Análisis Numérico de Ecuaciones en Diferencias Parciales

Sesión Practica Elípticas

En la sesión de hoy vamos a aprender a resolver una ecuación de la forma

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{1}$$

para (x, y) en el conjunto $R = \{(x,y) \mid x_{\min} < x < x_{\max},\ \ y_{\min} < y < y_{\max}\}$.

Por simplicidad, asumiremos condiciones de contorno Dirichlet, es decir, la solución es conocida en los bordes.

Como siempre, no tenemos más que discretizar nuestra ecuación

$$\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta y^2} = f_i^j \tag{2}$$

y por supuesto también nuestro dominio

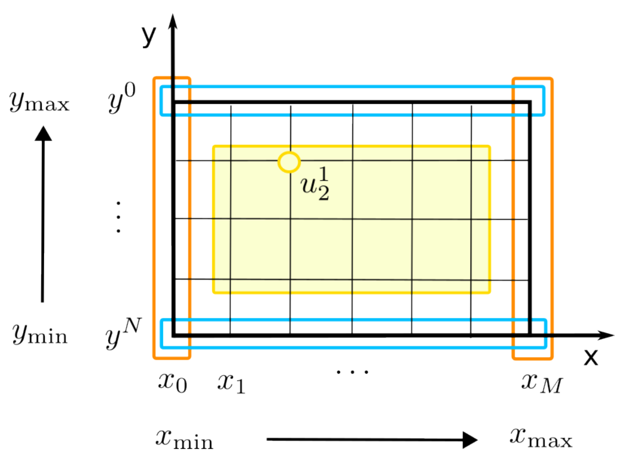


Figure 1: Discretización de nuestro dominio. Hemos discretizado y en N puntos y x en M puntos. Finalmente, destacar que, como las CC son Dirichlet, nuestro objetivo son los nodos en la zona amarilla.

Si restamos la ecuación (1) y nuestro esquema (2), nos queda el error de truncamiento

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T_{xx}(x,y) + T_{yy}(x,y), \\ &= (\partial_x^4 u(x,y))\frac{\Delta x^2}{12} + (\partial_y^4 u(x,y))\frac{\Delta y^2}{12} \end{aligned} \tag{3}$$

que nos muestra claramente que el esquema (2) es consistente y de orden 2.

Aunque no lo parezca, ya tenemos todos los elementos necesarios para resolver. Lo único que tenemos que hacer es evaluar el esquema en cada punto de la zona amarilla de la malla en la Fig. 1. Como resultado obtendremos un sistema matricial

$$\begin{aligned} Au &= b \\ \big(A_{xx} + A_{yy}\big)u &= f + b_x + b_y \end{aligned} \tag{4}$$

donde vemos que la matriz resultante A es la suma de dos matrices A_{xx} y A_{yy}, las discretizaciones de las derivadas $\partial_{xx}, \partial_{yy}$ en la eq. (1), respectivamente. Los términos b_x y b_y, como veremos, se corresponden con los bordes (y por eso están a la derecha, pues son conocidos).

Como mostramos a continuación, la razón de separar la matriz A en dos componentes A_{xx} y A_{yy} vendrá justificada por simplicidad de montaje. Comencemos:

Lo primero para escribir el sistema en (4) es elegir una ordenación para el vector u. Nosotros elegimos esta:

$$u = [\underbrace{u_1^1, u_2^1, \dots u_{M-1}^1}_{1\ fila}, \underbrace{u_1^2, u_2^2, \dots u_{M-1}^2}_{2\ fila}, \ \dots\ , \underbrace{u_1^{N-1}, u_2^{N-1}, \dots u_{M-1}^{N-1}}_{ultima\ fila}]. \tag{5}$$

Fijarse que u tiene, independientemente de la ordenación elegida, $(M-2)\times(N-2)$ elementos.

