

# Bifurcación desde Autovalores Simples

Tutor: Julián López Gómez

Daniel López Montero

Universidad Complutense de Madrid

*dlopez15@ucm.es*

July 10, 2024

# Presentation Overview

## 1 Introduction

The case where  $a(x)$  is a positive constant.

## 2 Implicit Function Theorem

## 3 Crandall-Rabinowitz Theorem

## 4 Application

## 5 Numerical Method

Continuation

Bifurcation Detection

Branch Switching

Results

## Objetivo del TFG

Estamos interesados en estudiar la siguiente ODE con condiciones de contorno de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u - a(x)u^3 & \text{in } (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde  $a \in C[0, L]$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  es el *parámetro de bifurcación*.

# Introduction

- En el primer capítulo utilizamos herramientas más *rudimentarias* para obtener propiedades de las soluciones de la ecuación.
- Se presentan dos resultados que caracterizan los ceros de la solución  $u$ .

## Proposition

$u$  admite un número finito de ceros en el interval  $[0,L]$ . Además, los ceros de  $u$  son simples.

## Proposition

Asumiendo que  $a > 0$ , si  $u$  tiene  $n - 1$  ceros interiores, entonces

$$\lambda > \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$$

# Introduction: The case where $a(x) \equiv a > 0$

- Empezamos describiendo la ODE original (1) de la siguiente manera:

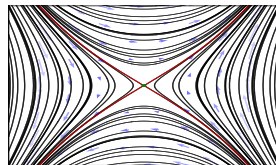
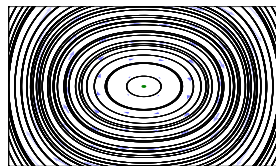
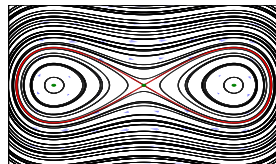
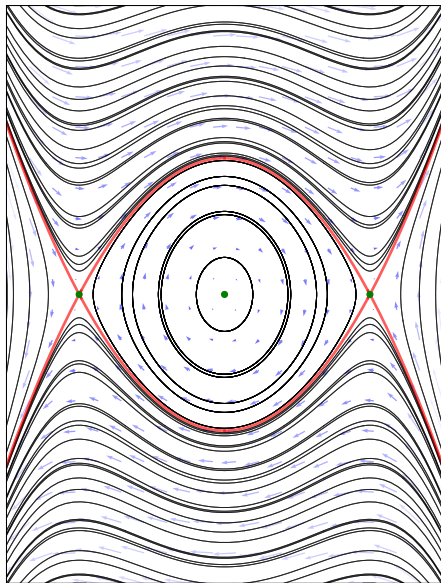
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = au^3 - \lambda u \\ u(x_0) = u_0, v(x_0) = v_0 \end{cases} \quad (2)$$

- Las soluciones de este sistema están contenidos en las de la anterior ecuación.
- Operando y reagrupando términos, vemos que se puede expresar la conservación total de la energía del sistema

$$0 = \mathcal{E}(U, V) = \underbrace{\frac{1}{2}V^2}_{\text{kinetic energy}} + \underbrace{\Phi(U)}_{\text{potential energy}} \quad (3)$$

donde  $\Phi(\xi) := \frac{\lambda}{2}\xi^2 - \frac{a}{4}\xi^4$ .

# Introduction: Phase Portrait



# Introduction: Symmetry

- Observamos que  $u$  es simétrica:  $u(x) = u(2T - x)$  donde  $T$  es el mínimo tiempo en anularse  $u' = v$

