04. Релации

Def: Релация - подмножество на декартово произведение.

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

Пример: • $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$: $(a,b,c) \in R \iff a, b$ и c са страни на триъгълник.

$(3,4,5) \in R$; $(10;12;8) \in R$; $(1;5;3) \notin R$

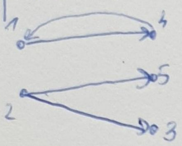
• $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a,b,c,d) \in R \iff a, b, c$ и d са страни на четириъгълник, в който може да се впише окръжност $(a+c = b+d \vee a+d = b+c)$

- Бинарни релации: $R \subseteq A \times B$
- Релации над декартов квадрат: $R \subseteq A \times A$; $(x,y) \in R$; xRy
- Представяне на релации над декартов квадрат:
  - чрез бинарна матрица:

    Нека $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ е множество. Релацията $R \subseteq X \times X$ се представя с матрица от вида:

    $$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ където } a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in R \\ 0, & (x_i, x_j) \notin R \end{cases}$$

  - чрез диаграми: Нека $A = \{1,2,3,4,5\}$ и $R \subseteq A \times A$, $R = \{(1,4), (2,5), (2,3), (4,1)\}$



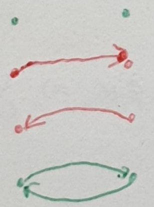
Напомняне: XOR

- Свойства на бинарните релации над декартов квадрат $(R \subseteq A \times A)$
  - рефлексивност: R-рефлексивна $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)[aRa]$

    единици по главния диагонал; примки в диаграмата; $=$; $\leq$; $\geq$; $<$; $>$; $\neq$
  - антирефлексивност: R-антирефлексивна $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)[a \not R a]$

    нули по главния диагонал; без нито една примка в диаграмата; $>, <, =, \geq, \leq$
  - симетричност: R-симетрична $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)(\forall b \in A)[aRb \rightarrow bRa]$

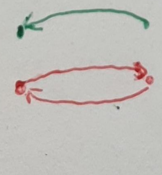
    матрицата е симетрична спрямо гл. диаг., $=, \neq, <, \leq, >, \geq$



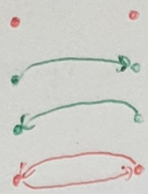
  - антисиметричност: R-антисиметрична $\overset{def}{\iff} (\forall a \in A)(\forall b \in A)[aRb \wedge bRa \rightarrow a = b]$

    $(\forall a \in A)(\forall b \in A)[a \neq b \wedge aRb \rightarrow b \not R a]$

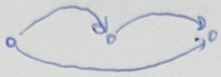
    няма симетрична спрямо гл. диаг. двойка единици, $=, <, >, \geq, \leq, \neq$



- силна антисиметричност: R - силно антисиметрична $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall a\in A)(\forall b\in A)[a\neq b \to aRb \oplus bRa]$
всяка двойка клетки, симетр. спр. гл. диаг. съдържа разл. ст-сти $<, >, \geq, \leq, =, \neq$



- транзитивност: R - транзитивна $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall a\in A)(\forall b\in A)(\forall c\in A)[aRb \wedge bRc \to aRc]$
$=, <, >, \geq, \leq, \neq$



Има ли релация, която е едновременно симетрична и антисиметрична? $\varnothing$

Зад. Представете графично и таблично релацията
$R=\{(0,3),(0,1),(0,0),(1,3),(1,2),(1,1),(2,2),(3,0),(3,3)\}$ над мн-вото $\{0,1,2,3\}$. и я изследвайте за изучените свойства.
- рефл. - да - има единици по гл. диаг.
- антирефл. - не, $1R1$
- симетрична - не, $0R1$, $1 \not R 0$
- антисиметрична - не - $3\neq 0$ и $(0,3)\in R$ и $(3,0)\in R$
- силно антисиметрична - не, не е антисиметрична
- транзитивна - не - $0R1$, $1R2$, но $0 \not R 2$

Зад. Изследвайте за свойства следните релации:
(а) $R \subseteq 2^{N} \times 2^{N}$
$(A,B)\in R \Leftrightarrow A\subseteq B$

