UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

EL TÍTULO DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER

Trabajo Fin de Grado presentado por

Daniel López García

Curso 2017/18

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

EL TÍTULO DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER

Trabajo Fin de Grado presentado por

Daniel López García

Curso 2017/18

Tutor: Nombre Apellido1 Apellido2
Departamento: Matemática Aplicada
Área de Conocimiento: Matemática Aplicada

(Página de agradecimientos si los hay)
Thank you.

Índice

Capítulo 1

Esféricos Armónicos

1.1. Preliminares

1.1.1. Notación

Para empezar fijaremos la notación que seguiremos durante el capítulo. Usaremos $d \in \mathbb{N}$ para representar la dimensión de un conjunto; en particular, el conjunto $\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, ..., x_d)^T : x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq d\}$ es el espacio euclídeo de dimensión d con el producto escalar y la norma

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j \qquad |x| = (x, x)^{1/2} \qquad x, y \in \mathbb{R}^d$$

En $\mathbb{R}^d$ usaremos la base canónica

$$e_1 = (1, 0, ..., 0)^T, ..., e_d = (0, 0, ..., 1)^T$$

y escribiremos $x = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j, x \in \mathbb{R}^d$.

Para indicar la dimensión explícitamente usaremos $x_{(d)}$ en lugar de x. En tal caso, $x_{(d)} = x_{(d-1)} + x_d e_d$ siendo $x_{(d-1)} = (x_1, ..., x_{d-1}, 0)^T$. También usaremos $x_{(d-1)}$ para referirnos al vector (d-1)-dimensional $(x_1, ..., x_{d-1}, 0)^T$.

Trabajaremos sobre la esfera unidad $\mathbb{S}^{d-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| = 1\}$. Por simplicidad, llamaremos esfera a $\mathbb{S}^{d-1}$.

Definición 1.1. Sean $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, definimos las siguientes distancias:

- La distancia euclídea $|\xi - \eta| = \sqrt{2(1 - \xi\eta)}$
- La distancia geodésica $\theta(\xi, \eta) = arccos(\xi.\eta)$

Nota 1.2. Usando que $\frac{2}{\pi} \leq sint \leq t, t \in [0, \pi/2]$ se deduce la siguiente relación entre ambas distancias:

$$\frac{2}{\pi}\theta(\xi, \theta) \leq |\xi - \eta| \leq \theta(\xi, \eta)$$

Para $x = (x_1, ..., x_d)$ definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_d^{\alpha_d}$. Análogamente, para el operador gradiente $\nabla = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_d})^T$ definimos

$$\nabla^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_d^{\alpha_d}}$$

Y finalmente definimos el operador laplaciano como

$$\triangle = \nabla.\nabla = \sum_{j=1}^{d}(\frac{\partial}{\partial x_j})^2$$

Definición 1.3. Dado $x \in (\mathbb{R})^+$ definimos la función gamma como

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

Proposición 1.4. *Se verifican las siguientes formulas:*

$$\int_0^\infty tx - 1e^{-at^b}dt = b^{-1}a^{-x/b}\Gamma(x/b), x, a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^1 |lnt|^{x-1}dt = \Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (lnt)^k t^{x-1}e^{-t}dt, k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^+$$

Nota 1.5. $\Gamma(1) = 1$ y de la tercera fórmula se deduce que $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}_0$. Es decir, la función Γ extiende el operador factorial de los números naturales a los reales positivos.

Lema 1.6.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

Definición 1.7. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$,el símbolo de Pochhammer se define como

$$(x)_0 = 1, (x)_n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

Proposición 1.8. *Sea* $x \in \mathbb{R}^+$ *entonces*

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

1.2. Esféricos Armónicos a partir de Espacios Primitivos.

Consideramos $\mathbb{O}^d$ el conjunto de matrices ortogonales de orden d. Para cualquier $\eta \in \mathbb{O}^d$ vector no nulo, $\mathbb{O}^d(\eta) = \{A \in \mathbb{O}^d : A\eta = \eta\}$ es el subconjunto de matrices ortogonales que deja el subespacio $span\{\eta\} = \{\alpha\eta : \alpha \in \mathbb{R}\}$ invariante.

