07. Принцип на Дирихле

Принцип на Дирихле: Ако A и B са крайни множества и $|A|>|B|$, то не съществува инекция $f: A \to B$.

Алтернативна формулировка: ако имаме n молива в m чекмеджета и $n>m$, то в поне едно чекмедже има повече от един молив.

Обобщен принцип на Дирихле: ако имаме $K.n+1$ молива в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от K молива.

Алтернативна формулировка: ако имаме n молива в m чекмеджета и $n>m$, то в поне едно чекмедже има поне $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ молива.

Зад/ Избрани са произволни $n+1$ цели числа. Докажете, че измежду тях има поне 2, чиято разлика се дели на n.

Реш: При деление на произволно естествено число на n можем да получим един от следните остатъци: $0, 1, 2, \dots, n-1$. Остатъците са n на брой. От принципа на Дирихле следва, че поне 2 от избраните $n+1$ числа дават един и същ остатък при деление на n. Нека това са x и y.

Тогава x и y могат да се представят по следния начин:

$$x = a.n + r \quad (0 \leq r < n)$$

$$y = b.n + r \quad (0 \leq r < n)$$

За разликата на x и y получаваме: $x - y = a.n + r - (b.n + r) = (a-b).n$, което се дели на n.

Значи наистина измежду избраните числа имаме две, чиято разлика се дели на n.

Зад/ Да се докаже, че измежду всеки 100 естествени числа има поне 34, които дават един и същ остатък при деление на 3.

Реш: Остатъците при деление на 3 са: $0, 1, 2$ – 3 на брой. Следователно измежду $100^{те}$ избрани числа има поне $\lceil \frac{100}{3} \rceil = \lceil 33\frac{1}{3} \rceil = 34$ числа, даващи един и същ остатък при деление на 3.

Зад/ Да се докаже, че измежду произволно избрани 12 различни двуцифрени естествени числа има поне 2, разликата на които е двуцифрено число, записано с еднакви цифри.

Реш: Имаме 11 възможни остатъка при деление на 11. От принципа на Дирихле следва, че от избраните 12 числа има поне 2, които дават един и същ остатък при деление на 11. Нека това са a и b, $a, b \in [10; 99]$.

$$a = 11x + k$$
$$b = 11y + k \quad , x, y \in [0; 9]$$

Понеже $a \neq b$, то $x \neq y$. Нека Б.О.О. $x > y \Rightarrow \begin{matrix} x \in [1; 9] \\ y \in [0; 8] \end{matrix}$

Тогава $a - b = 11x + k - 11y - k = 11(x-y)$

$x - y \in [1; 9] \Rightarrow a - b \in \{11; 22, \dots, 99\}$ □.

Зад/ Може ли матрица 2016×2016 да се попълни с числата $+1, -1, 0$ така, че всички сборове по редове, по стълбове и по двата диагонала да са различни? (Изпит 2016)

Реш: Редовете, стълбовете и двата диагонала съдържат по 2016 елемента. Възможните сборове са в интервала от -2016 до $2016 \Rightarrow$ имаме $2.2016+1$ възможни сбора. В същото време имаме 2016 реда, 2016 стълба и 2 диагонала. От тях получаваме $2.2016+2$ сбора.

От принципа на Дирихле следва, че поне два от сборовете ще се повтарят.

$\Rightarrow$ Не, не е възможно.

Зад/ Имаме шкаф с 10 сини и 20 червени чорапа. Колко най-малко трябва да извадим, за да сме сигурни, че сме извадили:

(а) поне 2 едноцветни

Отг: 3

(б) поне 4 едноцветни

Отг: 7

(в) поне 2 разноцветни

Отг: 21

Зад/ Да се докаже, че в група от n души има поне 2ма, които познават един и същи брой души. (Приемаме, че познанството е рефлексивна и симетрична релация)

Реш: Възможният брой познати за всеки един човек е от 1 до n. (n възможности)

За разглеждаме следните случаи:

- Има човек, който не познава никого, освен себе си. Тогава няма как да има човек, познаващ всички – n отпада като възможен брой познати.
- Всеки човек познава поне още един човек от групата. Тогава 1 отпада като възможен брой познати.

