□2. Множества

Def/ Множество

- Означения, елемент на множесво, принадлежност на елемент към множество

  $A, B, X, Z, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \emptyset$

  $4 \in \mathbb{N}$; $-5 \notin \mathbb{N}$

- Празното множество - $\emptyset$

  $(\forall x)[x \notin \emptyset] \equiv \neg(\exists x)[x \in \emptyset]$

- Представяне на множествата
  - чрез изброяване на елементите на множеството.

    $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$; $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$; $A' = \{A\}$; $M = \{\emptyset\}$; $P = \{a, \{1, 2, 3\}, M\}$

    $J_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$; $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

  - чрез указване на свойство, общо за елементите

    $X = \{x \mid P(x)\}$; $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 20\}$; $B = \{x \in A \mid x \text{ - четно}\}$

    $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ - просто}\}$; $Q = \{x \in I_{10} \mid (x \text{ се дели на } 3) \rightarrow (x > 8)\}$; $K = \{x \in I_6 \mid (x\%3==0) \Leftrightarrow (x\%2==0)\}$

- Сравняване на множества
  - подмножество

    $A \subseteq B \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B]$

    Примери:
    - $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
    - $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$
    - $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
    - $\emptyset \subseteq A$ и $A \subseteq A$ за всяко множество A.

  - равенство

    $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A$

    Примери: $\{a, b, a\} = \{a, b\} = \{b, a\}$

    $\{x, y, 1, \pi\} = \{x, 1, y, 1, 1, \pi, \pi, \pi, y\}$

    $\{a\} \neq \{\{a\}\}$

    $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

- Мощност на множества (кардиналност)

  $|A| = n$, $n \in \mathbb{N}$ - крайно

  $|A| = \infty$ - безкрайно

  Примери: $A = \{a, b, c, d\}$, $|A| = 4$

  $B = \{1, 1, 2\}$, $|B| = 2$

- Степенно множество

  $2^M = \{M' \mid M' \subseteq M\}$

  $|2^M| = 2^{|M|}$

Зад. Намерете 2^A, ако:

а) $A = \emptyset$ — $2^A = \{\emptyset\}$

б) $A = \{1, 2\}$ — $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

в) $A = \{\{1, 2\}\}$ — $2^A = \{\emptyset, \{\{1, 2\}\}\}$.

г) $A = \{\emptyset, \{1, 7\}, 2\}$ — $2^A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1, 7\}\}, \{2\}, \{\emptyset, \{1, 7\}\}, \{\emptyset, 2\}, \{\{1, 7\}, 2\}, \{\emptyset, \{1, 7\}, 2\}\}$

Зад. Вярно ли е, че

а) $\emptyset \subseteq \emptyset$ б) $\emptyset \in \emptyset$ в) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ г) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$ д) $\{1\} \in \{1,2,3\}$

е) $\{\{1,2\},\{1,2,3\}\} = \{1,2,3\}$ ж) $\{1,2,3,1,2\} = \{1,2,3\}$

• Операции над множества

1) обединение $\cup$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

2) сечение $\cap$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

3) разлика $\setminus$

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

4) симетрична разлика Δ

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$x \in A \Delta B \Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)]$

5) допълнение $\overline{}$

$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$

Де Морган:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Зад. Нека $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{0,2,4,6\}$, $C = \{1,3,5\}$. Да се определят:

а) $(A \cup B) \Delta (A \cap B)$ // ~~{2,4}~~ $\{0,1,3,5,6\}$

б) $A \Delta (A \cup B)$ // $\{0,6\}$

в) $(A \Delta B) \setminus (A \Delta B)$ $\emptyset$

г) $(A \setminus B) \Delta (A \setminus C)$ // $\{1,2,3,4,5\}$

• $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Зад. Мн-вото A съдържа 1010 естествени числа от $I_{2018} = \{1,2,3,\dots,2018\}$. Док., че има 2 числа от A, чиято сума е 2019.

Упътване: Нека $B = \{2019 - i \mid i \in A\}$. Разсъждавайте за $A \cap B$, възможно ли е $A \cap B = \emptyset$.

Зад. Нека A, B и C са произволни множества. Да се докажат равенствата:

(а) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

Д-во: $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \wedge x \in (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in B \wedge x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$

(б) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Д-во: ($\subseteq$) Ще док., че $A \setminus B \subseteq A \cap \overline{B}$

$A \subseteq B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

	$(\forall x \in A)[P(x)]$	$(\exists x \in A)[P(x)]$
Как го доказваме	Вземаме произволно $x \in A$ и показваме, че $P(x)$ е вярно. Ако трябва да доказваме тв. от вида $(\forall x \in A)[V(x) \rightarrow W(x)]$, то вземаме произв. $x \in A$, за което $V(x)$ е изп. и доказваме, че $W(x)$ е вярно. Ако $\|A\|$ е крайно - можем да пробваме всички възможности.	Показваме пример - намираме $x \in A$, за който $P(x)$ е истина.
Как го опровергаваме?	Намираме $x \in A$, за което $P(x)$ е лъжа.	Вместо това доказваме $(\forall x \in A)[\neg P(x)]$

Нека $x \in A \setminus B$ е произволно. Трябва да покажем, че $x \in A \cap \overline{B}$.