Пример: $\{1\} \to \{1,2\} \to \{1,2,3\}$

1) рефл. - да $(\forall x\in 2^{N})[x\subseteq x]$
2) антирефл. - не. Напр. $\{1\}\subseteq\{1\} \Rightarrow \{1\}R\{1\}$
3) симетричност - не $A\subseteq B \not\Rightarrow B\subseteq A$. Напр. $\{1\}\subseteq\{1,2\}$, но $\{1,2\}\not\subseteq\{1\}$
$(\{1\},\{1,2\})\in R$, но $(\{1,2\},\{1\})\notin R$
4) антисиметричност
$(\forall x\in 2^{N})(\forall y\in 2^{N})[x\neq y \wedge x\subseteq y \to y\not\subseteq x]$
Нека $x_1\in 2^{N}$ и $y_1\in 2^{N}$ са произволни и $x\neq y \wedge x\subseteq y$.
$\left.\begin{array}{l}\bullet\ x\neq y\\ \bullet\ x\subseteq y\end{array}\right\} \Rightarrow$ в y има елемент, който не е ел. в $x \Rightarrow y\not\subseteq x \Rightarrow y \not R x$
5) силна антисиметричност - не
$(\forall x\in 2^{N})(\forall y\in 2^{N})[x\neq y \to xRy \oplus yRx]$
Нека $x=\{1,2\}$ и $y=\{3,4\}$. Получаваме $\underset{T}{x\neq y} \to \underset{F}{xRy} \oplus \underset{F}{yRx} \equiv T \to F\oplus F \equiv T\to F \equiv F$
6) транзитивност - да
$(\forall x\in 2^{N})(\forall y\in 2^{N})(\forall z\in 2^{N})[xRy \wedge yRz \to xRz]$
Нека x, y и z са произволни и $x\subseteq y$ и $y\subseteq z$
$x\subseteq y \Leftrightarrow (\forall a)[\underset{p}{\underline{a\in x}} \to \underset{q}{\underline{a\in y}}]$
$y\subseteq z \Leftrightarrow (\forall a)[\underset{q}{\underline{a\in y}} \to \underset{t}{\underline{a\in z}}]$
$A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C \equiv (p\to q \wedge q\to t) \to (p\to t) \equiv T$

(б) $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, $R \subseteq 2^A \times 2^A$

$xRy \iff x \cap y \neq \emptyset$

1) ~~рефлексивност~~ рефлексивност - не
$\emptyset \in 2^A$, но $(\emptyset, \emptyset) \notin R$, защото $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

2) антирефлексивност - не.
Например, $(\{1\}, \{1\}) \in R$

3) симетричност - да, поради комутативността на сечението

4) антисиметричност - не
Например; $(\{1,2\}, \{2,3\}) \in R$ и $(\{2,3\}, \{1,2\}) \in R$

5) силна антисиметричност - не, не е антисиметрична

6) транзитивност - не
Например: $(\{1,2\}, \{2,3\}) \in R$, $(\{2,3\}, \{3,4\}) \in R$, но $(\{1,2\}, \{3,4\}) \notin R$

(в) $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$

$(x, y) \in R \iff x \setminus y = \emptyset$

1) рефлексивност - да
$(\forall x \in 2^{\mathbb{N}})[x \setminus x = \emptyset] \Rightarrow (\forall x \in 2^{\mathbb{N}})[xRx]$

2) антирефлексивност - не
например, $(\{1\}, \{1\}) \in R$

3) ~~рефлек~~ симетричност - не
Например, $(\{1\}, \{1,2\}) \in R$, но $(\{1,2\}, \{1\}) \notin R$

4) антисиметричност - да
$(\forall A \in 2^{\mathbb{N}})(\forall B \in 2^{\mathbb{N}})[ARB \wedge BRA \to A = B]$

Нека A и B са произволни и нека

$ARB \Rightarrow A \setminus B = \emptyset \Rightarrow$ A няма ел., който да не е ел. на B ($A \subseteq B$)

