



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

## *EL TÍTULO DEL TRABAJO* *FIN DE MÁSTER*

Trabajo Fin de Grado presentado por  
Daniel López García

Curso 2017/18



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

***EL TÍTULO DEL TRABAJO***  
***FIN DE MÁSTER***

Trabajo Fin de Grado presentado por  
Daniel López García

Curso 2017/18

Tutor: Nombre Apellido1 Apellido2  
Departamento: Matemática Aplicada  
Área de Conocimiento: Matemática Aplicada



(Página de agradecimientos si los hay)  
Thank you.



# Índice

<b>1. Esféricos Armónicos</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares . . . . .	1
1.1.1. Notación . . . . .	1
1.1.2. La función $\Gamma$ . . . . .	2
1.1.3. Resultados básicos de la esfera. . . . .	3
1.2. Esféricos Armónicos a partir de Espacios Primitivos. . . . .	4
1.2.1. Espacios de Polinomios Homogéneos. . . . .	5
1.2.2. Armónicos de Legendre y Polinomios de Legendre . .	6
1.2.3. Esféricos Armónicos . . . . .	7





# Capítulo 1

## Esféricos Armónicos

### 1.1. Preliminares

#### 1.1.1. Notación

Para empezar fijaremos la notación que seguiremos durante el capítulo. Usaremos  $d \in \mathbb{N}$  para representar la dimensión de un conjunto; en particular, el conjunto  $\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, \dots, x_d)^T : x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq d\}$  es el espacio euclídeo de dimensión  $d$  con el producto escalar y la norma

$$(x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j \quad |x| = (x, x)^{1/2} \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

En  $\mathbb{R}^d$  usaremos la base canónica

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_d = (0, 0, \dots, 1)^T$$

y escribiremos  $x = \sum_{j=1}^d x_j e_j, x \in \mathbb{R}^d$ .

Para indicar la dimensión explícitamente usaremos  $x_{(d)}$  en lugar de  $x$ . En tal caso,  $x_{(d)} = x_{(d-1)} + x_d e_d$  siendo  $x_{(d-1)} = (x_1, \dots, x_{d-1}, 0)^T$ . También usaremos  $x_{(d-1)}$  para referirnos al vector  $(d-1)$ -dimensional  $(x_1, \dots, x_{d-1}, 0)^T$ .

Trabajaremos sobre la esfera unidad  $\mathbb{S}^{d-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| = 1\}$ . Por simplicidad, llamaremos esfera a  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

**Definición 1.1.** Sean  $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ , definimos las siguientes distancias:

- La distancia euclídea  $|\xi - \eta| = \sqrt{2(1 - \xi \cdot \eta)}$
- La distancia geodésica  $\theta(\xi, \eta) = \arccos(\xi \cdot \eta)$

*Nota 1.2.* Usando que  $\frac{2}{\pi} \leq \sin t \leq t, t \in [0, \pi/2]$  se deduce la siguiente relación entre ambas distancias:

$$\frac{2}{\pi} \theta(\xi, \eta) \leq |\xi - \eta| \leq \theta(\xi, \eta)$$

Para  $x = (x_1, \dots, x_d)$  definimos  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$ . Análogamente, para el operador gradiente  $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})^T$  definimos

$$\nabla^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Y finalmente definimos el operador laplaciano como

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2$$

### 1.1.2. La función $\Gamma$

**Definición 1.3.** Dado  $x \in (\mathbb{R})^+$  definimos la función gamma como

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

**Proposición 1.4.** Se verifican las siguientes formulas:

$$\int_0^\infty tx - 1 e^{-at^b} dt = b^{-1} a^{-x/b} \Gamma(x/b), x, a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^1 |\ln t|^{x-1} dt = \Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt, k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^+$$

*Nota 1.5.*  $\Gamma(1) = 1$  y de la tercera fórmula se deduce que  $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}_0$ . Es decir, la función  $\Gamma$  extiende el operador factorial de los números naturales a los reales positivos.

