UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

APELLIDOS	NOMBRE	HOJA Nº
ASIGNATURA	DNI	
CURSO / GRUPO	FECHA	

Problemas Hiperbólicos

1) Problemas hiperbólicos

Ejemplos más comunes:

1) Hiperbólicas 2º Orden: $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ (Acústica/Ondas)
2) Schrödinger: $i\,\partial_t u + \Delta u = 0$
3) Advección lineal (Transporte): $u_t - a u_x = 0$
4) Burger's no viscosa: $u_t + u u_x = 0$
   - simplificada de Navier Stokes
   - Viscosa con $\mu \Delta u$ a la derecha

- Muchos de ellos derivan de leyes de conservación y tienen la forma

$$\boxed{u_t + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0} \qquad (1)$$

2) Leyes de Conservación

- Sea u una densidad de magnitud conservada
- Sea $\vec{F}$ el flujo de dicha magnitud
- ley de Conservación

$$\frac{d}{dt}\int_{Q} u(x,t)\,dx = -\int_{\partial Q} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$$

- Usando Teorema Divergencia y metiendo derivadas

$$\int_{Q} u_t(x,t)\,dx = -\int_{Q} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

- Como esto es cierto para todo Q:

$$\boxed{u_t + \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0} \qquad (2)$$

- A partir de aquí se suponen cosas sobre el Flujo

1) Ec Calor: $\vec{F} = -\vec{\nabla u} \Longrightarrow u_t - \Delta u = 0$

2) Tráfico:

- Sea v la velocidad de los coches
- v depende de la densidad de coches
- Así $F = \rho \cdot v(\rho)$
- Ecuación

$$\rho_t - \frac{\partial}{\partial x}(\rho v(\rho)) = 0$$

3) Burgers:

- $F = \frac{u^2}{2} \Longrightarrow u_t + u \cdot u_x = 0$

4) Otra de trasporte general

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0$$

3) Ecuación de trasporte lineal

$$\boxed{(ET)} \begin{cases} u_t + a(x,t)\, u_x = f(x,t) & x \in \mathbb{R}^d \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

donde $\cdot\, a, f, u_0$ son continuas

- Vamos a intentar solucionar este problema.

4) Curvas Características

- Buscamos trasformar nuestra EDP en una ~~EDE~~ EDO.

a) a es Constante

$$u_t + a\, u_x = 0 \qquad a \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

- Es una onda propagándose en una dirección.
- Motivados por ello buscamos esa dirección
- Consideramos una curva espacio-temporal

$$\gamma(s) = (x(s), t(s))$$

APELLIDOS		NOMBRE	HOJA Nº
ASIGNATURA		DNI	
CURSO	GRUPO	FECHA	

- Consideramos el valor de u a lo largo de dicha curva (una solución)

$$U(\gamma(s)) = u(x(s), t(s))$$

- Derivamos

$$\boxed{\frac{d}{ds} u(\gamma(s)) = u_t(\gamma(s)) \cdot t'(s) + u_x(\gamma(s)) \cdot x'(s)}$$

- Claro, si ponemos

$$\begin{cases} x'(s) = a \\ t'(s) = 1 \end{cases} \qquad (4)$$

obtenemos

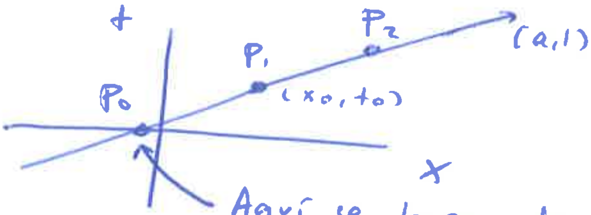
$$u_t(\gamma(s)) + a\, u_x(\gamma(s)) \overset{\text{Por ser solución del Problema (3)}}{=} 0$$

- Así

$$\frac{d}{ds} u(\gamma(s)) = 0 \Longrightarrow \boxed{u(\gamma(s)) = cte}$$

- Vamos a pintar la curva $\gamma(s)$. Integrando (4):

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + s \cdot a \\ t(s) = t_0 + s \end{cases}$$



Aquí se sabe vale u

$$u(P_0) = u(P_1) = u(P_2)$$

- Queremos saber cuánto vale $\underline{u(x,t)}$. Buscamos una curva que pase por (x_0,t_0) y sea característica

$$\Rightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + as \\ t(s) = t_0 + s \end{cases}$$

- Así $u(x_0,t_0) = u(x(0), t(0)) = u(x(-t_0), t(-t_0)) = u(x_0 - ta, 0)$

$$= u_0(x_0 - ta)$$

– Así la solución a

$$\begin{cases} U_t + a U_x = 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \end{cases}$$ es $\boxed{u(x,t) = U_0(x-at)}$

b) a no es constante

$$\begin{cases} U_t + a(x,t) u_x = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \quad (4)$$

