04. Релации

Def: Релация - подмножество на декартово произведение.

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

Пример: • $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$: $(a,b,c) \in R \iff a, b$ и c са страни на триъгълник.

$(3,4,5) \in R$; $(10;12;8) \in R$; $(1;5;3) \notin R$

• $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a,b,c,d) \in R \iff a, b, c$ и d са страни на четириъгълник, в който може да се впише окръжност $(a+c=b+d \vee a+d=b+c)$

• Бинарни релации: $R \subseteq A \times B$

• Релации над декартов квадрат: $R \subseteq A \times A$; $(x,y) \in R$; xRy

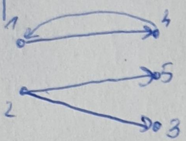
• Представяне на релации над декартов квадрат:

- чрез бинарна матрица:

Нека $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ е множество. Релацията $R \subseteq X \times X$ се представя с матрица от вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ където } a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in R \\ 0, & (x_i, x_j) \notin R \end{cases}$$

- чрез диаграми: Нека $A = \{1,2,3,4,5\}$ и $R \subseteq A \times A$, $R = \{(1,4), (2,5), (2,3), (4,1)\}$



Напомняне: XOR

• Свойства на бинарните релации над декартов квадрат ($R \subseteq A \times A$)

- рефлексивност: R - рефлексивна $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)[aRa]$

примки в диаграмата; $=$; $\leq$; $\geq$; $<$; $>$; $\neq$

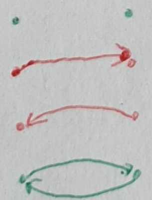
единици по главния диагонал

- антирефлексивност: R - антирефлексивна $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)[a \not R a]$; без нито една примка в диаграмата; $>, <, =, \geq, \leq$

нули по главния диагонал

- симетричност: R - симетрична $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)(\forall b \in A)[aRb \to bRa]$

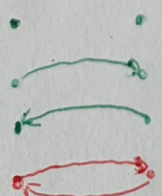
матрицата е симетрична спрямо гл. диаг., $=, \neq, <, \leq, >, \geq$



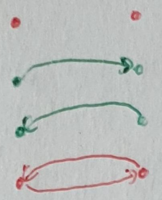
- антисиметричност: R - антисиметрична $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)(\forall b \in A)[aRb \wedge bRa \to a=b]$

$(\forall a \in A)(\forall b \in A)[a \neq b \wedge aRb \to b \not R a]$

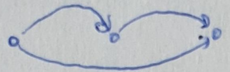
няма симетрична спрямо гл. диаг. двойка единици, $=, <, >, \geq, \leq, \neq$



- силна антисиметричност: R - силно антисиметрична $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)(\forall b \in A)[a \neq b \to aRb \oplus bRa]$
  всяка двойка клетки, симетр. спр. гл. диаг. съдържа разл. ст-сти $<, >, \gneqq, \subsetneqq, =, \neq$



- транзитивност: R - транзитивна $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)[aRb \wedge bRc \to aRc]$
  $=, <, >, \gneqq, \subsetneqq, \neq$



Има ли релация, която е едновременно симетрична и антисиметрична? $\emptyset$

Зад. Представете графично и таблично релацията
$R = \{(0,3), (0,1), (0,0), (1,3), (1,2), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)\}$ над мн-вото $\{0,1,2,3\}$. и я изследвайте за изучените свойства.
- рефл. - да - има единици по гл. диаг.
- антирефл. - не, $1R1$
- симетрична - не, $0R1$, $1 \not R 0$
- антисиметрична - не - $3 \neq 0$ и $(0,3) \in R$ и $(3,0) \in R$
- силно антисиметрична - не, не е антисиметрична
- транзитивна - не - $0R1$, $1R2$, но $0 \not R 2$

Зад. Изследвайте за свойства следните релации:

(а) $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$
$(A, B) \in R \iff A \subseteq B$

Пример:
$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \{1,2\} \arrow[loop above] \arrow[r] & \{1,2,3\} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

