03. Индукция

Принцип на математическата индукция:
Нека $P(n), n \in \mathbb{N}$ е твърдение, и нека n_0 е дадено естествено число. Твърдението е вярно за всяко ест. число по-голямо или равно на n_0, ако е в сила следното:

1) Вярно е $P(n_0)$.
2) Ако е вярно $P(k)$, то е вярно и $P(k+1)$ за всяко ест. число $k \geq n_0$.

Зад. Да се докаже, че за всяко ест. число $n \geq 1$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Д-во: Ще докажем твърдението, използвайки метода на математическата индукция.
1) База: Проверяваме верността на твърдението при $n=1$:
$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (2) \cdot (3) = 1$ - вярно е
2) Нека за някое $k \geq 1$ е изпълнено $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$
3) Ще док., че твърдението е изпълнено за $k+1$:
$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \overset{\text{и.п.}}{=} \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + k^2 + 2k + 1 = \frac{1}{6}(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6] =$$
$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 2k + 1) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \quad \square$$
Съгласно метода на математическата индукция, твърдението е вярно за всяко $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Зад. Редицата на Фибоначи дефинираме така:
(1) $F_0 = 0$, $F_1 = 1$
(2) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n > 1$
Докажете, че членовете от вида F_{3k} са четни.

Зад. Докажете, че за всяко естествено число $n \geq 1$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

Зад. В курса „Операционни системи" учат $n \geq 2$ студенти. Те трябва да подготвят презентации на избрани от тях теми, разпределени в малки групи. Докажете, че независимо от числеността на курса:
(а) студентите могат да се разделят в групи от двама или трима души.
(б) студентите могат да се разделят в групи от двама или трима души, като има най-много две групи от по двама студенти.

Реш: (а) Трябва да се док., че $(\forall n \geq 2)(\exists a \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})[n = 2a + 3b]$.
• База: $n = 2 \to 2 = 2 \cdot 1$ ✓
• Нека за някое $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ е изпълнено, че $(\exists a, b \in \mathbb{N})[n = 2a + 3b]$.
• Разгл. $n+1$
$n+1 \overset{\text{и.п.}}{=} 2a + 3b + 1$
1сл.) Нека $a > 0$. Тогава $n+1 = 2a + 3b + 1 = 2a + 3b - 2 + 3 = 2(a-1) + 3(b+1)$
$\left.\begin{array}{l} a-1 \in \mathbb{N}, \text{ защото } a > 0 \\ b+1 \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow$ твърдението е в сила
2сл.) $a = 0$. Тогава: $n+1 = 2a + 3b + 1 = 3b + 1$, $b \geq 1$, иначе $n < 3$
$\Rightarrow n+1 = 3b + 1 = 3b + 4 - 3 = 2 \cdot 2 + 3(b-1)$
$\left.\begin{array}{l} b-1 \in \mathbb{N}, \text{ защото } b \geq 1 \\ 2 \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow$ твърдението е в сила.

Зад. Да се докаже, че $2^{3n}-7n-1$ се дели на 49 за всяко ест. число n.

Зад. Нека $n\in\mathbb{N}^+$ и $U=\{1,2,\dots,2n\}$. Да се докаже, че за всяко множество $A\subseteq U$, за което $|A|=n+1$, съществува $k\in U$, $k<2n$, такова че $k\in A$ и $(k+1)\in A$.

Д-во: Използваме метода на математическата индукция:

База: $n=1$. Единственият начин да изберем $1+1=2$ числа от множеството $\{1,2\}$ е да вземем и 1, и 2, а те са последователни.

И.Х.: Да предположим, че е вярно, че както и да изберем $n+1$ числа от $\{1,2,\dots,2n\}$, сред тях непременно има поне 2 последователни.

И.С. Ще док. твърдението за $n+1$.