Definición 1.9. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ y A$\in \mathbb{R}^{dxd}$, se define f_A como:

$$f_A(x) = f(Ax), \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Consideremos un subespacio $\mathbb{V}$ de funciones definidas de $\mathbb{R}^d$ a un subconjunto de $\mathbb{R}^d$.

Definición 1.10. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio de funciones definidas de $\mathbb{R}^d$ a $A \subseteqq \mathbb{R}^d$. Se dice que $\mathcal{V}$ es invariante si para $f \in \mathcal{V}$ y $A \in \mathbb{O}^d$, entonces $f_A \in \mathcal{V}$. Considerando $\mathcal{V}$ un subespacio invariante de un espacio proveniente de un producto escalar se define:

- $\mathcal{V}$ es reducible si $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ con $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ verificando $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ irreducibles y $\mathcal{V}_1 \perp \mathcal{V}_2$.
- $\mathcal{V}$ es irreducible si no es reducible.
- $\mathcal{V}$ es primitivo si es invariante e irreducible.

Proposición 1.11. *Si $f_A = f$ para cualquier $A \in \mathbb{O}^d$ entonces f(x) depende de x por medio de |x|, luego f es constante en una esfera de radio arbitrario.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$ con |x| = |y|, podemos encontrar una matriz $A \in \mathbb{O}^d$ tal que $Ax = y$. Entonces $f(x) = f_A(x) = f(y)$.

□

Definición 1.12. Dado $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ se define $span\{f_A : A \in \mathbb{O}^d\}$ como el espacio de las series $\sum c_j f_{A_j}$ convergentes con $A_j \in \mathbb{O}^d$,$c_j \in \mathbb{C}$

De la definición se deduce que $span\{f_A : A \in \mathbb{O}^d\}$ es un subespacio de funciones. Además, si $\mathcal{V}$ es un espacio finito dimensional $\mathcal{V} = span\{f_A\}$

Introduciremos los espacios de armónicos esféricos de diferentes órdenes como subespacios primitivos de $C(\mathbb{S}^{d-1})$.

1.2.1. Espacios de Polinomios Homogéneos.

Consideramos $\mathcal{H}_n^d$ el espacio de polinomios homogéneos de grado n en d dimensiones. Las funciones son de la forma:

$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}$$

Ejemplo 1.13.

$$\mathbb{H}_2^2 = \{a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2\}$$

$$\mathbb{H}_3^2 = \{a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_1^2x_2 + a_4x_1x_2^2\}$$

A continuación vamos a estudiar la dimensión de $\mathcal{H}_n^d$, llegando a la conclusión de que es un espacio invariante finito dimensional. Para determinar $dim\mathcal{H}_n^d$ contamos los monomios de grado n, es decir, x^α con $\alpha_i \geq 0$ y verificando $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_d = n$. Tomamos un conjunto $S = \{1, 2, ..., n+d-1\}$. Seleccionamos $d-1$ números de dicho conjunto y los llamamos $\beta_i, 1 \leq i \leq d-1$. Definimos $\beta_0 = 0$ y $\beta_d = n + d$.

Ahora, tomamos α_i como el número elementos de S entre 2 β_i consecutivos, es decir, $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1} - 1, 1 \leq i \leq d$. Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i = \sum_{i=1}^{d} \beta_i - \beta_{i-1} - \sum_{i=1}^{d} 1 = \beta_d - d = n + d - d = n$$

Por tanto tenemos una biyección entre el conjunto de α_i que suman n y el conjunto de β_i. Finalmente, contamos las distintas elecciones posibles de los β_i y tenemos que

$$dim\mathbb{H}_n^d = \binom{n+d-1}{d-1} = \binom{n+d-1}{n}$$

Definición 1.14. Una función f es armónica si $\triangle f(x) = 0$.

Lema 1.15. *Si* $\triangle f = 0$*, entonces* $\triangle f_A = 0, \quad \forall A \in \mathbb{O}^d$

Demostración. Sea $y = Ax$, entonces $\nabla_x = A\nabla_y$. Como $A \in \mathbb{O}^d$ se tiene que

$$\triangle_x = \nabla_x.\nabla_x = \nabla_y.\nabla_y = \triangle_y$$

□

A continuación, vamos a ver un subespacio de H_n^d importante.