Discretizando ∂_{xx}

Imaginemos que quisiéramos discretizar $\partial_{xx}u(x,y) = 0$

$$\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} = 0 \tag{6}$$

Si aplicamos dicha discretizacion a todos los puntos en la primera fila (es decir $u(x,y)$ con $y = y^1$ constante), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{-2u_1^1 + u_2^1}{\Delta x^2} &= -\frac{u_0^1}{\Delta x^2}, \\ \frac{u_3^1 - 4u_2^1 + u_1^1}{\Delta x^2} &= 0, \\ \dots &= 0, \\ \frac{u_{M-3}^1 - 2u_{M-2}^1 + u_{M-1}^1}{\Delta x^2} &= 0, \\ \frac{-2u_{M-1}^1 + u_{M-2}^1}{\Delta x^2} &= -\frac{u_M^1}{\Delta x^2} \end{aligned} \tag{7}$$

lo cual da lugar al siguiente sistema matricial

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_{M-2}^1 \\ u_{M-1}^1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} u_0^1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_M^1 \end{bmatrix}$$

Si ahora hacemos esto en todas las filas, es fácil convencerse que la estructura resultante es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B \end{bmatrix}}_{A_{xx}} \left[\begin{array}{c} u_1^1 \\ \vdots \\ u_{M-1}^1 \\ \hline u_1^2 \\ \vdots \\ u_{M-1}^2 \\ \hline \vdots \\ \hline u_1^{N-2} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{N-2} \\ \hline u_1^{N-1} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{N-1} \end{array}\right] = \frac{-1}{\Delta x^2} \underbrace{\left[\begin{array}{c} u_0^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_M^1 \\ \hline u_0^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_M^2 \\ \hline \vdots \\ \hline u_0^{N-2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_M^{N-2} \\ \hline u_0^{N-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_M^{N-1} \end{array}\right]}_{b_x}$$

es decir, hemos hallado la forma general de la discretización del termino ∂_{xx} en (1). Vemos que dicha discretización consta de dos partes "la conocida" (vector b_x) y "la por conocer" (matriz A_{xx}). Podemos observar que ambos elementos A_{xx} y b_x tienen una estructura (es decir, su montaje sigue un patrón). La matriz A_{xx} tiene una estructura diagonal a bloques (y de hecho, cada bloque posee también una estructura tridiagonal). Así mismo, podemos apreciar la estructura de los bordes (el término b_x). Los términos de borde solo aparecen en el primer y último elemento de cada "fila".

Discretizando ∂_{yy}

Análogamente, procedemos a discretizar $\partial_{yy}u(x,y)=0$ de la misma forma.

$$\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\Delta y^2}=0 \tag{8}$$

Nuevamente nos planteamos ¿Qué estructura tiene (8) para los puntos de la primera fila? Si aplicamos el esquema superior a los puntos en la primera fila (es decir $u(x,y)$ con $y=y^1$ constante)

$$\begin{aligned}
\frac{-2u_1^1+u_1^2}{\Delta y^2}&=-\frac{u_1^0}{\Delta y^2},\\
\frac{-2u_2^1+u_2^2}{\Delta y^2}&=-\frac{u_2^0}{\Delta y^2},\\
\ldots&=\ldots,\\
\frac{-2u_{M-2}^1+u_{M-2}^2}{\Delta y^2}&=-\frac{u_{M-2}^0}{\Delta y^2},\\
\frac{-2u_{M-1}^1+u_{M-1}^2}{\Delta y^2}&=-\frac{u_{M-1}^0}{\Delta y^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

Si después de para la primera fila, siguiésemos escribiendo las ecuaciones para los demás puntos de la malla, tarde o temprano, todos caeríamos en la cuenta de que el sistema resultante, tiene la siguiente estructura

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta y^2}\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix}-2&&\\&\ddots&\\&&-2\end{matrix} & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & 0 & \cdots & 0\\ \hline
\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & \begin{matrix}-2&&\\&\ddots&\\&&-2\end{matrix} & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & 0 & 0\\ \hline
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \hline
0 & 0 & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & \begin{matrix}-2&&\\&\ddots&\\&&-2\end{matrix} & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}\\ \hline
0 & \cdots & 0 & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & \begin{matrix}-2&&\\&\ddots&\\&&-2\end{matrix}
\end{array}\right]}_{A_{yy}}
\left[\begin{array}{c}
u_1^1\\ \vdots\\ u_{M-1}^1\\ \hline
u_1^2\\ \vdots\\ u_{M-1}^2\\ \hline
\vdots\\ \vdots\\ \hline
u_1^{N-2}\\ \vdots\\ u_{M-1}^{N-2}\\ \hline
u_1^{N-1}\\ \vdots\\ u_{M-1}^{N-1}
\end{array}\right]
=\frac{-1}{\Delta y^2}\underbrace{\left[\begin{array}{c}
u_1^0\\ u_2^0\\ \vdots\\ u_{M-2}^0\\ u_{M-1}^0\\ \hline
0\\ \vdots\\ 0\\ \hline
\vdots\\ \vdots\\ \hline
0\\ \vdots\\ 0\\ \hline
u_1^N\\ u_2^N\\ \vdots\\ u_{M-2}^N\\ u_{M-1}^N
\end{array}\right]}_{b_y}$$