и

$BRA \Rightarrow B \setminus A = \emptyset \to$ B няма ел., който да не е ел. на A ($B \subseteq A$)

$\Rightarrow A = B$

5) Силна антисиметричност - не
$(\{1\}, \{2\}) \notin R$ и $(\{2\}, \{1\}) \notin R$

6) транзитивност - да
$(\forall A \in 2^{\mathbb{N}})(\forall B \in 2^{\mathbb{N}})(\forall C \in 2^{\mathbb{N}})[ARB \wedge BRC \to ARC]$

Нека A, B и C са произволни и

$ARB \Rightarrow A \subseteq B$ и $BRC \Rightarrow B \subseteq C$ $\Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \setminus C = \emptyset \Rightarrow ARC$

г) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(a, b) \in R \iff (a - b) \in \mathbb{Z}$

1) рефлексивност - да
$(\forall a \in \mathbb{R})[a - a = 0 \in \mathbb{Z}]$

2) симетричност - да
Нека a и b са произв. и $aRb \Rightarrow a - b = t \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow b - a = -t \in \mathbb{Z} \Rightarrow bRa$

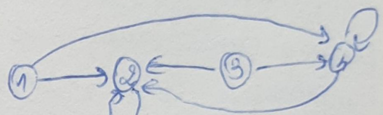
3) антисиметричност - не
Например, $(1,2)\in R$ и $(2,1)\in R$

4) силна антисиметричност - не, понеже не е антисиметрична

5) антирефлексивност - не,
например, $(1,1)\in R$

6) транзитивност - да
Нека a, b и c са произволни и
aRb и bRc
$\Downarrow$ $\Downarrow$
$a-b=t\in\mathbb{Z}$ $b-c=k\in\mathbb{Z}$
$\Rightarrow (a-b)+(b-c) = a-c = k+t\in\mathbb{Z} \Rightarrow \underline{aRc}$

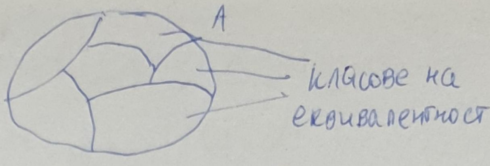
- Рефлексивно затваряне на релацията $R\subseteq A\times A$ е релацията
$P = R\cup\{(a,a)\mid a\in A\}$
- Обратната на релацията $R\subseteq A\times B$ е релацията $R^{-1}\subseteq B\times A$, определена като:
$R^{-1} = \{(x,y)\mid (y,x)\in R\}$
- Симетрично затваряне на релацията $R\subseteq A\times A$ е релацията
$S = R\cup R^{-1}$
- Композицията на релациите $R\subseteq A\times B$ и $S\subseteq B\times C$ е релация над $A\times C$, определена като:
$R\circ S = \{(a,c)\mid (\exists b\in B)[(a,b)\in R \wedge (b,c)\in S]\}$

Пример: Нека R е . Тогава $R\circ R$ е 

- Итерация на релацията $R\subseteq A\times A$ дефинираме като за всяко ест. число n, деф. релацията R^n по следния начин:
$R^0 = \{(a,a)\mid a\in A\}$
$R^{n+1} = R^n\circ R$
- Транзитивно затваряне на $R\subseteq A\times A$ е релацията
$R^+ = \bigcup_{n\geq 1} R^n$
- Рефлексивното и транзитивно затваряне на R означаваме с R^*, определена като
$R^* = \bigcup_{n\geq 0} R^n$