– La filosofía es la misma

– Tomamos una curva $\gamma(s) = (x(s), t(s))$

$$\frac{d}{ds}(u(x(s),t(s))) = U_t(\gamma(s)) \cdot t'(s) + U_x(\gamma(s)) \cdot x'(s) \quad (5)$$

– Poniendo

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = a(x(s),t(s)) \end{cases} \quad (6)$$

(*) Esto tiene solución Global para todo tiempo si a es Lipschitz global (Teoría Cauchy Lipschitz)

tenemos que

$$\frac{d}{ds}(u(\gamma(s))) \overset{(4)+(5)+(6)}{=} \cancel{0}\ f(\gamma(s)) \Longrightarrow \boxed{u(\gamma(s)) = cte} \quad (7)$$

– Sea

$U := u \circ \gamma$

$F := f \circ \gamma$

entonces reescribimos (7) como

$$\boxed{\frac{d}{ds}(U(s)) = F(s)} \quad (8)$$

– Eso es una ODE con resolución directa

$$\boxed{U(s) = U(s_0) + \int_{s_0}^{s} F(\sigma)\, d\sigma} \quad (9)$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

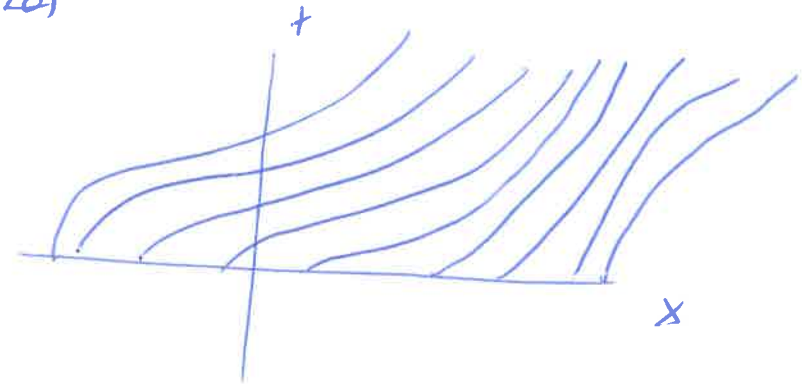
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

APELLIDOS		NOMBRE	HOJA Nº
ASIGNATURA		DNI	
CURSO	GRUPO	FECHA	

- Volviendo a u y f:

$$\boxed{u(x(s),t(s)) = u(x(s_0),t(s_0)) + \int_0^s f(x(\sigma),t(\sigma))\,d\sigma} \qquad (10)$$

- Tenemos pues nuestras curvas características que ya no son rectas



- Son crecientes en tiempo ($t'=1$)
- Existen dado (x,t) valor inicial
- De este modo llenan todo el espacio y no se intersectan. Además siempre cruzan $t=0$

- Ya podemos pues averiguar el valor de $u(x,t)$. Buscamos una curva característica que pase por (x,t):

$$\begin{cases} t(s) = t+s \\ x(s) = x + \int_0^s f(x(\sigma),t(\sigma))\,d\sigma \end{cases}$$

- Ahora en la fórmula (10) queremos conocer $u(x(s_0),t(s_0))$. Escogemos pues s_0 tal que $t(s_0)=0 \Rightarrow s_0=-t$ y entonces

$$u(x(s_0),t(s_0)) = u\left(x+\int_0^{-t} f(x(\sigma),t(\sigma))\,d\sigma, 0\right) = u_0\left(x+\int_0^{t} f(x(\sigma),t(\sigma))\,d\sigma\right)$$

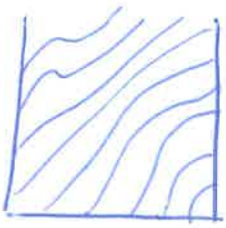
- Así tenemos por (10)

$$\boxed{u(x,t) = u_0\left(x+\int_0^{-t} a(x(\sigma),t(\sigma))\,d\sigma\right) + \int_{-t}^{0} f(x(\sigma),t(\sigma))\,d\sigma}$$

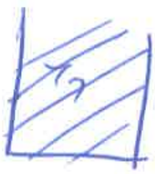
- Con todo esto tenemos Existencia y Unicidad de soluciones (Recordemos que se ha pedido "a" Lipschitz global para la existencia de curvas características)

Observación: Si $f \equiv 0$ entonces u es constante a lo largo de las curvas características.

