05. Функции

Def/ Нека $R \subseteq A \times B$ е бинарна релация. Тя е:
- тотална функция (или само функция) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$
  1) $(\forall a \in A)(\exists b \in B)[(a,b) \in R]$

  и

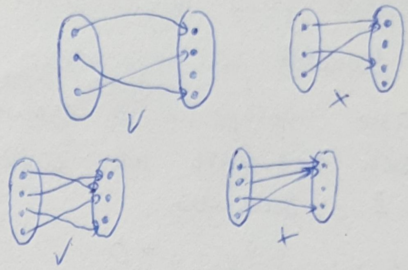
  2) $(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)[(a,b_1) \in R \wedge (a,b_2) \in R) \to b_1 = b_2]$
- частична функция $\overset{def}{\Leftrightarrow}$:

  $(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)[((a,b_1) \in R \wedge (a,b_2) \in R) \to b_1 = b_2]$

Обикновено пишем $f: A \to B$ и $f(a) = b$.

- Видове функции
  - инекция – $(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)[x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)] \equiv$

    $\equiv (\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)[f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2]$
  - сюрекция – $(\forall y \in B)(\exists x \in A)[f(x) = y]$
  - биекция – инекция + сюрекция



Инекции ли са?

$f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f_1(x) = 2x$ да

$f_2: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ не

$f_2(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ $f_2(4) = f_2(5)$, $4 \neq 5$

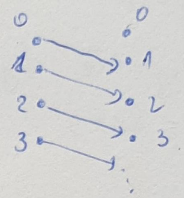
$f_3: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ не $f(3) = f(-3)$

$f_3(x) = |x|$ $3 \neq -3$

Сюрекции ли са?

$f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ не

$f_1(x) = x+1$



$f_2: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ не

$f_2(x) = 2x$

$f_3: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ да

$f_3(x) = x-1$

- Композиция на функции

  Нека $f: A \to B$, $g: B \to C$. Композиция на функциите f и g е функция $g \circ f: A \to C$, т.ч.

  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- Обратна функция

  Нека $f: A \to B$ е биекция. Обратната на f е ф-ята $f^{-1}: B \to A$, определена така:

  $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Зад. Нека $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x+1$, $(g \circ f)(x) = 2x - 1$. Намерете $f(x) = ?$

Реш: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2x - 1$

$2f(x) = 2x - 2$

$f(x) = x - 1$

Как да докажем, че $f: A \to B$ е:

(а) инекция

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$

* Показваме, че $x_1 = x_2$ *

(б) сюрекция

Нека $y \in B$ е произволно. * Показваме, че $(\exists x \in A)[f(x) = y]$ *

Зад. Дадена е функцията $f: \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \to \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ако } x \text{ е четно} \\ -(x+1)/2 & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Проверете дали функцията е биекция и ако е такава, определете f^{-1}.

Реш: Можем да представим функцията чрез таблица

Нямаме повторение в стойностите $\Rightarrow$ f е инекция

Всички елементи на кодомейна се срещат $\Rightarrow$ f е сюрекция

$\Rightarrow$ f е биекция.

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 2y, & y \geq 0 \\ -2y-1, & y < 0 \end{cases}$$

Зад. Изследвайте следните функции за инективност и сюрективност:

(а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$

- инективност

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ е инекция

- сюрективност

Нека $y \in \mathbb{R}$ е произволно.

Търсим дали $(\exists x \in \mathbb{R})[2x+3 = y]$ $\quad 2x+3 = y \Leftrightarrow 2x = y-3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$ ← обратна ф-я

$\Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R})[f(x) = y] \Rightarrow f$ е сюрекция

(б) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$

- инективност

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ е инекция

- сюрективност

Не, $0 \in \mathbb{N}$, но $\neg \exists x \in \mathbb{N}: x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin \mathbb{N}$

(в) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = 2^x(2y+1)-1$

- инективност

Нека $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N}^2$

$\Rightarrow 2^{x_1}(2y_1+1) - 1 = 2^{x_2}(2y_2+1) - 1 \Leftrightarrow 2^{x_1}(2y_1+1) = 2^{x_2}(2y_2+1)$

Допускане, че $x_1 \neq x_2$ и Б.О.О. $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 > 0$

$$2^{x_1}(2y_1+1) = 2^{x_2}(2y_2+1) \Leftrightarrow \underbrace{2^{x_1-x_2}(2y_1+1)}_{\text{четно}} = \underbrace{2y_2+1}_{\text{нечетно}}$$

$\Rightarrow$ допускането е грешно, $x_1 = x_2$

$2^{x_1}(2y_1+1) = 2^{x_2}(2y_2+1) \Leftrightarrow 2y_1 + 1 = 2y_2 + 1 \Leftrightarrow 2y_1 = 2y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow f$ е инекция.