1) рефл. - да $(\forall x \in 2^{\mathbb{N}})[x \subseteq x]$
2) антирефл. - не. напр. $\{1\} \subseteq \{1\} \Rightarrow \{1\} R \{1\}$
3) симетричност - не $A \subseteq B \not\Rightarrow B \subseteq A$. Напр. $\{1\} \subseteq \{1,2\}$, но $\{1,2\} \not\subseteq \{1\}$
$(\{1\}, \{1,2\}) \in R$, но $(\{1,2\}, \{1\}) \notin R$
4) антисиметричност
$(\forall x \in 2^{\mathbb{N}})(\forall y \in 2^{\mathbb{N}})[x \neq y \wedge x \subseteq y \to y \not\subseteq x]$
Нека $x_1 \in 2^{\mathbb{N}}$ и $y_1 \in 2^{\mathbb{N}}$ са произволни и $x \neq y \wedge x \subseteq y$.
$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x \neq y \\ \bullet\ x \subseteq y \end{array}\right\} \Rightarrow$ в y има елемент, който не е ел. в x $\Rightarrow y \not\subseteq x \Rightarrow y \not R x$
5) силна антисиметричност - не
$(\forall x \in 2^{\mathbb{N}})(\forall y \in 2^{\mathbb{N}})[x \neq y \to xRy \oplus yRx]$
Нека $x = \{1,2\}$ и $y = \{3,4\}$. Получаваме $\underset{T}{x \neq y} \to \underset{F}{xRy} \oplus \underset{F}{yRx} \equiv T \to F \oplus F \equiv T \to F \equiv F$
6) транзитивност - да
$(\forall x \in 2^{\mathbb{N}})(\forall y \in 2^{\mathbb{N}})(\forall z \in 2^{\mathbb{N}})[xRy \wedge yRz \to xRz]$
Нека x, y и z са произволни и $x \subseteq y$ и $y \subseteq z$
$x \subseteq y \iff (\forall a)[\underset{p}{\underline{a \in x}} \to \underset{q}{\underline{a \in y}}]$
$y \subseteq z \iff (\forall a)[\underset{q}{\underline{a \in y}} \to \underset{t}{\underline{a \in z}}]$
$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \equiv (p \to q \wedge q \to t) \to (p \to t) \equiv T$

(б) $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, $R \subseteq 2^A \times 2^A$

$xRy \iff x \cap y \neq \emptyset$

1) ~~рефлексивност~~ рефлексивност - не
$\emptyset \in 2^A$, но $(\emptyset, \emptyset) \notin R$, защото $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

2) антирефлексивност - не.
Например, $(\{1\}, \{1\}) \in R$

3) симетричност - да, поради комутативността на сечението

4) антисиметричност - не
Например; $(\{1,2\}, \{2,3\}) \in R$ и $(\{2,3\}, \{1,2\}) \in R$

5) силна антисиметричност - не, не е антисиметрична

6) транзитивност - не
Например: $(\{1,2\}, \{2,3\}) \in R$, $(\{2,3\}, \{3,4\}) \in R$, но $(\{1,2\}, \{3,4\}) \notin R$

(в) $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$

$(X, Y) \in R \iff X \setminus Y = \emptyset$

1) рефлексивност - да
$(\forall x \in 2^{\mathbb{N}})[x \setminus x = \emptyset] \Rightarrow (\forall x \in 2^{\mathbb{N}})[xRx]$

2) антирефлексивност - не
например, $(\{1\}, \{1\}) \in R$

3) ~~рефлек~~ симетричност - не
Например, $(\{1\}, \{1,2\}) \in R$, но $(\{1,2\}, \{1\}) \notin R$

4) антисиметричност - да
$(\forall A \in 2^{\mathbb{N}})(\forall B \in 2^{\mathbb{N}})[ARB \wedge BRA \rightarrow A = B]$

Нека A и B са произволни и нека

ARB и BRA

$ARB \Downarrow A \setminus B = \emptyset$

$BRA \Downarrow B \setminus A = \emptyset \longrightarrow$ B няма ел., който да не е ел. на A
$B \subseteq A$

A няма ел., който да не е ел. на B
$A \subseteq B$

$\Rightarrow A = B$

5) силна антисиметричност - не
$(\{1\}, \{2\}) \notin R$ и $(\{2\}, \{1\}) \notin R$

6) транзитивност - да
$(\forall A \in 2^{\mathbb{N}})(\forall B \in 2^{\mathbb{N}})(\forall C \in 2^{\mathbb{N}})[ARB \wedge BRC \rightarrow ARC]$

Нека A, B и C са произволни и

ARB и BRC

$ARB \Downarrow A \subseteq B$

$BRC \Downarrow B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \setminus C = \emptyset \Rightarrow ARC$

г) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(a, b) \in R \iff (a - b) \in \mathbb{Z}$

1) рефлексивност - да
$(\forall a \in \mathbb{R})[a - a = 0 \in \mathbb{Z}]$

2) симетричност - да
Нека a и b са произв. и $aRb \Rightarrow a - b = t \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow b - a = -t \in \mathbb{Z} \Rightarrow bRa$