И в двата случая имаме n човека и $(n-1)$ възможен брой познанства $\Rightarrow$ от принципа на Дирихле следва, че има 2ма, които познават един и същи брой души.

Зад/ Студентска конференция се провежда в три секции – алгебра, геометрия и анализ. На конференцията присъстват общо 450 студенти от първи до четвърти курс, от различни университети. Измежду всеки 8 студенти има поне двама от един и същи университет. Докажете, че в някоя от секциите на конференцията присъстват поне шестима студенти от един и същи курс на един и същи университет.

Реш: Щом измежду всеки осем студенти има поне двама от един и същи университет, то следва, че на конференцията са представени най-много седем университета.

Разглеждаме наредените тройки (секция, университет, курс). Техният брой е не по-голям от $3.7.4 = 84$. Тъй като имаме 450 студенти, то от принципа на Дирихле следва, че поне $\left\lceil\frac{450}{84}\right\rceil = \left\lceil 5\frac{30}{84}\right\rceil = 6$ студенти се описват с една и съща наредена тройка.

Те са от един и същ университет, от един и същ курс и докладват в една и съща секция.

Зад/ Нека точките в равнината (с цели коорд.) са оцветени в 8 различни цвята. Докажете, че има поне 2 едноцветни точки на разстояние по-малко от 3. (Поправителен изпит 2016)

Реш: Да разгледаме точките с целочислени координати от квадрата с долен ляв ъгъл в $(0,0)$ и горен десен ъгъл в $(2,2)$. Тези точки са 9 на брой и най-голямото разстояние между 2 от тях е $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow$ Имаме 9 точки с целочислени координати, като всеки 2 от тях са на разстояние <3.

От принципа на Дирихле следва, че сме оцветили поне 2 от тях в един и същи цвят. □

Зад/ Всяка точка в пространството $\mathbb{R}^3$ е оцветена в синьо, червено или жълто. Докажете, че както и да са оцветени точките, за всяко $r>0$ съществуват две едноцветни точки на разстояние, равно на r.

Реш: Нека разгледаме правилен тетраедър със страна r. Имаме 4 точки, като всеки две от тях са на разстояние r. От принципа на Дирихле следва, че 2 от точките са оцветени в един и същ цвят.

Зад/ Даден е квадрат със страна 3. Във вътрешността на квадрата са избрани 10 точки. Да се докаже, че поне две от тях са на разстояние не по-голямо от $\sqrt{2}$.

Реш: Разрязване квадрата на 9 единични квадратчета. Квадратчетата са 9, а точките - 10. От принципа на Дирихле следва, че има две точки, попадащи в едно единично квадратче. Означаване ги с A и B. Най-голямото разстояние между две точки в единично квадратче се постига, ако точките са в два срещуположни ъгъла на квадратчето.

$\Rightarrow AB \leq \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ □

Зад/ Даден е квадрат със страна 14. Във вътрешността на квадрата са избрани 49 точки. Да се докаже, че поне две от точките са на разстояние не по-голямо от 3.

Зад/ Нека сме избрали n+1 елемента на множеството $S = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Покажете, че поне едно от избраните числа дели друго от избраните числа.

Реш: Да представим избраните числа във вида $2^k \cdot p$, където p е нечетно.
Нека избраните числа са $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ и $a_i = 2^{k_i} \cdot p_i$, p_i - нечетно. Знаем, че всяко p_i е не-по-голямо от $2n$. Имаме само n нечетни числа в интервала $[0, 2n]$, следователно $(\exists i \in I_{n+1})(\exists j \in I_{n+1})[i \neq j \wedge p_i = p_j]$. Тогава $a_i = 2^{k_i} \cdot p_i$ и $a_j = 2^{k_j} \cdot p_j$ и е ясно, че или a_i дели a_j, или a_j дели a_i. □