Спектральный метод синтеза алгоритмов моделирования псевдослучайных дискретных сигналов с изменяемыми энергетическими характеристиками в базисе Уолша–Адамара

А. В. Пролетарский[1], В. В. Сюзев[2], В. В. Гуренко[3], Е. В. Смирнова[4]
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)
[1]pav@bmstu.ru, [2]v.syuzev@bmstu.ru, [3]wgurenko@bmstu.ru, [4]evsmirnova@bmstu.ru

***Аннотация.* Методы математического моделирования позволяют повысить качество разработок и исследований технологических процессов и объектов реального времени различного назначения. В статье поставлена и решена теоретико-прикладная задача синтеза нового спектрального метода имитации псевдослучайных дискретных сигналов в рамках корреляционной теории. В основе метода лежит оригинальная модификация имитационной тригонометрической модели Пугачева, которая затем преобразуется в математическую модель на основе спектрального представления сигналов в базисе функций Уолша с упорядочением Адамара. Для реализации перехода от тригонометрического спектра Фурье к спектру Уолша–Адамара выполнен синтез и анализ операторов взаимопреобразования этих спектров. Математическую основу спектров составляет ядро Фурье специфической структуры, позволяющей построить новые эффективные модели стационарных и нестационарных случайных сигналов, превосходящие известные по точности и вычислительной сложности.**

Ключевые слова: псевдослучайные сигналы; спектральная плотность мощности (дисперсии); автокорреляционная функция; имитация дискретных сигналов; спектры; базисные функции

I. Актуальность и постановка задачи исследования

Одним из эффективных методов разработки сложных технологических процессов и объектов реального времени различного назначения является имитационное моделирование с использованием средств вычислительной техники. При этом решение многих научных и технических задач исследования требует воспроизведения случайных сигналов, составляющих математическую основу различного рода помех и шумов [1–19].

Непосредственно к самим алгоритмам имитации сигналов в таких моделях предъявляют высокие требования по точности, простоте настройки на задаваемые характеристики и вычислительной сложности, особенно при имитации в жестком модельном или реальном масштабе времени. Из существующих классических алгоритмов имитации сигналов в рамках корреляционной теории, использующих методы линейных преобразований, канонических разложений, формирующих фильтров и разложений в тригонометрические ряды Фурье [20–22], в наибольшей степени совокупности данных требований удовлетворяют алгоритмы, построенные на основе рекурсивной модели Быкова [21] и тригонометрической модели Пугачева [20].

Следует отметить, что модель Быкова имеет жесткие ограничения по форме задаваемой функции спектральной плотности дисперсии (ФСПД). В частности, она не может быть использована при имитации сигналов с ФСПД, содержащей выбросы на различных частотах, характерные для ФСПД реальных сигналов в системах управления [23]. Кроме того, ее нельзя использовать при имитации сигналов типа белого шума, применяемых в задачах исследования в условиях неполной информации о статистических и энергетических свойствах входных воздействий.

Алгоритмы имитации, построенные на модели Пугачева и использующие спектральные ряды в тригонометрическом базисе, лишены указанных недостатков, однако обладают высокой вычислительной сложностью и, как следствие, высоким уровнем инструментальной погрешности [20].

Задачей данной работы поставлена разработка нового спектрального метода синтеза алгоритмов имитации с задаваемыми ФСПД на основе оригинальной модификации модели Пугачева с последующим преобразованием ее в модель в базисе Уолша–Адамара, не содержащей операций умножения.

