Estrategia : para resolver $\partial^2_{xx} u(x,y) + \partial^2_{yy} u(x,y) = f(x,y)$ con $u(x,y)$ conocida en la frontera del dominio (Dirichlet)

Vamos a proceder por partes

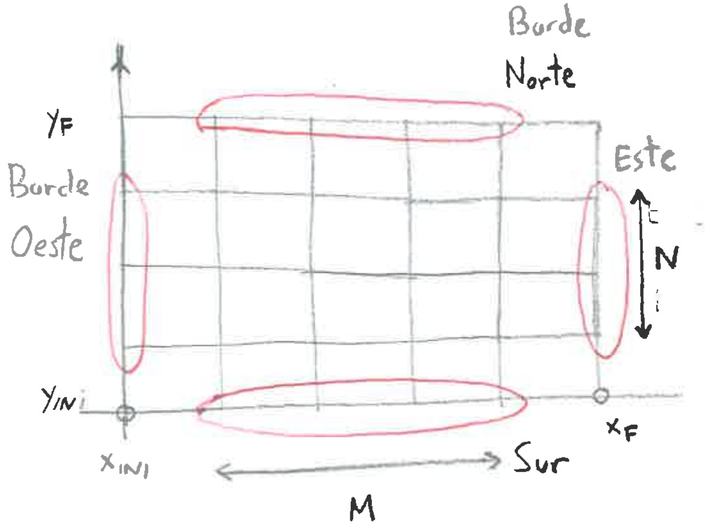
1 - Encontramos la discretización de $\partial^2_{xx} u(x,y) \longrightarrow$ veremos que se escribe $A_x u = b_x$

2 - " " $\partial^2_{yy} u(x,y) \longrightarrow$ " $A_y u = b_y$

3 - Por tanto ; $\partial^2_{xx} u(x,y) + \partial^2_{yy} u(x,y) = f(x,y) \longrightarrow Au = b$ con $A = A_x + A_y$

$b = f + b_x + b_y$

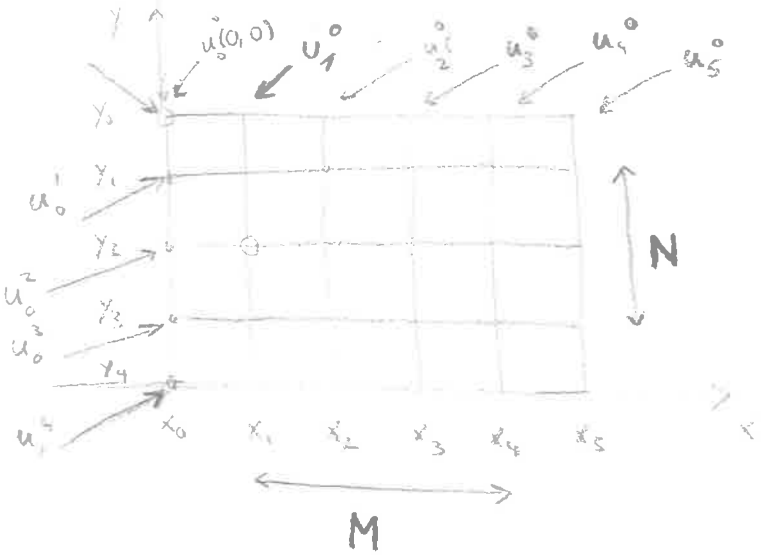
Para ganar intuición , vamos a trabajar con este dominio



$y =$ linspace $(y_{INI}, y_F, N+2)$

$x =$ linspace $(x_{INI}, x_F, M+2)$

- La solucion $u(x,y)$ es conocida en los bordes



$$h = \frac{1}{\Delta x^2}$$

Borde Oeste

$$\begin{cases} u_1^1 \rightarrow h\left(-2u_1^1 + u_2^1\right) = -u_0^1/\Delta x^2 \\ u_2^1 \quad h\left(u_1^1 - 2u_2^1 + u_3^1\right) = 0 \\ u_3^1 \rightarrow h\left(u_2^1 - 2u_3^1 + u_4^1\right) = 0 \\ u_4^1 \rightarrow h\left(u_3^1 - 2u_4^1\right) = -u_5^1/\Delta x^2 \end{cases}$$

Borde Este

- Discretización de $\partial^2_{xx} u(x,y) = 0$

Desarrollo

de $\dfrac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{\Delta x^2} = 0$

para la primera fila.

La matriz resultante es diagonal a bloques. (N bloques de $M \times M$)

$$\underbrace{h \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & & \\ & & & & \boxed{\begin{smallmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{smallmatrix}} & \\ & & & & & \boxed{\begin{smallmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{smallmatrix}} \end{bmatrix}}_{A_x} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_1^2 \\ \vdots \\ u_4^2 \\ u_1^3 \\ \vdots \\ u_4^3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -u_0^1 h \\ 0 \\ 0 \\ -u_5^1 h \\ -u_0^2 h \\ 0 \\ 0 \\ -u_5^2 h \\ -u_0^3 h \\ 0 \\ 0 \\ -u_5^3 h \end{bmatrix}}_{b_x}$$

N·M

M

M

M

M

M

N·M

N·M

N

Repetimos para la discretización $\partial^2_{yy} u(x,y) = 0$

Desarrollamos $\dfrac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\Delta y^2} = 0$

para la primera y segunda fila

$k = \dfrac{1}{\Delta y^2}$

$u_1^1 \longrightarrow \quad k\,(-2u_1^1 + u_1^2) = -u_1^0 \cdot k$

$u_2^1 \longrightarrow \quad k\,(-2u_2^1 + u_2^2) = -u_2^0\, k$

$u_3^1 \longrightarrow \quad k\,(-2u_3^1 + u_3^2) = -u_3^0\, k$

$u_4^1 \longrightarrow \quad k\,(-2u_4^1 + u_4^2) = -u_4^0\, k$

borde norte

$u_1^2 \longrightarrow \quad k\,(u_1^1 - 2u_1^2 + u_1^3) = 0$

$u_2^2 \longrightarrow \quad k\,(u_2^1 - 2u_2^2 + u_2^3) = 0$

$u_3^2 \longrightarrow \quad k\,(u_3^1 - 2u_3^2 + u_3^3) = 0$

$u_4^2 \longrightarrow \quad k\,(u_4^1 - 2u_4^2 + u_4^3) = 0$

$\vdots$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & -2 & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & \ddots & & & & \ddots & & & & \\ 1 & & & & \ddots & & & & \ddots & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & & & & \ddots & & & & 0 \\ & & & & \ddots & & & & \ddots & & & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{M \quad M(N-2) \quad M} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -u_1^0 \\ -u_2^0 \\ -u_3^0 \\ -u_4^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -u_1^4 \\ -u_2^4 \\ -u_3^4 \\ -u_4^4 \end{bmatrix}$$

$M \qquad M(N-2) \qquad M$

borde sur