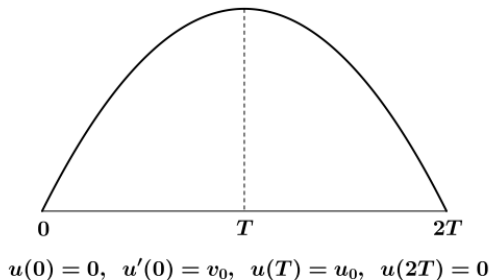
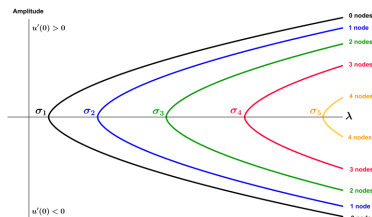
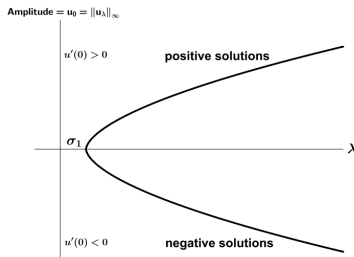


Figure: The graph of  $u(x; 0, v_0)$ .

# Introduction: Bifurcation Points

## Theorem

El problema original (1) tiene una solución positiva si y solo si  $\lambda > \sigma_1 \equiv \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$





# Implicit Function Theorem

## Implicit Function Theorem

Sea  $\mathfrak{F}(\lambda, u)$  función en espacios de Banach suficientemente regular tal que

- $\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0) = 0$
- $D_u \mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$  es un isomorfismo topológico.

Entonces existe un entorno en el que  $\lambda \rightarrow u(\lambda)$  cumple que

- $u(\lambda_0) = u_0$
- $\mathfrak{F}(\lambda, u(\lambda)) = 0$
- Es la única solución en ese entorno.

Además, se puede derivar implícitamente y conserva la regularidad.

# Implicit Function Theorem: Proof

- La demostración se basa en el método de Newton:

$$u_n = u_{n-1} - [D_u \mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)]^{-1} \mathfrak{F}(\lambda, u_{n-1}), \quad n \geq 1 \quad (4)$$

- Se demuestra que el operator es una contracción y por el Teorema de punto fijo de Banach converge.
- Después, se demuestra la regularidad de las soluciones.

# Crandall-Rabinowitz Theorem

- El Teorema de Crandall-Rabinowitz es uno de los resultados centrales de Teoría de Bifurcación.
- Estamos interesados en la siguiente familia de funciones:

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = \underbrace{\mathfrak{L}(\lambda)u}_{\text{linear part}} + \underbrace{\mathfrak{R}(\lambda, u)}_{\text{nonlinear terms}}, \quad (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times U, \quad (5)$$

donde  $\mathfrak{L}$  y  $\mathfrak{R}$  cumplen

(HL)  $\mathfrak{L}(\lambda) \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}, \mathcal{L}(U, V))$  for some  $r \geq 2$  and  $\mathfrak{L}(\mathbb{R}) \subset \text{Fred}_0(U, V)$ .

(HN)  $\mathfrak{R} \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R} \times U, V)$  satisfies

$$\mathfrak{R}(\lambda, 0) = 0 \quad \text{and} \quad D_u \mathfrak{R}(\lambda, 0) = 0 \quad \text{for all } \lambda \in \mathbb{R} \quad (6)$$

- Definimos el siguiente operator:

$$\mathfrak{L}_j(u) := \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathfrak{L}(\lambda_0)}{d\lambda^j}(u) \quad (7)$$

# Crandall-Rabinowitz Theorem

## Theorem (Part 1)

Assuming that  $\mathfrak{F}(\lambda, u)$  is of class  $\mathcal{C}^r$  with  $r \geq 2$ , and

$$N[\mathfrak{L}_0] = \text{Span}[\varphi_0], \quad \mathfrak{L}_1(N[\mathfrak{L}_0]) \oplus R[\mathfrak{L}_0] = V \quad (8)$$

Let  $Y$  be a closed subspace of  $U$  such that

$$N[\mathfrak{L}_0] \oplus Y = U \quad (9)$$

Then, there exists  $\epsilon > 0$  and two maps of class  $\mathcal{C}^{r-1}$ ,  $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow Y$  such that  $\lambda(0) = \lambda_0$ ,  $y(0) = 0$ , and, for every  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,

$$\mathfrak{F}(\lambda(s), u(s)) = 0$$

where  $u(s) := s(\varphi_0 + y(s))$ .

