

Проектирование импульсной распределенной системы управления

Ю. В. Ильюшин

Санкт-Петербургский горный университет
ilyushin_y@spmi.ru

И. М. Новожилов

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
novozhilovim@list.ru

Аннотация. В статье рассматривается вопрос поиска места и времени включения секционных нагревателей, при стабилизации температурного поля на основе функции Грина. Рассмотрена система управления и стабилизации температурного поля. Приведены математические модели и проведено исследование температурного поля для трехмерного объекта управления.

Ключевые слова: управление; математическое моделирование; температурное поле; функция Грина

При рассмотрении технических особенностей электрических туннельных печей конвейерного типа стоит отметить их низкий КПД. Он напрямую связан с огромными потерями электроэнергии при нагреве карбидокремниевых нагревательных элементов. Рассмотрим возможность замены сплошных нагревательных элементов на импульсные.

Для решения данной задачи рассмотрим пространственно трехмерный объект управления. Математическая модель такого объекта имеет вид:

$$\frac{\partial Q(x, y, z, t)}{\partial t} - a^2 \left[\frac{\partial^2 Q(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right] = f(x, y, z, t)$$

$$Q(x, y, z, 0) = Q_0(x, y, z); Q(0, y, z, t) = q_1(y, z, t);$$

$$Q(l_1, y, z, t) = q_2(y, z, t);$$

$$Q(x, 0, z, t) = q_3(y, z, t); Q(x, l_2, z, t) = q_4(x, z, t);$$

$$Q(x, y, 0, t) = q_5(x, y, t); Q(x, y, l_3, t) = q_6(x, y, t);$$

$$0 \leq x \leq l_1; 0 \leq y \leq l_2; 0 \leq z \leq l_3; t \geq 0; a > 0.$$

Расчет показателей температуры будем вести используя функцию Грина представленную в виде бесконечного ряда Фурье [1]

$$G(x, y, z, \rho, v, \vartheta, t) = \frac{8}{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3} \cdot \sum_{k, m, n=1}^{\infty} B_{k, m, n}(\cdot) \cdot \exp \left[-a^2 \pi^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2} \right) \right]$$

$$B_{k, m, n}(\cdot) = \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{l_2} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{l_3} \right) \cdot \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot \rho}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot v}{l_2} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot \vartheta}{l_3} \right);$$

где d количество источников нагрева; $p=1,2,3,\dots$ – порядковый номер включения источника; $z(p)$ – один из источников нагрева; t_p – момент времени включения источника под номером $z(p)$; l_1, l_2, l_3 – пространственные

координаты; ρ, v, ϑ – координаты точечного источника ζ ; a^2 – температуропроводность материала; k, m, n – количество членов ряда Фурье при разложении входного воздействия по ширине и длине; x, y, z – координаты исследуемой точки; t – момент времени [2].

Графически рассматриваемый объект будет выглядеть следующим образом:

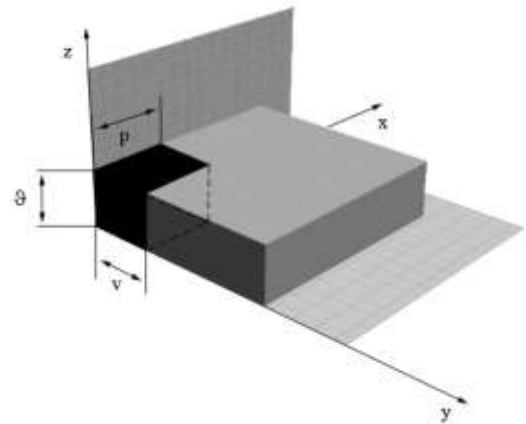


Рис. 1. Трехмерный объект управления

Система управления данным объектом будет выглядеть следующим образом:



Рис. 2. Структурная схема замкнутой системы регулирования

Передаточная функция данного объекта управления при начальных условиях и представленной математической модели теплового процесса будет иметь вид:

$$W(x, y, z, \rho, v, \vartheta, s) = \frac{8}{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3} \cdot \sum_{k, m, n=1}^{\infty} \frac{B_{k, m, n}(\cdot)}{s + a^2 \pi^2 \left(\frac{k^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2} \right)}$$

Расчет температуры данного объекта управления будем проводить с использованием следующей функции:

$$G(x_j, y_j, z_j, \rho, v, \vartheta, t) = \sum_{i=1}^d \frac{8}{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3} \cdot \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x_j}{L_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot y_j}{L_2}\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \rho_i}{L_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot v_i}{L_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot z_j}{L_3}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \vartheta_i}{L_3}\right) \times \\ \times \exp\left[-a^2 \pi^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2}\right)\right] \cdot \sum_p \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x_j}{L_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot y_j}{L_2}\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot z_j}{L_3}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \rho_{z(p)}}{L_1}\right) \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot v_{z(p)}}{L_2}\right) \times \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \vartheta_{z(p)}}{L_3}\right) \times \\ \times \exp\left[-a^2 \pi^2 \cdot (t - \tau) \cdot \left(\frac{k^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2}\right)\right].$$

