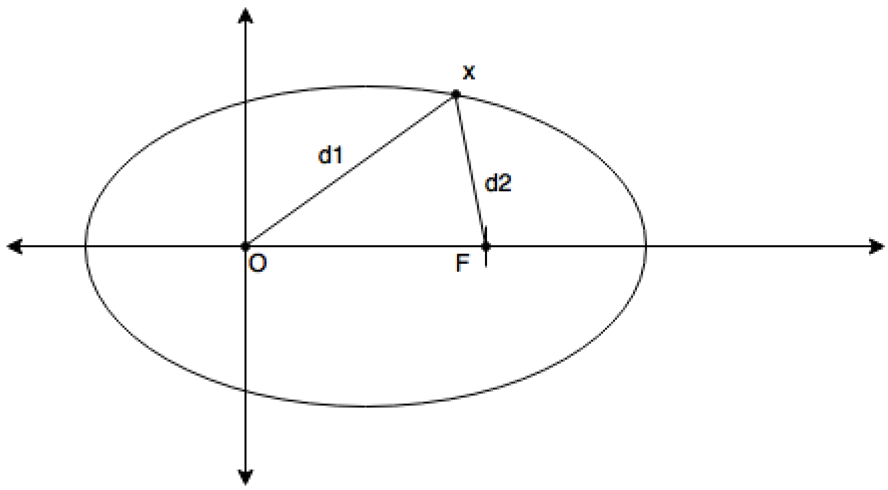
Ecuación de la elipse

Mecánica Celeste

DANIEL LÓPEZ GARCÍA
ÍÑIGO SAN JOSE VISIERS
LOTHAR SOTO PALMA
Universidad de Granada
20 de octubre de 2016



Consideramos la elipse no centrada y sean los focos O y F, tal que el primero de estos está centrado en el origen $(0, 0)$.

1. Definición

Definición 1.- Se define la elipse como el lugar geométrico de todos los puntos o el conjunto de puntos de un plano cuya suma de distancia a dos puntos dados (llamados focos) es constante.

$$d_1 + d_2 = c, \quad c > 0$$

2. Deducción de la ecuación de la elipse con un foco en el origen

Consideramos como focos el punto F y el origen. Tomamos un punto x cualquiera de la elipse y sabemos que $d_1 = d(O, x) = |x|$ y que $d_2 = d(F, x) = |F - x|$, por la definición tenemos que $|x| + |F - x| = c$ con c una constante positiva puesto que no tiene sentido considerar una distancia

negativa.
Operando sobre esa igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned}
|F-x| = c-|x| \implies |F-x|^2 = (c-|x|)^2 \\
\implies |F|^2+|x|^2-2<F,x>=c^2+|x|^2-2c|x| \\
\implies |F|^2-2<F,x>=c^2-2c|x| \\
\implies 2c(|x|-\frac{1}{c}<F,x>)=c^2-|F|^2 \\
\implies |x|+<-\frac{1}{c}F,x>=\frac{c^2-|F|^2}{2c}
\end{aligned}$$

Tomando $e=-\frac{1}{c}F$ y $k=\frac{c^2-|F|^2}{2c}$ tenemos la ecuación de una cónica de la forma $|x|+<e,x>=k$. Ahora vemos a deducir las condiciones necesarias sobre e y k, para ello vamos a usar la desigualdad triangular que es estricta en este caso:

$$|F|<|x|+|F-x|=c$$

(No tiene sentido considerar la igualdad podriamos demostrar que no es posible viendo que el módulo del eje de excentricidad e de la parábola es igual a 1 por lo que llegariamos a contradicción) Luego como $|F|<c$ se obtienen los siguientes resultados:

$$|F|^2<c^2 \implies c^2-|F|^2>0 \implies k=\frac{c^2-|F|^2}{2c}>0,\ c>0$$

Por otro lado

$$e=-\frac{1}{c}F \implies |e|=|-\frac{1}{c}F|=|-\frac{1}{c}||F|<\frac{1}{c}c=1 \implies |e|<1$$

Por último el calculo anterior es reversible y podemos comprobarlo partiendo de la ecuación y repitiendo el proceso de manera inversa, cuando llegamos al resultado:

$$|F-x|^2=(c-|x|)^2$$

Debemos ver que tenemos 2 posibilidades

$$|F-x|=c-|x|, \quad |F-x|=-(c-|x|)$$

como $c>|F|$ en el caso

$$|x-F|=-(c-|x|)$$

tenemos que

$$|x|-c<|x|-|F|\leq|x-F|=|x|-c$$

y por tanto llegamos a contradicción.

3. Deducción de la ecuación típica de la elipse con un foco en el origen y en horizontal

A partir de la ecuación $|x|+<-\frac{1}{c}F,x>=\frac{c^2-|F|^2}{2c}$ podemos deducir la expresión típica de la elipse que verifica pero para ello vamos a suponer que el foco F se encuentra en un punto del tipo $(a,0)$ con $a\in\mathbb{R}$; La idea es tomar coordenadas en los puntos x y F y desarrollar la ecuación, de esta forma vamos a realizar la serie de operaciones que sigue:

$$|x|+<-\frac{1}{c}F,x>=\frac{c^2-|F|^2}{2c} \Leftrightarrow |x|=\frac{c^2-|F|^2}{2c}+\frac{1}{c}<F,x>\Leftrightarrow$$

$$2c\sqrt{x_1^2+x_2^2} = c^2 - a^2 + 2ax_1 \Leftrightarrow (2c\sqrt{x_1^2+x_2^2})^2 = (c^2 - a^2 + 2ax_1)^2 \Leftrightarrow$$
$$4c^2(x_1^2+x_2^2) = c^4 - 2a^2c^2 + 4ac^2x_1 + a^4 - 4a^3x_1 + 4a^2x_1 \Leftrightarrow$$
$$x_1^2+x_2^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + ax_1 + \frac{a^4}{4c^2} - \frac{a^3x_1}{c^2} + \frac{a^2x_1^2}{c^2} \Leftrightarrow$$
$$x_2^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4c^2} + (\frac{a^2}{c^2} - 1)x_1^2 + (\frac{a^2}{c^2} - 1)ax_1 \Leftrightarrow$$
$$x_2^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4c^2} + (\frac{a^2}{c^2} - 1)(x_1^2 + ax_1 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) \Leftrightarrow$$
$$x_2^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4c^2} + (\frac{a^2}{c^2} - 1)(x_1 + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^4}{4c^2} + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$
$$x_2^2 + (1 - \frac{a^2}{c^2})(x_1 + \frac{a}{2})^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4(1-\frac{a^2}{c^2})}{c^2-a^2}(x_1 + \frac{a}{2})^2 + \frac{4}{c^2-a^2}x_2^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{c^2}(x_1 + \frac{a}{2})^2 + \frac{4}{c^2-a^2}x_2^2 = 1$$

Tomando como $a = \frac{c^2}{4}$ y $b = \frac{c^2-a^2}{4}$ obtenemos la expresión:

$$\frac{(x_1 + \frac{a}{2})^2}{a} + \frac{x_2^2}{b} = 1$$

Esta es la ecuación de la elipse con uno de sus focos centrado en el origen y colocada de forma horizontal por lo que si se quiere variar ya la posición de la mismo se puede hacer realizando un movimiento rígido de rotación a la forma bilineal de la misma.

4. Otros casos

Por último como casos particulares tenemos el caso en el que la excentricidad $e = 0$ en el que obtenemos que sustituyendo en la ecuación $|x| = k$ con $k > 0$, esto es la ecuación de una circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = k$.