# Crandall-Rabinowitz Theorem: Proof

## Theorem (Part 2)

Moreover, there exists  $\rho > 0$  such that if

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0 \quad \text{and} \quad (\lambda, u) \in B_{\rho, \mathbb{R} \times U}(\lambda_0, 0),$$

then, either  $u = 0$  or  $(\lambda, u) = (\lambda(s), u(s))$  for some  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

- La demostración se basa en la aplicación del Implicit Function Theorem al siguiente operator

$$\mathfrak{G}(s, \lambda, y) := \begin{cases} s^{-1} \mathfrak{F}(\lambda, s(\varphi_0 + y)) & \text{if } s \neq 0 \\ D_u \mathfrak{F}(\lambda, 0)(\varphi_0 + y) & \text{if } s = 0 \end{cases} \quad (10)$$

- Después, se procede a probar la unicidad de la soluciones en un entorno.

# Application

- Se define el operador que resuelve el problema  $u'' = -f$

$$\mathcal{K} : \mathcal{C}[0, L] \rightarrow \mathcal{C}^2[0, L]$$

$$f(x) \mapsto \mathcal{K}f(x) := \int_0^x (s-x)f(s)ds - \frac{x}{L} \int_0^L (s-L)f(s)ds, x \in [0, L],$$

- Se demuestra que es lineal y continuo (acotado).
- Se demuestra que la inclusión  $j : \mathcal{C}_0^2[0, L] \hookrightarrow \mathcal{C}_0^1[0, L]$  es compacto
- La composición de  $\mathcal{K} := j \circ \mathcal{K}|_{\mathcal{C}_0^1[0, L]}$  es compacta.
- Entonces  $u = \mathcal{K}(\lambda u - au^3)$  resuelve (1).

- Dada la siguiente función,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1[0, L] &\rightarrow \mathcal{C}_0^1[0, L] \\ (\lambda, u) &\mapsto \mathfrak{F}(\lambda, u) := u - \mathcal{K}(\lambda u - au^3)\end{aligned}\tag{11}$$

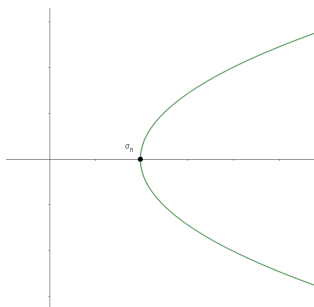
satisfies the requirement of the Crandall-Rabinowitz Theorem when setting

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\lambda)u &:= u - \lambda \mathcal{K}u, \\ \mathfrak{R}(\lambda, u) &:= -\mathcal{K}(au^3)\end{aligned}\tag{12}$$

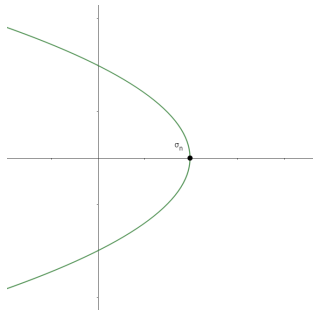
- donde los eigenvectors son:  $\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$  y los autovalores del problema son:  $\sigma_n \equiv \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ .

# Application

- Utilizando la extensión de Taylor, se puede demostrar el comportamiento de la rama de bifurcación cerca del cero.



(a)



(b)

**Figure:** Local bifurcation diagram when  $a > 0$  and  $a < 0$ , respectively, for every bifurcation point  $\sigma_n$ .



Los métodos numéricos usados en Teoría de Bifurcación abarcan las siguientes funcionalidades:

- **Continuation:** Dado un punto de solución, continuar una rama de soluciones.
- **Bifurcation Point Detection:** Detectar posibles puntos de bifurcación entre las ramas calculadas.
- **Branch Switching:** Una vez encontrado un punto de bifurcación en una rama, ser capaces de continuar la rama bifurcada.

