

# Управление динамическим качеством автоматических систем на основе формализма линейно-квадратичной оптимизации

А. Б. Филимонов

МИРЭА – Российский технологический университет  
e-mail: filimon\_ab@mail.ru

Н. Б. Филимонов

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова  
e-mail: nbfilimonov@mail.ru

**Аннотация.** Разрабатывается методология аппроксимационной коррекции управляемых динамических систем. Желаемый результат коррекции задается эталонной моделью. В предлагаемых схемах динамической коррекции применяется формализм линейно-квадратичной оптимизации.

**Ключевые слова:** синтез систем управления; качество управления; динамическая коррекция; эталонная модель; линейно-квадратичная оптимизация

## I. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЙ ТРЕНД» В СОВРЕМЕННОЙ АВТОМАТИКЕ

Проблема качества процессов управления, несмотря на давнюю историю развития, до сих пор остается важнейшей и слабо развивающейся в теории и практике автоматических систем. Более того, приходится констатировать, что в исследованиях последних десятилетий в известной мере утрачена преемственность с интуитивно ясными и технически содержательными классическими представлениями о качестве процессов управления, выработанными отечественной школой автоматики [1]. Заметим, что исторически первые представления о динамическом качестве САР формировались в 40-х годах XX в. в терминах прямых показателей качества – времени регулирования, перерегулирования, степени устойчивости и колебательности и др.

В современной автоматике при синтезе автоматических систем все большую популярность находят требования не желаемого или допустимого, а оптимального качества процесса управления синтезируемой системы [2]. При этом безраздельное господство получили квадратичные критерии оптимальности, породившие класс линейно-квадратичных (ЛК) задач управления и являющиеся исходными в ставшем уже классическим методе аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) Калмана-Летова. Здесь критерий качества задается в виде интегральной квадратичной формы от тех или иных показателей действительного переходного процесса, либо от невязки (рассогласования) действительного и желаемого (эталонного) переходных

процессов системы и требуется обеспечить максимальную их близость (см., например, [2, с. 379-382; 3, с. 483-484; 4, с. 240-242; 5, с. 704-705]).

Однако, несмотря на чрезвычайную популярность и видимые достоинства, методология квадратичной оптимизации процессов управления неоднократно подвергалась резкой критике со стороны ведущих отечественных и зарубежных ученых [6]. Так, еще Беллман (R.E. Bellman) достаточно аргументировано утверждал, что введение интегрального квадратичного критерия – «вопрос математического удобства и часто диктуется желанием применить для решения задачи аналитические методы и получить решение в явном виде», а, касаясь задачи АКОР, особо подчеркивал, что данной «менее важной задачей» часто заменяют исходную, «более реалистичную задачу» оптимизации.

В настоящей работе предлагается новый метод синтеза систем автоматического регулирования (САР), основанный на динамической коррекции объекта управления [7], которая осуществляется посредством применения формализма ЛК-задач оптимизации. В основе решаемой задачи коррекции лежит идея постулирования желаемых динамических свойств синтезируемой системы в виде заданной эталонной модели скорректированного объекта. Алгоритмизация задач коррекции базируется на формализме ЛК-задач управления, причем оптимизируемые интегральные квадратичные функционалы служат мерой отклонения формируемых переходных характеристик каналов регулирования от эталонных значений.

Предлагаемый метод показывает возможность конвергенции классической концепции прямых показателей качества процессов регулирования и методологии АКОР.

## II. ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Один из действенных способов решения задач управления заключается в их *декомпозиции* на две подзадачи: предварительной динамической коррекции объекта и формирования закона управления для

скорректированного объекта. Данную идею воплощает блок-схема САУ, представленная на рис. 1. Здесь управляющее устройство (УУ) состоит из двух блоков: *блока коррекции* (БК), исправляющего динамику объекта в соответствии с заданной эталонной динамической моделью, и *блока управления* (БУ), реализующего закон управления для скорректированного объекта.

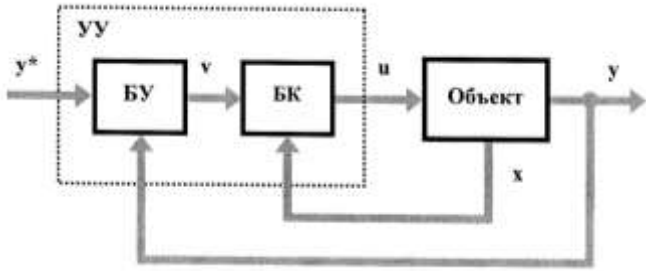


Рис. 1.

