Análisis Numérico de EDPs: Práctica 4

Alberto Pérez Cervera y Joaquín Domínguez de Tena[1]

[1]Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

18 de abril de 2023

1. Indicaciones

Se debe subir al Campus Virtual, antes de la fecha especificada, un informe escrito en Latex respondiendo a las preguntas que se plantean a lo largo de la práctica. Éstas vienen enumeradas con letras y en negrita. Se incluye al principio de cada sección la puntuación correspondiente a todos los apartados planteados en la sección. No se incluye una puntuación por apartado, debido a que algunos se complementan entre ellos y pueden requerir una evaluación conjunta.

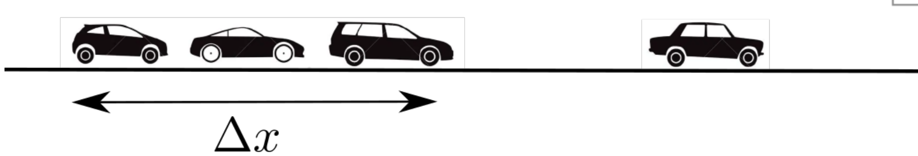
Se valorará la presentación, coherencia y explicación en el informe. También se valorará la **concisión** en cuanto a texto de éste. Las imágenes deben incluirse en el propio informe. Sin embargo, otros documentos como vídeos y códigos se adjuntarán ordenados por carpetas en un archivo comprimido. Se valorará también la eficiencia y documentación de los códigos (la documentación se hará con comentarios en el propio código).

2. Introducción

En esta práctica final vamos a estudiar un modelo muy simple de tráfico[1]. Vamos a trabajar en una sola dimensión, considerando una carretera recta de longitud de 100km.

Denotaremos la densidad de coches por $u : [0, 100] \longrightarrow [0, 1]$, donde 0 será que no hay ningún coche y 1 que la densidad es máxima (es decir, los coches están uno tras otro).

$$\boxed{u = \frac{N_{\text{coches}}}{\Delta x}}$$



Llamaremos $v(x, u, t)$ a la velocidad que seguirán los coches que se encuentren en la posición x en el tiempo t. Como puedes observar, esta velocidad puede depender de u, ya que la cantidad de coches que hay en la carretera influye en la velocidad del conductor.

Como la cantidad de coches en la carretera se conserva (salvo los que salen por los extremos, claro), la densidad de coches debe cumplir una ecuación de conservación:

$$u_t + (f(x, u, t))_x = 0 \tag{1}$$

donde f es el flujo de coches en un punto dado. Este flujo vendrá dado por la velocidad a la que circulan los coches multiplicado por la densidad de coches que hay, es decir, $f(x, u, t) = v(x, u, t) \cdot u$ y la ecuación queda:

$$u_t + (v \cdot u)_x = 0 \tag{2}$$

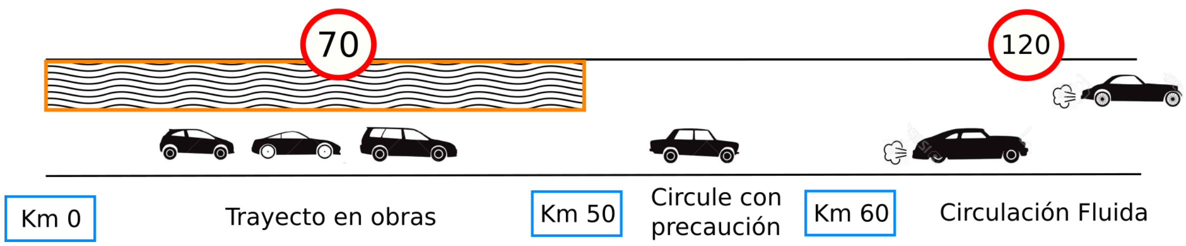
[1]Esta práctica está basada en el libro de Randall J. LeVeque. "*Numerical methods for conservation laws. 1990*", donde puedes encontrar más problemas de modelización.