**Lema 1.6.**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

**Definición 1.7.** Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , el símbolo de Pochhammer se define como

$$(x)_0 = 1, (x)_n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$

**Proposición 1.8.** Sea  $x \in \mathbb{R}^+$  entonces

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

### 1.1.3. Resultados básicos de la esfera.

Usaremos  $dV^d$  para elemento diferencial de volumen y  $dS^{d-1}$  para elemento diferencial de superficie de la esfera.  $\mathbb{S}^{-1}$

**Proposición 1.9.** Para  $d \geq 3$  y  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ , con  $\xi_{(d)} = te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}$ ,  $t \in [-1, 1]$ , se tiene que

$$dS^{d-1}(te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}) = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt dS^{d-2}(\xi_{(d-1)})$$

Equivalentemente,

$$dS^{d-1} = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt dS^{d-2}$$

**Ejemplo 1.10.** Sea  $d=3$  y  $\xi$  un punto genérico de la esfera. Usando coordenadas esféricas

$$\xi_{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Sea  $t = \cos\theta$  entonces

$$\xi_{(2)} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $\xi_{(3)} = te_3 + \sqrt{1-t^2}\xi_{(2)}$  y  $dS^1 = d\phi$ ,  $dS^2 = dt d\phi$

Podemos usar la anterior proposición para el cálculo del área de la superficie de la esfera.

**Proposición 1.11.** Se verifica que

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} dS^{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

**Proposición 1.12.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  ortogonal entonces

$$dS^{d-1}(A\xi) = dS^{d-1}(\xi)$$

$$dV^d(A\xi) = dV^d(\xi)$$

Llamamos  $C(S^{d-1})$  al espacio de funciones continuas sobre  $S^{d-1}$ . Este espacio es un espacio de Banach con la norma  $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\xi)| : \xi \in S^{d-1}\}$ . Llamaremos  $L^2(S^{d-1})$  al espacio de funciones con cuadrado integrable en  $S^{d-1}$ . Dicho espacio es un Hilbert con el producto escalar

$$(f, g) = \int_{S^{d-1}} f \bar{g} dS^{d-1}$$

Consideramos el espacio  $C(S^{d-1})$  con la norma inducida por el producto escalar de  $L^2(S^{d-1})$ . Este espacio no es completo. Además, el cierre de  $C(S^{d-1})$  respecto a dicha norma es  $L^2(S^{d-1})$ . Es decir, dado una función  $f \in L^2(S^{d-1})$  existe una sucesión  $\{f_n\} \subset C(S^{d-1})$  tal que  $f_n \rightarrow f$

**Proposición 1.13.** Sean  $\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in [1 - \delta, 1 + \delta]\}$  y  $f^*(x) = f(\frac{x}{|x|})$ ,  $x \in \Omega_\delta$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces  $f$  es  $k$  veces diferenciable en  $S^{d-1}$  cuando  $f^*$  lo es.

**Definición 1.14.** Definimos  $C^k(S^{d-1})$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup 0$  como el espacio de funciones  $k$  veces diferenciables en  $S^{d-1}$

**Proposición 1.15.**  $C^k(S^{d-1})$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{C^k(S^{d-1})} = \|f^*\|_{C^k(\Sigma_\delta)}$$

*Nota 1.16.* Usaremos  $\|f\|_\infty = \|f\|_{C(S^{d-1})}$

## 1.2. Esféricos Armónicos a partir de Espacios Primitivos.

Consideramos  $\mathbb{O}^d$  el conjunto de matrices ortogonales de orden  $d$ . Para cualquier  $\eta \in \mathbb{O}^d$  vector no nulo,  $\mathbb{O}^d(\eta) = \{A \in \mathbb{O}^d : A\eta = \eta\}$  es el subconjunto de matrices ortogonales que deja el subespacio  $\text{span}\{\eta\} = \{\alpha\eta : \alpha \in \mathbb{R}\}$  invariante.

**Definición 1.17.** Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  y  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , se define  $f_A$  como:

$$f_A(x) = f(Ax), \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Consideremos un subespacio  $\mathcal{V}$  de funciones definidas de  $\mathbb{R}^d$  a un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ .

**Definición 1.18.** Sea  $\mathcal{V}$  un subespacio de funciones definidas de  $\mathbb{R}^d$  a  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ . Se dice que  $\mathcal{V}$  es invariante si para  $f \in \mathcal{V}$  y  $A \in \mathbb{O}^d$ , entonces  $f_A \in \mathcal{V}$ . Considerando  $\mathcal{V}$  un subespacio invariante de un espacio proveniente de un producto escalar se define:

- $\mathcal{V}$  es reducible si  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$  con  $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$  verificando  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  irreducibles y  $\mathcal{V}_1 \perp \mathcal{V}_2$ .
- $\mathcal{V}$  es irreducible si no es reducible.
- $\mathcal{V}$  es primitivo si es invariante e irreducible.

**Proposición 1.19.** Si  $f_A = f$  para cualquier  $A \in \mathbb{O}^d$  entonces  $f(x)$  depende de  $x$  por medio de  $|x|$ , luego  $f$  es constante en una esfera de radio arbitrario.

*Demostración.* Sean  $x, y \in \mathbb{R}^d$  con  $|x| = |y|$ , podemos encontrar una matriz  $A \in \mathbb{O}^d$  tal que  $Ax = y$ . Entonces  $f(x) = f_A(x) = f(y)$ .

□

## 1.2. ESFÉRICOS ARMÓNICOS A PARTIR DE ESPACIOS PRIMITIVOS.5

**Definición 1.20.** Dado  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  se define  $\text{span}\{f_A : A \in \mathbb{O}^d\}$  como el espacio de las series  $\sum c_j f_{A_j}$  convergentes con  $A_j \in \mathbb{O}^d, c_j \in \mathbb{C}$

De la definición se deduce que  $\text{span}\{f_A : A \in \mathbb{O}^d\}$  es un subespacio de funciones. Además, si  $\mathcal{V}$  es un espacio finito dimensional  $\mathcal{V} = \text{span}\{f_A\}$

Introduciremos los espacios de armónicos esféricos de diferentes órdenes como subespacios primitivos de  $C(\mathbb{S}^{d-1})$ .

### 1.2.1. Espacios de Polinomios Homogéneos.

Consideramos  $\mathcal{H}_n^d$  el espacio de polinomios homogéneos de grado  $n$  en  $d$  dimensiones. Las funciones son de la forma:

$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}$$

**Ejemplo 1.21.**

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_2^2 &= \{a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2\} \\ \mathbb{H}_3^2 &= \{a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_1^2 x_2 + a_4 x_1 x_2^2\} \end{aligned}$$

A continuación vamos a estudiar la dimensión de  $\mathcal{H}_n^d$ , llegando a la conclusión de que es un espacio invariante finito dimensional. Para determinar  $\dim \mathcal{H}_n^d$  contamos los monomios de grado  $n$ , es decir,  $x^\alpha$  con  $\alpha_i \geq 0$  y verificando  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d = n$ . Tomamos un conjunto  $S = \{1, 2, \dots, n+d-1\}$ . Seleccionamos  $d-1$  números de dicho conjunto y los llamamos  $\beta_i, 1 \leq i \leq d-1$ . Definimos  $\beta_0 = 0$  y  $\beta_d = n + d$ .

Ahora, tomamos  $\alpha_i$  como el número elementos de  $S$  entre 2  $\beta_i$  consecutivos, es decir,  $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1} - 1, 1 \leq i \leq d$ . Tenemos que

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i = \sum_{i=1}^d \beta_i - \beta_{i-1} - \sum_{i=1}^d 1 = \beta_d - d = n + d - d = n$$

Por tanto tenemos una biyección entre el conjunto de  $\alpha_i$  que suman  $n$  y el conjunto de  $\beta_i$ . Finalmente, contamos las distintas elecciones posibles de los  $\beta_i$  y tenemos que

$$\dim \mathbb{H}_n^d = \binom{n+d-1}{d-1} = \binom{n+d-1}{n}$$

**Definición 1.22.** Una función  $f$  es armónica si  $\Delta f(x) = 0$ .

**Lema 1.23.** Si  $\Delta f = 0$ , entonces  $\Delta f_A = 0, \quad \forall A \in \mathbb{O}^d$

*Demostración.* Sea  $y = Ax$ , entonces  $\nabla_x = A \nabla_y$ . Como  $A \in \mathbb{O}^d$  se tiene que

$$\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x = \nabla_y \cdot \nabla_y = \Delta_y$$

□

A continuación, vamos a ver un subespacio de  $H_n^d$  importante.

