Análisis Numérico de EDPs: Práctica 2

Alberto Pérez Cervera y Joaquín Domínguez de Tena[1]

[1]Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

14 de marzo de 2023

1. Indicaciones

Se debe subir al Campus Virtual, antes de la fecha especificada, un fichero comprimido con

- un informe escrito en formato pdf
- los scripts realizados para resolver la práctica
- posible material adicional

El informe debe responder a las preguntas que se plantean a lo largo de la práctica. Éstas vienen enumeradas con letras y en negrita. Se incluye al principio de cada sección la puntuación correspondiente a todos los apartados planteados en la sección. No se incluye una puntuación por apartado, debido a que algunos se complementan entre ellos y pueden requerir una evaluación conjunta. Se valorará la presentación, coherencia y explicación en el informe. También se valorará la **concisión** en cuanto a texto de éste. Se valorará también la eficiencia y documentación de los códigos (la documentación se hará con comentarios en el propio código).

2. Introducción (1p)

A lo largo de esta práctica vamos a resolver la ecuación del calor para un medio isótropo y homogéneo en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{1}$$

donde $f \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])$, como ya vimos en las clases de teoría.

Cuando el medio no es isótropo, la ecuación del calor toma otra forma, por ejemplo, en dos dimensiones espaciales podría tomar la forma:

$$u_t(x,y,t) - k_1 u_{xx}(x,y,t) - k_2 u_{yy}(x,y,t) = f(x,y,t) \qquad \forall (x,y,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{2}$$

donde $k_1, k_2 > 0$ son constantes características del medio.

a) **Busca un cambio de coordenadas lineal de manera que la ecuación (2) se transforme en (1). ¿Cómo se transforma el dominio?**

b) **Supongamos por simplicidad una única variable espacial. Justifica que la solución para $k > 0$ y $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ de**

$$\begin{cases} u_t(x,t) - k u_{xx}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

viene dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t k}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4tk}} u_0(y)dy$$

Concluye pues que la difusión es más rápida si k es mayor.
Pista: Para resolver este apartado puedes utilizar el cambio de variable del apartado anterior y usar la solución explícita que conocemos para la ecuación del calor en $\mathbb{R}$. Otra vía es haciendo un cambio de variable en t.

Además, para que el problema esté bien puesto, se deben añadir condiciones iniciales y de frontera. Nosotros trataremos Dirichlet, Neumann y Robin:

1. **Dirichlet:** $u(x,t) = g^D(x,t) \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$
2. **Neumann:** $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g^N(x,t) \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$
3. **Robin:** $\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + \beta(x,t)u(x,t) = g^R(x,t) \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada espacial de u en la dirección de la normal exterior al dominio y $\alpha, \beta \in C^\infty(\partial\Omega \times [0,T])$ con $\alpha, \beta \geq 0$ y $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ (Véase que las condiciones Robin incluyen a las anteriores).

3. Principios de Comparación (1.5p)

Nosotros estudiamos en las clases de teoría el principio del máximo cuando se tenían condiciones de Dirichlet, así como los principios de comparación que éste implicaba. Estos principios se pueden generalizar:

Theorem 3.0.1 (Principio de comparación con otras condiciones frontera)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio regular y acotado y* $u_1, u_2 \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])$ *soluciones de los problemas:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t) - \Delta u_i(x,t) = f_i(x,t) \qquad & \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0^i(x) \qquad & \forall x \in \Omega \\ Bu = g_i(x,t) \qquad & \forall x \in \partial\Omega \times [0,T] \end{aligned} \tag{3}$$

para $i = 1,2$*, donde las funciones* f_i, u_0^i, g_i *son regulares y donde* B *representa alguna de las condiciones frontera anteriormente expuestas (Dirichlet, Neumann o Robin). Entonces, si* $f_1 \geq f_2$*,* $u_0^1 \geq u_0^2$ *y* $g_1 \geq g_2$*, se tiene que:*

$$u_1(x,t) \geq u_2(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T] \tag{4}$$

