Análisis Numérico de EDPs: Práctica 3

Alberto Pérez Cervera y Joaquín Domínguez de Tena[1]

[1]Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

27 de marzo de 2023

1. Indicaciones

Se debe subir al Campus Virtual, antes de la fecha especificada, un informe escrito en Latex respondiendo a las preguntas que se plantean a lo largo de la práctica. Éstas vienen enumeradas con letras y en negrita. Se incluye al principio de cada sección la puntuación correspondiente a todos los apartados planteados en la sección. No se incluye una puntuación por apartado, debido a que algunos se complementan entre ellos y pueden requerir una evaluación conjunta.

Se valorará la presentación, coherencia y explicación en el informe. También se valorará la **concisión** en cuanto a texto de éste. Las imágenes deben incluirse en el propio informe. Sin embargo, otros documentos como vídeos y códigos se adjuntarán ordenados por carpetas en un archivo comprimido. Se valorará también la eficiencia y documentación de los códigos (la documentación se hará con comentarios en el propio código).

2. Introducción

A lo largo de esta práctica vamos a resolver numéricamente la siguiente ecuación elíptica en un dominio $\Omega \subset R^n$ acotado:

$$L[u](x) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(x) = f(x) \qquad \forall x \in \Omega \tag{1}$$

donde $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $a_i \in C^1(\overline{\Omega})$ tales que existen constantes $M, m > 0$ tales que:

$$m \leq a_i(x) \leq M \qquad \forall x \in \Omega \quad \forall i = 1, \ldots, d \tag{2}$$

La solución a esta ecuación es una solución estacionaria de la ecuación de evolución asociada $u_t - L[u] = f$ que es una ecuación del calor para un medio no isótropo y no homogéneo.

3. Principio del Máximo (3p)

En clase hemos visto la existencia y unicidad de soluciones para la ecuación de Poisson, mediante los principios del máximo y el método de Perron. Sin embargo, la ecuación (1) no es la ecuación de Poisson, sino una leve modificación de ella que modeliza un medio más complejo.

Aún así, podemos obtener un principio del máximo de manera similar a como lo hicimos para la ecuación de Poisson. Vamos a probar el siguiente teorema:

Theorem 3.0.1. *Dado $\Omega \subset R^d$ acotado y $u \in C^2(\Omega) \cup C^0(\overline{\Omega})$, se tiene que si u satisface la inecuación:*

$$L[u](x) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(x) \geq 0 \tag{3}$$

donde los coeficientes a_i satisfacen (2), entonces:

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x) \tag{4}$$

Demostración. Dividiremos, como en la ecuación de Poisson, la prueba en dos casos:

1. Caso $L[u](x) > 0$: Como las funciones a_i son C^1 podemos expandir la inecuación a:

$$-\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \sum_{i=1}^{d} a_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) > 0 \qquad \forall x \in \Omega \tag{5}$$

   a) **Asume que el mínimo de u se alcanza en el interior, es decir que $u(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ con $x_0 \in \Omega$. Prueba que esto lleva a una contradicción con (5).**

2. Caso $L[u](x) \geq 0$: En este caso usamos la barrera construida en las clases de teoría $\Phi \in C^2(\overline{\Omega})$ que cumple:

   1 $\Phi \geq 0$

   2 $L[\Phi] \leq -1$

   3 $\|\Phi\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} \Phi(x) \leq M$

   Usando la barrera Φ:

   b) **Dado $\varepsilon > 0$, considera $v_\varepsilon = u - \varepsilon\Phi$. Prueba, utilizando el apartado anterior, que:**

   $$\min_{x\in\overline{\Omega}} v_\varepsilon(x) = \min_{x\in\partial\Omega} v_\varepsilon(x) \tag{6}$$

   c) **Concluye (detalladamente) que:**

   $$\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x) \tag{7}$$

□

Con este teorema podemos obtener la unicidad del problema elíptico:

Corolario 1. *Sean $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cup C^(\overline{\Omega})$ dos soluciones del problema:*

$$\begin{cases} L[u](x) = f(x) & x \in \Omega \\ \\ u(x) = u_0(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

Entonces se tiene que $u_1 = u_2$.

Demostración.

d) **Prueba el Corolario. Para ello deduce del Principio del mínimo un principio del máximo y utiliza ambos para probar que $u_1 = u_2$. La prueba es similar a a usada en los resultados de parabólicas y elípticas durante las clases de teoría.**

□

A partir del principio del mínimo también se puede probar la existencia de soluciones bajo la propiedad de esfera exterior sobre el dominio. La prueba se hace de nuevo considerando el método de Perron aplicado a este problema. Para más detalles se puede consultar el libro de Gilbarg-Trudinger [GT15].