Данная функция показывает поведение системы в начальный момент времени, когда система получает первый импульс. В связи с тем, что система находится в состоянии покоя, данный импульс имеет максимальную амплитуду. Распространение тепла по объекту проходит в разных направлениях с одинаковой скоростью это связано с однородностью материала. В случае не однородности материала температурный процесс будет происходить не равномерно, что приведет к различной скорости нагревания материала. Графически функция начального нагрева будет иметь следующий вид:

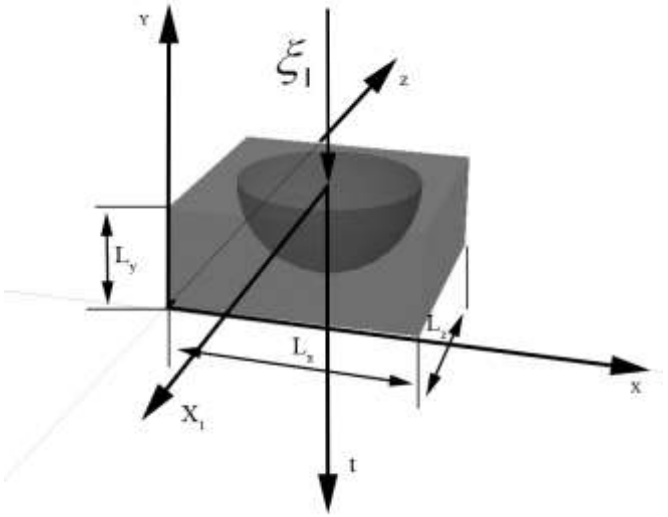


Рис. 3. Графическое отображение функции начального нагрева

Найдем функцию, определяющую время включения первого управляющего воздействия – τ_1 . Функция, определяющая значение температурного поля трехмерного объекта управления, в некоторый момент времени t будет определяться одной составляющей ряда Фурье. Выражая значение члена ряда Фурье, получим следующее уравнение [3, 4, 5, 6]:

$$T(x, y, z, t) = \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \exp\left[-a^2 \pi^2 t \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right)\right] \cdot \sin \frac{\pi}{l_1} x \cdot \sin \frac{\pi}{l_2} y \cdot \sin \frac{\pi}{l_3} z \times \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l_1} \rho_i \cdot \sin \frac{\pi}{l_2} v_i \cdot \sin \frac{\pi}{l_3} \vartheta_i$$

Тогда если принять во внимание условие, $T(x, y, z, t) = T_{zad}$ которое необходимо для обеспечения устойчивости системы, получим:

$$\exp\left[-a^2 \pi^2 t \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right)\right] = \frac{l_1 l_2 l_3 T_{zad}}{8 \sin \frac{\pi}{l_1} x_{kr} \sin \frac{\pi}{l_2} y_{kr} \sin \frac{\pi}{l_3} z_{kr} \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l_1} \rho_i \sin \frac{\pi}{l_2} v_i \sin \frac{\pi}{l_3} \vartheta_i}.$$

Полагая, что для данного уравнения присущи следующие равенства $x_{kr} = \rho_1$, $y_{kr} = v_1$, $z_{kr} = \vartheta_1$, и обозначив время $t = \tau_1$, получим:

$$a^2 \pi^2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right) \tau_1 = \ln \left(\frac{8 \sin \frac{\pi}{l_1} \rho_1 \sin \frac{\pi}{l_2} v_1 \sin \frac{\pi}{l_3} \vartheta_1 \sum_{i=1}^N \sin \frac{\pi}{l_1} \rho_i \sin \frac{\pi}{l_2} v_i \sin \frac{\pi}{l_3} \vartheta_i}{l_1 l_2 l_3 T_{zad}} \right);$$

откуда:

$$\tau_1 = \frac{1}{a^2 \pi^2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right)} \ln \left(\frac{8 \sin \frac{\pi}{l_1} \rho_1 \sin \frac{\pi}{l_2} v_1 \sin \frac{\pi}{l_3} \vartheta_1 \sum_{i=1}^N \sin \frac{\pi}{l_1} \rho_i \sin \frac{\pi}{l_2} v_i \sin \frac{\pi}{l_3} \vartheta_i}{l_1 l_2 l_3 T_{zad}} \right).$$

Аналогичным способом найдем место включения управляющего воздействия, которое согласно допускам указанным выше будет иметь вид:

$$\sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l_1}\right) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{k,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \rho}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot v}{l_2}\right) \times \exp\left[-a^2 \pi^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right)\right] \\ \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l_1}\right) = \arcsin \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{k,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \rho}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot v}{l_2}\right) \times \exp\left[-a^2 \pi^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right)\right] \\ x = \arcsin \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{k,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \rho}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot v}{l_2}\right) \times \exp\left[-a^2 \pi^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right)\right] \cdot \left(\frac{l_1}{k \cdot \pi}\right) \\ G(x, y, \rho, v, t)$$