Далее рассматривается класс линейных стационарных динамических объектов, описываемых в переменных состояния уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}, \quad (2)$$

где  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^r$  – управляющий вход,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  – состояние,  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$  – управляемый выход объекта, причем полагаем, что  $1 < m \leq r$ ,  $\mathbf{A}_0 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_0 \in \mathbf{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{C}_0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$ .

Передаточная матрица объекта по каналу «вход-выход» равна

$$\mathbf{W}_0(s) = \mathbf{C}_0 (\mathbf{E}_n s - \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{B}_0,$$

где  $s$  – комплексная частота,  $\mathbf{E}_n$  – единичная матрица  $n$ -го порядка.

Назначение САУ – отработка уставки  $\mathbf{y}^*(t)$ :

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{y}^*(t),$$

в соответствии с заданными требованиями качества процессов управления.

Действие БК будем оценивать по реакции скорректированного объекта на тестовый сигнал

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) \neq 0 \quad (t > 0). \quad (3)$$

Полагаем, что данный сигнал генерируется *здатчиком*, описываемым дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{v}} = 0.$$

Желаемую динамику выхода скорректированного объекта зададим *эталонной моделью* (ЭМ) порядка  $n_M$ :

$$\dot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{A}_M \mathbf{x}_M + \mathbf{B}_M \mathbf{v}, \quad (4)$$

$$\mathbf{y}_M = \mathbf{C}_M \mathbf{x}_M + \mathbf{D}_M \mathbf{v}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{x}_M \in \mathbf{R}^{n_M}$  – состояние,  $\mathbf{y}_M \in \mathbf{R}^m$  – выход эталонной модели;  $\mathbf{A}_M$ ,  $\mathbf{B}_M$ ,  $\mathbf{C}_M$ ,  $\mathbf{D}_M$  – числовые матрицы соответствующих размеров.

Полагаем, что ЭМ устойчива, так что реакция выхода на постоянное входное воздействие (3) устанавливается на постоянном уровне, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{y}}_M(t) = 0.$$

Расхождение между выходом скорректированного объекта и выходом эталонной модели выражает *невязка*

$$\delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_M(t).$$

Динамическая коррекция объекта должна обеспечивать требование:

$$\delta \mathbf{y}(t) \approx 0. \quad (6)$$

Введем малый положительный параметр  $\gamma$ :

$$0 < \gamma \ll 1. \quad (7)$$

Точность приближения (6) будем оценивать следующим интегральным квадратичным критерием (здесь  $\| \dots \|$  обозначает евклидову норму вектора):

$$J_y^\gamma = \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \|\delta \mathbf{y}(t)\|^2 dt, \quad (8)$$

а интенсивность управляющих воздействий – критерием

$$J_u^\gamma = \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt. \quad (9)$$

Весовой множитель  $e^{-2\gamma t}$  обеспечивает сходимость функционалов (8) и (9) для класса *ограниченных* функций, позволяя рассматривать установившиеся режимы в САУ с *ненулевой* асимптотикой процессов  $\delta \mathbf{y}(t)$  и  $\mathbf{u}(t)$ .

Задачу синтеза БК можно формализовать посредством ограничения или минимизации критериев (8), (9). В наиболее общей постановке это будет задача двухкритериальной оптимизации вида ( $g > 0$ ):

$$J^\gamma = g J_y^\gamma + J_u^\gamma \rightarrow \min,$$

или то же самое, но с учетом (8), (9):

$$J^\gamma = \int_0^\infty e^{-2\gamma t} (g \|\delta \mathbf{y}(t)\|^2 + \|\mathbf{u}(t)\|^2) dt \rightarrow \min. \quad (10)$$

Оптимизационный аспект структурно-параметрического синтеза БК показывает, что рассматриваемый тип динамической коррекции объекта по своему смыслу является *аппроксимационным*.

Предлагаемую структуру БК отражает рис. 2.

Функционирование БК подчиняется уравнениям

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{K}_2 \mathbf{x}_M + \mathbf{K}_3 \mathbf{v}), \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{A}_M \mathbf{x}_M + \mathbf{B}_M \mathbf{v}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{K}_1 \in \mathbf{R}^{r \times n}$ ,  $\mathbf{K}_2 \in \mathbf{R}^{r \times n_M}$ ,  $\mathbf{K}_3 \in \mathbf{R}^{r \times m}$  – матричные настроечные параметры БК; парой  $(\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M)$  обозначено звено, реализующее уравнение состояния (4) ЭМ.