Първи случай: Сред избраните $n+2$ числа е както числото $2n+1$, така и $2n+2$. Тъй като те са последователни, то твърдението е изпълнено

Втори случай: Поне едно от числата $2n+1$ и $2n+2$ не присъства сред избраните, т.е. от числата $2n+1$ и $2n+2$ е избрано най-много едно. Понеже избраните числа са $n+2$ на брой, то от мн-вото $\{1,2,\dots,2n\}$ са избрани поне $n+1$ числа. Въз основа на И.Х. можем да твърдим, че между тях има поне 2 последователни. Значи твърдението е изпълнено и в този случай.

Зад. Да се док., че за всяко естествено число $n\geq 3$ можем да изразим числото 30 чрез n петици и произволен брой скоби и знаци за събиране, изваждане, умножение и деление.

Пример: за $n=3$ можем да съст. израза $5\times5+5$ със ст-ст 30. Трябва да покажете, че и за останалите стойности на n има такива изрази.

Реш:

База: при $n=3$ – $30=5\times5+5$

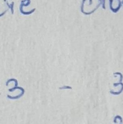
при $n=4$ – $30=(5+5/5)*5$

И.П. Твърдението е изпълнено за някое $k\geq3$, т.е. α е израз, състоящ се от k петици и знаците $*,+,\backslash,-$, $\alpha=30$.

И.С. Изразът $\alpha+5-5=30$ се състои от $(k+2)$ петици и знаците $*,+,\backslash,-$.

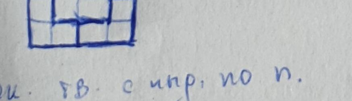
Зад. Квадрат със страна 2^n е разделен на малки квадратчета със страна 1. Едно от тях е оцветено в черно (дупка), всички останали в бяло. Докажете, че всяка дъска $2^n\times2^n$ с дупка на произволно място може да бъде покрита с тримина, които не се застъпват и не покриват дупката.

Пример:



Реш: Ще док. тв. с инд. по n.

1) База $n=1$. Тогава дъската е 2×2 и има 4 възможности за мястото на дупката:



. Очевидно за всяка от тях дъската може да бъде покрита.

2) И.Х. Нека да допуснем, че за някое $n\in\mathbb{N}$ дъската $2^n\times2^n$ може да бъде покрита с тримина, независимо от това къде е дупката.

3) И.С. Да разгледаме твърдението за $n+1$. Разглеждаме дъска $2^{n+1}\times2^{n+1}$ и си представяме, че тя е разделена на четири поддъски $2^n\times2^n$, долепени една до друга. Дупката се намира в точно една от тези 4 поддъски, нека ~~бъо~~ това е горната лява поддъска. Чрез едно тримино слагаме три дупки в останалите поддъски. И.Х. е в сила за четирите поддъски. Съгласно нея, всяка от тях може да бъде покрита с тримина по правилата $\Rightarrow$ и цялата дъска може. □

Принцип на силната индукция:

1) База (проверка за n_0)

2) И.П. (Нека твърдението е вярно за $(\forall i)\ n_0 \leq i \leq k$)

3) И.С. (Доказване, че твърдението е вярно и за $k+1$)

Математическа индукция	$\equiv$	Силна индукция
$P(0)$		$P(0)$
$P(k) \to P(k+1)$		$P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(k) \to P(k+1)$
за някое k		за някое k.

Зад. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n може да се разбие на прости множители.

Реш: Ще докажем тв., използвайки силна индукция по n:

1) База: $n=2$. 2 е просто число и се представя като $2=2$.

2) И.Х. Допускаме, че за някое $k \geq 2$ всички ест. числа от $[2, k]$ могат да се разложат на прости множители

3) И.С. Разглеждаме $k+1$.

1 сл.) $k+1$ е просто $\Rightarrow$ представя се като себе си.

2 сл.) $k+1$ е съставно $\Rightarrow$ от деф. на съст. числа следва, че

$(\exists a \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})[a, b \geq 2 \wedge a, b \leq k+1 \wedge k+1 = a.b]$.

От И.Х. следва, че a и b могат да се разложат на прости множители.