3. Modelo Simplificado (5 puntos)

Para experimentar un poco, vamos a suponer que la velocidad únicamente depende de la posición $v(x)$. En concreto, supondremos que nuestra carretera estará en obras en los primeros 50km, por lo que la velocidad máxima será de $70km/h$. Posteriormente, la velocidad se irá incrementando entre el kilómetro 50 y 60 hasta la velocidad máxima de la vía: 120km/h. El resto del trayecto los coches circularán a dicha velocidad. Escrito en forma matemática:

$$v_s(x) = \begin{cases} 70 & si \quad x \leq 50 \\ 70 + 50 \cdot (1 - \frac{60-x}{10}) & si \quad 50 \leq x \leq 60 \\ 120 & si \quad x \geq 60 \end{cases} \tag{3}$$

y en forma esquemática



Para completar el problema debemos dar unas condiciones iniciales y condiciones frontera. La condición inicial vendrá dada por

$$u_0(x) = e^{-\frac{|x-10|^2}{25}} \tag{4}$$

que modeliza una acumulación de coches entorno al kilómetro 10. En cuanto a las condiciones frontera, como los coches viajan de izquierda a derecha, bastará con imponerlas en la parte izquierda. Asumiremos que existe una densidad constante de 0,1:

$$u(0,t) = 0{,}1 \qquad \forall t > 0 \tag{5}$$

Nuestro problema quedará:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + (v_s(x)u(x,t))_x = 0 & \forall x \in [0,100] \quad \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = e^{-\frac{|x-10|^2}{25}} & \forall x \in [0,100] \\ u(0,t) = 0{,}1 & \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{6}$$

Para simplificar el problema podemos considerar el cambio de variable $\theta(x,t) = v_s(x)u(x,t)$.

a) **Demuestra que con el cambio de variable el problema queda:**

$$\begin{cases} \theta_t(x,t) + v_s(x)\theta_x(x,t) = 0 & \forall x \in [0,100] \quad \forall t \in [0,T] \\ \theta(x,0) = v_s(x)e^{-\frac{|x-10|^2}{25}} & \forall x \in [0,100] \\ \theta(0,t) = 7 & \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{7}$$

El problema así planteado es sencillo de resolver con la teoría que hemos visto en clase. Como v_s no depende de θ, el problema es lineal y las curvas características son independientes del dato inicial.

b) **Pinta las curvas características (del problema para θ) en el plano $x-t$ para $x \in [0, 100]$ y $t \in [0, 1]$ (Hazlo con el ordenador). ¿Qué observas?**

c) **Utiliza un esquema upwind de primer orden para resolver el problema en θ. ¿Cuál es en este caso la condición CFL?**

d) **Interpreta tu resultado. ¿Tiene sentido lo obtenido con las curvas características calculadas teóricamente?**

e) **Prueba a violar la condición CFL y explica brevemente qué ocurre.**

f) **Deshaz el cambio de variable y muestra un vídeo de $u(x, t)$. Interpreta brevemente el resultado.**

4. Modelo no lineal (5 puntos)

Ahora vamos a hacer nuestro modelo un poco más realista. Para ello, esta vez vamos a considerar que la velocidad sí depende de la densidad de coches. Consideraremos que la carretera no está en obras, y esta vez se podrá circular a 120km/h durante todo el trayecto. Sin embargo, los conductores tratarán de ser precavidos, y si ven que hay mucha densidad de coches delante de ellos, reducirán su velocidad. En concreto esta vendrá dada por:

$$v_{nl}(u) = 120 \cdot (1 - u) \tag{8}$$

Así, la ecuación de conservación quedará:

$$u_t + 120 \cdot (u(1 - u))_x = 0 \tag{9}$$

En este caso el problema es más complejo, ya que no es lineal y las curvas características dependen del dato inicial.

Como dato inicial vamos a considerar:

$$u_0(x) = 0{,}2 + 0{,}5 \cdot e^{-\left(\frac{|x-50|}{30}\right)^2} \tag{10}$$

que representará de nuevo una acumulación de coches entorno al kilómetro 50.

g) **Pinta también en este caso las curvas características y comprueba que se cortan.**

Las curvas características en este caso se cortarán, por lo que nuestra solución presentará curvas de choque debido a discontinuidades en nuestra solución. Estas discontinuidades representarán el frenazo de los coches al encontrarse un atasco.