5) Problemas con condición frontera



- El método será el mismo pero ~~cada~~ la curva característica podrá intersecar la frontera $\Longrightarrow$ Aparecen los datos de frontera
- No deberá haber contradicciones entre los datos frontera e iniciales



— Datos frontera a la izquierda e iniciales. (Problema 1)

6) Ejemplos:

① $\begin{cases} u_t - u_x = 0 & \mathbb{R}^d \\ u_0(x) = e^{x^2} \end{cases} \Longrightarrow u(x,t) = e^{(x+t)^2}$

②

$$\begin{cases} u_t + x u_x = 1 \\ u(x,0) = \cos(x) \end{cases}$$

Curvas:

$$\begin{matrix} x'(s) = x(s) \\ t'(s) = 1 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} x(s) = d e^s \\ t(s) = s + k \end{cases}$$

- Pido que

$$\begin{matrix} x(0) = x \\ t(0) = t \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} x(s) = x e^s \\ t(s) = t + s \end{cases}$$

- Así

$$u(x,t) = u_0(x(-t)) + \int_{-t}^{0} 1 \, d\sigma$$

$$\boxed{u(x,t) = \cos(x e^{-t}) + t}$$

- Compruebo que cumple la Cond Inicial + Ecuación

6) Ecuaciones de transporte no lineal

$$u_t + \partial_x (f(u)) = 0$$

Ejemplo: Burgers $f(u) = \frac{1}{2} u^2$

$$u_t + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2\right) = 0$$

$$\boxed{u_t + u \cdot u_x = 0} \quad (1)$$

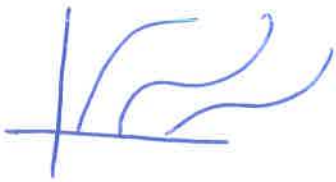
- Vamos a usar el mismo método, a ver qué pasa:

Características:

$$\begin{cases} x'(s) = u(x(s), t(s)) \leftarrow \text{Depende de la solución} \\ t'(s) = 1 \end{cases}$$

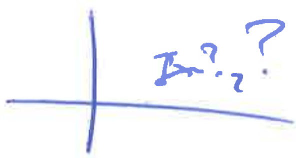
- Para construir la curva debemos saber lo que vale la solución!!!!!

Antes



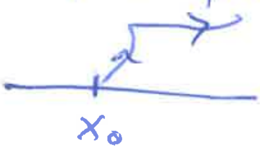
independiente de la solución

Ahora



Dependen de la solución

- Pero conocemos lo que vale la solución en $(x, 0)$ (Valor inicial). Vamos a intentar integrar!!
- Tomamos x_0 y buscamos la curva característica que pase por $(x_0, 0)$



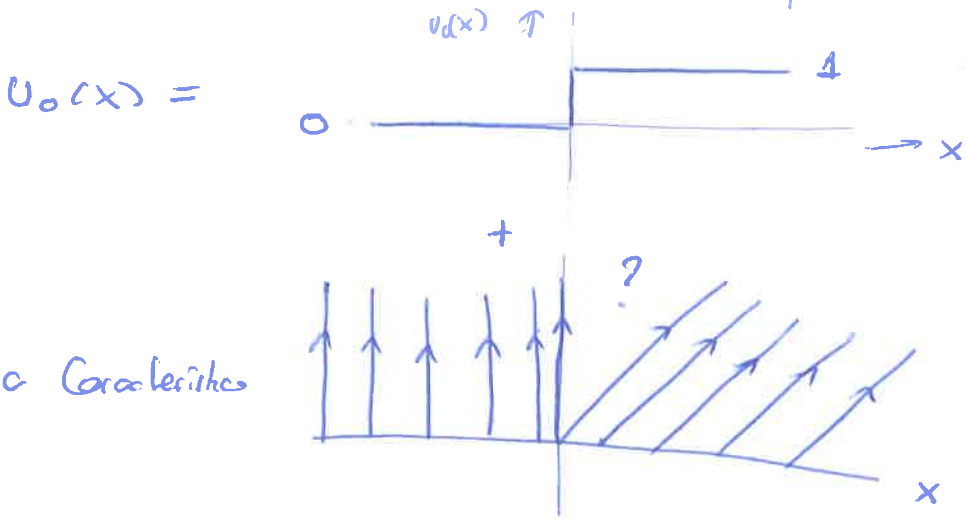
$$\begin{cases} x'(s) = u(x(s), t(s)) \\ t'(s) = 1 \end{cases}$$

