01. Съждителна и предикатна логика

Def: Съждение, просто съждение, сложно съждение

- Съждителни операции

p: Навън грее слънце.

q: Аз спортувам.

- отрицание („не")
- дизюнкция („или")
- конюнкция („и")
- импликация („Ако..., то...")
- еквивалентност („т.с.т.к.")

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	F	F	F
T	T	F	T	T	T	T

Зад. Нека p, q, r, s, t са следните съждения:

p: Ще си напиша домашното преди обяд.

q: Сутринта ще спортувам.

r: Следобяд ще спортувам.

s: Днес времето е хубаво.

t: Днес влажността на въздуха е ниска.

Да се напишат логическите изрази, съответстващи на следните изречения:

1. Няма да си напиша домашното преди обяд. $(\neg p)$
2. Ще си напиша домашното преди обяд и следобяд ще спортувам. $(p \wedge r)$
3. Днес ще спортувам сутринта или следобяд $(q \vee r)$
4. Ако днес времето е хубаво, следобяд ще спортувам $(s \to r)$
5. Необходимо условие, за да спортувам днес следобяд е, времето да е хубаво. $(r \to s$ или $\neg s \to \neg r)$
6. Достатъчно условие, за да спортувам днес (т.е., сутринта или следобяд) е, времето да е хубаво и влажността да е ниска $((s \wedge t) \to (q \vee r))$

- Приоритет на операциите:
  1) отрицание
  2) конюнкция
  3) дизюнкция
  4) импликация
  5) еквивалентност

Пример: $\neg(\neg p)$

- таблици на истинност

$(p \to q) \to r$ // 01011101

$((p \to (\neg q)) \wedge (q \vee r)) \to (p \leftrightarrow r)$ // 10101111

$(p \vee (\neg q)) \to (p \leftrightarrow r)$ // 10110101

$(\neg p) \vee q$ // 1101

$p \vee (\neg p)$ // 11

- Еквивалентност на съждения

Асоциация с реалните числа

• Основни еквивалентности:

- свойства на константите: $p \vee T \equiv T$; $p \vee F \equiv p$; $p \wedge F \equiv F$; $p \wedge T \equiv p$
- свойства на отрицанието: $p \vee \neg p \equiv T$; $p \wedge \neg p \equiv F$
- идемпотентност: $p \vee p \equiv p$; $p \wedge p \equiv p$
- закон за двойното отрицание: $\neg(\neg p) \equiv p$
- комутативност: $p \vee q \equiv q \vee p$; $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- асоциативност: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$; $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- дистрибутивност: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- закони на Де Морган: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$; $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- поглъщане: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$; $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- свойство на импликацията: $p \to q \equiv \neg p \vee q$

Зад. Да се докаже законът за дистрибутивността чрез табличния метод.

Зад. Да се докаже законът за поглъщането чрез законите за дистрибутивност и св-ва на константите.

$p \vee (p \wedge q) \equiv (p) \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge T) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (T \vee q) \equiv p \wedge T \equiv p$ □

Зад. Да се опростят изразите, така че знакът за отрицание да стои само пред елементарни съждения:

(а) $\neg(p \to \neg q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg\neg p \wedge \neg\neg q \equiv p \wedge q$

(б) $(\neg p \vee \neg q) \to \neg(\neg q \wedge r) \equiv (\neg(\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg(\neg q \wedge r)) \equiv (\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg\neg q \vee \neg r) \equiv (p \wedge q) \vee (q \vee \neg r)$

(в) $\neg((p \to \neg q) \vee \neg(r \wedge \neg r)) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee r) \equiv p \wedge q \wedge r \wedge (\neg r) \equiv F$

Зад. Да се док. следните еквивалентности (чрез еквивалентни преобразувания):

(а) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

(б) $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$

(в) $(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

(г) $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

(д) $a \to (b \to a) \equiv T$

(е) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r) \equiv T$

Реш:

(а) $p \to q \equiv \neg p \vee q$ // св-во на импликацията

$\neg p \vee q \equiv q \vee \neg p$ // комутативност

$q \vee \neg p \equiv \neg q \to \neg p$ // св-во на импликацията □

(б) $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ // Де Морган

$\neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$ // Де Морган

$\neg p \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ // дистрибутивност

$(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q)$ // св-во на отрицанието

$F \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ // св-ва на константите □

в) $(p \wedge q) \to r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r$ // св-во на импликацията

$\neg(p \wedge q) \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$ // Де Морган

$\neg p \vee \neg q \vee r \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$ // асоциативност

$\neg p \vee (\neg q \vee r) \equiv \neg p \vee (q \to r)$ // св-во на импликацията

$\neg p \vee (q \to r) \equiv p \to (q \to r)$ // св-во на импликацията □

г) $(p\vee q)\to r \equiv \neg(p\vee q)\vee r$ //св-во на импликацията

$\neg(p\vee q)\vee r \equiv (\neg p\wedge\neg q)\vee r$ // Де Морган

$(\neg p\wedge\neg q)\vee r \equiv (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$ // дистрибутивност

$(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee r) \equiv (p\to r)\wedge(q\to r)$ //св-во на импликацията $\square$