Definición 1.16. Llamamos $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ al espacio de los polinomios homogéneos de grado n en $\mathbb{R}^d$ que son armónicos.

Ejemplo 1.17. $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d) = \mathbb{H}_n^d$ si n = 0 o n = 1
Para d = 1, $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}) = \emptyset$ para $n \geq 2$
Para d = 2, $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^2)$, los polinomios de la forma $(x_1 + ix_2)^n$ pertenecen a $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^2)$. En particular, $\mathbb{Y}_2(\mathbb{R}^2)$ está formado por polinomios de la forma $a(x_1^2 - x_2^2) + bx_1x_2, \qquad a, b \in \mathbb{C}$

Calculamos ahora la dimensión de $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$. Llamaremos $N_{n,d}$ a la dimensión de $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$. Sea $H_n \in \mathbb{H}_n^d$, dicho polinomio puede ser escrito de la forma

$$H_n(x_1, ..., x_d) = \sum_{j=0}^{n} (x_d)^j h_{n-j}(x_1, ...x_{d-1}), h_{n-j} \in \mathbb{H}_{n-j}^{d-1}$$

Aplicamos el operador laplaciano a H_n,

$$\triangle_{(d)} H_n(x_{(d)}) = \sum_{j=0}^{n-2} (x_d)^j [\triangle_{(d-1)} h_{n-j}(x_{(d-1)}) + (j+2)(j+1) h_{n-j-2}(x_{(d-1)})]$$

Luego, si $H_n \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ entonces $\triangle_{(d)} H_n(x_{(d)}) \equiv 0$ y

$$h_{n-j-2} = -\frac{1}{(j+2)(j+1)} \triangle_{(d-1)} h_{n-j}, 0 \leq j \leq n-2$$

En consecuencia un armónico homogéneo está únicamente determinado por $h_n \in \mathbb{H}_n^{d-1}$ y $h_{n-1} \in \mathbb{H}_{n-1}^{d-2}$. De este modo, obtenemos la siguiente relación

$$N_{n,d} = dim \mathbb{H}_n^{d-1} + \mathbb{H}_{n-1}^{d-1}$$

Usando la formula obtenida para $dim \mathbb{H}_n^d$ se tiene que para $d \geq 2$,

$$N_{n,d} = \frac{(2n+d-2)(n+d-3)!}{n!(d-2!)}, n \in \mathbb{N}$$

1.2.2. Armónicos de Legendre y Polinomios de Legendre

Ahora, nos centraremos en unos armónicos homogéneos especiales, los armónicos de Legendre de grado n en d dimensiones.

Definición 1.18. Se define los armónicos de Legendre, $L_{n,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando las siguientes condiciones:

- $L_{n,d} \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$
- $L_{n,d}(Ax) = L_{n,d}(x) \qquad \forall A \in \mathbb{O}^d(e_d), \forall x \in \mathbb{R}^d$
- $L_{n,d}(e_d) = 1$

Nota 1.19. La segunda condición implica que $h_{n-j}(A_1 x_{d-1}) = h_{n-j}(x_{d-1}), \forall A_1 \in \mathbb{O}^{(d-1)}, \quad x_{(d-1)} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad 0 \leq j \leq n$

De la proposición 1.11 se deduce que por ser h_{n-j} polinomio homogéneo,$(n-j)$ es par y

$$h_{n-j}(x_{(d-1)}) = \begin{cases} c_k |x_{(d-1)}|^{2k} & \text{si } n-j = 2k \\ 0 & \text{si } n-j = 2k+1 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Por tanto,

$$L_{n,d}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k |x_{(d-1)}|^{2k} (x_d)^{n-2k}$$

Determinamos ahora los coeficientes c_k

$$c_k = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2k+d-3)} c_{k-1}, \qquad 1 \leq k \leq [n/2]$$

Usando la condición de normalidad se tiene que $c_0 = 1$ y

$$c_k = (-1)^k \frac{n!\Gamma(\frac{d-1}{2})}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}, \qquad 0 \leq k \leq [n/2]$$