Задача синтеза БК сводится к нахождению закона управления (11), оптимального в смысле критерия (10).

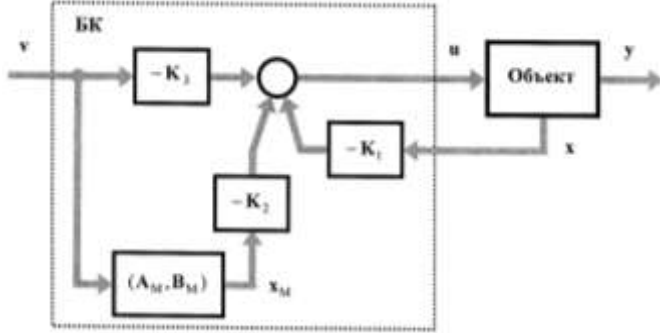


Рис. 2.

### III. БАЗОВАЯ ЛК-ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим систему  $\mathbf{S}$  порядка  $N = n + n_M + m$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}, \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{A}_M \mathbf{x}_M + \mathbf{B}_M \mathbf{v}, \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = 0, \quad (15)$$

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{C}_0 \mathbf{x} - \mathbf{C}_M \mathbf{x}_M - \mathbf{D}_M \mathbf{v}. \quad (16)$$

Она описывает динамику состояний объекта и эталонной модели, формирование сигналов  $\mathbf{v}(t)$  и  $\delta \mathbf{y}(t)$ .

Сформируем вектор состояния системы  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_M \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Тогда уравнения (13)–(16) можно записать в форме:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (18)$$

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{z}. \quad (19)$$

В соответствии с (17) матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  имеют блочную структуру (нулевые блоки оставлены пустыми), представленную следующими выражениями:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & & \\ & \mathbf{A}_M & \mathbf{B}_M \\ & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & -\mathbf{C}_M & -\mathbf{D}_M \end{bmatrix}.$$

Закон управления (11) представим в виде

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{z}, \quad (20)$$

где в соответствии с (17)  $\mathbf{K}$  – блочная матрица:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \mid \mathbf{K}_2 \mid \mathbf{K}_3]. \quad (21)$$

Из (19) следует равенство

$$g \|\delta \mathbf{y}\|^2 = \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{Q}$  – симметрическая неотрицательно определенная матрица:

$$\mathbf{Q} = g \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (23)$$

Используя (22), преобразуем критерий (10) к виду

$$J^\gamma = \int_0^\infty e^{-2\gamma t} (\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \|\mathbf{u}(t)\|^2) dt \rightarrow \min. \quad (24)$$

Рассмотрим вспомогательную систему  $\hat{\mathbf{S}}$ :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}_0 - \gamma \mathbf{E}_n) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_0 \hat{\mathbf{u}}, \quad (25)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_M = (\mathbf{A}_M - \gamma \mathbf{E}_{n_M}) \hat{\mathbf{x}}_M + \mathbf{B}_M \hat{\mathbf{v}}, \quad (26)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = -\gamma \hat{\mathbf{v}}, \quad (27)$$

где  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_M \in \mathbf{R}^{n_M}$ ,  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^m$ ,  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^r$  – управляющий вход.

Вводя вектор состояние системы  $\hat{\mathbf{S}}$ :

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}}_M \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix},$$

из (25)–(27) получим ее уравнения состояния в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}, \quad (28)$$

где

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \gamma \mathbf{E}_N. \quad (29)$$

Из (29) следует, что спектр системы  $\hat{\mathbf{S}}$  получается сдвигом спектра системы  $\mathbf{S}$  влево на малую величину (7).

Установим связь между динамическими процессами в системах  $\mathbf{S}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$ .

**Предложение 1.** Система  $\mathbf{S}$  приводится к системе  $\hat{\mathbf{S}}$  посредством следующей замены переменных:

$$\mathbf{z}(t) = e^{\gamma t} \hat{\mathbf{z}}(t), \quad \mathbf{u}(t) = e^{\gamma t} \hat{\mathbf{u}}(t). \quad (30)$$

Таким образом, соотношения (30) устанавливают взаимно однозначное соответствие между управляемыми движениями систем  $\mathbf{S}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$ .