3) антисиметричност - не
Например, $(1,2)\in R$ и $(2,1)\in R$

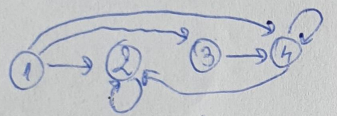
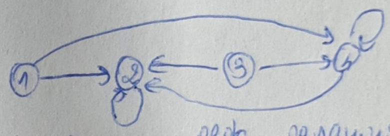
4) силна антисиметричност - не, понеже не е антисиметрична

5) антирефлексивност - не,
например, $(1,1)\in R$

6) транзитивност - да
Нека a, b и c са произволни и

$$aRb \quad \text{и} \quad bRc$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$a-b=t\in\mathbb{Z} \qquad b-c=k\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow (a-b)+(b-c) = a-c = k+t \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underline{aRc}$$

- Рефлексивно затваряне на релацията $R\subseteq A\times A$ е релацията
$$P = R\cup\{(a,a)\mid a\in A\}$$
- Обратната на релацията $R\subseteq A\times B$ е релацията $R^{-1}\subseteq B\times A$, определена като:
$$R^{-1} = \{(x,y)\mid (y,x)\in R\}$$
- Симетрично затваряне на релацията $R\subseteq A\times A$ е релацията
$$S = R\cup R^{-1}$$
- Композицията на релациите $R\subseteq A\times B$ и $S\subseteq B\times C$ е релация над $A\times C$, определена като:
$$R\circ S = \{(a,c)\mid (\exists b\in B)[(a,b)\in R \wedge (b,c)\in S]\}$$

Пример: Нека R е  . Тогава $R\circ R$ е 

- Итерация на релацията $R\subseteq A\times A$ дефинираме като за всяко ест. число n, деф. релацията R^n по следния начин:
$$R^0 = \{(a,a)\mid a\in A\}$$
$$R^{n+1} = R^n\circ R$$
- Транзитивно затваряне на $R\subseteq A\times A$ е релацията
$$R^+ = \bigcup_{n\geq 1} R^n$$
- Рефлексивното и транзитивно затваряне на R означаваме с R^*, определена като
$$R^* = \bigcup_{n\geq 0} R^n$$

Алгоритъм за намиране на R^*:

0) $R_0 = \{(a,a)\mid a\in A\}$

i+1) И.Х. Нека сме пресметнали R_i
$$R_{i+1} = \{(a,c)\in A\times A\mid (\exists b\in A)[(a,b)\in R_i \wedge (b,c)\in R]\}\cup R_i$$

Нека $m=\min\{i\mid R_i = R_{i+1}\}$. Вярно е, че $R^* = R_m$.

Зад. Да се намери R^*, ако $R=\{(A,B),(B,C),(S,A)\}$, $R\subseteq\{A,B,C,D,S\}^2$

Реш: 0) $R_0 = \{(A,A),(B,B),(C,C),(D,D),(S,S)\}$

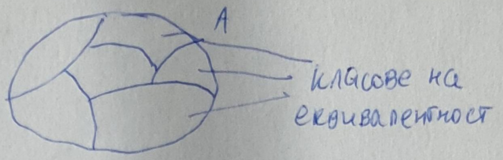
1) $R_1 = \{(A,B),(B,C),(S,A)\}\cup R_0$

2) $R_2 = \{(A,C),(S,B)\}\cup R_1$

3) $R_3 = \{(S,C)\}\cup R_2$

4) $R_4 = \emptyset\cup R_3 \Rightarrow m=3$, $R^* = R_3$

def: Релация на еквивалентност
- рефлексивна
- симетрична
- транзитивна



Всяка релация на еквивалентност над множество поражда разбиване на множеството.

Зад. Нека $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е дефинирана като

$(x,y) \in R \Leftrightarrow x - y$ се дели на 3

(а) докажете, че R е релация на еквивалентност

(б) намерете класовете на еквивалентност

Реш: (а)

1) рефлексивност $((\forall x \in \mathbb{N})[xRx])$

Нека $x \in \mathbb{N}$ е произволно. $x - x = 0$, което се дели на 3. $\Rightarrow xRx$

Тъй като $x \in \mathbb{N}$ беше произвлно, $(\forall x \in \mathbb{N})[xRx]$.

2) симетричност $((\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})[xRy \to yRx])$

Нека $x, y \in \mathbb{N}$ са произволни и xRy.

От $xRy \Rightarrow x - y = 3 * t \ (t \in \mathbb{Z})$

Тогава $y - x = -3t \ (-t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow yRx$

Тъй като $x, y \in \mathbb{N}$ бяха произволни, $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})[xRy \to yRx]$.