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión

$$L_{n,d}(x) = n!\Gamma(\frac{d-1}{2}) \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{|x_{(d-1)|^{2k}}(x_d)^{n-2k}}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}$$

Usando coordenadas polares $x_{(d)} = r\xi_{(d)}, \xi_{(d)} = te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}$, definimos el polinomio de Legendre de grado n en d dimensiones, $P_{n,d}(t) = L_{n,d}(\xi_{(d)})$ como la restricción a la esfera unidad del armónico de Legendre. Por tanto

$$P_{n,d}(t) = n!\Gamma(\frac{d-1}{2}) \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(1-t^2)^k t^{n-2k}}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}$$

Nota 1.20. $P_{n,d}(1) = 1$ y $L_{n,d}(x) = L_{n,d}(r\xi_{(d)}) = r^n P_{n,d}(t)$

1.2.3. Esféricos Armónicos

Definición 1.21. Se llama espacio de esféricos armónicos de orden n en d dimensiones a $\mathbb{Y}_n^d = \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)_{|\mathbb{S}^{d-1}}$

De la definición se deduce que un esférico armónico $\mathbb{Y}_n \in \mathbb{Y}_n^d$ está asociado a un armónico homogéneo $\mathbb{H}_n \in \mathbb{Y}_n^d$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{H}_n(r\xi) = r^n \mathbb{Y}_n(\xi)$$

En consecuencia, $dim\mathbb{Y}_n^d = N_{n,d}$

Teorema 1.22. *Sea* $\mathbb{Y}^d \in \mathbb{Y}_n^d$ *y* $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Entonces* $\mathbb{Y}_n$ *es invariante respecto a* $\mathbb{O}^d(\xi)$, *si y sólo si,* $\mathbb{Y}_n(\eta) = \mathbb{Y}_n(\xi)\mathbb{P}_{n,d}(\xi.\eta)\forall\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$

Demostración. ($\Rightarrow$) Dado que ξ es un vector unitario podemos encontrar $A_1\mathbb{O}^d$ tal que $\xi = A_1 e_d$. Sea $Y_n(\eta) = Y_n(A_1\eta), \eta \in \mathbb{S}^{d-1}d-1$, que es invariante respecto a $\mathbb{O}^d(e_d)$. De la definición de armónico de Legendre sabemos que $r^n Y_n(\eta) = c_1 L_{n_d}(r^n\eta), r \geq 0, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ con c_1 una constante.

Por tanto, $Y_n(\eta) = c_1 L_{n,d}(\eta)$ y tomando $\eta = e_d$ tenemos que $c_1 = Y_n(e_d)$.

Finalmente como

$$Y_n(\eta) = Y_n(e_d)\mathbb{P}_{n,d}(\eta.e_d)$$

se tiene que

$$\mathbb{Y}_n(\eta) = Y_n(A_1^T\eta) = Y_n(A_1^T\eta)\mathbb{P}_{n,d}(A_1^T\eta.e_d) = Y_n(A_1^T\eta)\mathbb{P}_{n,d}(\eta.A_1 e_d) = \mathbb{Y}_n(\xi)\mathbb{P}_{n,d}(\xi.\eta)$$

($\Leftarrow$) Obvio □

1.3. Teorema de Adición. Consecuencias.

Teorema 1.23. *Sea* $\{Y_{n,j} : 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$ *una base ortonormal de* $\mathbb{Y}_n^d$*, es decir,*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,j}(\eta)\overline{Y_{n,j}(\eta)}d\mathbb{S}^{d-1} = \delta_{j,k}, \qquad 1 \leq j,k \leq N_{n,d}$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi)\overline{Y_{n,j}(\eta)} = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}P_{n,d}(\xi.\eta)\forall\xi,\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Demostración. Sean $A \in \mathbb{O}^d$ y $1 \leq k \leq N_{n,d}$, $Y_{n,k}(A\xi) \in \mathbb{Y}_n^d$ podemos escribir

$$Y_{n,k}(A\xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} c_{kj}Y_{n,j}(\xi), \qquad c_{kj} \in \mathbb{C}$$

