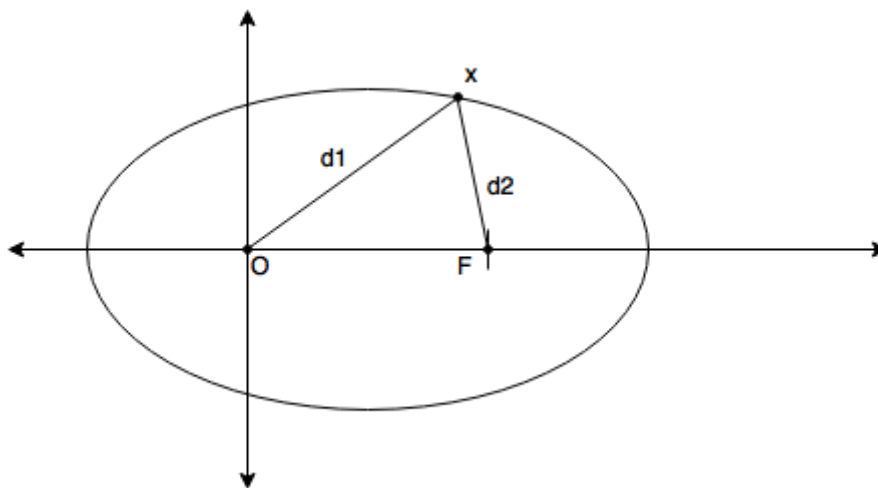


Ecuación de la elipse

Mecánica Celeste

DANIEL LÓPEZ GARCÍA
ÍÑIGO SAN JOSE VISIERS
LOTHAR SOTO PALMA
Universidad de Granada
19 de octubre de 2016



Consideramos la elipse no centrada y sean los focos O y F , tal que el primero de estos está centrado en el origen $(0, 0)$.

1. Definición

Definición 1.- Se define la elipse como el lugar geométrico de todos los puntos o el conjunto de puntos de un plano cuya suma de distancia a dos puntos dados (llamados focos) es constante.

$$d_1 + d_2 = c, \quad c > 0$$

2. Deducción de la ecuación de la elipse con un foco en el origen

Consideramos como focos el punto F y el origen. Tomamos un punto x cualquiera de la elipse y sabemos que $d_1 = d(O, x) = |x|$ y que $d_2 = d(F, x) = |F - x|$, por la definición tenemos que $|x| + |F - x| = c$ con c una constante positiva puesto que no tiene sentido considerar una distancia

negativa.

Operando sobre esa igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |F - x| = c - |x| &\implies |F - x|^2 = (c - |x|)^2 \\
 \implies |F|^2 + |x|^2 - 2 < F, x > &= c^2 + |x|^2 - 2c|x| \\
 \implies |F|^2 - 2 < F, x > &= c^2 - 2c|x| \\
 \implies 2c(|x| - \frac{1}{c} < F, x >) &= c^2 - |F|^2 \\
 \implies |x| + < -\frac{1}{c}F, x > &= \frac{c^2 - |F|^2}{2c}
 \end{aligned}$$

Tomando $e = -\frac{1}{c}F$ y $k = \frac{c^2 - |F|^2}{2c}$ tenemos la ecuación de una cónica de la forma $|x| + < e, x > = k$. Ahora vemos a deducir las condiciones necesarias sobre e y k , para ello vamos a usar la desigualdad triangular que es estricta en este caso:

$$|F| < |x| + |F - x| = c$$

(No tiene sentido considerar la igualdad podríamos demostrar que no es posible viendo que el módulo del eje de excentricidad e de la parábola es igual a 1 por lo que llegaríamos a contradicción) Luego como $|F| < c$ se obtienen los siguientes resultados:

$$|F|^2 < c^2 \implies c^2 - |F|^2 > 0 \implies k = \frac{c^2 - |F|^2}{2c} > 0, \quad c > 0$$

Por otro lado

$$e = -\frac{1}{c}F \implies |e| = |-\frac{1}{c}F| = |-\frac{1}{c}||F| < \frac{1}{c}c = 1 \implies |e| < 1$$

Por último el calculo anterior es reversible y podemos comprobarlo partiendo de la ecuación y repitiendo el proceso de manera inversa, cuando llegamos al resultado:

$$|F - x|^2 = (c - |x|)^2$$

Debemos ver que tenemos 2 posibilidades

$$|F - x| = c - |x|, \quad |F - x| = -(c - |x|)$$

como $c > |F|$ en el caso

$$|F - x| = -(c - |x|)$$

tenemos que

$$|x| - c < |x| - |F| \geq |x - F| = |x| - c$$

y por tanto llegamos a contradicción.

3. Deducción de la ecuación típica de la elipse con un foco en el origen y en horizontal

A partir de la ecuación $|x| + < -\frac{1}{c}F, x > = \frac{c^2 - |F|^2}{2c}$ podemos deducir la expresión típica de la elipse que verifica pero para ello vamos a suponer que el foco F se encuentra en un punto del tipo $(a, 0)$ con $a \in \mathbb{R}$; La idea es tomar coordenadas en los puntos x y F y desarrollar la ecuación, de esta forma vamos a realizar la serie de operaciones que sigue:

$$|x| + < -\frac{1}{c}F, x > = \frac{c^2 - |F|^2}{2c} \Leftrightarrow |x| = \frac{c^2 - |F|^2}{2c} + \frac{1}{c} < F, x >$$

$$\begin{aligned}
2c\sqrt{x_1^2 + x_2^2} &= c^2 - a^2 + 2ax_1 \Leftrightarrow (2c\sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 = (c^2 - a^2 + 2ax_1)^2 \Leftrightarrow \\
4c^2(x_1^2 + x_2^2) &= c^4 - 2a^2c^2 + 4ac^2x_1 + a^4 - 4a^3x_1 + 4a^2x_1 \Leftrightarrow \\
x_1^2 + x_2^2 &= \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + ax_1 + \frac{a^4}{4c^2} - \frac{a^3x_1}{c^2} + \frac{a^2x_1^2}{c^2} \Leftrightarrow \\
x_2^2 &= \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4c^2} + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)x_1^2 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)ax_1 \Leftrightarrow \\
x_2^2 &= \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4c^2} + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)\left(x_1^2 + ax_1 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) \Leftrightarrow \\
x_2^2 &= \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4c^2} + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^4}{4c^2} + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \\
x_2^2 + \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)^2 &= \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \\
\frac{4\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)}{c^2 - a^2}\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4}{c^2 - a^2}x_2^2 &= 1 \Leftrightarrow \\
\frac{4}{c^2}\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4}{c^2 - a^2}x_2^2 &= 1
\end{aligned}$$

Tomando como $a = \frac{c^2}{4}$ y $b = \frac{c^2 - a^2}{4}$ obtenemos la expresión:

$$\frac{\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)^2}{a} + \frac{x_2^2}{b} = 1$$

Esta es la ecuación de la elipse con uno de sus focos centrado en el origen y colocada de forma horizontal por lo que si se quiere variar ya la posición de la misma se puede hacer realizando un movimiento rígido de rotación a la forma bilineal de la misma.

4. Otros casos

Por último como casos particulares tenemos el caso en el que la excentricidad $e = 0$ en el que obtenemos que sustituyendo en la ecuación $|x| = k$ con $k > 0$, esto es la ecuación de una circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = k$.

5. A modo de