II. Модифицированные алгоритмы имитации в тригонометрическом базисе

Модифицированный дискретный алгоритм Пугачева имеет вид ряда Фурье

Работа выполнена в рамках проекта 2.7782.2017/БЧ при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

$$y(i)=\sum_{k=0}^{N/2}\left[\mu_k X_e(k)\cos\left(\frac{2\pi}{N}ki\right)+\alpha_k X_o(k)\sin\left(\frac{2\pi}{N}ki\right)\right], \quad (1)$$
$$i\in[0,N),$$

где $y(i)$ – случайный сигнал, $X_e(k)$ и $X_o(k)$ – спектральные коэффициенты по косинусоидальным и синусоидальным базисным функциям, N – число отсчетов на интервале определения дискретного сигнала, а μ_k и α_k – некоррелированные случайные величины с параметрами (0,1), равновероятно принимающие значения ±1 [24]. При равенстве коэффициентов Фурье

$$X_e(k)=X_o(k), k\in\left[0,\frac{N}{2}\right] \quad (2)$$

случайный сигнал $y(i)$ становится стационарным в широком смысле с автокорреляционной функцией (АКФ)

$$R(m)=X_e^2(0)+X_o^2\left(\frac{N}{2}\right)\cos(\pi m)+$$
$$+4\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}X_e^2(k)\cos\left(\frac{2\pi}{N}km\right), m\in[-N,N). \quad (3)$$

Сами коэффициенты $X_e(k)$ находятся по ФСПД $S(\omega)$ по формулам

$$X_e^2(0)=\frac{S(0)}{N\Delta t}, X_e^2\left(\frac{N}{2}\right)=\frac{S\left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)}{N\Delta t},$$
$$X_e^2(k)=\frac{S\left(\frac{2\pi}{N\Delta t}k\right)}{2N\Delta t}, k\in\left[1,\frac{N}{2}\right).$$

Интервал дискретизации по времени Δt определяется по теореме Котельникова.

Практическая реализация алгоритма (1) при равенстве (2) требует затрат $\left(3N^2\right)/2$ суммарных операций умножения и сложения. Дальнейшее его упрощение может быть достигнуто путем перехода к базису функций Уолша–Адамара, принимающих только значения ±1 [25–30].

III. Алгоритмы имитации в базисе Уолша–Адамара

Переход от тригонометрической модели к модели Уолша–Адамара можно осуществить путем преобразования тригонометрического спектра $\left\{\mu_k X_e(k),\alpha_k X_e(k)\right\}$ в спектр Уолша–Адамара $\left\{Y_A(k)\right\}$ с помощью линейного оператора

$$Y_A(k)=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}}\mu_m X_e(m)\Phi_e(k,m)+$$
$$+\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1}\alpha_m X_e(m)\Phi_o(k,m), k\in[0,N),$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_e(k,m)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi}{N}mi\right)had(k,i),\\&\qquad m\in\left[0,\frac{N}{2}\right], k\in[0,N);\\&\Phi_o(k,m)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sin\left(\frac{2\pi}{N}ki\right)had(k,i),\\&\qquad m\in[1,N), k\in[0,N);\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

являются составляющими ядра преобразования (ядра Фурье [29]):

$$\Phi(k,m)=\left\{\Phi_e(k,m),\Phi_o(k,m)\right\}.$$

В приведенных формулах

$$had(k,i)=\cos\left(\pi\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu i_\nu\right),\ n=\log_2 N$$

являются функциями Уолша, в которых k_ν и i_ν означают ν-е разряды n-разрядных двоичных кодов чисел k и i.

Анализ показал, что для любых $N=2^n, n=1,2,\ldots$ матрица ядра Фурье содержит два единичных значения, $2\left(N^3-1\right)/3$ нулевых и $\left(N^2+2\right)/3$ ненулевых элементов. Причем из ненулевых элементов и соответствующих им спектральных коэффициентов можно образовать $n+1$ независимых групп, позволяющих представить оператор преобразования спектров Фурье и Уолша в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&Y_A(0)=\mu_0 X_e(0); Y_A(1)=\mu_{\frac{N}{2}}X_e\left(\frac{N}{2}\right);\\&Y_A\left(2^{\gamma-2}+j\right)=\\&=\sum_{m=0}^{2^{\gamma-3}-1}\left\{\mu_{\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m)}Z_e\left(\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m),2^{\gamma-2}+j\right)+\right.\\&\left.+\alpha_{\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m)}Z_o\left(\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m),2^{\gamma-2}+j\right)\right\};\\&\gamma=3,4,\ldots,n+1;\ j=0,1,\ldots,2^{\gamma-2}-1;\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&Z_e\left(\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m),2^{\gamma-2}+j\right)=\\
&=X_e\left(\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m)\right)\Phi_e\left(2^{\gamma-2}+j,\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m)\right),\\
&Z_o\left(\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m),2^{\gamma-2}+j\right)=\\
&=X_o\left(\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m)\right)\Phi_o\left(2^{\gamma-2}+j,\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m)\right),\\
&\gamma=3,4,\dots,n+1;\ m=0,1,\dots,2^{\gamma-3}-1;\\
&j=0,1,\dots,2^{\gamma-2}-1;
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

