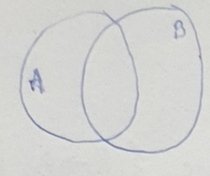
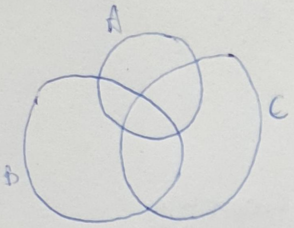
08. Принцип на включването и изключването



- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

- $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| - \sum\limits_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum\limits_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$

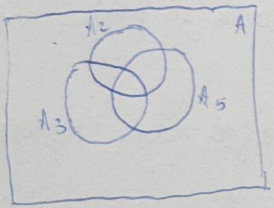
Зад. Група студенти, всеки знае поне един език от Java, C, Pascal. 15 знаят Java, 13 - C, 10 - Pascal. 5 знаят C и Java, 5 знаят C и Pascal, 3 знаят Java и Pascal. И трите езика знаят трима.
Колко студенти има в групата?

Реш: Нека A - мн-вото от ст., които знаят Java
B - мн-вото —— // —— C
C - мн-вото —— // —— Pascal

$\Rightarrow |A \cup B \cup C| = 15 + 13 + 10 - 5 - \cancel{5} - \cancel{3} + \cancel{3} = \underline{28}$

Зад. Колко са числата от 1 до 100, които не се делят нито на едно от числата 2, 3 и 5?

Реш:



A - числата от 1 до 100
A_2 - числата от 1 до 100, които се делят на 2
A_3 - —— // —— 3
A_5 - —— // —— 5

$\Rightarrow$ отговорът е $|A| - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 100 - (50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3) = 100 - (83 - 9) = 100 - 74 = 26$

Зад. Имаме 25 студенти. От тях:
- А1 - 14 студенти
- ДИС - 11 студенти
- УП - 14 студенти
- А1 и ДИС - 8 студенти
- А1 и УП - 9 студенти
- ДИС и УП - 7 студенти
- А1, УП и ДИС - 5 студенти

Колко от студентите не са взели нито един от трите изпита?
Отг: 5

Зад. По колко начина можем да изварим 5 карти от стандартно тесте, така че в изварката да има карти от 4-те бои.

Реш: Да означим с A_i изварките, в които липсва боя i

$|A_i| = \binom{52-13}{5} = \binom{39}{5}$

- Изварките, в които липсват i и j:

$|A_i \cap A_j| = \binom{52-26}{5} = \binom{26}{5}$

- Изварките, в които липсват i, j, k:

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{52-39}{5} = \binom{13}{5}$

• Изварките, в които липсват и 4-те бои са 0.

$$\Rightarrow \text{Отг: } \binom{52}{5} - |A_{\clubsuit} \cap A_{\diamondsuit} \cap A_{\heartsuit} \cap A_{\spadesuit}| = \binom{52}{5} - \left(\binom{4}{1}\binom{39}{5} - \binom{4}{2}\binom{26}{5} + \binom{4}{3}\binom{13}{5} - \binom{4}{4}\cdot 0\right) =$$

$$= \binom{52}{5} - \binom{4}{1}\binom{39}{5} + \binom{4}{2}\binom{26}{5} - \binom{4}{3}\binom{13}{5}$$

Зад. Дадени са множествата A и B, $|A| = n$, $|B| = m$. Какъв е броят на функциите $f: A \to B$, които са сюрекции?

Реш: Нека $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

От броя на всички функции ще извадим броя на тези, които не са сюрекции.

Всички функции от A към B са m^n на брой.

Означаваме с $F = \{f \mid f: A \to B\}$

$F_i = \{f \in F \mid (\nexists a \in A)[f(a) = b_i]\}$

$F' = \{f \in F \mid f \text{ е сюрекция}\}$

$$|F'| = |F| - \left|\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right| = |F| - \sum_{i=1}^{m} |F_i| + \sum_{i<j} |F_i \cap F_j| - \dots + (-1)^m |F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_m| =$$

$$= m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \binom{m}{3}\cdot(m-3)^n + \dots + (-1)^{m}\binom{m}{m}(m-m)^n = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot \binom{m}{i} \cdot (m-i)^n$$

Нека $x \in B$ няма първообраз $\Rightarrow$ за всяко $a \in A$ има по $m-1$ възможности за $f(a)$. Тоест имаме $(m-1)^n$ начина за разпределяне на $f(a)$ за всички a-та (ф-ните, в които x няма първообраз)

Нека $x, y \in B$ нямат първообрази $\Rightarrow$ за всяко $a \in A$ има по $m-2$ възможности за $f(a)$. Тоест имаме $(m-2)^n$ функции, в които x и y нямат първообрази.

Зад. По колко начина можем да наредим 1, 2, 3, 4, 5, 6 в редица, така че да няма нарастваща подредица с 3 последователни числа

5, 6, 4, 3, 1, 2 – ✓

3, 6, 4, 2, 5, 1 – x

Реш: От всички възможни подредби ще извадим „лошите".

Всички възможни подредби са 6!

Нека с $A_{i,j,k}$ означим множеството от всички подредби на числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, в които числото i се среща преди j и числото j се среща преди k.

$\Rightarrow$ лошите случаи ще са: $|A_{1,2,3} \cup A_{2,3,4} \cup A_{3,4,5} \cup A_{4,5,6}| =$

$$= |A_{1,2,3}| + |A_{2,3,4}| + |A_{3,4,5}| + |A_{4,5,6}| - |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4}| - |A_{1,2,3} \cap A_{3,4,5}| - |A_{1,2,3} \cap A_{4,5,6}| -$$

$$- |A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5}| - |A_{2,3,4} \cap A_{4,5,6}| - |A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| + |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5}| + |A_{1,2,3} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| +$$

$$|A_{1,2,3} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| + |A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| - |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| =$$

$$|A_{i,j,k}| = \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{фиксиране местата на } i,j,k} \cdot 3! \to \text{пермутиране останалите}$$

$$= \binom{6}{3}\cdot 3! + \binom{6}{3}\cdot 3! + \binom{6}{3}\cdot 3! + \binom{6}{3}\cdot 3! - \binom{6}{4}\cdot 2! - \binom{6}{5}\cdot 1! - \binom{6}{3} - \binom{6}{4}\cdot 2! - \binom{6}{5}\cdot 1! - \binom{6}{4} 2! + \binom{6}{5}\cdot 1! +$$

$$+ 1 + 1 + \binom{6}{5} 1! - 1 =$$

$$= 480 - 30 - 6 - 20 - 30 - 6 - 30 + 6 + 1 + 1 + 6 - 1 = 371$$

Отговор: $720 - 371 = \boxed{349}$

Зад. Колко на брой са пермутациите на числата $1,2,\ldots,n$, в които никое число не е на мястото си?

Реш: A_i - мн-вото от тези пермутации, в които i е на мястото си.

От всички възможни пермутации ще извадим $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ („лошите")

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \qquad // \ |A_i| = (n-1)! \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |A_i| = n.(n-1)! = n!$$

$$- \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} |A_i \cap A_j| \qquad // \text{ за } t,k \in \mathbb{N},\ t \ne k \text{ имаме } |A_t \cap A_k| = (n-2)! \Rightarrow \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}(n-2)!$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \qquad // \ \binom{n}{3}(n-3)!$$

. . .

. . .

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n| \qquad // \ \binom{n}{n}(n-n)!$$

$\Rightarrow$ отговор: $n! - \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)!\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} (n-i)!\right)$