- Lo bueno es que sabemos que u es constante a lo largo de la curva característica así que

$$x'(s) = u(x(s), t(s)) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$$

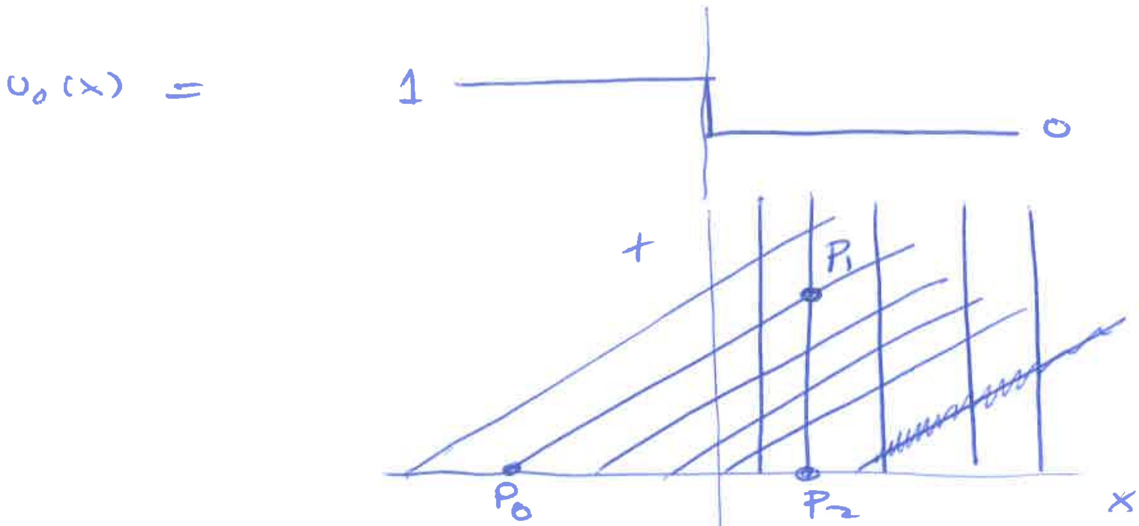
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(s) = x_0 + u_0(x_0)\,s \\ t(s) = s \end{cases}} \qquad (12)$$

- Ya tenemos curva característica! Aunque expresa en $(x_0, 0)$
- Vamos a pintar las características para este dato inicial



Curva Característica

- Hay un espacio <u>SIN CURVAS CARACTERÍSTICAS</u>
- Consideramos otro caso



- Las curvas características <u>se intersecan</u> !!!
- ¿Cuánto vale $u(P_1)$ $\begin{cases} u_0(P_0) \\ u_0(P_2) \end{cases}$??

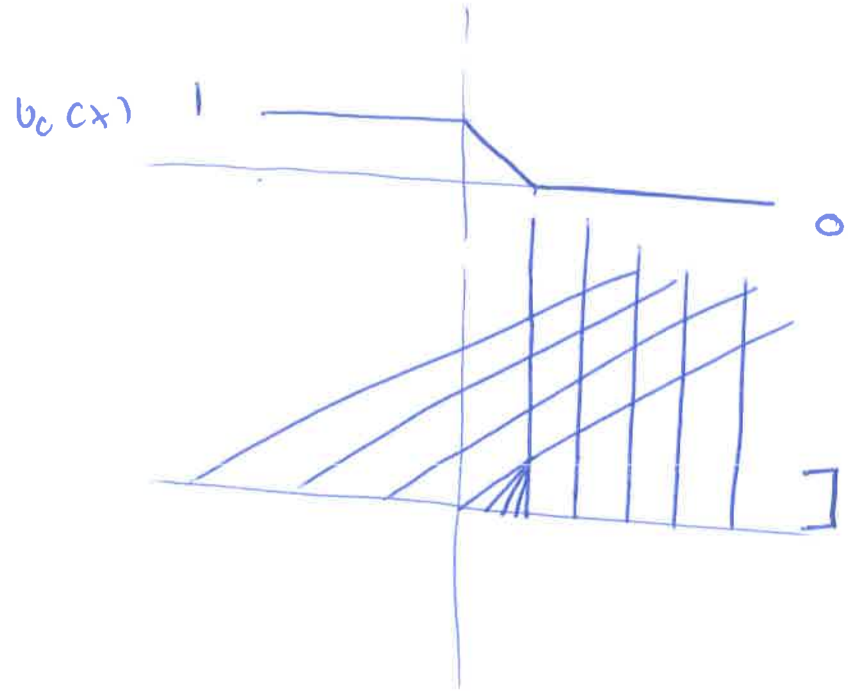
APELLIDOS		NOMBRE	HOJA Nº
ASIGNATURA		DNI	
CURSO	GRUPO	FECHA	

- Lo que ocurre es que, como las curvas características se tienen que construir desde $(x_0, 0)$ ya nada nos asegura que
  1) Llenen el espacio
  2) No se corten

- Ya no hay Soluciones Clásicas

- Es cierto que si $v_0(x)$ es Lipschitz globalmente, existe solución clásica al menos durante un intervalo de tiempo

Ej:



En este intervalo hay solución clásica!