Алгоритъм за намиране на R^*:
0) $R_0 = \{(a,a)\mid a\in A\}$
i+1) И.х. Нека сме пресметнали R_i
$R_{i+1} = \{(a,c)\in A\times A\mid (\exists b\in A)[(a,b)\in R_i \wedge (b,c)\in R]\}\cup R_i$
Нека $m=\min\{i\mid R_i = R_{i+1}\}$. Вярно е, че $R^* = R_m$.
Зад. Да се намери R^*, ако $R = \{(A,B), (B,C), (S,A)\}$, $R\subseteq \{A,B,C,D,S\}^2$
Реш: 0) $R_0 = \{(A,A), (B,B), (C,C), (D,D), (S,S)\}$
1) $R_1 = \{(A,B), (B,C), (S,A)\}\cup R_0$
2) $R_2 = \{(A,C), (S,B)\}\cup R_1$
3) $R_3 = \{(S,C)\}\cup R_2$
4) $R_4 = \emptyset\cup R_3 \Rightarrow m=3$, $R^* = R_3$

def: Релация на еквивалентност
- рефлексивна
- симетрична
- транзитивна



Всяка релация на еквивалентност над множество поражда разбиване на множеството.

Зад. Нека $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е дефинирана като

$(x,y) \in R \iff x - y$ се дели на 3

(а) докажете, че R е релация на еквивалентност

(б) намерете класовете на еквивалентност

Реш: (а)

1) рефлексивност $((\forall x \in \mathbb{N})[xRx])$

Нека $x \in \mathbb{N}$ е произволно. $x - x = 0$, което се дели на 3. $\Rightarrow xRx$

Тъй като $x \in \mathbb{N}$ беше произволно, $(\forall x \in \mathbb{N})[xRx]$.

2) симетричност $((\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})[xRy \rightarrow yRx])$

Нека $x, y \in \mathbb{N}$ са произволни и xRy.

От $xRy \Rightarrow x - y = 3 * t \ (t \in \mathbb{Z})$

Тогава $y - x = 3(-t) \ (-t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow yRx$

Тъй като $x, y \in \mathbb{N}$ бяха произволни, $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})[xRy \rightarrow yRx]$.

3) транзитивност $((\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{N})[xRy \wedge yRz \rightarrow xRz])$

Нека $x, y, z \in \mathbb{N}$ са произв. и $xRy \wedge yRz$.

$xRy \Rightarrow x - y = 3t \ (t \in \mathbb{Z})$

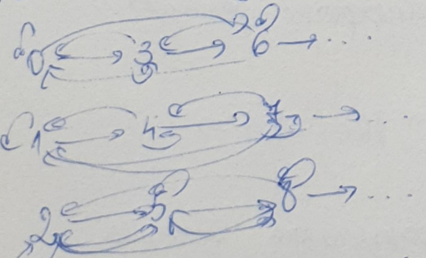
$yRz \Rightarrow y - z = 3s \ (s \in \mathbb{Z})$

$x - y + y - z = 3(t + s)$

$x - z = 3(t + s) \quad (t + s \in \mathbb{Z}) \Rightarrow xRz.$

Тъй като x, y и $z \in \mathbb{N}$ бяха произволни, $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{N})[xRy \wedge yRz \rightarrow xRz]$.

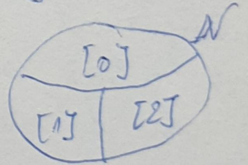
б)



$[0] = \{0, 3, 6, 9, \ldots\} = \{3t \mid t \in \mathbb{N}\}$

$[1] = \{1, 4, 7, \ldots\} = \{3t + 1 \mid t \in \mathbb{N}\}$

$[2] = \{2, 5, 8, \ldots\} = \{3t + 2 \mid t \in \mathbb{N}\}$



$[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{N}$

$[0] \cap [1] = \emptyset$

$[0] \cap [2] = \emptyset$

$[1] \cap [2] = \emptyset$

Зад. Точките в равнината можем да представим чрез техните координати като двойки реални числа: $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Релацията $P \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ е определена по следния начин:

$$P = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid x_1+y_1 = x_2+y_2\}$$

(а) Да се докаже, че P е релация на еквивалентност.

(б) Да се опише и начертае класът на еквивалентност на точката $(2,3)$.

Реш: (а)

1) рефлексивност

Нека $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ е произв. Понеже $x+y = x+y$, то $((x,y),(x,y)) \in P$

От това, че $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ е произв. $\Rightarrow$ релацията е рефлексивна.