Подстановка выражений (30) в критерий (24) приводит к оптимизационной задаче для системы  $\hat{\mathbf{S}}$ :

$$J^0 = \int_0^\infty (\hat{\mathbf{z}}^T(t) \mathbf{Q} \hat{\mathbf{z}}(t) + \|\hat{\mathbf{u}}(t)\|^2) dt \rightarrow \min. \quad (31)$$

Отсюда вытекает следующее предложение.

**Предложение 2.** Исходная задача ЛК-оптимизации процессов управления (24) в системе  $\mathbf{S}$  эквивалентна

стационарной задаче ЛК-оптимального управления системой  $\hat{S}$  по критерию (31).

Наконец, необходимо ответить на вопрос разрешимости решаемой задачи оптимизации.

Прежде всего, отметим, что закон управления (20) для системы  $S$  с помощью соотношений (30) преобразуется в закон управления для системы  $\hat{S}$ :

$$\hat{u} = -K\hat{z}. \quad (32)$$

**Предложение 3.** Если объект (1), (2) является вполне управляемым, эталонная модель (4), (5) - устойчива, то оптимизационная задача (10) разрешима.

Обоснуем данное предложение. В силу предложения 2 вопрос разрешимости оптимизационной задачи (18), (24) сводится к вопросу разрешимости задачи (28), (31).

Заметим, что система  $\hat{S}$  состоит из трех подсистем, представленных уравнениями (25)–(27). Из полной управляемости объекта следует, что подсистема (25) вполне управляема. Подсистемы (26), (27) хотя и неуправляемы, но являются устойчивыми. Таким образом, система  $\hat{S}$  стабилизируема, т.е. посредством действия стабилизирующих обратных связей возможно добиться ее устойчивости. В этом случае функционал в (31) будет принимать конечные значения, что гарантирует существование оптимума (10).

**Замечание.** Приведем еще одно соображение в пользу излагаемого подхода к формализации задачи динамической коррекции - применении критериев качества (8), (9) с параметризацией (7) и последующем сведении исходной оптимизационной задачи к эквивалентной стационарной ЛК-задаче.

Пусть время установления переходных процессов в скорректированном объекте не превышает величины  $T$ , причем  $\gamma T \ll 1$ . Сравним движения систем  $S$  и  $\hat{S}$ , полагая, что их начальные состояния совпадают:

$$\hat{z}(0) = z(0).$$

Сравнение уравнений (13)–(15) и (25)–(27) показывает, что управляемые динамические процессы в системах  $S$  и  $\hat{S}$  практически не будут отличаться на временном интервале  $0 < t \leq T$ . В частности, согласно (27) сигнал  $\hat{v}(t)$  является экспоненциальным

$$\hat{v}(t) = \hat{v}(0) \exp(-\gamma t),$$

но в силу (7) это – *слабозатухающий* (т.е. *квазистационарный*) сигнал, который практически совпадает с постоянным сигналом (3) при  $0 < t \leq T$ .

Решение стационарной ЛК-задачи (28), (31) дает линейный закон управления (32) с матрицей  $K$  вида

$$K = B^T P,$$

где  $P \in R^{N \times N}$  – симметрическая матрица, являющаяся решением алгебраического матричного уравнения Риккати

$$PBV^T P - P\hat{A} - \hat{A}^T P - Q = 0.$$

Разбивая полученную матрицу  $K$  согласно (21) на блоки размеров  $r \times n$ ,  $r \times n_M$  и  $r \times m$ , находим искомые матричные параметры  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  БК (11), (12).

Необходимая настройка БК осуществляется посредством подходящего выбора весового коэффициента  $g$  в структуре весовой матрицы (23).

**Предложение 3.** Пусть объект (1), (2) является вполне управляемым, а эталонная модель (4), (5) устойчива. Тогда посредством выбора больших значений весового коэффициента  $g$ :  $g \gg 1$ , отклик  $\delta y(t)$  *возможно сделать сколь угодно малым* в смысле метрики функционального пространства  $L_2[0, \infty)$ :

$$J_y^\gamma = \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \|\delta y(t)\|^2 dt \leq \varepsilon_y,$$

где  $\varepsilon_y$  – заданная малая положительная величина.

Данное предложение имеет принципиальное значение, поскольку гарантирует возможность эффективной настройки БК.

#### IV. РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧ РЕГУЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ СХЕМ АППРОКСИМАЦИОННОЙ КОРРЕКЦИИ

Построение САУ по схеме динамической коррекции каналов управления (рис. 1) позволяет упростить задачу регулирования – она решается применительно к эталонной модели скорректированного объекта. Если же динамический порядок эталонной модели меньше порядка модели, т.е.  $n_M < n$ , то динамическая коррекция объекта порождает еще один благоприятный эффект – снижение размерности задачи регулирования.