7) Solución Generalizada

Definición

– Dado la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0$$

se dice que

u es generalizada $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (u \cdot \varphi_t + f(u) \cdot \varphi_x)\,dx\,dt = 0$

$$\forall \varphi \in \underbrace{\mathcal{C}_c^{\infty}}_{\text{Clase Infinita y de Soporte Compacto}}(\mathbb{R}^2)$$

Proposición: Si u es solución clásica $\Longrightarrow$ u es solución generalizada

Dem: $\displaystyle\iint \left(u_t \cdot \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial x}(f(u))\right)\varphi\right)dx\,dt = 0$

– Como φ es regular y tiene soporte compacto se puede integrar por partes (los términos frontera desaparecen) y:

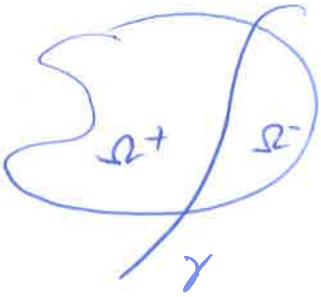
$$\iint (u \cdot \varphi_t + f(u) \cdot \varphi_x)\,dx\,dt = 0$$

– Es complicado saber si algo es solución generalizada.
– Por ello tenemos el teorema

Teorema de las Curvas de Choque

– Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si u es solución clásica en Ω^+ y Ω^- tal que Ω^+ y Ω^- son una partición de Ω delimitado por la curva $\gamma(t) = (x(t), t)$

entonces u es solución generalizada

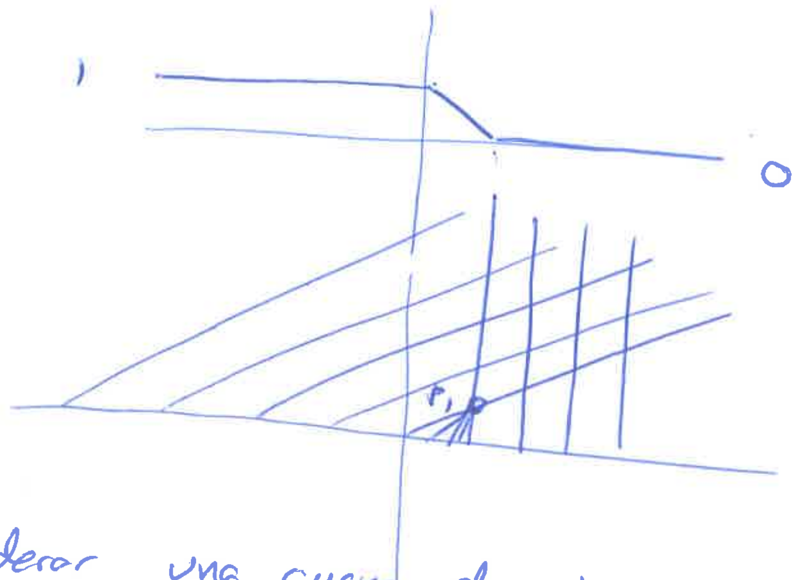


$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{f(u)^+ - f(u)^-}{u^+ - u^-} \quad \text{en la curva}}$$

donde $+$ se refiere al valor de u por la izda y $-$ por la derecha.

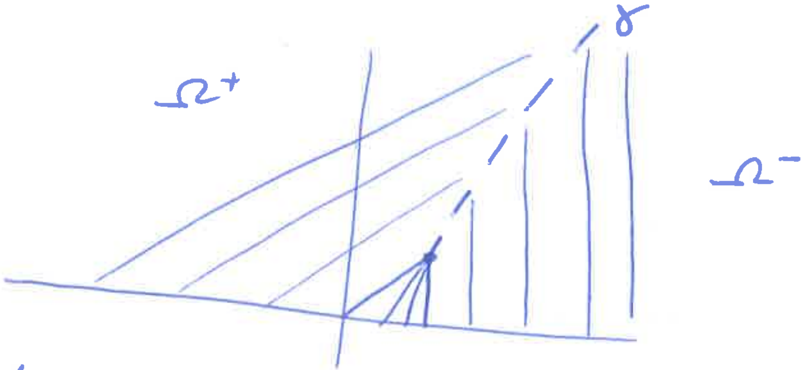
Ejemplo Burgers

$U_0(x) =$



Curvas Características

- Podemos considerar una curva de choque en P_1



- En Ω^+ la función u valdrá 1
- En Ω^- — — — — — — 0
- Pongamos las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u)^+ - f(u)^-}{u^+ - u^-} = \frac{\frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2}{1-0} = \frac{1}{2}$$