3) транзитивност $((\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{N})[xRy \wedge yRz \to xRz])$

Нека $x, y, z \in \mathbb{N}$ са произв. и $xRy \wedge yRz$.

$xRy \Rightarrow x - y = 3t \ (t \in \mathbb{Z})$

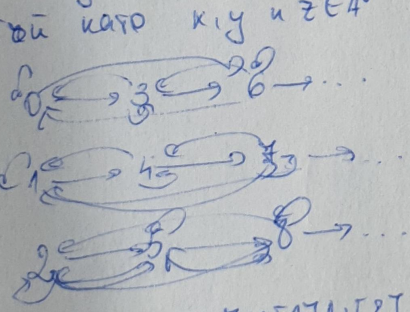
$yRz \Rightarrow y - z = 3s \ (s \in \mathbb{Z})$

$x - y + y - z = 3(t+s)$

$x - z = 3(t+s) \quad (t+s \in \mathbb{Z}) \Rightarrow xRz$.

Тъй като x, y и $z \in \mathbb{N}$ бяха произволни, $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{N})[xRy \wedge yRz \to xRz]$.

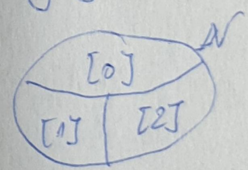
б)



$[0] = \{0, 3, 6, 9, \ldots\} = \{3t \mid t \in \mathbb{N}\}$

$[1] = \{1, 4, 7, \ldots\} = \{3t+1 \mid t \in \mathbb{N}\}$

$[2] = \{2, 5, 8, \ldots\} = \{3t+2 \mid t \in \mathbb{N}\}$



$[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{N}$

$[0] \cap [1] = \emptyset$

$[0] \cap [2] = \emptyset$

$[1] \cap [2] = \emptyset$

Зад. Точките в равнината можем да представим чрез техните координати като двойки реални числа: $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Релацията $P \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ е определена по следния начин:

$$P = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid x_1+y_1 = x_2+y_2\}$$

(а) Да се докаже, че P е релация на еквивалентност.

(б) Да се опише и начертае класът на еквивалентност на точката $(2,3)$.

Реш: (а)

1) рефлексивност

Нека $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ е произв. Понеже $x+y = x+y$, то $((x,y),(x,y)) \in P$

От това, че $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ е произв. $\Rightarrow$ релацията е рефлексивна.

2) симетричност

Нека $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ и $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ са произволни. и $x_1+y_1 = x_2+y_2 \Rightarrow x_2+y_2 = x_1+y_1$

$\Rightarrow ((x_2,y_2),(x_1,y_1)) \in P$. Тъй като двете точки бяха произволни $\Rightarrow$ релацията е симетрична.

3) транзитивност.

Нека $(x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i \in I_3$ са произволни и $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in P \wedge ((x_2,y_2),(x_3,y_3)) \in P$.

$\Rightarrow x_1+y_1 = x_2+y_2 \wedge x_2+y_2 = x_3+y_3 \Rightarrow x_1+y_1 = x_3+y_3 \Rightarrow ((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \in P$

От това, че $(x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i \in I_3$ бяха произволни $\Rightarrow$ релацията е транзитивна.

Щом релацията P е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност

(б) Класът на екв. на точката $(2,3)$ е мн-вото от всички точки (x,y), за които $x+y = 2+3$, т.е. $x+y = 5$. Графиката на $y = 5-x$ е права.

Зад. $R \subseteq A \times A$ е рефл. и транзитивна релация. Дефинираме $\sim \subseteq A \times A$ по следния начин: $a \sim b \Leftrightarrow aRb \wedge bRa$. Да се док., че $\sim$ е релация на еквивалентност.

Реш:

1) рефлексивност

Тъй като R е рефлексивна, то $(\forall a \in A)[aRa] \Rightarrow (\forall a \in A)[aRa \wedge aRa] \Rightarrow (\forall a \in A)[a \sim a]$

$\Rightarrow \sim$ е рефлексивна.

2) симетричност

Нека $a, b \in A$ са произволни и $a \sim b \Rightarrow aRb \wedge bRa \Rightarrow bRa \wedge aRb \Rightarrow b \sim a$

От това, че $a, b \in A$ бяха произволни следва, че $\sim$ е симетрична релация.