а сам имитирующий сигнал восстанавливается с помощью такого ряда Уолша–Адамара:

$$\begin{gathered}
y(i)=Y_A(0)+Y_A(1)had(1,i)+\\
+\sum_{\gamma=3}^{n+1}\sum_{j=0}^{2^{\gamma-2}-1}Y_A\left(2^{\gamma-2}+j\right)had\left(2^{\gamma-2}+j,i\right),i\in[0,N).
\end{gathered}\quad(7)$$

Если элементы ядра $\Phi(k,m)$ (4) и промежуточные величины $Z_e(k,m)$ и $Z_o(k,m)$ (6) вычислить заранее и хранить в памяти ЭВМ, то алгоритм имитации (7) не будет содержать нетривиальных умножений, а быстрая его реализация с использованием быстрых преобразований Уолша [29, 31, 32] потребует только $[N^2+3N(n-1)+2]/3$ операций сложения, что более чем в 4 раза меньше по сравнению с модифицированным алгоритмом Пугачева (1). Все это делает модель Адамара (7) эффективным вычислительным средством имитации стационарных случайных сигналов. АКФ процесса (7) совпадает с АКФ (3) процесса (1), (2), синтезированного по модифицированной модели.

Можно еще больше упростить алгоритм имитации в базисе Уолша–Адамара, если в пределах каждой группы коэффициентов в системе (5) принять

$$\mu_{\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m)}=\alpha_{\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m)}=\beta_{\gamma-1}.$$

Тогда при вычислении спектра Адамара по уравнениям (5) случайные параметры μ_k и α_k можно вынести за знак суммы. В результате спектральные коэффициенты Адамара примут детерминированный вид и могут быть вычислены заранее на этапе настройки алгоритма имитации. Сам имитационный ряд Адамара в этом случае станет таким:

$$\begin{gathered}
y(i)=\beta_0X_e(0)+\beta_1X_e\left(\frac{N}{2}\right)had(1,i)+\\
+\sum_{\gamma=3}^{n+1}\beta_{\gamma-1}\sum_{j=0}^{2^{\gamma-2}-1}Y_A\left(2^{\gamma-2}+j\right)had\left(2^{\gamma-2}+j,i\right);\quad(8)\\
i\in[0,N),
\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}
Y_A\left(2^{\gamma-2}+j\right)=\sum_{m=0}^{2^{\gamma-3}-1}\left\{Z_e\left(\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m),2^{\gamma-2}+j\right)+\right.\\
\left.+Z_o\left(\frac{2N}{2^\gamma}(1+2m),2^{\gamma-2}+j\right)\right\};\\
\gamma=3,4,\dots,n+1;\ j=0,1,\dots,2^{\gamma-2}-1.
\end{gathered}$$

Прямая реализация алгоритма (8) приведет к затратам в N^2 сложений, а его быстрая реализация потребует только nN сложений. Умножения в алгоритме (8) отсутствуют. Коэффициент выигрыша по операциям по сравнению с алгоритмом (1) в этом случае составляет $1{,}5N/n$.

Следует, однако, иметь в виду, что полученный таким образом случайный процесс будет нестационарным, имея при этом ту же ФСПД, что и у сигнала (7). Исключение из алгоритмов (7) и (8) операций умножения и сокращение числа операций сложения повышают их общую инструментальную точность.