2) симетричност

Нека $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ и $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ са произволни. и $x_1+y_1 = x_2+y_2 \Rightarrow x_2+y_2 = x_1+y_1$

$\Rightarrow ((x_2,y_2),(x_1,y_1)) \in P$. Тъй като двете точки бяха произволни $\Rightarrow$ релацията е симетрична.

3) транзитивност

Нека $(x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i \in I_3$ са произволни и $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in P \wedge ((x_2,y_2),(x_3,y_3)) \in P$.

$\Rightarrow x_1+y_1 = x_2+y_2 \wedge x_2+y_2 = x_3+y_3 \Rightarrow x_1+y_1 = x_3+y_3 \Rightarrow ((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \in P$

От това, че $(x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i \in I_3$ бяха произволни $\Rightarrow$ релацията е транзитивна.

Щом релацията P е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност

(б) Класът на екв. на точката $(2,3)$ е мн-вото от всички точки (x,y), за които $x+y = 2+3$, т.е. $x+y=5$. Графиката на $y = 5-x$ е права.

Зад. $R \subseteq A \times A$ е рефл. и транзитивна релация. Дефинираме $\sim \subseteq A \times A$ по следния начин: $a \sim b \Leftrightarrow aRb \wedge bRa$. Да се док., че $\sim$ е релация на еквивалентност.

Реш:

1) рефлексивност

Тъй като R е рефлексивна, то $(\forall a \in A)[aRa] \Rightarrow (\forall a \in A)[aRa \wedge aRa] \Rightarrow (\forall a \in A)[a \sim a]$

$\Rightarrow \sim$ е рефлексивна.

2) симетричност

Нека $a,b \in A$ са произволни и $a \sim b \Rightarrow aRb \wedge bRa \Rightarrow bRa \wedge aRb \Rightarrow b \sim a$

От това, че $a,b \in A$ бяха произволни следва, че $\sim$ е симетрична релация.

3) транзитивност

Нека $a,b,c \in A$ са произволни и $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow aRb \wedge bRa \wedge bRc \wedge cRb \Rightarrow$

$\Rightarrow (aRb \wedge bRc) \wedge (cRb \wedge bRa) \overset{R\ e}{\underset{тр.}{\Rightarrow}} aRc \wedge cRa \Rightarrow a \sim c$

Тъй като $a,b,c \in A$ бяха произволни, следва, че $\sim$ е транзитивна релация.

Зад. Нека A е множество и нека $R \subseteq A \times A$ и $P \subseteq A \times A$. Докажете или опровергайте:

(а) Ако R е р.е., то $\overline{R}$ е р.е. не!

Нека $A = \{1,2\}$, $R = \{(1,1),(2,2)\}$ - р.е. Тогава $\overline{R} = \{(1,2),(2,1)\}$ - не е рефл. / не е транз. $\Rightarrow$ не е р.е.

(б) Ако R е р.е. и P е р.е., то $R \setminus P$ е р.е. - не!

Нека $A = \{1,2\}$, $R = \{(1,1),(2,2)\}$, $P = \{(1,1),(2,2)\}$.

$R \setminus P = \emptyset$ - не е рефл. $((1,1) \notin \emptyset) \Rightarrow$ не е р.е.

в) Ако R, P са р.е., то $R \cap P$ е р.е. - да!

1) рефлексивност

Трябва да док., че

$(\forall x\in A)[(x,x)\in R\cap P]$

Щом R и P са р.е. $\Rightarrow$ R и P са рефлексивни.

$\Rightarrow (\forall x\in A)[(x,x)\in R \wedge (x,x)\in P] \Rightarrow (\forall x\in A)[(x,x)\in R\cap P]$ ✓

2) симетричност

Нека x,y са произволни и $(x,y)\in R\cap P$.

$\Rightarrow xRy \xRightarrow[\text{сим.}]{R\text{ е}} yRx$

$\Rightarrow xPy \xRightarrow[\text{сим.}]{P\text{ е}} yPx$

$\Rightarrow (y,x)\in R\cap P$. Тъй като $x,y\in A$ бяха произволни, следва, че $R\cap P$ е симетрична.

