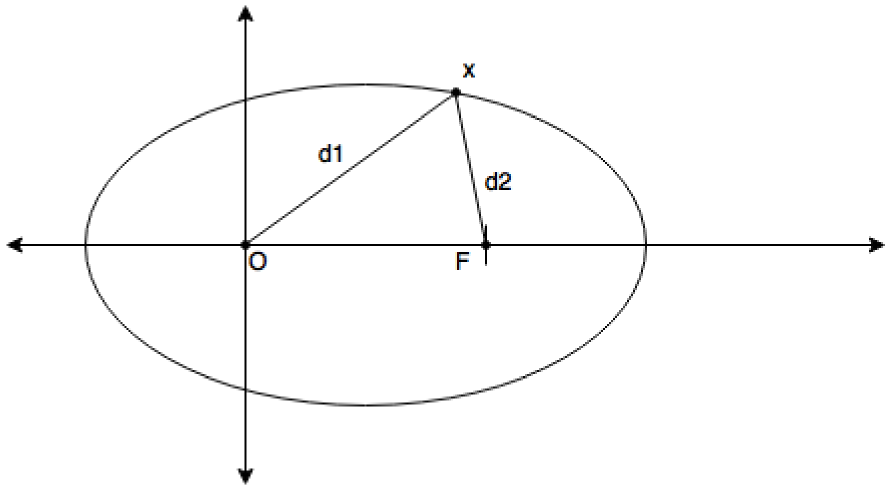
Ecuación de la elipse

Mecánica Celeste

DANIEL LÓPEZ GARCÍA
ÍÑIGO SAN JOSE VISIERS
LOTHAR SOTO PALMA
Universidad de Granada
6 de octubre de 2016



Consideramos la elipse no centrada y sean los focos O y F, tal que el primero de estos está centrado en el origen $(0,0)$.
Definición 1.- Se define la elipse como el lugar geométrico de todos los puntos o el conjunto de puntos de un plano cuya suma de distancia a dos puntos dados (llamados focos) es constante.

$$d_1 + d_2 = c, \quad c > 0$$

Consideramos como focos el punto F y el origen. Tomamos un punto x cualquiera de la elipse y sabemos que $d_1 = d(O,x) = |x|$ y que $d_2 = d(F,x) = |F-x|$, por la definición tenemos que $|x| + |F-x| = c$ con c una constante positiva puesto que no tiene sentido considerar una distancia negativa.
Operando sobre esa igualdad tenemos que:

$$|F-x| = c - |x| \implies |F-x|^2 = (c-|x|)^2$$
$$\implies |F|^2 + |x|^2 - 2 < F, x >= c^2 + |x|^2 - 2c|x|$$
$$\implies |F|^2 - 2 < F, x >= c^2 - 2c|x|$$
$$\implies 2c(|x| - \frac{1}{c} < F, x >) = c^2 - |F|^2$$

$$\implies |x| + < -\frac{1}{c}F, x >= \frac{c^2 - |F|^2}{2c}$$

Tomando $e = -\frac{1}{c}F$ y $k = \frac{c^2-|F|^2}{2c}$ tenemos la ecuación de una cónica de la forma $|x| + < e, x >= k$. Ahora vemos a deducir las condiciones necesarias sobre e y k, para ello vamos a usar la desigualdad triangular que es estricta en este caso:

$$|F| < |x| + |F - x| = c$$

(No tiene sentido considerar la igualdad podriamos demostrar que no es posible viendo que el módulo del eje de excentricidad e de la parábola es igual a 1 por lo que llegariamos a contradicción) Luego como $|F| < c$ se obtienen los siguientes resultados:

$$|F|^2 < c^2 \implies c^2 - |F|^2 > 0 \implies k = \frac{c^2 - |F|^2}{2c} > 0, \ c > 0$$

Por otro lado

$$e = -\frac{1}{c}F \implies |e| = |-\frac{1}{c}F| = |-\frac{1}{c}||F| < \frac{1}{c}c = 1 \implies |e| < 1$$

A partir de la ecuación $|x| + < -\frac{1}{c}F, x >= \frac{c^2-|F|^2}{2c}$ podemos deducir la expresión típica de la elipse que verifica pero para ello vamos a suponer que el foco F se encuentra en un punto del tipo $(a, 0)$ con $a \in \mathbb{R}$; La idea es tomar coordenadas en los puntos x y F y desarrollar la ecuación, de esta forma vamos a realizar la serie de operaciones que sigue:

$$|x| + < -\frac{1}{c}F, x >= \frac{c^2 - |F|^2}{2c} \Leftrightarrow |x| = \frac{c^2 - |F|^2}{2c} + \frac{1}{c} < F, x > \Leftrightarrow$$

$$2c\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = c^2 - a^2 + 2ax_1 \Leftrightarrow (2c\sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 = (c^2 - a^2 + 2ax_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$4c^2(x_1^2 + x_2^2) = c^4 - 2a^2c^2 + 4ac^2x_1 + a^4 - 4a^3x_1 + 4a^2x_1 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + ax_1 + \frac{a^4}{4c^2} - \frac{a^3x_1}{c^2} + \frac{a^2x_1^2}{c^2} \Leftrightarrow$$

$$x_2^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4c^2} + (\frac{a^2}{c^2} - 1)x_1^2 + (\frac{a^2}{c^2} - 1)ax_1 \Leftrightarrow$$

$$x_2^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4c^2} + (\frac{a^2}{c^2} - 1)(x_1^2 + ax_1 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) \Leftrightarrow$$

$$x_2^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4c^2} + (\frac{a^2}{c^2} - 1)(x_1 + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^4}{4c^2} + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$x_2^2 + (1 - \frac{a^2}{c^2})(x_1 + \frac{a}{2})^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4(1 - \frac{a^2}{c^2})}{c^2 - a^2}(x_1 + \frac{a}{2})^2 + \frac{4}{c^2 - a^2}x_2^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{c^2}(x_1 + \frac{a}{2})^2 + \frac{4}{c^2 - a^2}x_2^2 = 1$$

Tomando como $a = \frac{c^2}{4}$ y $b = \frac{c^2-a^2}{4}$ obtenemos la expresión:

$$\frac{(x_1 + \frac{a}{2})^2}{a} + \frac{x_2^2}{b} = 1$$

Por último recordar que esta es la ecuación de la elipse con uno de sus focos centrado en el origen y colocada de forma horizontal por lo que si se quiere variar ya la posición de la misma se puede hacer realizando un movimiento rígido de rotación a la forma bilineal de la misma.