Como

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,k}(A\xi)\overline{Y_{n,k}(A\xi)}d\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,k}(\eta)\overline{Y_{n,k}(A\eta)}d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \delta_{j,k}$$

tenemos que

$$\delta_{jk} = \sum_{l,m=1}^{N_{n,d}} c_{j,l}\overline{c_{k,m}}(Y_{n,l}, Y_{n,m}) = \sum_{l,m=1}^{N_{n,d}} c_{j,l}\overline{c_{k,l}}$$

Sea $C = (c_{j,l})$ y C^H su matriz conjugada transpuesta. Se verifica que $CC^H = I$ y $C^H C = I$ luego C es unitaria y

$$\sum_{j=1}^{N_{n,d}} \overline{c_{jl}}c_{jk} = \delta_{lk} \qquad 1 \leq l,k \leq N_{n,d}$$

Ahora, consideramos la suma

$$Y(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi)\overline{Y_{n,j}(\eta)}, \quad \xi,\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Para $A \in \mathbb{O}^d$ y fijado ξ se tiene que

$$Y(A\xi, A\eta) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(A\xi)\overline{Y_{n,j}(A\eta)} = \sum_{j,k,l=1}^{N_{n,d}} c_{jk}\overline{c_{jl}}Y_{n,k}(\xi)\overline{Y_{n,l}(\eta)} = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,k}(\xi)\overline{Y_{n,k}(\eta)} = Y(\xi, \eta)$$

luego $Y(\xi, .) \in \mathbb{Y}_n^d$ es invariante respecto a $\mathbb{O}^d(\xi)$. Por el teorema 1.22 $Y(\xi, \eta) = Y(\xi, \xi)P_{n,d}(\xi.\eta)$. Análogamente, $Y(\xi, \eta) = Y(\eta, \eta)P_{n,d}(\xi.\eta)$. En consecuencia, $Y(\xi, \xi) = Y(\eta, \eta)$ y es una constante en $\mathbb{S}^{d-1}$. Para determinar dicha constante, integramos la igualdad $Y(\xi, \xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} |Y_{n,j}(\xi)|^2$ sobre la esfera, obteniendo que

$$Y(\xi, \xi)|\mathbb{S}^{d-1}| = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y_{n,j}(\xi)|^2 d\mathbb{S}^{d-1} = N_{n,d}$$

Por tanto, $Y(\xi, \xi) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}$ y se cumple $\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi)\overline{Y_{n,j}(\eta)} = Y(\xi, \eta) = Y(\xi, \xi)P_{n,d}(\xi.\eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}P_{n,d}(\xi.\eta)$ $\square$

Ejemplo 1.24. En el caso $d = 2$

$$\sum_{j=1}^{2} Y_{n,j}(\xi)\overline{Y_{n,j}(\eta)} = \frac{1}{\pi}P_{n,2}(\xi.\eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbb{S}^1$$

Si tomamos $\xi = (cos\theta, sen\theta)^T, \eta = (cos\psi, sen\psi)^T$. Entonces $\xi \cdot \eta = cos(\theta - \psi)$ y

$$Y_{n,1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(n\theta) \tag{1.3.1}$$

$$Y_{n,2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}sin(n\theta) \tag{1.3.2}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^2$.

Ejemplo 1.25. Si $d = 3$

$$\sum_{j=1}^{2n+1} Y_{n,j}(\xi)\overline{Y_{n,j}(\eta)} = \frac{2n+1}{4\pi}P_{n,3}(\xi.\eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbb{S}^2$$

Veamos ahora algunas aplicaciones del teorema de adición. En primer lugar, aplicaremos el teorema para encontrar una expresión reducida del kernel de $\mathbb{Y}_n^d$.