**Definición 1.24.** Llamamos  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$  al espacio de los polinomios homogéneos de grado  $n$  en  $\mathbb{R}^d$  que son armónicos.

**Ejemplo 1.25.**  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d) = \mathbb{H}_n^d$  si  $n = 0$  o  $n = 1$

Para  $d = 1$ ,  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}) = \emptyset$  para  $n \geq 2$

Para  $d = 2$ ,  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^2)$ , los polinomios de la forma  $(x_1 + ix_2)^n$  pertenecen a  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^2)$ . En particular,  $\mathbb{Y}_2(\mathbb{R}^2)$  está formado por polinomios de la forma  $a(x_1^2 - x_2^2) + bx_1x_2$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$

Calculamos ahora la dimensión de  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ . Llamaremos  $N_{n,d}$  a la dimensión de  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ . Sea  $H_n \in \mathbb{H}_n^d$ , dicho polinomio puede ser escrito de la forma

$$H_n(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j=0}^n (x_d)^j h_{n-j}(x_1, \dots, x_{d-1}), h_{n-j} \in \mathbb{H}_{n-j}^{d-1}$$

Aplicamos el operador laplaciano a  $H_n$ ,

$$\Delta_{(d)} H_n(x_{(d)}) = \sum_{j=0}^{n-2} (x_d)^j [\Delta_{(d-1)} h_{n-j}(x_{(d-1)}) + (j+2)(j+1)h_{n-j-2}(x_{(d-1)})]$$

Luego, si  $H_n \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$  entonces  $\Delta_{(d)} H_n(x_{(d)}) \equiv 0$  y

$$h_{n-j-2} = -\frac{1}{(j+2)(j+1)} \Delta_{(d-1)} h_{n-j}, 0 \leq j \leq n-2$$

En consecuencia un armónico homogéneo está únicamente determinado por  $h_n \in \mathbb{H}_n^{d-1}$  y  $h_{n-1} \in \mathbb{H}_{n-1}^{d-2}$ . De este modo, obtenemos la siguiente relación

$$N_{n,d} = \dim \mathbb{H}_n^{d-1} + \mathbb{H}_{n-1}^{d-1}$$

Usando la formula obtenida para  $\dim \mathbb{H}_n^d$  se tiene que para  $d \geq 2$ ,

$$N_{n,d} = \frac{(2n+d-2)(n+d-3)!}{n!(d-2!)}, n \in \mathbb{N}$$

### 1.2.2. Armónicos de Legendre y Polinomios de Legendre

Ahora, nos centraremos en unos armónicos homogéneos especiales, los armónicos de Legendre de grado  $n$  en  $d$  dimensiones.

**Definición 1.26.** Se define los armónicos de Legendre,  $L_{n,d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando las siguientes condiciones:

- $L_{n,d} \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$

## 1.2. ESFÉRICOS ARMÓNICOS A PARTIR DE ESPACIOS PRIMITIVOS.7

- $L_{n,d}(Ax) = L_{n,d}(x) \quad \forall A \in \mathbb{O}^d(e_d), \forall x \in \mathbb{R}^d$
- $L_{n,d}(e_d) = 1$

*Nota 1.27.* La segunda condición implica que  $h_{n-j}(A_1 x_{d-1}) = h_{n-j}(x_{d-1}), \forall A_1 \in \mathbb{O}^{(d-1)}, \quad x_{(d-1)} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad 0 \leq j \leq n$

De la proposición 1.19 se deduce que por ser  $h_{n-j}$  polinomio homogéneo,  $(n-j)$  es par y

$$h_{n-j}(x_{(d-1)}) = \begin{cases} c_k |x_{(d-1)}|^{2k} & \text{si } n-j = 2k \\ 0 & \text{si } n-j = 2k+1 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Por tanto,

$$L_{n,d}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k |x_{(d-1)}|^{2k} (x_d)^{n-2k}$$