- La curva será $\boxed{x(t) = 1 + \frac{(t-1)}{2}}$
- Una solución generalizada pues será:

Si $\boxed{t \leq 1}$

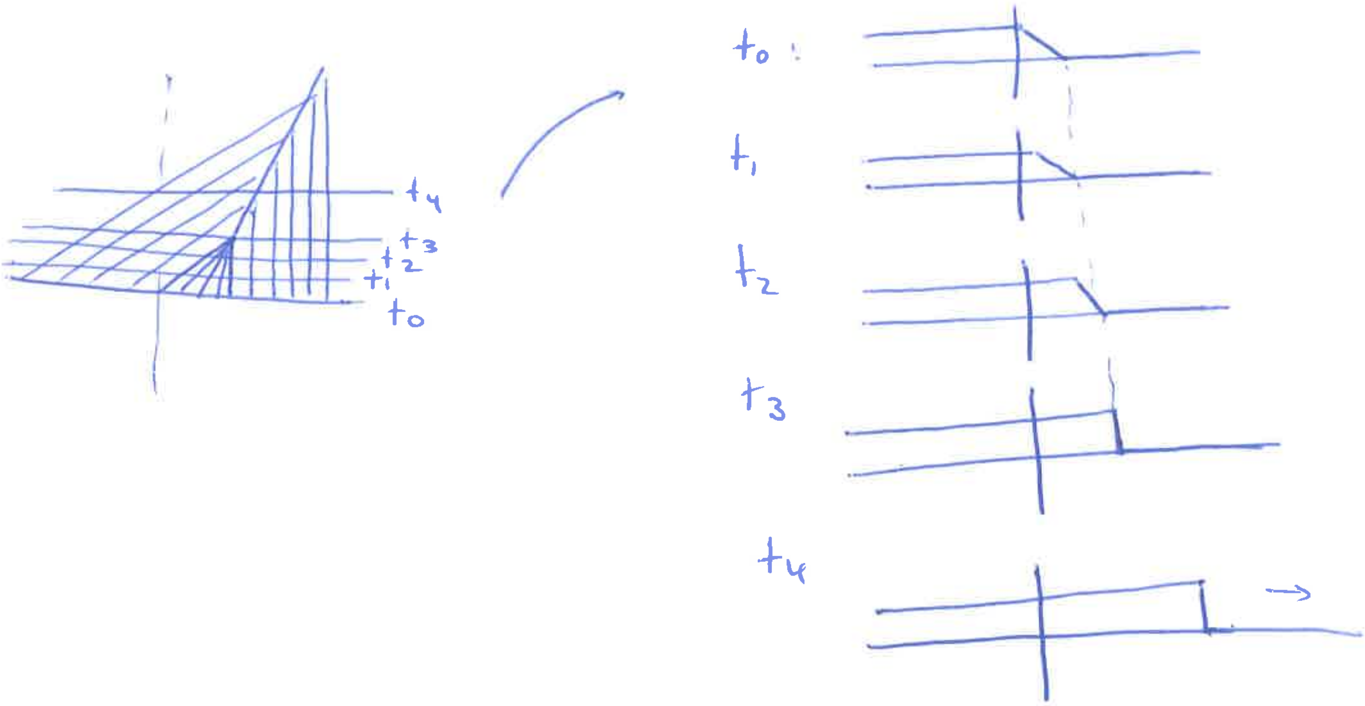
$$U(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t - x \geq 0 \\ 1 - (t-x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\boxed{t > 1}$

$$U(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x - \left(1 + \frac{(t-1)}{2}\right) > 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Esto se ha obtenido analizando las características anteriores.

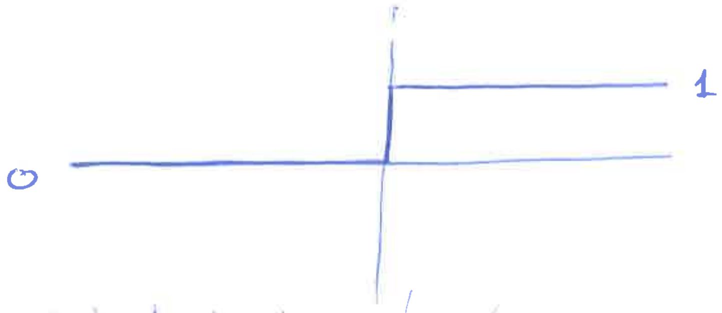
¿Qué está ocurriendo?