# Continuation using the Inverse Power Method

Este método es capaz de calcular la rama de bifurcación un entorno cercano cuando  $\lambda$  es un autovalor simple de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- Linear Eigenvalue Problems:

$$Au = \lambda u \quad (13)$$

- Nonlinear Eigenvalue Problems:

$$Au = \lambda u + N(\lambda, u) \quad (14)$$

donde  $N(\lambda, u)$  satisface las condiciones (HN), i.e., las de  $\mathfrak{R}(\lambda, u)$ .

El algoritmo resultante

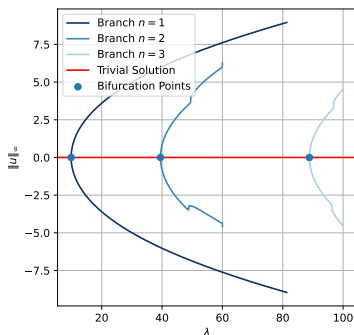
$$\left\{ \begin{array}{l} (A - \sigma I)w_k = (\lambda_{k-1} - \sigma)v_{k-1} + R^{-1}N(\lambda_{k-1}, Rv_{k-1}) \\ v_k = |w_k|^{-1}w_k, \\ u_k = Rv_k, \\ \lambda_k = \sigma + |w_k|^{-1}(\lambda_{k-1} - \sigma) \end{array} \right. \quad (15)$$

# Continuation: Inverse Power Method

- Debido a que el problema (1) es infinito dimensional, necesitamos una manera de expresarlo en dimensión finita.

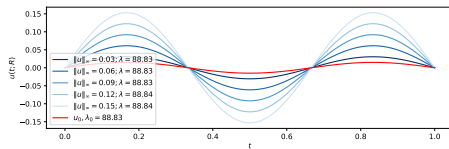
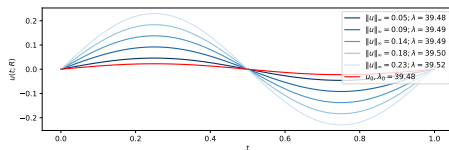
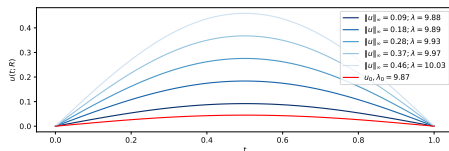
$$\begin{cases} -u'' = \lambda u - a(x)u^3 & \text{in } (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Utilizamos un método de diferencias finitas para discretizarlo, en concreto el esquema de Numerov, con un error de  $\mathcal{O}(h^4)$ .



# Continuation: Inverse Power Method

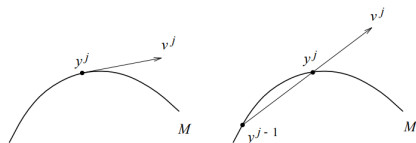
Plotting the solution  $u$  for different values of  $\lambda$ .



# Continuation: Alternative Methods

$$\tilde{y}^{j+1} := y^j + \eta \frac{v^j}{|v^j|} \quad (\text{Prediction})$$

- Secant:  $v^j := y^j - y^{j-1}$
- Tangent:  $D_y \tilde{f}(y^j) v^j = 0$



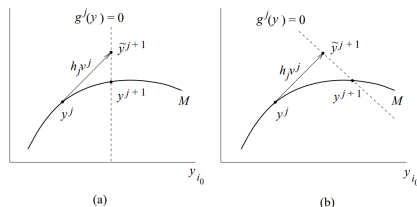
(a)

(b)

(a) Tangent and secant predictions.

$$\begin{cases} F(y) = 0 \\ g^j(y) = 0 \end{cases} \quad (\text{Correction})$$

- Natural:  $g^j(y) := y_{i_0} - \tilde{y}_{i_0}^{j+1}$
- Pseudo-Arclength:  $g^j(y) = \langle y - \tilde{y}^{j+1}, v^j \rangle$



(a)

(b)

(b) Natural and pseudo-arclength corrections.