4. Planteamiento del Problema

El problema elíptico que vamos a resolver va a ser un problema bidimensional ($d = 2$). Vamos a tratar de estudiar como se distribuye el calor en una habitación cuadrangular que tiene una estufa en el centro y tiene unas paredes con cierto aislamiento. Supondremos que la distribución de calor es uniforme en altura, y por tanto, mirando desde arriba podemos estudiar un problema bidimensional.

Cuando se calienta una habitación con una estufa, la ecuación que lo modeliza es la ecuación del calor que vimos en la práctica 2. Sin embargo, tras pasar un cierto tiempo, la distribución de calor se estabiliza en la habitación (solución estacionaria) y esta es la que viene modelizada por la ecuación elíptica correspondiente que será la que nosotros estudiaremos.

Nuestra habitación la vamos a considerar cuadrada. Así, nuestro dominio será $\Omega = [-3/2, 3/2]$. Supondremos que en el exterior hace bastante frío y hay una temperatura constante de 0, por lo que nuestro problema tendrá condiciones de Dirichlet nulas. La estufa vendrá dada por un término de creación $f \in C^0(\Omega)$ que será el siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} C(1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}) & si \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/2 \\ \\ 0 & si \quad \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1/2 \end{cases} \tag{9}$$

es decir, estará centrada en $(0, 0)$ y tendrá un radio de $1/2$, decayendo linealmente en fuerza con el radio. La constante C determinará lo fuerte que pongamos la estufa.

Con todo ello, el problema a resolver será:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) = f(x,y) & \forall (x,y) \in (-3/2, 3/2) \times (-3/2, 3/2) \\ \\ u(x, 3/2) = u(x, -3/2) = u(3/2, y) = u(-3/2, y) = 0 & \forall x, y \in [-3/2, 3/2] \end{cases}$$

Los términos $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$ son los que determinan la conductividad del medio en cada punto[1]. Si a, b son mayores, significa que el calor se transmite más eficientemente. Por contra, si son más pequeños, el calor se transmite más deficientemente. Nosotros vamos a suponer que existe un aislante en las paredes, las cuales supondremos que tendrán un grosor de $1/2$, es decir, nuestros coeficientes vendrán dados por:

$$a(x,y) = a(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq 1 \\ \\ e^{-k_x(|x|-1)^2} & si \quad |x| \geq 1 \end{cases} \tag{10}$$

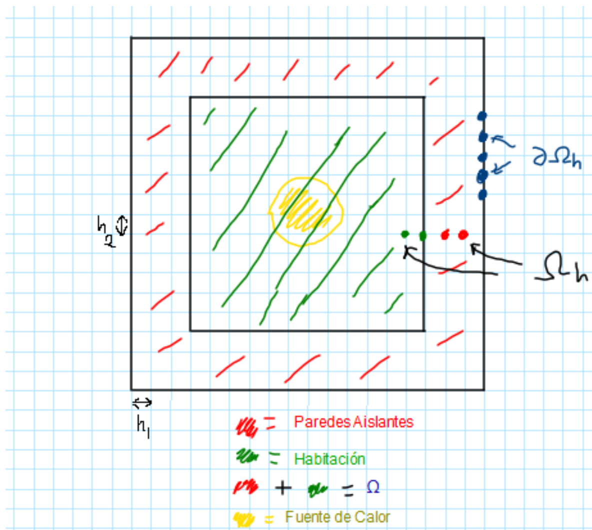
$$b(x,y) = b(y) = \begin{cases} 1 & si \quad |y| \leq 1 \\ \\ e^{-k_y(|y|-1)^2} & si \quad |y| \geq 1 \end{cases} \tag{11}$$

donde $k_x, k_y > 0$ son constantes que determinan como de fuerte es el aislamiento de las paredes. Como puedes observar, se tiene que a no depende de y y b no depende de x. Esto lo hemos hecho para simplificar la solución de los métodos numéricos, pero se podría suponer por ejemplo una dependencia radial del aislamiento sin que esto supusiese una gran complicación.

[1] Si te interesa, puedes revisar la deducción física que hicimos en la clase teórica de la ecuación del calor. Estos términos serían las constantes físicas que relacionarían el flujo de calor con el gradiente de temperatura (Ley de Enfriamiento de Newton) y que nosotros tomamos como 1 por simplicidad para obtener así el Laplaciano.

5. El Método Numérico (3p)

Para resolver el problema vamos a considerar un mallado de Ω, el cual, al tener una forma cuadrangular, admite un mallado sencillo uniforme en cada una de las direcciones del espacio. Haciendo un mallado de $N+2$ puntos en la variable x y $M+2$ puntos en la variable y, denominaremos $h=(h_1,h_2)$ donde $h_1=\frac{3}{N+1}$ y $h_2=\frac{3}{M+1}$, Ω_h al mallado interior y $\partial\Omega_h$ al mallado frontera.



