960	3.210	10.832	13.056
G_5	реал.	1.910	3.860	6.252	3.812
	идеал.	4.937	6.931	11.383	8.062

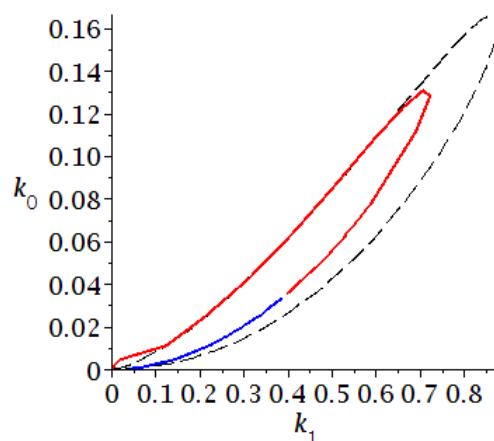


Рис. 2. Кривые D-разбиения системы управления с идеальным ПИД регулятором (пунктирная линия) и реальным (сплошная) для модели 2

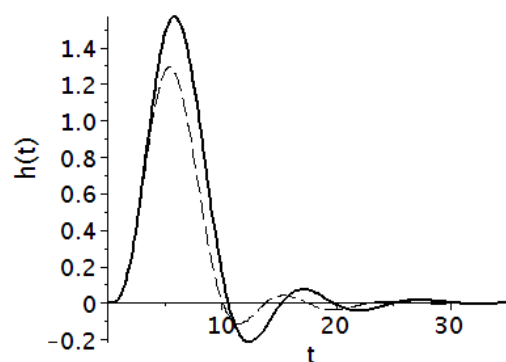


Рис. 3. Переходные характеристики системы управления с идеальным ПИД регулятором (пунктирная линия) и реальным (сплошная) для модели 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Åström K. J., Hägglund T. Advanced PID control // The Instrumentation, Systems, and Automation Society. 2006.
- [2] Аязян Г.К. Расчет автоматических систем с типовыми алгоритмами регулирования: Учеб. пособие. Изд-во УНИ, Уфа, 1989.
- [3] Аязян Г.К., Новоженкин А.Ю., Таушева Е.В. Параметрический синтез ПИД-регуляторов на заданную степень колебательности // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 2014. Р. 147–159.
- [4] Аязян Г.К., Таушева Е.В., Шаймухаметова М.Р. Применение системы символьных вычислений Maple для параметрического синтеза регуляторов // Математика, ее приложения и математическое образование (МПО17) Материалы VI Международной конференции. Улан-Удэ - Байкал, 2017. Р. 59–64.
- [5] Аязян Г.К., Таушева Е.В. Параметрический синтез ПИД-регуляторов с ограничениями / XXI Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (SCM-2018). Сборник докладов в 2-х томах. Санкт-Петербург. 25–27 мая 2018 г. СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ». Том 1. С.356–360.
- [6] Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. 3-е изд. М.: Наука, 1975.