$\left.\begin{array}{l} a = p_1 . p_2 \cdots p_s \\ b = q_1 q_2 \cdots q_r \end{array}\right\} \Rightarrow k+1 = p_1 p_2 \cdots p_s . q_1 q_2 \cdots q_r \Rightarrow k+1$ може да се разложи на прости множители

$\Rightarrow$ твърдението е изпълнено.

Зад. Да се докаже, че всяко ест. число може да се представи като сума на различни степени на 2. Пример $5 = 2^2 + 2^0$

Реш: Ще док. тв., използвайки силна инд. по n:

1) База $n=1$ $\quad 1 = 2^0$ ✓

2) И.Х. Доп. че за някое $k \geq 1$ всички ест. числа от $[1; k]$ могат да се представят като сума на различни степени на 2.

3) И.С. Трябва да покажем, че за $k+1$ тв. е вярно.

1 сл.) $k+1$ е четно $\Rightarrow (\exists t \in \mathbb{N}^+)[k+1 = 2.t]$. Ясно е, че $t < k+1$, следователно от И.Х.

$t = 2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} + \ldots + 2^{\alpha_k}$, $(\forall i, j)\ [i \neq j \to \alpha_i \neq \alpha_j]$, $i, j \in \{0, \ldots, k\}$

$k+1 = 2.t = 2(2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} + \ldots + 2^{\alpha_k}) = 2^{\alpha_0+1} + 2^{\alpha_1+1} + \ldots + 2^{\alpha_k+1}$, $(\forall i, j)[i \neq j \Rightarrow \alpha_i + 1 \neq \alpha_j + 1]$ ✓

2 сл.) $k+1$ е нечетно $\Rightarrow k$ е четно. ~~$k < k+1 \Rightarrow$ от И.Х.~~

$\Rightarrow (\exists t \in \mathbb{N}^+)[k = 2.t]$. Ясно е, че $t < k+1 \Rightarrow$ от И.Х. $k = 2.t = 2.(2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} + \ldots + 2^{\alpha_k}) =$

$= 2^{\alpha_0+1} + 2^{\alpha_1+1} + \ldots + 2^{\alpha_k+1}$. Тогава $k+1 = 2^{\alpha_0+1} + 2^{\alpha_1+1} + \ldots + 2^{\alpha_k+1} + 2^0$. Тъй като $\alpha_k \geq 0$, то $i \in \{1, \ldots, k\}$, то $\alpha_i + 1 \geq 1$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $\alpha_i \neq 0$, а от И.Х. $(\forall i, j \in \{0, \ldots, n\})[i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j]$.

Следователно и в този случай твърдението е изпълнено.

$\Rightarrow$ тв. е изпълнено.

Зад. $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 9 \\ a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + 9a_{n-3} \end{cases}$

Докажете, че $(\forall n \in \mathbb{N})[a_n = 3^n]$.

Задачи за упражнение:

Зад. Да се док., че всяко ест. число $n \geq 1$ има представяне от вида

$$n = d_1 . 1! + d_2 . 2! + \dots + d_r . r!, \text{ където } d_i \in \{0, 1, \dots, i\}.$$

Зад. Нека сме избрали $n+1$ елемента на множеството $S = \{1, 2, 3, \dots 2n\}$. Покажете, че поне едно от избраните числа дели друго от избраните числа.

Зад. Двама приятели играят следната игра: на маса има 2 купчинки от камъчета. Редувайки се, на всеки ход играчите си избират една от двете купчинки и взимат от нея произволен брой камъчета (колкото те си преценят).
Който вземе последното камъче, печели играта.
В кои начални конфигурации играчът, който прави първи ход, може да спечели при всяка стратегия на противника?
Упътване: Ползвайте индукция.

Зад. Нека $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$. Дефинираме $R \subseteq A \times A$ по следния начин

$$aRb \iff a \text{ дели } b$$

Опишете релацията и по трите начина (чрез изброяване на елементите ѝ, чрез матрица и чрез диаграма) и я изследвайте за изучените свойства.