д) $a\to(b\to a) \equiv a\to(\neg b\vee a)$ //св-во на импликацията

$a\to(\neg b\vee a) \equiv \neg a\vee(\neg b\vee a)$ //св-во на импликацията

$\neg a\vee(\neg b\vee a) \equiv a\vee\neg a\vee\neg b$ // комутативност

$(a\vee\neg a)\vee\neg b \equiv T\vee\neg b$ //св-во на отрицанието

$T\vee\neg b \equiv T$ //св-во на константите $\square$

е) $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r) \equiv \neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r)$ //св-во на импликацията

$\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r) \equiv (\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r)$ //Де Морган

$(\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r) \equiv (\neg\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\vee r)$ //Де Морган

$(\neg\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\vee r) \equiv (p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg r)\vee(\neg p\vee r)$ //закон за двойното отрицание

$(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg r)\vee\neg p\vee r \equiv ((p\wedge\neg q)\vee\neg p)\vee((q\wedge\neg r)\vee r)$ //комутативност

$((p\wedge\neg q)\vee\neg p)\vee((q\wedge\neg r)\vee r) \equiv ((p\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee\neg p))\vee((q\vee r)\wedge(\neg r\vee r))$ //дистрибутивност

$((p\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee\neg p))\vee((q\vee r)\wedge(\neg r\vee r)) \equiv (T\wedge(\neg q\vee\neg p))\vee((q\vee r)\wedge T)$ //св-ва на отрицанието

$(T\wedge(\neg q\vee\neg p))\vee((q\vee r)\wedge T) \equiv \neg q\vee\neg p\vee q\vee r$ //св-ва на константите

$\neg q\vee\neg p\vee q\vee r \equiv (q\vee\neg q)\vee(\neg p\vee r)$ //комутативност

$(q\vee\neg q)\vee(\neg p\vee r) \equiv T\vee(\neg p\vee r)$ //св-ва на отрицанието

$T\vee(\neg p\vee r) \equiv T$ //св-ва на константите $\square$

- предикати
- квантори

твърдение	Кога е истина?	Кога е неистина?
$\forall x\in A\ P(x)$	$P(x)$ е вярно за всяко $x\in A$.	съществува $x\in A$, за което $P(x)$ не е вярно
$\exists x\in A\ P(x)$	съществува $x\in A$, за което $P(x)$ е вярно	$P(x)$ не е вярно за всяко x.

- Примери:

$(\forall x\in\mathbb{R})[(x+1)^2=x^2+2x+1]$

$(\exists x\in\mathbb{C})[x^2=-1]$

$(\forall x\in\mathbb{R})[x^2\neq-1]$

$(\neg\exists x\in\mathbb{N})[x^2=2]$

$(\exists x\in\mathbb{N})[x>-3]$

$(\forall n\in\mathbb{R})[(n>n+1)\to(2=-3)]$

$(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})[x+y=2]$

• Закони на предикатното смятане

1) $\neg\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$

2) $\neg\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$

3) $\forall x \forall y\, P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\, P(x,y)$

4) $\exists x \exists y\, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, P(x,y)$

5) $\exists x \forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\, P(x,y)$

Зад. Да означим с $K(x,y)$ твърдението „x познава y". Изразете като предикатна формула следните твърдения:

1) Всеки познава някого.
2) Някой познава всеки.
3) Някой е познаван от всички.
4) Всеки знае някой, който не го познава.
5) Има такъв, който знае всеки, който го познава.
6) Всеки двама познати имат общ познат.

Зад. Да се определи истинността на всяко от следните твърдения

1) $(\exists n \in \mathbb{R})[n = -n]$
2) $(\exists n \in \mathbb{R})[n > 0 \wedge n = -n]$
3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})[x^2 + y > 3]$
4) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x^2 + y > 3]$
5) $(\forall x \in \mathbb{R})[(x^2 > -2) \rightarrow (1 < 0)]$

Задача: Казваме, че редицата $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и клони към a, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n > N \Rightarrow |a - q_n| < \varepsilon]$$

Означаваме това като $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = a$. Какво означава $\lim\limits_{n\to\infty} q_n \neq a$?

Зад. Казваме, че $f: D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката $x_0 \in D$, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)[|x_0 - x| < \delta \rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon]$$

Какво означава f да бъде прекъсната в т. $x_0 \in D$?

Зад. Разгледайте твърдението и го формулирайте на езика на предикатната логика. Образувайте отрицанието на твърдението така че никъде във формулировката да не се среща знак за отрицание.

„Всяко цяло число, кратно на 4, може да се представи като сума от квадратите на две цели числа"

Задачи за упражнение:

Зад.1 Нека p, q, r са съждения. Използвайки еквивалентни преобразувания, докажете, че следните еквивалентности са в сила:

(1) $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

(2) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r) \equiv T$

(3) $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$

(4) $(p \wedge q) \to (p \to q) \equiv T$

Зад.2 Да означим с p съждението $(\forall n \in \mathbb{N}) [n^2 - 3n + 7 < 0 \to 3^n > 902n]$

(а) Запишете отрицанието на съждението p с помощта на формален израз, в който не участва операцията логическо отрицание.

(б) Съждението p вярно ли е?

Зад.3 Казваме, че $f: D \to \mathbb{R}$ е равномерно непрекъсната, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(\forall y \in D)[|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

Напишете формула, която казва, че f не е равномерно непрекъсната.

Зад.4 Разгледайте следното твърдение и го формулирайте на езика на предикатната логика. Образувайте отрицанието на твърдението, като при това никъде във формулировката да не се среща знакът за отрицание $\neg$.

„За всяко реално число $x \geq -1$ и за всяко естествено число n е в сила неравенството $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$"