Para resolver numéricamente este problema vamos a utilizar el método de Lax-Friedrichs (que os presentamos en la siguiente página). Este método nos permite tratar con discontinuidades debido a que introduce un término disipativo artificial[2]. Sin embargo, presenta el problema de que se deben dar condiciones frontera por ambos extremos, cuando el extremo derecho no tiene sentido estricto. Esto no será un gran problema, ya que el propio método disipará gran parte de las contribuciones que este término extraño pueda generar.

Así, impondremos como condiciones frontera:

$$u(0, t) = u(100, t) = 0{,}2 \tag{11}$$

que representará una densidad constante de coches en los extremos.

[2] Más info en el pie de página 3 (ver siguiente hoja)

Método de Lax-Friedrichs

Para resolver el caso no lineal, vamos a utilizar el esquema de Lax-Friedrichs ya que es un método simple para resolver ecuaciones hiperbólicas no-lineales como (9). Considera la siguiente ecuación

$$u_t + (f(u))_x = 0. \tag{12}$$

Podríamos discretizar la derivada temporal por una forward de primer orden y la derivada espacial por una centrada de orden dos, obteniendo así el siguiente esquema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)}{2\,\Delta x} = 0. \tag{13}$$

El único inconveniente de (13), es que, por ejemplo si $f(u) = au$, con $a = cte$, el método es incondicionalmente inestable, así que no sirve de mucho. Para solventar este problema, Peter Lax y Karl Friedrichs, propusieron sustituir u_i^n en (13) por su promedio espacial[3], quedando así,

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} + \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)}{2\,\Delta x} = 0 \tag{14}$$

la cual, reordenando términos queda

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\,\Delta x}(f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) \tag{15}$$

que es el conocido como esquema de Lax-Friedrichs: un método explícito y sencillo para resolver ecuaciones no-lineales con un error de truncamiento $\mathcal{O}\Big(\Delta t, \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\Big)$. Este esquema es estable siempre y cuando se cumpla cierta condición CFL[4].

h) **Plantea el método de Lax-Friedrichs para este problema y resuelve el problema para un grid con $\Delta x = 0{,}2$ y $\Delta t = \frac{\Delta x}{120}$. Realiza un vídeo de la solución para t entre $0h$ y $2,5h$ (Unas 1500 iteraciones)**

i) **Describe qué observas a grandes rasgos**

j) **¿Para qué tiempo aproximado se genera la discontinuidad? ¿Cuadra con lo que has visto en las curvas características?**

k) **¿Qué ocurre con la condición frontera de la derecha?**

[3] La justificación "u_i^n se sustituye por su promedio espacial", aunque intuitiva, puede sonar poco rigurosa para un curso de matemáticas. Falsa alarma! No tendríamos más que computar la siguiente diferencia $\frac{1}{2}\big[u(x+\Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)\big] \approx u(x,t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) u_{xx}(x)$. Como consecuencia de este "truco" ocurren dos cosas: la primera es que el error de truncamiento es $\mathcal{O}\big(\Delta t, \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\big)$. La segunda, es que el truncamiento $\mathcal{O}(\Delta x^2) u_{xx}(x)$ como va dividido por Δt (ver (14)) no es un truncamiento tan pequeño como habitualmente son los truncamientos de las ∂_x. Esto hace que a efectos prácticos $u_t + (f(u))_x = 0$ se "comporte" como $u_t + (f(u))_x + \epsilon u_{xx} = 0$. Es decir, hacer el "truco" ha causado (a efectos numéricos) la aparición de un pequeño término disipativo (que siempre podremos matar haciendo $\Delta x \to 0$).

[4] Esta condición vendrá dada por $\Delta x / \Delta t \leq \text{máx}\,|f'(u)|$. Puedes tratar de explorar por qué esto es así linealizando localmente la ecuación no lineal. Si estás más interesado en este método puedes consultar Randall J. LeVeque. "*Numerical methods for conservation laws. 1990*"