Llegados a este punto quisiera destacar cuatro cosas

- Convenceos que las matrices A_{xx} y A_{yy} son cuadradas $(M-2)(N-2) \times (M-2)(N-2)$ y que los vectores b_x y b_y tienen $(M-2)(N-2)$ elementos
- A la vez que te convences de su dimensión, date cuenta que aunque A_{xx} y A_{yy} tienen una estructura diferente, en verdad no son tan diferentes: realmente ambas matrices A_{xx} y A_{yy} constan de tres diagonales. Solo cambia su ubicación.
- Comprueba también como cambia la estructura de los bordes. Mientras que b_x llenamos el primer y último elemento de cada "fila", para b_y solo son distintos de cero las filas superior e inferior

En este momento, es importante destacar que la estructura de A_{xx}, A_{yy}, b_x y b_y viene determinada por la ordenación de u que hemos elegido. Hay tantas matrices como ordenaciones. Nosotros hemos optado por ordenar u como en (5) porque nos parece una forma "natural" (lo cual se aprecia al ver que, de hecho, da lugar a estructuras muy sencillas de programar).

Finalmente, solo nos queda discutir como entra en el sistema el termino fuente $f(x, y)$. Es sencillo, la ordenación de u nos fija automáticamente la ordenación del vector f

$$f = [f_1^1, f_2^1, \ldots f_{M-1}^1, f_1^2, f_2^2, \ldots f_{M-1}^2, \ldots, f_1^{N-1}, f_2^{N-1}, \ldots f_{M-1}^{N-1}] \tag{10}$$

Así pues, ya tenemos todos los ingredientes para montar el sistema

$$\big(A_{xx} + A_{yy}\big)u = f + b_x + b_y \tag{11}$$

y hallar nuestra solución con un solve.

El Poissonator

Vamos utilizar todo lo aprendido para programar un código genérico que nos resuelva el problema

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{12}$$

para (x,y) en el conjunto $R = \{(x,y) \mid x_{\min} < x < x_{\max},\ \ y_{\min} < y < y_{\max}\}$. Con condiciones de contorno Dirichlet. Debido a la potencia y generalidad de este código, nos referiremos a él como "el Poissonator".

A nivel de pseudo-código fijaos que se pide

- Ingresar de forma genérica $x = linspace(x_{\min}, x_{\max}, M)$, $y = linspace(y_{\min}, y_{\max}, N)$
- Definir las funciones que nos dan las CC en cada uno de los bordes
- Montar una función que dados M, N, dx (dy) nos devuelva A_{xx} (A_{yy})
- Montar una función que dados M, N, dx (dy) y los bordes nos devuelva b_{xx} (b_{yy})
- Para obtener f, se recomienda evaluar f con un meshgrid y hacer un reshape de la matriz correspondiente
- Armar $A = A_{xx} + A_{yy}$, $\ b = f + b_x + b_y$ y resolver el sistema lineal resultante

Recomendamos el uso de la instrucción mathshow de Python para representar las matrices A_{xx}, A_{yy} y ver si las hemos montado como corresponde.