Cada $Y_n \in \mathbb{Y}_n^d$ puede escribirse de la forma

$$Y_n(\xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} (Y_n, Y_{n,j})_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,j}(\xi)$$

Aplicando el teorema,

$$Y_(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_n(\eta) \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi)\overline{Y_{n,j}(\eta)} d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d}(\xi.\eta) Y_n(\eta) d\mathbb{S}^{d-1}(\eta)$$

Por tanto,

$$K_{n,d}(\xi.\eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} P_{n,d}(\xi.\eta)$$

es el kernel reproductivo de $\mathbb{Y}_n^d$, es decir,

$$Y_n(\xi) = (Y_n, K_{n,d}(\xi,\cdot))_{\mathbb{S}^{d-1}} \qquad \forall Y_n \in \mathbb{Y}_n^d, \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Definimos $\mathbb{Y}_{0:m}^d = \bigoplus_{n=0}^{m} \mathbb{Y}_n^d$ como el espacio de todos los esféricos armónicos de orden menor o igual a m. Entonces

$$K_{0:m,d}(\xi,\eta) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \sum_{n=0}^{m} N_{n,d} P_{n,d}(\xi.\eta)$$

es el kernel reproductivo de $\mathbb{Y}_{0:m}^d$.

A continuación, obtendremos límites para los esféricos armónicos y los polinomios de Legendre.

Proposición 1.26. *Se verifican las siguientes desigualdades:*

$$||Y_n||_\infty \leq \left(\frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\right)^{\frac{1}{2}} ||Y_n||_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \tag{1.3.3}$$

$$|P_{n,d}(t)| \leq 1 = P_{n,d}(1) \tag{1.3.4}$$

Demostración. Tomando $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ por el teorema de adición

$$\sum_{j=1}^{N_{n,d}} |Y_{n,j}(\xi)|^2 = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} P_{n,d}(||\xi||^2) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \tag{1.3.5}$$

Por tanto, $max\{|Y_{n,j}(\xi)|\} \leq \left(\frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\right)^{1/2}$.

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y_n(\xi)|^2 dS^{d-1}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \sum_{k=1}^{N_{n,d}} (Y_n, Y_{n,j})_{\mathbb{S}^{d-1}} (Y_n, Y_{n,j})_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,j} Y_{n,k} dS^{d-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{N_{n,d}} |(Y_n, Y_{n,j})_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,j}|^2$$

Finalmente uniendo lo anterior se tiene que

$$|Y_n(\xi)|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{N_{n,d}} (Y_n, Y_{n,j})\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}\right)^2 = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y_n|^2 dS^{d-1} = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} ||Y_n||^2_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

y en consecuencia

$$||Y_n||_\infty \leq \left(\frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\right)^{1/2} ||Y_n||_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

Ahora, usando 1.3.5 y el teorema de adición tenemos que

$$\frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} |P_{n,d}(\xi \cdot \eta)| = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} |Y_{n,j}(\xi)\overline{Y_{n,j}(\eta)}| \leq \left(\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y^2_{n,j}(\xi)\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y^2_{n,j}(\eta)\right)^{1/2} = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}$$

es decir,

$$|P_{n,d}(\xi \cdot \eta)| \leq 1 = P_{n,d}(1)$$

□

Proposición 1.27.

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |P_{n,d}(\xi.\eta)|^2 dS^{d-1}(\eta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}$$

Demostración.

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |P_{n,d}(\xi.\eta)|^2 dS^{d-1}(\eta) =$$

$$(\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}})^2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi)\overline{Y_{n,j}(\eta)}|^2 dS^{d-1}(\eta) =$$

$$(\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}})^2 \sum_{j=1}^{N_{n,d}} |Y_{n,j}(\xi)|^2 = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}$$

□

Teorema 1.28. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$ y $d \in \mathbb{N}$ el espacio $\mathbb{Y}_n^d$ es irreducible*

Demostración. Razonamos por deducción al absurdo. Supongamos que $\mathbb{Y}_n^d$ es reducible entonces $\exists V_1, V_2$ no vacíos, verificando que $\mathbb{Y}_n^d = V_1 + V_2$ y $V_1 \perp V_2$. Tomamos una base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^d$ tal que las primeras N_1 funciones recubren V_1 y las restantes $N_2 = N_{n,d} - N_1$ recubren V_2. Podemos aplicar el teorema de adición a V_1 y V_2 con las funciones de Legendre $P_{n,d,1}$ y $P_{n,d,2}$.