3) транзитивност

Нека $x,y,z\in A$ са произволни и $(x,y)\overset{(*)}{\in} R\cap P$ и $(y,z)\overset{(**)}{\in} R\cap P$

$(*) \Rightarrow (x,y)\in R$, $(x,y)\in P$

$(**) \Rightarrow (y,z)\in R$, $(y,z)\in P$

$(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R \xRightarrow[\text{транз.}]{R\text{ е}} (x,z)\in R$

$(x,y)\in P$ и $(y,z)\in P \xRightarrow[\text{е транз.}]{P} (x,z)\in P$

$\Rightarrow (x,z)\in R\cap P$. Тъй като $x,y,z\in A$ бяха произволни, следва, че $R\cap P$ е транзитивна

$\Rightarrow R\cap P$ е релация на еквивалентност.

Зад. В множеството на всички крайни множества от цели числа дефинираме релация ρ:

$$X\rho Y \Leftrightarrow \text{разликата } \sum_{x\in X} x^2 - \sum_{y\in Y} y \text{ е четно число.}$$

а) Докажете, че ρ е р.е.

б) Опишете възможно най-ясно класовете на еквивалентност и намерете броя им.

Реш: (а)

1) рефлексивност

$(\forall X)[X\rho X]$, защото $\sum_{x\in X} x^2 - \sum_{x\in X} x = \sum_{x\in X}(x^2-x) = \sum_{x\in X} x(x-1)$ е четно число, защото събираемите са произведения на 2 последователни числа (а от тях поне едно е четно).

2) симетричност

Ако $X\rho Y$, то $\sum_{x\in X} x^2 - \sum_{y\in Y} y$ е четно число. От рефлексивността следва, че $\sum_{x\in X} x^2 - \sum_{x\in X} x$ и $\sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{y\in Y} y$ са четни числа. Следователно

$\left(\sum_{x\in X} x^2 - \sum_{x\in X} x\right) + \left(\sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{y\in Y} y\right) - \left(\sum_{x\in X} x^2 - \sum_{y\in Y} y\right) = \sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{x\in X} x$ също е четно, следователно $Y\rho X$.

3) транзитивност

Ако $X\rho Y$ и $Y\rho Z$, то двете разлики $\left(\sum_{x\in X} x^2 - \sum_{y\in Y} y\right)$ и $\left(\sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{z\in Z} z\right)$ са четни числа и следователно

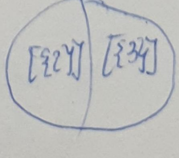
$\left(\sum_{x\in X} x^2 - \sum_{y\in Y} y\right) + \left(\sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{z\in Z} z\right) - \left(\sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{y\in Y} y\right) = \sum_{x\in X} x^2 - \sum_{z\in Z} z$ също е четно число, следователно $X\rho Z$.

С това доказахме, че ρ е релация на еквивалентност.

(б) класове на еквивалентност

$[\{2\}] = \{S \mid \sum_{x\in S} x \text{ е четно}\}$

$[\{3\}] = \{S \mid \sum_{x\in S} x \text{ е нечетно}\}$



Зад. Нека A е мн-во, а $S \subseteq A\times A$ и $R \subseteq A\times A$ са релации. Нека:

(1) $(\forall a\in A)(\exists b\in A)[aSb]$ (т.е. всеки ел. на A има S-наследник)

(2) $(\forall x\in A)(\forall y\in A)[(xRy) \iff (\exists z\in A)[(xSz)\,\&\,(ySz)]]$ (т.е. x и y са в релация R точно тогава, когато имат общ S-наследник)

Докажете, че:

(а) R е симетрична

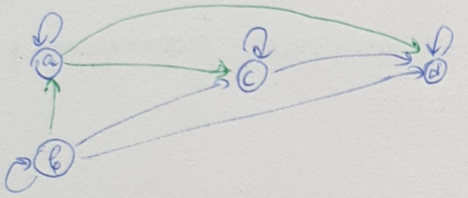
(б) R е рефлексивна

Д-во (а) Нека $x\in A$, $y\in A$ и $(xRy) \overset{(2)}{\Rightarrow} (\exists z\in A)[xSz \wedge ySz] \Rightarrow (\exists z\in A)[ySz \wedge xSz] \Rightarrow yRx$

(б) Нека $x\in A$. $\overset{(1)}{\Rightarrow} (\exists b\in A)[xSb] \Rightarrow (\exists b\in A)[xSb \wedge xSb] \Rightarrow xRx$.

