Análisis Numérico de EDPs: Práctica 1

Alberto Pérez Cervera y Joaquín Domínguez de Tena[1]

[1]Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

21 de febrero de 2023

1. Indicaciones

Se debe subir al Campus Virtual, antes de la fecha especificada, un fichero comprimido con

- un informe escrito en formato pdf
- los scripts realizados para resolver la práctica
- posible material adicional

El informe debe responder a las preguntas que se plantean a lo largo de la práctica. Éstas vienen enumeradas con letras y en negrita. Se incluye al principio de cada sección la puntuación correspondiente a todos los apartados planteados en la sección. No se incluye una puntuación por apartado, debido a que algunos se complementan entre ellos y pueden requerir una evaluación conjunta. Se valorará la presentación, coherencia y explicación en el informe. También se valorará la **concisión** en cuanto a texto de éste. Se valorará también la eficiencia y documentación de los códigos (la documentación se hará con comentarios en el propio código).

2. Problemas mal puestos (2p)

Considera el siguiente problema de evolución:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t) & t>0,\ x,y\in(0,1) \\ u(x,y,0)=\sin(\pi x)\sin(\pi y) & x,y\in(0,1) \\ u(x,0,t)=u(x,1,t)=u(0,y,t)=u(1,y,t)=0 & t>0,\ x,y\in(0,1) \end{cases} \tag{1}$$

donde $u(x,y,t)$ está definida en $x,y\in[0,1]$ y $t\geq 0$, tiene dos derivadas en x e y y una derivada en t.

a) **Encuentra $a\in\mathbb{R}$ para que**

$$u(x,y,t) = e^{at}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \qquad x,y\in(0,1)\ \ t>0$$

sea una solución de (1).

b) **Demuestra que el problema (1) no está bien puesto ya que no hay dependencia continua del dato inicial. Para ello, dado $T>0$ y $\varepsilon>0$, encuentra $f\in C^\infty((0,1)^2)$ tal que $|f(x,y)|<\varepsilon$ para todo $x,y\in(0,1)$ y la solución del problema:**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,y,t) = 2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} & t>0,\ x,y\in(0,1) \\ v(x,y,0)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)+f(x,y) & x,y\in(0,1) \\ v(x,0,t)=v(x,1,t)=v(0,y,t)=v(1,y,t)=0 & x,y\in(0,1)\ \ t>0 \end{cases} \tag{2}$$

cumple que $\sup\left\{|v(x,y,T)-u(x,y,T)| \ :\ x,y\in(0,1)^2\right\}>1$**.**

3. Diferencias finitas (4p)

Las diferencias finitas son una forma de aproximar el valor de una derivada en un punto a través de una combinación lineal de la propia función evaluada en ese punto y en sus vecinos. Matemáticamente,

$$D_h(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j f(x \pm jh) \tag{3}$$

Ejemplos de diferencias finitas incluyen las conocidas como derivada forward y derivada centrada

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{4}$$

que, como sabemos, nos permiten aproximar la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ con un error $\mathcal{O}(h)$ y $\mathcal{O}(h^2)$, respectivamente.

En particular, vimos que ambas ecuaciones se obtenían mediante combinaciones lineales "adecuadas"de diferentes series de Taylor. Sorprendentemente, existen diferentes combinaciones dando aproximaciones forward y centradas de ordenes superiores. El objetivo de este apartado es encontrar algunas de ellas.

Sea f una función suficientemente diferenciable y con todas sus derivadas acotadas. Dado un $h > 0$, se pide:

c) **Considerar las diferencias finitas de la forma forward**

$$\Delta_h f(x) = \frac{a_0 f(x) + a_1 f(x+h) + a_2 f(x+2h) + a_3 f(x+3h)}{h}$$

Determinar los valores de $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ que hagan que $\Delta_h f(x)$ sea una discretización de $f'(x)$ del mayor orden posible.

d) **Considerar las diferencias finitas centradas de la forma**

$$\delta_h f(x) = \frac{b_{-2} f(x-2h) + b_{-1} f(x-h) + b_1 f(x+h) + b_2 f(x+2h)}{h}$$

Determinar los valores de $b_{-2}, b_{-1}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ que hagan que $\delta_h f(x)$ sea una discretización de $f'(x)$ del mayor orden posible.

e) **Considerad $f = \cos(x)$. Construid un programa y calculad numéricamente $f'(x)$ en el intervalo $x \in [0, 2\pi]$ utilizando las discretizaciones Δ_h, δ_h que acabáis de obtener. Calculad el error de vuestra derivada en ambos casos para diferentes valores de h y discutid si el error se ajusta a las predicciones teóricas. Recomendación: pintar el error en escala logarítmica.**

4. Series de Fourier (4p)

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge a una función periódica y continua. En particular, podemos expresarla en forma trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right), \tag{5}$$

o, de forma más compacta, usando las expresiones exponenciales del seno y del coseno

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{2\pi k i}{T} t\right), \tag{6}$$

con $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, la relación entre los coeficientes de las series trigonométrica y exponencial.