# Bifurcation Point Detection

- Defining the following test function

$$\psi(y^k) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \quad (16)$$

where  $\lambda_n$  are the eigenvalues of the  $D_u \mathfrak{F}$ .

- We can test whether two consecutive points are a fold bifurcation point when

$$\psi(y^k) \psi(y^{k+1}) < 0 \quad (17)$$

- Una vez se detecta un punto de bifurcación, se puede mejorar la precisión utilizando el método de bisección:

- 1  $\tilde{y}^n := \frac{1}{2}(y^k + y^{k+1})$
- 2 Se aplica un método de corrección sobre  $\tilde{y}^n$  para obtener  $y^n$ .
- 3 Se calcula  $\psi(y^n)$  y se testea nuevamente:

$$\begin{cases} \text{Bisection}(y^k, y^n) & \text{If } \psi(y^k) \psi(y^n) < 0 \\ \text{Bisection}(y^n, y^{k+1}) & \text{If } \psi(y^n) \psi(y^{k+1}) < 0 \end{cases} \quad (18)$$

# Branch Switching

- El algoritmo que hemos utilizado usa la construcción de la función usada en el Teorema de Crandall-Rabinowitz, a la que aplicamos el método de Newton

$$\mathfrak{G}(s, \lambda, y) := \begin{cases} s^{-1} \mathfrak{F}(\lambda, s(\varphi_0 + y)) & \text{if } s \neq 0 \\ D_u \mathfrak{F}(\lambda, 0)(\varphi_0 + y) & \text{if } s = 0 \end{cases} \quad (19)$$

- Además, exigimos que  $y \in Y$ , i.e.,  $y \in N[\mathfrak{L}_0]^\perp = N[\mathfrak{F}_u(\lambda_0, u_0)]^\perp$ .
- Se puede expresar la condición:

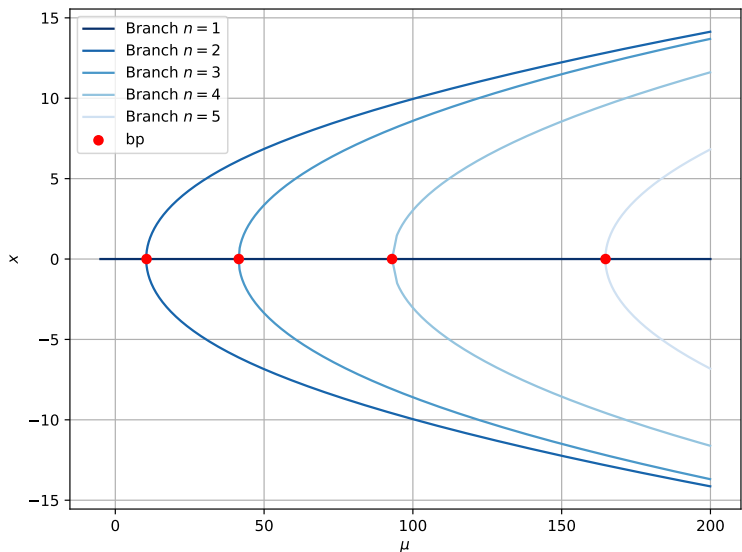
$$\langle y, \phi \rangle = 0$$

donde  $\text{Span}[\phi] = N[\mathfrak{F}_u^T(\lambda_0, u_0)]$ .

- Entonces, para un  $s \sim 0$ , el método de Newton debería converger a una solución en la nueva rama.

# Numerical Method: Results

Utilizando como punto inicial:  $(\lambda_0, u_0) = (0, 0)$





# FIN

Code: <https://github.com/dani2442/bifurcationjax>