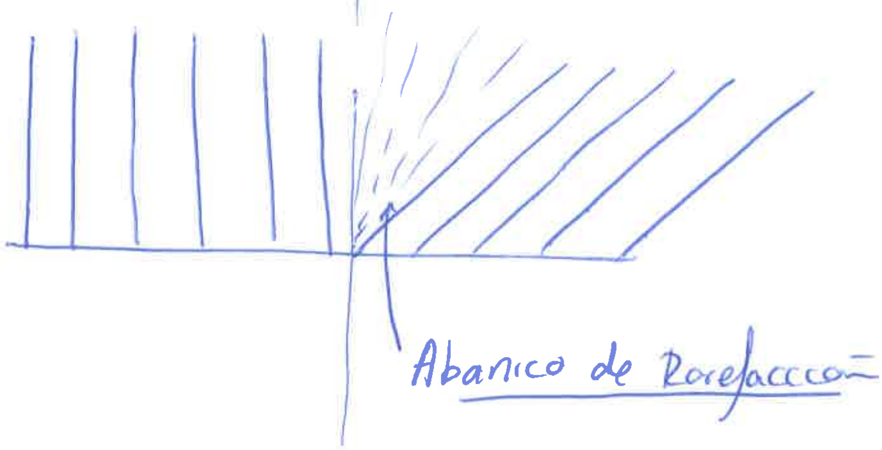
APELLIDOS		NOMBRE	HOJA Nº
ASIGNATURA		DNI	
CURSO	GRUPO	FECHA	

Otros Casos: Abanico de Rarefacción (De nuevo Ec. Burgers)

$U_0(x) =$



Curvas Características



- Aparecen en la discontinuidad una serie de características que barren todos los valores de u entre 0 y 1
- Es como si todo el intervalo $[0,1]$ fuera imagen de $u_0(0)$
- En ese caso tendremos curvas con todas las pendientes entre 0 y 1

$$\begin{cases} x'(s) = c \\ t'(s) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(s) = c\cdot s \\ t(s) = s \end{cases}$$

y el valor de u en dicha curva será c porque necesitamos $x'(s) = u(x(s), t(s))$.

- Así en la zona sin características $\boxed{u(x,t) = \frac{x}{t}}$
- Por tanto la solución generalizada será

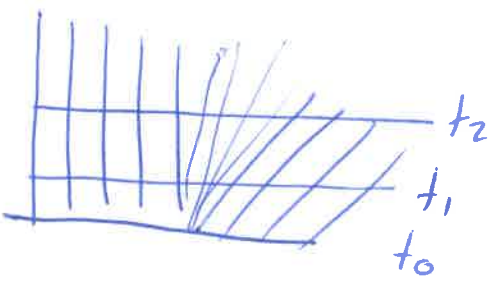
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x}{t} & \text{si } x \ge 0 \quad x \le t \\ 1 & \text{si } x \ge t \end{cases} \quad (*)$$

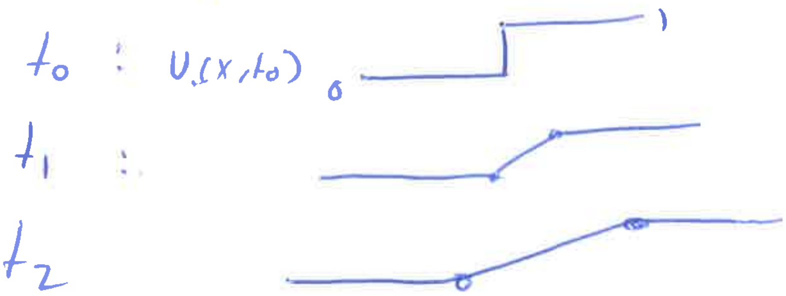
- Se tiene que este será una solución generalizada
- En este caso no hay choques y basta ver que efectivamente $\frac{x}{t}$ es solución del problema

$$u_t + u u_x = 0$$
$$\downarrow$$
$$-\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t}\cdot\frac{1}{t} = 0$$

porque la solución es continua y cumple la ecuación ~~en todo punto~~ salvo en los cambios de trozo (que son curvas C^1)

- Todo esto está fundamentado pero se sale de los objetivos del curso así que no entraremos en mucho más detalle.
- Como se observa, la ecuación de Burgers genera una solución NO CLÁSICA y de hecho discontinua (o con derivada discontinua) por lo que será muy compleja de tratar con métodos numéricos.
- Veamos cómo es (*) la solución:





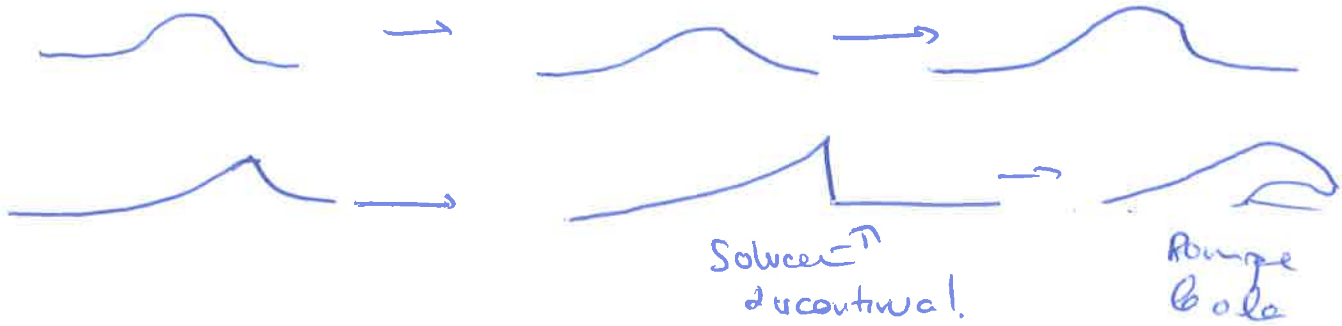
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

APELLIDOS		NOMBRE	HOJA Nº
ASIGNATURA		DNI	
CURSO	GRUPO	FECHA	

- ¿Dónde aparece este tipo de comportamientos?
- En muchos modelos y sistemas físicos

Ej: Olas del mar



- también en modelos de cambios de fase, al estudiar el comportamiento de ondas transónicas, modelos de tráfico (frenazos) etc.

Tratamiento Numérico

- O bien se resuelve computacionalmente por el método de características en cada paso. Ej: Godunov
- O bien se introducen términos difusivos o dispersivos

Lax-Friedrich

$$U_t + UU_x = \varepsilon U_{xx}$$

Ec. Burgers viscosa

7) Sistemas lineales

- Lo mismo que hemos visto para $u_t - a u_x = 0$ se generaliza a cuando $u \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\partial_t \vec{u} + A \cdot \partial_x \vec{u} = \vec{0}} \quad (13)$$

- Si suponemos que A es diagonalizable y $\lambda \neq 0$ entonces encontramos R matriz de paso tal que $\boxed{\Lambda = R^{-1} A R}$ donde Λ es diagonal.
- Denotando $\boxed{z = R^{-1} u}$ transformamos (13) en

$$\partial_t R^{-1} u + R^{-1} A \, \partial_x u = 0$$

$$\partial_t R^{-1} u + R^{-1} A R \cdot \partial_x R^{-1} u = 0$$

$$\boxed{\partial_t z + \Lambda \partial_x z = 0}$$

y esto es una serie de EDPs desacopladas que sabemos resolver.

Ejemplo

$$\begin{cases} u_t - c^2 v_x = 0 \\ v_t - u_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u_0(x) = 0 \\ v_0(x) = \sin(x) \end{array} \quad (14)$$

- escribimos como matriz

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x = 0$$

- Autovalores de A $\begin{cases} \lambda_1 = -c \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 1/c \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = c \implies \begin{pmatrix} 1 \\ -1/c \end{pmatrix} \end{cases}$

APELLIDOS		NOMBRE	HOJA Nº
ASIGNATURA		DNI	
CURSO	GRUPO	FECHA	

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/c & -1/c \end{pmatrix} \quad R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

- De este modo haciendo $z = R^{-1} u$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(u + cv) \\ z_2 = \frac{1}{2}(u - cv) \end{cases} \qquad (15)$$

y la ecuación es

$$\begin{cases} (z_1)_t - c \cdot (z_1)_x = 0 \\ (z_2)_t + c \cdot (z_2)_x = 0 \end{cases}$$

- Estas se resuelven por el método de características

$$\begin{cases} z_1(x,t) = z_1(x+ct, 0) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + c\, v_0(x+ct)) \\ z_2(x,t) = z_2(x-ct, 0) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct) - c\, v_0(x-ct)) \end{cases}$$

así se usado (14)

$$\begin{cases} z_1(x,t) = \frac{c}{2}\sin(x+ct) \\ z_2(x,t) = -\frac{c}{2}\sin(x-ct) \end{cases} \qquad (16)$$

- Despejando u y v de (15) y usando (16):

$$\boxed{\begin{cases} u(x,t) = \frac{c}{2}(\sin(x+ct) - \sin(x-ct)) \\ v(x,t) = \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) \end{cases}}$$

- Notas en parte basadas en los apuntes ~~de~~ que me proporcionaron Félix del Teso y Eduardo Muñoz Hernández, a quienes agradezco su ayuda.