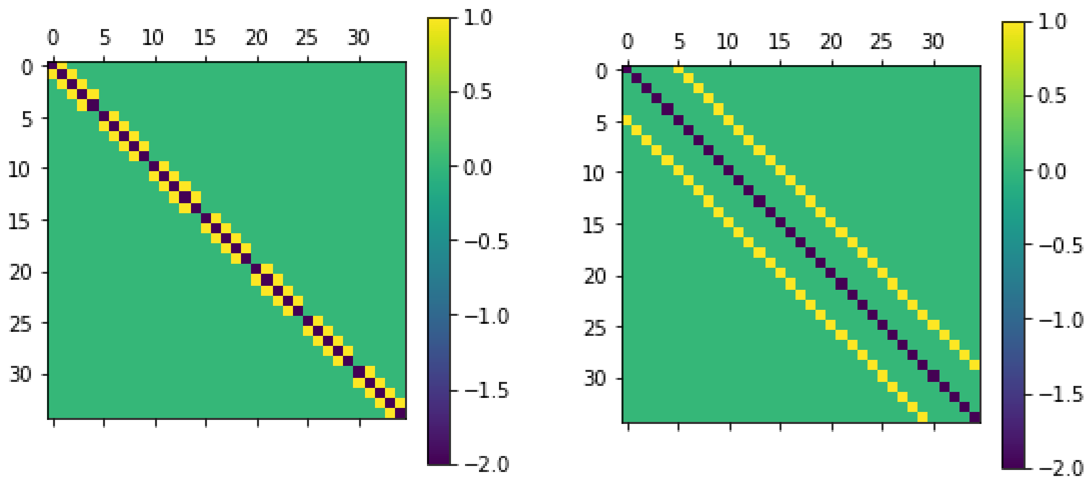


Figure 2: Representación de las matrices A_{xx} (izqda) y A_{yy} (izqda) con matshow. Para esta representación hemos elegido $M = 7$ y $N = 9$, $\Delta_x = \Delta_y = 1$. Fijaos que matshow nos permite ver que la programación de las matrices coincide con los cálculos previos. Apreciamos la estructura diagonal a bloques en A_{xx} (en particular $N - 2 = 7$ bloques de matrices cuadradas $(M-2) \times (M-2)$ y las tres diagonales en A_{yy} (una la principal y las otras dos arrancando en los elementos $[0, M-1]$ y $[M-1, 0]$).

Primer ejemplo de aplicación del Poissonator

Vamos empezar resolviendo el problema (obtenido de [BFB15])

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{13}$$

para (x,y) en el conjunto $R = \{(x,y) \mid 0 < x < 0.5,\ 0 < y < 0.5\}$.

Las condiciones de frontera

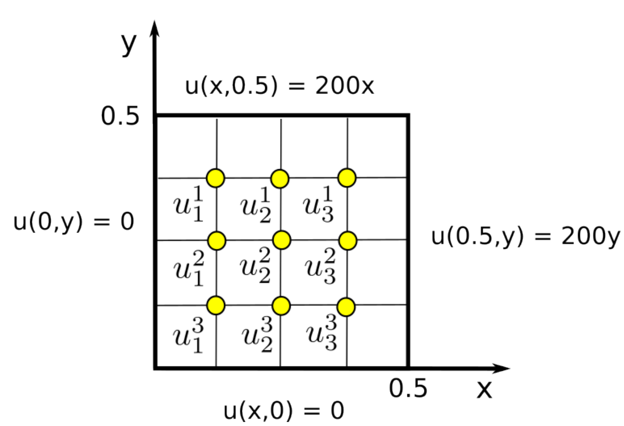
$$u(0,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,0.5) = 200x, \quad u(0.5,y) = 200y. \tag{14}$$

Probemos que tal funciona tu Poissonator.

- Selecciona $M = N = 5$ (por tanto, en este caso, $\Delta x = \Delta y = \Delta = 1/8$)
- Para ese mallado, el sistema resultante es (puedes comprobarlo si quieres)

$$\frac{1}{\Delta^2}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\Delta^2}\begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- Comprueba con mathshow que tu matriz A coincide con (15).
- Imprime tu vector b y chequea que coincide con (15)
- Una vez comprobado que A y b son correctas, resuelve el sistema y comprueba la bondad de tu solución comparándola con el resultado teórico $u(x,y) = 400xy$
- Finalmente, comprueba la potencia de tu Poissonator resolviendo el sistema para un mallado general $M \neq N$



Segundo Ejemplo de Aplicación

Comprueba la eficiencia y comodidad de tener un Poissonator resolviendo el siguiente problema (también obtenido de [BFB15])

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = xe^y \tag{16}$$

para (x, y) en el conjunto $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 2,\ 0 < y < 1\}$.

Con las condiciones de frontera

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = xe, \quad u(2, y) = 2e^y. \tag{17}$$

Compara tus resultados con la solución exacta $u(x, y) = xe^y$

References

[BFB15] Richard L Burden, J Douglas Faires, and Annette M Burden. *Numerical analysis*. Cengage learning, 2015.