Como $V_1 \perp V_2$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d,1}(\xi\eta)P_{n,d,2}(\xi\eta)d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = 0 \qquad \forall\xi \in \mathbb{S}^{d-1} \tag{1.3.6}$$

Fijamos $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ y sea ϕ una función tal que $\phi(\eta) = P_{n,d,1}(\xi.\eta)$. Tomamos $A \in \mathbb{O}^d(\xi)$ y se cumple que $A^T\xi = \xi$. Entonces

$$P_{n,d,1}(\xi.A.\eta) = P_{n,d,1}(A^T\xi.\eta) = P_{n,d,1}(\xi.\eta)$$

es decir, ϕ es invariante respecto a $\mathbb{O}^d(\xi)$. Por el teorema 1.22

$$P_{n,d,1}(\xi.\eta) = P_{n,d,1}(\xi.\xi).P_{n,d}(\xi.\eta) = P_{n,d}(\xi.\eta)$$

Razonando de forma análoga para $P_{n,d,2}$ se tiene que

$$P_{n,d,2}(\xi.\eta) = P_{n,d}(\xi.\eta)$$

Sin embargo, tenemos que

$$0 = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d,1}(\xi\eta)P_{n,d,2}(\xi\eta)d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |P_{n,d}(\xi\eta)|^2 d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}$$

Hemos llegado a una contradicción, por tanto, $\mathbb{Y}_n^d$ es irreducible □

1.4. Un Operador de Proyección

Buscamos la mejor aproximación de una función $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ en $\mathbb{Y}_n^d$, es decir, $inf\{||f - Y_n||_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} : Y_n \in \mathbb{Y}_n^d\}$. Si $\{Y_{n,j} : 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^d$ entonces la solución es la proyección de f en $\mathbb{Y}_n^d$ que está definido para $f \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$

$$(P_{n,d}f)(\xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} (f, Y_{n,f})_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,j}(\xi)$$

Definición 1.29. Se define la proyección de $f \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$ en $\mathbb{Y}_n^d$ como

$$(P_{n,d}f)(\xi) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d}(\xi.\eta)f(\eta)d\mathbb{S}^{d-1}(\eta), \qquad \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Nota 1.30. El operador $P_{n,d}$ es lineal

Proposición 1.31. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$ *entonces* $||P_{n,d}f||_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})} \leq N_{n,d}||f||_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}$

Demostración. Como $|P_(n,d)(t)| \leq 1$ entonces dado $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$|P_{n,d}f(\xi)| \leq \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\eta)|dS^{d-1}(\eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}||f||_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}$$

Por tanto,

$$||P_{n,d}f||_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})} \leq N_{n,d}||f||_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}$$

□

Proposición 1.32. *Sea* $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ *entonces* $||P_{n,d}f||_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq (N_{n,d})^{1/2}||f||_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$

Demostración. Sea $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$|(P_{n,d}f)(\xi)|^2 \leq \left(\frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\right)^2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |P_{n,d}(\xi.\eta)|^2 dS^{d-1}(\eta) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\eta)|^2 dS^{d-1}(\eta)$$

Usando la proposición 1.27 tenemos que

$$|(P_{n,d}f)(\xi)|^2 \leq \left(\frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\right)^2 \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\eta)|^2 dS^{d-1}(\eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}||f||^2_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

Por tanto,

$$||P_{n,d}f||^2_{C(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}||f||^2_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$$
$$||P_{n,d}f||_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq N_{n,d}^{1/2}||f||_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

□

Proposición 1.33. *El operador proyección* $P_{n,d}$ *conmuta con las transformaciones ortogonales, es decir,* $P_{n,d}f_A = (P_{n,d}f)_A \quad \forall A \in \mathbb{O}^d$

Demostración.

$$\begin{aligned}(P_{n,d}f_A)(\xi) &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d}(\xi.\eta) f(A\eta) d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) \\ &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d}(A\xi.\zeta) f(\zeta) d\mathbb{S}^{d-1}(\zeta) = (P_{n,d}f)_A(\xi)\end{aligned}$$

□

Corolario 1.34. *Si* $\mathbb{V}$ *es un espacio invariante, entonces* $P_{n,d}\mathbb{V} = P_{n,d}f : f \in \mathbb{V}$ *es un subespacio invariante de* $\mathbb{Y}^d_n$.

