

Definición. Se define la elipse como el conjunto de puntos cuya suma de distancia a dos puntos dados (llamados focos) es constante.

Consideramos como focos el punto A y el origen. Tomamos un punto x cualquiera de la elipse y por la definición tenemos que $|x| + |A - x| = c$ con c una constante positiva.

Operando sobre esa igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned} |A - x| = c - |x| &\implies |A - x|^2 = (c - |x|)^2 \\ \implies |A|^2 + |x|^2 - 2 < A, x > &= c^2 + |x|^2 - 2c|x| \\ \implies |A|^2 - 2 < A, x > &= c^2 - 2c|x| \\ \implies |x| + < -\frac{1}{c}A, x > &= \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \end{aligned}$$

Tomando $e = -\frac{1}{c}A$ y $k = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}$ tenemos la ecuación de una cónica. Finalmente, usando la desigualdad triangular:

$$|A| < |x| + |A - x| = c$$

Luego $|e| < 1$ y $k > 0$