El Método numérico que nosotros vamos a utilizar es el que vimos en el curso para este tipo de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
A_h u_h(x,y) &= -\partial_x(a(\cdot - \frac{h_1}{2}\vec{e}_x)\bar{\partial}_x u)(x,y) - \partial_y(b(\cdot - \frac{h_2}{2}\vec{e}_y)\bar{\partial}_y u)(x,y) \qquad && \forall (x,y)\in\Omega_h \\
u_h(x,y) &= 0 && \forall (x,y)\in\partial\Omega_h
\end{aligned}
\tag{12}
$$

e) **Argumenta, según los resultados vistos en las clases de teoría, por qué este método numérico es convergente para el problema presentado (Puedes citar sin demostrar cualquier resultado que hayamos dado en teoría, pero debes comprobar que estamos en la hipótesis de los teoremas).**

La expresión de (12) se puede escribir en modo expandido:

$$
\begin{aligned}
A_h u_h(x,y) = &-\frac{a(x+\frac{h_1}{2})(u(x+h_1,y)-u(x,y)) - a(x-\frac{h_1}{2})(u(x,y)-u(x-h_1,y))}{h_1^2} \\
&-\frac{b(y+\frac{h_2}{2})(u(x,y+h_2)-u(x,y)) - b(y-\frac{h_2}{2})(u(x,y)-u(x,y-h_2))}{h_2^2}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Además, en el caso en el que nos encontremos en un punto cercano a la frontera, por ejemplo $x=h_1$, podemos incorporar automáticamente la condición de Dirichlet $u(0,y)=0$ de modo que queda:

$$
\begin{aligned}
A_h u_h(h_1,y) = &-\frac{a(\frac{3h_1}{2})(u(2h_1,y)-u(h_1,y)) - a(\frac{h_1}{2})(u(h_1,y)-0)}{h_1^2} \\
&-\frac{b(y+\frac{h_2}{2})(u(h_1,y+h_2)-u(h_1,y)) - b(y-\frac{h_2}{2})(u(h_1,y)-u(h_1,y-h_2))}{h_2^2}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Si representamos nuestra solución numérica por una matriz $U \in \mathscr{M}_{M\times N}$ (es decir, únicamente considerando los términos de Ω_h y no $\partial\Omega_h$) el esquema anterior se puede escribir en forma matricial:

f) **Demuestra que la ecuación $A_h u_h = f$ se puede escribir como:**

$$T_y U + U T_x = F \tag{15}$$

donde $T_y \in \mathscr{M}_{M\times M}$, $T_x \in \mathscr{M}_{N\times N}$ y $F \in \mathscr{M}_{M\times N}$.

La ecuación (15) se denomina ecuación matricial de Sylvester [Wik22]. Se puede resolver por medio de su descripción en términos de productos de Kronecker (que es equivalente a la descomposición por ordenamiento que hemos visto en clase). Pero además existen métodos numéricos específicos ya preprogramados para resolver esta ecuación. Por ejemplo en Python $scipy.linalg.solve\_sylvester(a, b, q)$ o en Matlab $sylvester(A, B, C)$.

g) **Considerando que el problema anteriormente propuesto también se podría resolver mediante un sistema de tipo $A_h u_h = f$, discute brevemente desde un punto de vista computacional qué ventajas presenta el uso de la ecuación matricial de Sylvester.**

6. Resultados Numéricos (4p)

Vamos a programar un código que nos resuelva numéricamente el problema. A partir de aquí utilizaremos la constante $C = 40$ en (9), $k_x = 25$ en (10) y $k_y = 25$ en (11). Además fijamos una discretización con $N = 1000$ y $M = 2000$.[2]

h) **Haz una función que calcule $f(x, y)$ y representa los valores de f en el dominio Ω. Haz lo mismo con $a(x, y)$ y $b(x, y)$. Comprueba que concuerda con la descripción que se ha dado.**

i) **Construye las matrices T_x, T_y y F de la ecuación (15). Resuelve el problema elíptico numéricamente resolviendo la ecuación de Sylvester (15) (puedes utilizar un método preprogramado o descomponer en productos de Kronecker.) y representa tu solución U en el dominio Ω. ¿Se alcanzan los valores frontera adecuadamente?**

j) **Discute cómo varía la temperatura en la sala al modificar el valor de C (usa $C = 10, 20, 30$). ¿Qué observas? ¿Concuerda con la interpretación física?**

k) **Ahora fija $C = 40$ y modifica $k_x = k_y = 20, 15, 0$. ¿Qué observas? ¿Concuerda lo observado con la interpretación física? ¿Qué representaría $k_x = k_y = 0$?**

Referencias

[GT15] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, volume 224. springer, 2015.

[Wik22] Wikipedia contributors. Sylvester equation — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Sylvester_equation`, 2022. [Online; accessed 14-March-2022].

[2] **Nota:** En los apartados j) y k), rogamos nos indiquéis el valor máximo de vuestra solución en cada caso.