Def: Казваме, че $R\subseteq A\times A$ е релация на (нестрога) частична наредба, ако:
- R е рефлексивна
- R е антисиметрична
- R е транзитивна

Def: Казваме, че $R\subseteq A\times A$ е релация на пълна/линейна наредба, ако:
- R е рефлексивна
- R е силно антисиметрична
- R е транзитивна



при частична наредба:

a b c d

b a c d

b c a d

b c d a

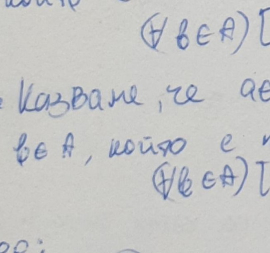
при пълна наредба:

b a c d

Нека R е частична наредба над A.

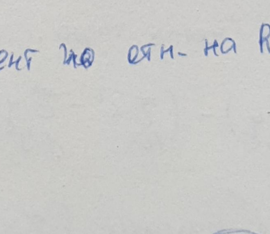
Def:
- Казваме, че $a\in A$ е най-малък по отн. на R, ако е по-малък от всеки друг елемент на A:
  $(\forall b\in A)[a\neq b \to aRb]$
- Казваме, че $a\in A$ е най-голям по отн. на R, ако е по-голям от всеки друг елемент на A:
  $(\forall b\in A)[a\neq b \to bRa]$
- Казваме, че $a\in A$ е минимален елемент по отн. на R, ако не съществува друг елемент $b\in A$, който е по-малък от него:
  $(\forall b\in A)[a\neq b \to b \not R a]$
- Казваме, че $a\in A$ е максимален елемент по отн. на R, ако не съществува друг елемент $b\in A$, който е по-голям от него:
  $(\forall b\in A)[a\neq b \to a \not R b]$.

Пример:



$\emptyset$ е минимален и най-малък

$\{1,2\}$ е максимален и най-голям



$\{1\}$ и $\{2\}$ са минимални

$\{1,2\}$ е максимален и най-голям

няма най-малък елемент

Зад. Нека $S=\{0,1,\dots,32\}$ и $R\subseteq S\times S$ е дефинирана така:

$$aRb \iff b-a\equiv 0 \pmod 3 \wedge (a-b\geq 0)$$

(а) Док., че R е релация на частична наредба

(б) Определете максималните и минималните елементи

Реш: (а)

1) рефлексивност

$(\forall x\in S)[x-x\equiv 0 \pmod 3 \wedge x-x\geq 0] \Rightarrow (\forall x\in S)[xRx]$

2) антисиметричност $(\forall x\in S)(\forall y\in S)[x\neq y \wedge xRy \rightarrow y\not R x]$

Нека $x,y\in S$ са произволни и $x\neq y \wedge xRy \Rightarrow y-x\equiv 0 \pmod 3$ и $x-y\geq 0$

$$\left.\begin{matrix} x-y\geq 0 \\ x\neq y\end{matrix}\right\} \Rightarrow y-x<0 \Rightarrow y-x \ngeq 0 \Rightarrow y\not R x.$$

3) транзитивност

Нека $x,y,z\in S$ са произволни и xRy, yRz.