Аналогично:

$$y = \frac{l_2}{\pi} \cdot \arcsin \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \exp\left[-a^2 \pi^2 t \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right)\right] \cdot \sin \frac{\pi}{l_1} x \cdot \sin \frac{\pi}{l_3} z \cdot \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l_1} \rho_i \cdot \sin \frac{\pi}{l_2} v_i \cdot \sin \frac{\pi}{l_3} \vartheta_i \\ T(x, y, z, t) \\ z = \frac{l_3}{\pi} \cdot \arcsin \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \exp\left[-a^2 \pi^2 t \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right)\right] \cdot \sin \frac{\pi}{l_1} x \cdot \sin \frac{\pi}{l_2} y \cdot \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l_1} \rho_i \cdot \sin \frac{\pi}{l_2} v_i \cdot \sin \frac{\pi}{l_3} \vartheta_i \\ T(x, y, z, t)$$

С помощью полученных уравнений можно рассчитать время и место включения температурных источников [7, 8].

Проведем исследование теплопроводности трехмерного объекта управления. Будем использовать математический аппарат среды математических операций Mathcad 14. Для проведения математического моделирования процесса возьмем следующие значения переменных параметров системы: $l_1 = l_2 = l_3 = 10$, $k = 10$, $d = 10$, $T_{zad} = 1 \dots 500$, $a^2 = 0,01$, $x_1 = y_1 = z_1 = v_1 = \rho_1 = \vartheta_1 = 1$, $y, x, v, \rho_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\tau = 3$. При введении таких значений в среду Mathcad 14 мы получим значения представленные в таблице.

ТАБЛИЦА 1 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ

№ источника	d=5	d=6	d=8	d=9	d=10
1	0,08	0,004	6,32	7,44	6,05
2	0,06	0,003	4,70	5,53	4,50
3	0,045	0,002	3,49	4,11	3,34
4	0,034	0,001	2,60	3,06	2,49
5	0,025	0,001	1,93	2,27	1,85
6	0,018	0,0009	1,43	1,69	1,37
7	0,014	0,0007	1,06	1,26	1,02
8	0,010	0,0005	7,95	9,37	7,61
9	0,007	0,0004	5,91	6,97	5,66
10	0,005	0,0002	4,40	5,18	6,05

Анализ результатов работы разработанного программного комплекса по стабилизации температурных полей показал:

1. Возможность стабилизации температурного поля в пределах допустимых значений за счет использования импульсных нагревательных элементов.
2. Были получены формулы для расчета места и времени включения температурных источников.
3. Разработанный программный комплекс, может, применяться для любых нагревательных элементов вне зависимости от технологического процесса.

В данной работе произведен поиск места и времени включения нагревательных элементов секционного нагревателя. Данная работа показала, что при замене сплошных нагревательных элементов на импульсные, сохраняется возможность выхода на заданный температурный режим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ilyushin Y., Pervukhin D., Afanasieva O., Klavdiev A., & Kolesnichenko, S. (2014). Designing of Distributed Control System with Pulse Control. Middle-East Journal of Scientific Research, 21(3), 436-439. <http://dx.doi.org/10.5829/idosi.mejsr.2014.21.03.21433>
- [2] Ilyushin Y., Pervukhin D., Afanasieva O., Klavdiev A., & Kolesnichenko S. (2014). The Methods of the Synthesis of the Nonlinear Regulators for the Distributed One-Dimension Control Objects. Modern Applied Science 9 (2), 42-61. <http://dx.doi.org/10.5539/mas.v9n2p42>
- [3] Chernishev A. (2009). Adaptation of absolute stability frequency criterion to systems with distributed parameters. Mechatronics, automatization, control, 7, 13-18.
- [4] Chernishev A. (2009). Modified absolute stability criterion for nonlinear distributed systems. IHL News – North Caucasian region. Technical sciences, 3(151), 38-41.
- [5] Chernishev A. (2010). Interpretation of absolute stability criterion for nonlinear distributed systems. Automatization and modern technologies, 2, 28-32.
- [6] Chernishev A., Antonov V., & Shurakov D. (2010). System of temperature field stabilization criterion in the process of heat utilization in contact welding. Scientific-technical news of S.Pt.SPI, 6(113), 151-155.
- [7] Ilyushin Y. (2011). Designing of temperature field control system of tunnel kilns of conveyor type. Scientific-technical news of S.Pt.SPI, 3(126), 67-72.
- [8] Kolesnikov A. (2009). Nonlinear Oscillations Control. Energy Invariants. Journal of Computer and Systems Sciences International, 48(2), 185-198. <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230709020038>
- [9] Kolesnikov A., Zarembo Ya., & Zarembo V. (2007). Discharge of a Copper-Magnesium Galvanic Cell in the Presence of a Weak Electromagnetic Field. Russian Journal of Physical Chemistry A, 81(7), 1178-1180. <http://dx.doi.org/10.1134/s003602440707031x>
- [10] Kolesnikov A., Zarembo Ya., Puchkov L., & Zarembo V. (2007). Zinc Electrochemical Reduction on a Steel Cathode in a Weak Electromagnetic Field. Russian Journal of Physical Chemistry A, 81(10), 1715-1717. <http://dx.doi.org/10.1134/s0036024407100330>