Demostración. La prueba de este resultado se puede encontrar en [Joh69]. Se obtiene a partir de una pequeña variación de la prueba del Teorema 8. □

c) **Prueba que para condiciones frontera homogéneas (es decir,** $g^D = g^N = g^R \equiv 0$**) y mismo término de creación** $f \geq 0$ **las soluciones de los problemas de Dirichlet, Robin y Neumann para una misma condición inicial** $u_0 \geq 0$ **están ordenadas, y se tiene que** $0 \leq u_D \leq u_R \leq u_N$**. Da una interpretación física a que** $u_D \leq u_N$ **de acuerdo a la interpretación que se dio en clase de dichas condiciones frontera.**

d) **Pon un contraejemplo a lo anterior si no hay condiciones frontera homogéneas**

4. La masa total (1p)

Nosotros vamos a solucionar numéricamente el problema con condiciones homogéneas Neumann en un intervalo acotado, es decir:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) \qquad & \forall (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad & \forall x \in (0,1) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \qquad & \forall t \in [0,T] \end{aligned} \tag{5}$$

Resolveremos el problema considerando como término fuente la función:

$$f(x) = \begin{cases} S(x,t) = (1+\cos(t))x(1-x) & si \quad t \leq \pi \\ 0 & si \quad t > \pi \end{cases} \tag{6}$$

y como la condición inicial:

$$u_0(x) = x^2(1-x)^2 \tag{7}$$

e) **Calcula analíticamente la masa total en función del tiempo** $M(t) = \int_0^1 u(x,t)dx$**. Haz una gráfica de** $M(t)$**. Pista: Integra la ecuación y utiliza la condición frontera.**

5. Planteamiento numérico (1.5p)

Vamos a plantear ahora el problema en el marco numérico. Para ello consideraremos una discretización de $N+1$ puntos del intervalo $[0,1]$. Así $\Delta x = \frac{1}{N}$. Además discretizaremos el intervalo temporal $[0,T]$ en $M+1$ puntos. Así $\Delta t = \frac{T}{M}$

f) **Escribe el esquema θ asociado al problema anterior (5). Discute los pros y contras (si hubieran) de considerar $\theta = 1$, $\theta = 0{,}5$ y $\theta = 0{,}0$.**

g) **Deduce como implementar correctamente las condiciones frontera y escribe el esquema en forma matricial con la condición frontera ya implementada.**

h) **¿Cómo se implementaría la condición frontera de tipo Dirichlet $u(0,t) = u(1,t) = 0$? Escribe el esquema matricial asociado a esta condición de frontera.**

6. Resultados Numéricos (5p)

Ha llegado el momento de escribir un programa que implemente el método que has desarrollado. Para ello toma $T = 5$, y elije los valores de Δx, Δt y θ que consideres oportunos (comenta brevemente en que criterios te has basado para elegirlos). Se valorará la eficiencia en la implementación así como las explicaciones del proceso en el código. Recomendamos programar los códigos de forma modular.

i) **Implementa el método para solucionar el problema (5) y representa la solucion obtenida.**

j) **Haz una gráfica de la evolución de la masa total $M(t)$. ¿Concuerda con la esperada teóricamente?**

k) **Repite el apartado i) para las condiciones Dirichlet $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Comprueba, tal y como se dedujo teóricamente que la solución con las condiciones homogéneas Dirichlet se encuentra por debajo de la solución con las condiciones homogéneas Neumann. Modificando el dato inicial (y, si es necesario, poniendo $f = 0$) y muestra que si el dato inicial no es positivo entonces no necesariamente se tiene que la solución Neumann mayora a la Dirichlet. ¿Puedes dar una explicación física a este hecho?**

Referencias

[Joh69] B. E. Johnson. Book Reviews. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-44(1):662–662, 01 1969.