**Пример.** Параметры объекта:  $n = 3$ ,  $m = r = 1$ ;

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_0 = [1,5 \ 0 \ 0].$$

Его передаточная функция

$$W_0(s) = C_0 (E_n s - A_0)^{-1} B_0 = \frac{3}{s(s+1)(2s+1)}.$$

Примем следующую эталонную модель динамики скорректированного объекта:

$$W_M(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Результат расчета БК для  $\gamma = 0,001$  и  $g = 10^4$ :

$$K_1 = [150,00 \ 51,57 \ 9,20], \quad K_2 = -68,69, \quad K_3 = -30,30.$$

Рис. 3 иллюстрирует результат динамической коррекции. На нем представлены переходные характеристики скорректированного объекта и эталонной модели, т.е. их реакции  $y(t)$  и  $y_M(t)$  на единичную ступеньку:  $v=1(t)$ . Видно, что фактическая переходная характеристика близка к эталонной.

В БУ реализуем ПИ-закон управления с передаточной функцией:

$$W_R(s) = k_P + \frac{k_I}{s}.$$

Выберем следующую настройку регулятора:

$$k_P = 0,6; k_I = 1.$$

В этом случае эталонной передаточной функции скорректированного объекта отвечает передаточная функция замкнутой системы

$$\hat{W}(s) = \frac{0,6s+1}{s^2+1,6s+1}$$

с полюсами, равными  $-0,8 \pm 0,6i$ .

На рис. 4 представлены фактическая (сплошная линия) и эталонная (пунктир) переходные характеристики САУ, т.е. реакции  $y(t)$  и  $\hat{y}(t)$  на единичную ступеньку:  $y^*=1(t)$ , а также разница между ними  $\Delta y(t)$ .

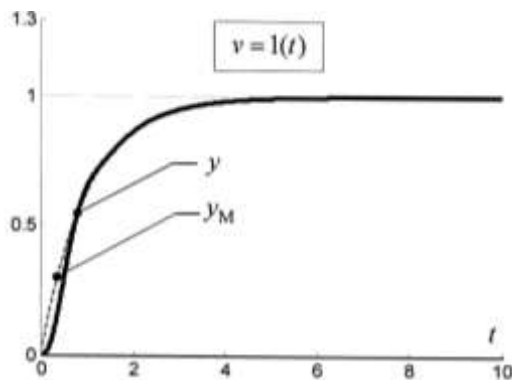


Рис. 3.

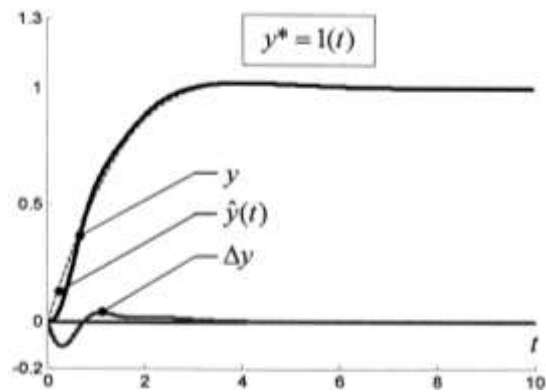


Рис. 4.

Таким образом, фактическая переходная характеристика замкнутой системы близка к эталонной. Заметим, что спектр синтезированной САУ

$\Lambda = \{-0,8243 \pm 0,6124i; -2,1746 \pm 4,4937i; -5,7070\}$ , т.е. доминирующие полюса замкнутой системы близки к полюсам желаемой передаточной функции  $\hat{W}(s)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Солодовников В.В., Филимонов Н.Б. Динамическое качество систем автоматического регулирования. М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1987.
- [2] Филимонов Н.Б. Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 2-11.
- [3] Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
- [4] Машиностроение. Энциклопедия в 40 тт. Т. I-4. Автоматическое управление. Теория / Е.А. Федосов, А.А. Красовский, Е.П. Попов и др. Под общ. ред. Е.А. Федосова. М.: Машиностроение, 2000.
- [5] Современная прикладная теория управления. В 3-х чч. Ч. I. Оптимизационный подход в теории управления / Под ред. А.А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.
- [6] Методы классической и современной теории автоматического управления. В 5-ти тт. Т. 4. Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
- [7] Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б. Динамическая коррекция процессов регулирования методом линейно-квадратичной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 9-14.