IV. Заключение

Таким образом, в работе представлены теоретические и прикладные основы синтеза спектрального метода имитации стационарных и нестационарных случайных сигналов в рамках корреляционной теории. Выполнена модификация классической модели Пугачева с целью снижения ее вычислительной сложности. Ее дальнейшее преобразование к базисной системе функций Уолша в упорядочении Адамара осуществлено с помощью линейного оператора, содержащего элементы ядра Фурье специфической структуры. Выделение независимых групп ненулевых элементов ядра Фурье позволило избежать выполнения незначащих арифметических операций.

С учетом того, что элементы ядра и промежуточные коэффициенты могут быть вычислены заранее, на этапе настройки алгоритма имитации, сам алгоритм не будет содержать громоздких операций умножения. Применение быстрых преобразований Уолша обеспечивает преимущество предложенному алгоритму имитации по операциям сложения более чем в 4 раза в сравнении с модифицированным алгоритмом Пугачева. АКФ случайного сигнала, полученного по новому алгоритму, совпадает с соответствующей АКФ, рассчитанной по модифицированной модели Пугачева.

Дальнейшее упрощение алгоритма в базисе Уолша–Адамара достигнуто при уравнивании некоррелированных случайных величин μ_k и α_k. Это позволило перейти к вычислению детерминированных коэффициентов Адамара также на этапе настройки алгоритма имитации, а сам алгоритм реализовать без операций умножения. В итоге общий выигрыш по числу вычислительных операций по сравнению с модифицированной моделью Пугачева составил величину, кратную отношению числа отсчетов к числу разрядов представления аргументов функций Уолша. Дополнительным эффектом такого упрощения является нестационарность генерируемых сигналов, которые наряду со стационарными находят широкое применение в задачах анализа и синтеза систем реального времени различного назначения.

Отсутствие в полученном алгоритме имитации операций умножения и сокращение числа операций сложения дает улучшение его инструментальной точности по сравнению с известными алгоритмами, реализованными на спектральных рядах в базисе тригонометрических функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Басараб М.А., Волосюк В.К., Горячкин О.В., Зеленский А.А., Кравченко В.Ф., Ксендзук А.В., Кутуза Б.Г., Лукин В.В., Тоцкий А.В., Яковлев В.П. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2007. 544 с.

[2] Ifeachor E.C., Jervis B.W. Digital Signal Processing. A Practical Approach. Edinburgh, Pearson Education Limited, 2002. 992 p.

[3] Сотников А.А., Якупов Ш.З., Романовский А.С. Применение имитационного моделирования для контроля вычислительных систем гидролокационных комплексов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал. 2013. № 6. С. 351-364. DOI: 10.7463/0613.0570096. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/570096.html (дата обращения 30.05. 2018).

[4] Костров Б.В., Гринченко Н.Н., Баюков К.И. Моделирование распределения яркостей в видеопотоке серии ландшафтных изображений // Известия ТулГУ. Технические науки. 2015. Вып. 9. С. 70-82.

[5] Евстафиев А.Ф., Евстафиев Ф.А. Двухканальный обнаружитель импульсного радиосигнала на фоне мешающего радиоимпульса и белого шума // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 1 / под общ. ред. А.А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. С. 84-88.

[6] Мурашов А.А., Третьякова В.В., Ключник В.С., Татаров М.О. Введение искусственной стохастичности при цифровой обработке радиотехнических сигналов // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 6 / под общ. ред. А.А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. С. 55-58.

[7] Мусаев А.А., Сердюков Ю.П. Модели сигналов с оптимальными характеристиками во временной и частотных областях // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XXIX междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 3 / под общ. ред. А.А. Большакова. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2016. С. 116-123.

[8] Мурашов А.А., Ключник В.С., Третьякова В.В. Использование псевдослучайных величин для моделирования радиотехнических сигналов // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XXIX междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 8 / под общ. ред. А.А. Большакова. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2016. С. 72-76.