Determinamos ahora los coeficientes  $c_k$

$$c_k = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2k+d-3)} c_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq [n/2]$$

Usando la condición de normalidad se tiene que  $c_0 = 1$  y

$$c_k = (-1)^k \frac{n! \Gamma(\frac{d-1}{2})}{4^k k! (n-2k)! \Gamma(k + \frac{d-1}{2})}, \quad 0 \leq k \leq [n/2]$$

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión

$$L_{n,d}(x) = n! \Gamma(\frac{d-1}{2}) \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{|x_{(d-1)}|^{2k} (x_d)^{n-2k}}{4^k k! (n-2k)! \Gamma(k + \frac{d-1}{2})}$$

Usando coordenadas polares  $x_{(d)} = r\xi_{(d)}, \xi_{(d)} = te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}$ , definimos el polinomio de Legendre de grado  $n$  en  $d$  dimensiones,  $P_{n,d}(t) = L_{n,d}(\xi_{(d)})$  como la restricción a la esfera unidad del armónico de Legendre. Por tanto

$$P_{n,d}(t) = n! \Gamma(\frac{d-1}{2}) \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(1-t^2)^k t^{n-2k}}{4^k k! (n-2k)! \Gamma(k + \frac{d-1}{2})}$$

*Nota 1.28.*  $P_{n,d}(1) = 1$  y  $L_{n,d}(x) = L_{n,d}(r\xi_{(d)}) = r^n P_{n,d}(t)$

### 1.2.3. Esféricos Armónicos

**Definición 1.29.** Se llama espacio de esféricos armónicos de orden  $n$  en  $d$  dimensiones a  $\mathbb{Y}_n^d = \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)|_{\mathbb{S}^{d-1}}$

De la definición se deduce que un esférico armónico  $\mathbb{Y}_n \in \mathbb{Y}_n^d$  está asociado a un armónico homogéneo  $\mathbb{H}_n \in \mathbb{Y}_n^d$  de la siguiente forma:

$$\mathbb{H}_n(r\xi) = r^n \mathbb{Y}_n(\xi)$$

En consecuencia,  $\dim \mathbb{Y}_n^d = N_{n,d}$

**Teorema 1.30.** *Sea  $\mathbb{Y}^d \in \mathbb{Y}_n^d$  y  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Entonces  $\mathbb{Y}_n$  es invariante respecto a  $\mathbb{O}^d(\xi)$ , si y sólo si,  $\mathbb{Y}_n(\eta) = \mathbb{Y}_n(\xi) \mathbb{P}_{n,d}(\xi \cdot \eta) \forall \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Dado que  $\xi$  es un vector unitario podemos encontrar  $A_1 \mathbb{O}^d$  tal que  $\xi = A_1 e_d$ . Sea  $Y_n(\eta) = Y_n(A_1 \eta)$ ,  $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ , que es invariante respecto a  $\mathbb{O}^d(e_d)$ . De la definición de armónico de Legendre sabemos que  $r^n Y_n(\eta) = c_1 L_{n,d}(r^n \eta)$ ,  $r \geq 0$ ,  $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$  con  $c_1$  una constante.

Por tanto,  $Y_n(\eta) = c_1 L_{n,d}(\eta)$  y tomando  $\eta = e_d$  tenemos que  $c_1 = Y_n(e_d)$ .

Finalmente como

$$Y_n(\eta) = Y_n(e_d) \mathbb{P}_{n,d}(\eta \cdot e_d)$$

se tiene que

$$\mathbb{Y}_n(\eta) = Y_n(A_1^T \eta) = Y_n(A_1^T \eta) \mathbb{P}_{n,d}(A_1^T \eta \cdot e_d) = Y_n(A_1^T \eta) \mathbb{P}_{n,d}(\eta \cdot A_1 e_d) = \mathbb{Y}_n(\xi) \mathbb{P}_{n,d}(\xi \cdot \eta)$$

( $\Leftarrow$ ) Obvio

□