3) транзитивност

Нека $a, b, c \in A$ са произволни и $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow aRb \wedge bRa \wedge bRc \wedge cRb \Rightarrow$

$\Rightarrow (aRb \wedge bRc) \wedge (cRb \wedge bRa) \overset{R\text{ е тр.}}{\Rightarrow} aRc \wedge cRa \Rightarrow a \sim c$

Тъй като $a, b, c \in A$ бяха произволни, следва, че $\sim$ е транзитивна релация.

Зад. Нека A е множество и нека $R \subseteq A \times A$ и $P \subseteq A \times A$. Докажете или опровергайте:

(а) Ако R е р.е., то $\overline{R}$ е р.е. не!

Нека $A = \{1,2\}$, $R = \{(1,1),(2,2)\}$ - р.е. Тогава $\overline{R} = \{(1,2),(2,1)\}$ - не е рефл. $\vee$ не е транз. $\Rightarrow$ не е р.е.

(б) Ако R е р.е. и P е р.е., то $R \setminus P$ е р.е. - не!

Нека $A = \{1,2\}$, $R = \{(1,1),(2,2)\}$, $P = \{(1,1),(2,2)\}$.

$R \setminus P = \emptyset$ - не е рефл. $((1,1) \notin \emptyset) \Rightarrow$ не е р.е.

в) Ако R, P са р.е., то $R \cap P$ е р.е. - да!

1) рефлексивност

Трябва да док., че

$(\forall x \in A)[(x,x) \in R \cap P]$

Щом R и P са р.е. $\Rightarrow$ R и P са рефлексивни.

$\Rightarrow (\forall x \in A)[(x,x) \in R \wedge (x,x) \in P] \Rightarrow (\forall x \in A)[(x,x) \in R \cap P]$ ✓

2) симетричност

Нека x, y са произволни и $(x,y) \in R \cap P$.

$\Rightarrow xRy \xRightarrow[\text{сим.}]{R\,e} yRx$

$\Rightarrow \cancel{x}Py \xRightarrow[\text{сим.}]{P\,e} yPx$

$\Big\} \Rightarrow (y,x) \in R \cap P$. Тъй като $x, y \in A$ бяха произволни, следва, че $R \cap P$ е симетрична.

3) транзитивност

Нека $x, y, z \in A$ са произволни и $(x,y) \overset{(*)}{\in} R \cap P$ и $(y,z) \overset{(**)}{\in} R \cap P$

$(*) \Rightarrow (x,y) \in R$, $(x,y) \in P$

$(**) \Rightarrow (y,z) \in R$, $(y,z) \in P$

$(x,y) \in R$ и $(y,z) \in R \xRightarrow[\text{транз.}]{R\,e} (x,z) \in R$

$(x,y) \in P$ и $(y,z) \in P \xRightarrow[\text{е транз.}]{P} (x,z) \in P$

$\Big\} \Rightarrow (x,z) \in R \cap P$. Тъй като $x, y, z \in A$ бяха произволни, следва, че $R \cap P$ е транзитивна

$\Rightarrow R \cap P$ е релация на еквивалентност.

Зад. В множеството на всички крайни множества от цели числа дефинираме релация ρ:

$X \rho Y \Leftrightarrow$ разликата $\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y$ е четно число.

а) докажете, че ρ е р.е.

б) Опишете възможно най-ясно класовете на еквивалентност и намерете броя им.

Реш: (а)

1) рефлексивност

$(\forall X)[X \rho X]$, защото $\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{x \in X} x = \sum_{x \in X} (x^2 - x) = \sum_{x \in X} x(x-1)$ е четно число, защото събираемите са произведения на две последователни числа (а от тях поне едно е четно).

2) симетричност

Ако $X \rho Y$, то $\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y$ е четно число. От рефлексивността следва, че $\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{x \in X} x$ и $\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{y \in Y} y$ са четни числа. Следователно

$\left(\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{x \in X} x\right) + \left(\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{y \in Y} y\right) - \left(\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y\right) = \sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{x \in X} x$ също е четно, следователно $Y \rho X$.

3) транзитивност

Ако $X \rho Y$ и $Y \rho Z$, то двете разлики $\left(\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y\right)$ и $\left(\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{z \in Z} z\right)$ са четни числа и следователно

$\left(\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y\right) + \left(\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{z \in Z} z\right) - \left(\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{y \in Y} y\right) = \sum_{x \in X} x^2 - \sum_{z \in Z} z$ също е четно число, следователно $X \rho Z$.

С това доказахме, че ρ е релация на еквивалентност.

(б) класове на еквивалентност

$[\{2\}] = \{S \mid \sum_{x \in S} x \text{ е четно}\}$

$[\{3\}] = \{S \mid \sum_{x \in S} x \text{ е нечетно}\}$