[9] Golovin Y.M., Zavelevich F.S., Nikulin A.G., Kozlov D.A., Monakhov D.O., Kozlov I.A., Arkhipov S.A., Tselikov V.A., Romanovskii A.S. Spaceborne Infra-red Fourier-Transform Spectrometers for Temperature and Humidity of the Earth's Atmosphere // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2014. vol. 50. № 9. P. 1004-1015. DOI: 10.1134/S0001433814090096.

[10] Ksendzuk A.V., Volosyuk V.K., Sologub N.S. Modeling SAR primary and secondary processing algorithms. Estimating quality of the processing techniques // 5th European conference on synthetic Aperture Radar EUSAR 2004. Vol. 2. Ulm, Germany. 2004. P. 1013-1016.

[11] Zhou S., Wang Z. OFDM for underwater acoustic communications. Wiley, 2014. 410 p.

[12] De Oliveira H.M., Cintra R.J., Campello de Souza R.M. Multilayer Hadamard Decomposition of Discrete Hartley Transforms // XVIII Brazilian Symposium on Telecommunications, Gramado, Brazil. 2000. Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1502.02168 (дата обращения: 30.05.2018).

[13] Martinez A.S., Gonzalez R.S., Espindola L. Generalized exponential function and discrete growth models // Statistical Mechanics and its applications. 2009. Vol. 388. P. 2922-2930.

[14] Шахтарин Б.И. Случайные процессы в радиотехнике: Цикл лекций. М.: Радио и связь, 2000. 584 с.

[15] Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.

[16] Harmuth H.F. Sequency Theory: foundations and applications. Academic Press NewYork, 1977. 574 p.

[17] Ahmed N., Rao K. Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Berlin, Springer, 1975. 248 p.

[18] Meyer Y. Wavelets, Vibrations and Scaling. GRM, Universite de Montreal. Montreral, 1997. Cours de la chaire Aisenstadt.

[19] Good I.J. The Interaction Algorithm and Practical Fourier Analysis // J. Royal Statist. Soc. Ser., 1960, V. B-22, P. 372-375.

[20] Пугачев В.С. Теория случайных функций. М.: Физматлит, 1962. 421 с.

[21] Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971. 328 с.

[22] Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. Л.: Судпром, 1961. 252 с.

[23] Лобусов Е.С., Тыонг Хоанг Мань. Генерирование случайных воздействий при исследовании устройств и систем управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Приборостроение. 2016. № 3. С. 102-113. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-3-102-113.

[24] Сюзев В.В., Гуренко В.В. Гармонические алгоритмы имитации сигналов в рамках корреляционной теории // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. №4. С. 98-117. DOI: 10.18698/0236-3933-2017-4-98-117.

[25] Walsh J.L. A closed of Normal Orthogonal Fuinctions // Amer. J. Math., V. 45, 1923. P. 5-24.

[26] Oppenheim A.V., Schafer R.W. Discrete-Time Signal Processing. Third Edition. Person, Prentice Hall. 2010. 1137 p.

[27] Chrestenson H.E. A class of generalized Walsh functions // Pacific J. Math., 1955, V. 5.

[28] Peled Abraham, Liu Bede. Digital Signal Processing. Theory, Design and Implementation. John Wiley & Sons. 1976. 304 p.

[29] Сюзев В.В. Основы теории цифровой обработки сигналов. М.: Издательство «РТСофт», 2014. 752 с.

[30] Pichler F. Walsh Functions and Linear Systen Theory // Proc. Symp. Walsh Functions Applications. Washington, April, 1970. P. 175-182.

[31] Glassman J.A. A generalization of the fast Fourier transform // IEEE Trans., 1970, V. C-19, № 2.

[32] Бобровский И.В. Декодирование высокоскоростных двоичных групповых кодов с помощью преобразования Уолша // Радиотехника. 2001. № 10. С. 13-15.