$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B} \Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$.

Тъй като x беше произволно, то $(\forall x \in A)[x \in A \setminus B \rightarrow x \in A \cap \overline{B}]$ (*)

($\supseteq$) Нека $x \in A \cap \overline{B}$ е произволно. Трябва да покажем, че $x \in A \setminus B$.

$x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B} \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$.

Тъй като x беше произволно, то $(\forall x \in A)[x \in A \cap \overline{B} \rightarrow x \in A \setminus B]$ (**)

$\square$

От (*) и (**) следва, че $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

(в) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

Зад. Да се докаже:

$(\forall A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\})(\exists x \in A)[(x \text{ е четно}) \rightarrow (\forall y \in A)[y \text{ е четно}]]$

Д-во: Нека $A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$ е произволно.

1) $(\forall y \in A)[y \text{ е четно}]$ е истина $\Rightarrow$ за произв. $x \in A$ имаме $(\underset{T}{x \text{ е четно}}) \rightarrow \underset{T}{(\forall y \in A)[y \text{ е четно}]} \equiv T$

2) $(\forall y \in A)[y \text{ е четно}]$ не е истина $\Rightarrow \neg(\forall y \in A)[y \text{ е четно}]$ е истина $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists y \in A)[y \text{ не е четно}]$. Избираме $x \in A$, т.че x е нечетно и получаваме

$(x \text{ е четно}) \rightarrow (\forall y \in A)[y \text{ е четно}] \equiv F \rightarrow \ldots \equiv T$

Тъй като A беше произволно, то твърдението е вярно за всяко $A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$.

Зад. Нарисувайте диаграма на Вен за всяко от следните множества:

(а) $A \cup B \cup C$

(б) $A \cap B \cap C$

(в) $A \cup (B \cap C)$

(г) $A \setminus (B \cap C)$

д) $A \cup \overline{(B \cap C)}$

• Наредена двойка

$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

• Декартово произведение на множества

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

$A^n = A \times A \times \ldots \times A$

• Покритие на множеството A:

$R = \{S_i \mid S_i \subseteq A, i \in I\}$

- $S_i \neq \emptyset, \forall i \in I$
- $\bigcup_{i \in I} S_i = A$

• Разбиване на множеството A:

$R = \{S_i \mid S_i \subseteq A, i \in I\}$

- $(\forall i \in I)[S_i \neq \emptyset]$
- $\bigcup_{i \in I} S_i = A$
- $S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i \forall j \in I, i \neq j$

Зад. Да се намерят всички разбивания на множеството $A = \{1, 2, 3\}$.

Реш: 1) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

2) $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$

3) $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$

4) $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$

5) $\{\{1, 2, 3\}\}$

Зад. Намерете:

(а) $\{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

(б) $|I_{15} \times \{a, b, \dots, z\}| = 15 \cdot 26 = 390$.

Задачи за упражнение:

Зад. 1. Нека $A=\{x\in\mathbb{R} \mid |x|>1\}$, $B=\{x\in\mathbb{R} \mid |x-1|\leqq \frac{1}{2}\}$. Намерете множествата:

(а) $A\cap B$

(б) $A\cup B$

(в) $A\setminus B$

(г) $A\,\Delta\, B$

Зад. 2. Нека $A=\{1,2\}$, $B=\{1,c\}$, $D=\{2,c,\emptyset\}$. Напишете в явен вид мн-вото $2^{D\setminus(A\setminus B)}$.

Зад. 3. Дадени са мн-вата $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,5\}$, $C=\{3,4,7\}$. Да се определят следните множества:

(а) $A\times B$; $B\times A$

(б) $A\cup(B\times C)$; $(A\cup B)\times C$

(в) $(A\times C)\cap(B\times C)$

Зад. 4. Докажете, че за произволни три мн-ва A, B и C са в сила следните равенства:

(а) $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(б) $C\setminus(B\setminus A)=(C\cap A)\cup(C\setminus B)$

Зад. 5. Докажете по индукция следните неравенства, където $n\in\mathbb{N}$:

(а) $\sum\limits_{k=n+1}^{3n+1}\frac{1}{k}\geqq 1$, $n\geqq 0$

(б) $n!<n^n$, $n\geqq 2$