• сюрективност

Ще док., че $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $f(x,y) = 2^x(2y+1)$ е сюрекция.

Нека $a \in \mathbb{N}^+$

• a е нечетно $\Rightarrow a = 2y+1 = 2^0(2y+1) \rightarrow f(0,y) = a$

• a е четно $\Rightarrow a = 2^x(2y+1) \Rightarrow f(x,y) = a$

$\Rightarrow f$ е сюрекция

$\Rightarrow f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ също е сюрекция.

Зад. Докажете, че $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ е биекция.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x-1} + 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x-1} - 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Реш: Правим наблюдението, че:

• $\frac{1}{2x-1} + 1 = \frac{1+2x-1}{2x-1} = \frac{2x}{2x-1} < 0$ за $x \in (0; \frac{1}{2})$

• $\frac{1}{2x-1} - 1 = \frac{1-2x+1}{2x-1} = \frac{2(1-x)}{2x-1} > 0$ за $x \in (\frac{1}{2}; 1)$

• инективност

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in (0,1)$

I сл. $f(x_1) = f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in (0; \frac{1}{2})$

$\frac{1}{2x_1-1} + 1 = \frac{1}{2x_2-1} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1-1} = \frac{1}{2x_2-1} \Leftrightarrow 2x_2 - 1 = 2x_1 - 1 \Leftrightarrow 2x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

II сл. $f(x_1) = f(x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

III сл. $f(x_1) = f(x_2) > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in (\frac{1}{2}; 1)$

$\frac{1}{2x_1-1} - 1 = \frac{1}{2x_2-1} - 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ е инекция

• сюрективност

Нека $a \in \mathbb{R}$

I сл. $a < 0$

Допускане, че $\neg(\exists x \in (0,\frac{1}{2}))[\frac{2x}{2x-1} = a]$

$\frac{2x}{2x-1} = a \Leftrightarrow 2x = 2ax - a \Leftrightarrow a = 2ax - 2x \Leftrightarrow a = 2x(a-1) \Leftrightarrow x = \frac{a}{2(a-1)}$

$\Rightarrow \frac{a}{2(a-1)} \notin (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow \left(\underbrace{\frac{a}{2(a-1)} < 0}_{F}\right) \vee \left(\frac{a}{2(a-1)} > \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{a}{2(a-1)} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{a-1} > 1 \Leftrightarrow a < a-1$

$\Rightarrow$ допускането е грешно, $(\exists x \in (0, \frac{1}{2}))[f(x) = a]$

II сл. $a = 0$.

Ясно е, че $f(\frac{1}{2}) = 0$

III сл. $a > 0$

Аналогично на сл. 1.

Зад. Дадени са функциите $f: A \to B$ и $g: A \to B$, които са биекции. Известно е, че $(\exists a \in A)[f(a) \neq g(a)]$ (ф-ите се различават при някоя стойност на аргумента)

Докажете, че $(\exists b \in A)[a \neq b \wedge f(b) \neq g(b)]$ (ф-ите се различават при друга ст-ст на аргумента)

Реш: Допускаме противното:

$(\forall x \in A)[x \neq a \to f(x) = g(x)]$.

Нека означим $g(a) = b \neq f(a)$. От това, че f е сюрекция, следва, че $(\exists x_1 \in A)[f(x_1) = b]$

$x_1 \neq a$, защото иначе $f(x_1) = f(a) = b$.

От допуснатото $\Rightarrow f(x_1) = g(x_1) = b$. Но тогава $g(a) = g(x_1) = b$, което противоречи на факта, че g е инекция.

$\Rightarrow (\exists x_1 \in A)[x_1 \neq a \wedge f(x_1) \neq g(x_1)]$.

Зад. Дадено е крайно множество A и тотална функция $f: A \to A$, която е инекция. Докажете, че f е биекция.

Тв. Ако $f: A \to B$ е биекция и $g: B \to C$ е биекция, то $g \circ f$ е биекция

Д-во:

1) $g \circ f$ е инекция?

? $(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)[a_1 \neq a_2 \to g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)]$

Нека $a_1, a_2 \in A$ са произволни и $a_1 \neq a_2$. f е инекция $\Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Нека $b_1 = f(a_1) \in B$ и $b_2 = f(a_2) \in B$. $b_1 \neq b_2$ и g е инекция $\Rightarrow g(b_1) \neq g(b_2)$.

$\Rightarrow g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) \Rightarrow g \circ f$ е инекция

2) $g \circ f$ е сюрекция?