En la década de los 60, en los albores de la era de la computación, dos matemáticos americanos (Cooley & Tukey) desarrollaron el algoritmo FFT. Una muestra de la relevancia de este algoritmo, de continua y amplia aplicación en contextos teóricos pero también de la vida real, viene dada por su inclusión en el Top 10 de los algoritmos mas relevantes del siglo XX por la prestigiosa revista Computing in Science & Engineering de la IEEE.

Sin embargo, los orígenes del algoritmo FFT se remontan a principios del siglo XIX, y más específicamente a la figura de Carl Friederich Gauss. Como ya se comentó en clases previas, el algoritmo FFT nos ofrece los coeficientes c_k resolviendo una versión finita del sistema lineal generado por (6) mediante el aprovechamiento de ciertas simetrías de los diferentes términos $e^{-2\pi ik\theta}$. Pues bien, según parece Gauss fue el primero en vislumbrar estas simetrías [MH85]. Para entender la sorprendente relación entre Gauss y las modernas técnicas FFT, traslademonos a 1805, época en que un treintañero Gauss vivía en la apacible Göttingen. Como tantas y tantas personas en la historia de la humanidad, nuestro admirado Carl Friederich pasaba noches enteras absorbido ante la inmensidad del firmamento y, en particular, por el movimiento pausado pero constante, regular incluso cada cierto tiempo, de algunos puntitos luminosos.

Aquellas largas noches de reflexión, sólo en compañía de su vieja pipa y un moderno catalejo[1], son el germen de esta práctica. Los ejercicios que vienen a continuación se siguen del día en que Gauss pensó en utilizar series de Fourier[2] para obtener una expresión aproximada de la orbita de los asteroides Pallas y Ceres. Buscando una forma eficiente de solucionar el vasto sistema de ecuaciones que se le planteaba, acuñó (sin llegar a publicar) la primera versión del algoritmo FFT.

En nuestra práctica, al igual que Gauss, *interpolaremos* la trayectoria del asteroide Pallas mediante los datos recogidos en uno de los más famosos catálogos astronómicos de la época: las tablas del Barón von Zach:

α (grados)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
δ (minutos)	408	89	-66	10	338	807	1238	1511	1583	1462	1183	804

donde α y δ corresponden respectivamente con la ascensión recta y declinación de Pallas [ver universo] y Fig. 1.

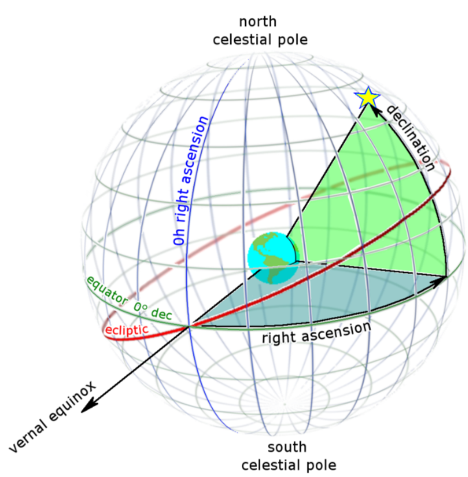

Figura 1: Conceptos de Ascensión Recta (α) y Declinación (δ). Sin ánimo de entrar en muchos detalles, en astronomía la posición de los objetos celestes se calcula proyectándolos sobre la esfera (la cúpula celeste). De esta forma, podemos determinar la posición por medio de dos ángulos: la ascensión recta (ángulo sobre el plano definido por el ecuador terrestre y que por tanto, va entre [0º, 360º]) y la declinación (altura sobre este plano, y que por tanto, va entre [-90º, 90º]).

[1] Recurso narrativo. Desconocemos si Gauss fumaba en pipa o si tenia catalejo.

[2] Siendo estrictos, Gauss no usó Series de Fourier para esta tarea (Fourier aún tardaría unos 20 años en publicar sus ideas y sellar así su pasaporte a la eternidad). Sin embargo, en aquella época los desarrollos de series infinitas de carácter trigonométrico ya estaban muy de moda (por ejemplo, a través de trabajos de Euler, Lagrange, Bessel entre otros).

Dados los datos de la tabla anterior, responde a las siguientes cuestiones:

f) **Asume la existencia de una función periódica $\delta = f(\alpha)$. Aproxima $f(\alpha)$ mediante los datos en la tabla y el algoritmo rFFT. ¿Cuántos coeficientes de la serie de Fourier correspondientes podremos obtener? ¿A cuántas frecuencias corresponden?**

g) **Redondea los coeficientes hasta la segunda cifra decimal y proporciona la aproximación de δ en serie de Fourier trigonométrica**

h) **Representa la función $f(\alpha)$ obtenida**

i) **Calcula la declinación que se espera a 45º de AR.**

j) **Finalmente, utiliza la serie de Fourier calculada para estimar la tasa de cambio de δ en función de α y representa la función resultante. Así mismo estima el valor de $f'(45)$. Se valorará positivamente la resolución de este ejercicio mediante el uso de un algoritmo lo más general posible.**

Referencias

[MH85] C.S. Burrus M.T. Heideman, D.H. Johnson. "Gauss and the History of the Fast Fourier Transform", 1985. PDF link.