$xRy \Rightarrow y-x=3t \ (t\in\mathbb{Z})$, $x-y\geq 0$

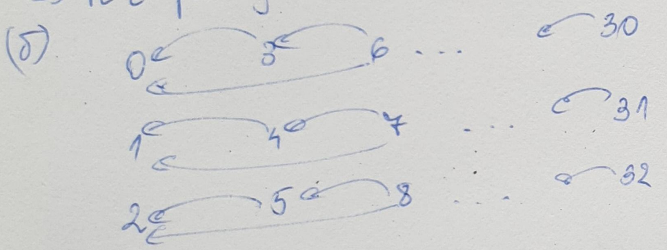
$yRz \Rightarrow z-y=3s \ (s\in\mathbb{Z})$, $y-z\geq 0$

$z-x=3(t+s) \ (t,s\in\mathbb{Z})$ $\quad x-z\geq 0$

$\Rightarrow xRz.$

$\Rightarrow R$ е релация на частична наредба.

(б)



30, 31 и 32 са минимални.

0, 1, 2 са максимални.

Зад. Нека $R\subset A\times A$ е частична наредба, а $x\in A, y\in A, z\in A$ са различни. Може ли да е вярно твърдението $xRy \wedge yRz \wedge zRx$ (дайте обоснован отговор).

Реш: Да допуснем, че твърдението е вярно. Тъй като R е частична наредба, тя е транзитивна и антисиметрична. От $xRy \wedge yRz \xrightarrow[\text{транз.}]{R \text{ е}} xRz$. Тогава $xRz \wedge zRx \wedge x\neq z$, но R е антисиметрична. Противоречие. Сл. допускането е грешно, твърдението не е вярно.

Зад. Нека A е множество и нека $R\subseteq A\times A$ и $P\subseteq A\times A$. Докажете или опровергайте:

(а) Ако R и P са релации на частична наредба, то $R\cup P$ е релация на частична наредба − НЕ!

Нека $A=\{1,2\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(2,1)\}$, $P=\{(1,1),(2,2),(1,2)\} \Rightarrow R\cup P=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

$\Rightarrow R\cup P$ не е антисиметрична $\Rightarrow R\cup P$ не е релация на частична наредба.

(б) Ако R е релация на частична наредба, то $R\cap R^{-1}$ е релация на еквивалентност. Ако е вярно, то какъв е броят на класовете на еквивалентност?

$R\cap R^{-1}=\{(x,x) \mid x\in A\} \Rightarrow R\cap R^{-1}$ е релация на еквивалентност

Брой на класовете на еквивалентност: $|A|$.

Задачи за упражнение

Зад. Определете кои от шестте изучени свойства притежава релацията $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$aRb \Leftrightarrow a + b \geq 5$

Зад. Релацията $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е дефинирана по следния начин:

$xRy \Leftrightarrow (2x - 5y)$ се дели на 3

Докажете, че R е релация на еквивалентност и опишете класовете ѝ на еквивалентност.

Зад. Полетата от шахматната дъска представяме като множество от двойки (i,j), където i е номер на вертикал, а j е номер на хоризонтал – $C = \{(i,j) \mid i \in I_8, j \in I_8\}$.

Определяме релацията R между двойки полета така – $(i,j) R (u,v)$, когато офицер, разположен на полето (i,j), може с няколко хода да достигне полето (u,v).

(а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

(б) Колко класа на еквивалентност има R, има ли специално обозначаване на тези класове върху шахматната дъска?

Зад. В множеството на целите положителни числа определяме две бинарни релации ρ и R по следния начин:

$$x \rho y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})[x < 10^n \leq y]$$

$$x R y \Leftrightarrow \neg(x \rho y \vee y \rho x)$$

(а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

(б) Опишете класовете на еквивалентност на R възможно най-просто и ясно.

Упътване: Помислете какъв извод можем да направим за две числа x и y, ако е изпълнено $x \rho y$.

Задачи за упражнение:

Зад. За всяка релация $R \subseteq A \times A$ дефинираме обратната релация на R, която означаваме с „R^{-1}" по следния начин:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)\,[(x,y) \in R^{-1} \iff (y,x) \in R]$$

Докажете или опровергайте, че ако R е релация на частична наредба, то R^{-1} е релация на частична наредба.

Зад. Докажете, че функцията $f: \mathbb{R}^{+} \to (0,1)$; $f(x) = \frac{1}{x+1}$ е биекция и намерете обратната функция f^{-1}.