? $(\forall c \in C)(\exists a \in A)[(g \circ f)(a) = c]$

Нека $c \in C$ е произволно.

Знаем, че g е сюрекция $\Rightarrow (\exists b \in B)[g(b) = c]$

Знаем, че f е сюрекция $\Rightarrow (\exists a \in A)[f(a) = b]$

$\Rightarrow g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c$

Но c беше произволно

$\Rightarrow g \circ f$ е сюрекция.

От 1) и 2) $\Rightarrow g \circ f$ е биекция.

Изброими и неизброими множества

$\emptyset$, $\{a\}$, I_{10} - крайни множества

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ - безкрайни изброими

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, 2^{\mathbb{N}}$ - безкрайни неизброими

- A е изброимо $\Leftrightarrow$ съществува биекция $f: A \to \mathbb{N} \Leftrightarrow$ съществува биекция $f: \mathbb{N} \to A$

$\mathbb{Q}$ е изброимо, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ също

$\mathbb{R}$, $(0,1)$, $2^{\mathbb{N}}$ не са изброими

Теорема на Кантор-Шрьодер-Бернщайн.
Нека A и B са множества. A е равномощно с B тогава и само тогава, когато съществуват инекции $f: A \to B$ и $g: B \to A$.

Теорема. Изброимо обединение на изброими множества е изброимо множество.

Теорема. Нека A е множество. Не съществува биекция ~~от~~ $f: A \to 2^A$

- Ако има биекция от A към $(0,1)$, то A е неизброимо.

Зад. Докажете, че следните множества са изброими:

(а) $2\mathbb{N} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

(б) $\mathbb{Z}$

(в) множеството от всички крайни булеви вектори

Реш: $f: S \to \mathbb{N}$

$f(b_1 b_2 \dots b_n) = 1 b_1 b_2 \dots b_{n(2)} - 1$

$b_i \in \{0,1\}$

Напр: $f(001) = 1001_{(2)} - 1 = 9 - 1 = 8$

- инективност

Нека $f(\alpha) = f(\beta)$, $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k$, $\beta = \beta_1 \dots \beta_t$, $\alpha, \beta \in S$

Да допуснем, че $k \neq t \Rightarrow 1\alpha_1 \dots \alpha_{k(2)} - 1 = 1\beta_1 \dots \beta_{t(2)} - 1 \Leftrightarrow 1\alpha_1 \dots \alpha_k = 1\beta_1 \dots \beta_{t(2)}$, $k \neq t$ w.

$\Rightarrow k = t$.

$1\alpha_1 \dots \alpha_{k(2)} - 1 = 1\beta_1 \dots \beta_{k(2)} - 1 \Leftrightarrow 1\alpha_1 \dots \alpha_{k(2)} = 1\beta_1 \dots \beta_{k(2)} \Leftrightarrow \alpha_1 \dots \alpha_k = \beta_1 \dots \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

- сюрективност

Нека $k \in \mathbb{N}$

$k+1 \geq 1 \Rightarrow (\exists b = b_1 \dots b_k)[k+1 = 1b_1 \dots b_{k(2)}] \Rightarrow (\exists b = b_1 \dots b_k)[k = 1b_1 \dots b_{k(2)} - 1]$

$f(b_1 \dots b_k) = k$.

Зад. Докажете, че множеството от всички крайни думи, съставени от буквите $\{A, \Gamma\}$, е изброимо.

Реш: $g: words \to S_{bool}$; $g(\alpha_1 \dots \alpha_n) = b_1 \dots b_n$, $b_i = \begin{cases} 1, & \alpha_i = A \\ 0, & \alpha_i = \Gamma \end{cases}$

Зад. Дадена е релацията $R = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x - y \in \mathbb{Q}\}$

(а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

(б) Докажете, че множеството от класове на еквивалентност на R е неизброимо.

Реш: (б) Нека $x \in \mathbb{R}$. Тогава $[x] = \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\} \Rightarrow |[x]| = |\mathbb{Q}|$. $\mathbb{Q}$ е изброимо множество $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ и $[x]$ е изброимо множество. Релацията разбива множеството $\mathbb{R}$ на непресичащи се класове на еквивалентност, следователно обединението на всички класове на еквивалентност, породени от R, е мн-вото на реалните числа $\mathbb{R}$.
Да допуснем, че мн-вото от класове на еквивалентност е изброимо. Знаем, че обединението на изброимо много изброими мн-ва е изброимо мн-во. Получаване, че $\mathbb{R}$ е изброимо множество. Но сме доказвали, че $\mathbb{R}$ е неизброимо. Противоречие.
Допускането е грешно, мн-вото от класове на еквивалентност е неизброимо множество.