Teorema 1.35. *Si* $\mathbb{V}$ *es un espacio invariante de* $C(\mathbb{S}^{d-1})$ *entonces o* $\mathbb{V} \perp \mathbb{Y}^d_n$ *o* $P_{n,d}$ *es una biyección de* $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{Y}^d_n$. *En el último caso,* $\mathbb{V} = \mathbb{Y}^d_n$

Demostración. Veamos que si $P_{n,d} : \mathbb{V} \to \mathbb{Y}^d_n$ es una biyección entonces $\mathbb{V} = \mathbb{Y}^d_n$. Ambos espacios son de dimensión finita y tienen la misma dimensión, $N_{n,d} = dim(\mathbb{Y}^d_n)$. Sea $\{V_j : 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Por ser $\mathbb{V}$ primitivo, para cada $A \in \mathbb{O}^d$

$$V_j(A\xi) = \sum_{k=1}^{N_{n,d}} c_{jk} V_k(\xi), \quad c_{jk} \in \mathbb{C}$$

siendo la matriz (c_{jk}) unitaria. Definimos la función $V(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{N_{n,d}} V_j(\xi)\overline{V_j(\eta)}$ y $V(A\xi, A\eta) = V(\xi,\eta), \quad \forall A \in \mathbb{O}^d$. Dados $\xi,\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ podemos encontrar

$A \in \mathbb{O}^d$ tal que, $A\xi = e_d, A\eta = te_d + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} e_{d-1}$ para $t = \xi.\eta$. Entonces $V(\xi,\eta) = V(e_d, te_d + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} e_{d-1})$ es una función de $t = \xi\eta$. Llamaremos a esta función $P_d(t)$. Fijado ξ, la aplicación $\eta \to \overline{P_d(\xi.\eta)}$ es una función en $\mathbb{V}$, del mismo modo, fijado ζ la aplicación $\eta \to P_{n,d}(\zeta.\eta)$ es una función en $\mathbb{Y}_n^d$.Consideramos la función $\phi(\xi,\zeta) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \overline{P_d(\xi.\eta)} P_{n,d}(\zeta.\eta) dS^{d-1}(\eta)$ con $\phi(A\xi, A\zeta) = \phi(\xi,\zeta), \forall A \in \mathbb{O}^d$. Es decir, $\phi(\xi,\zeta)$ depende sólo de $\xi.\zeta$. ϕ pertenece a $\mathbb{V}$ y a $\mathbb{Y}_n^d$, luego o $\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$ o $\phi \equiv 0$. En el último caso tenemos que

$$\sum_{j,k=1}^{N_{n,d}} \overline{V_j(\xi)} Y_{n,k}(\zeta)(V_j, Y_{n,k})_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} = 0 \qquad \forall \xi,\zeta \in \mathbb{S}^{d-1}$$

donde $\{Y_{n,k} : 1 \le k \le N_{n,d}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^d$. Como cada elemento de los conjuntos $\{V_j : 1 \le j \le N_{n,d}\}$ y $\{Y_{n,j} : 1 \le j \le N_{n,d}\}$ son linealmente independientes, deducimos de la igualdad anterior que

$$(V_j, Y_{n,k})_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} = 0, \qquad 1 \le j,k \le N_{n,d}$$

. Por lo que $(V) \perp \mathbb{Y}_n^d$. □

Corolario 1.36. *Para $m \neq n$, $\mathbb{Y}_m^d \perp \mathbb{Y}_n^d$*

Demostración. Sean $Y_m \in \mathbb{Y}_m^d$ e $Y_n \in \mathbb{Y}_n^d$ restricciones sobre la esfera de $H_m \in \mathbb{Y}_m(\mathbb{R}^d)$ y $H_m \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ respectivamente. Como $\triangle H_m(x) = \triangle H_n(x) = 0$ tenemos que

$$\int_{||x||<1} (H_m \triangle H_n - H_n \triangle H_m) dx = 0$$

Aplicando la fórmula de Green

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (H_m \frac{\partial H_n}{\partial r} - H_n \frac{\partial H_m}{\partial r}) d\mathbb{S}^{d-1} = 0$$

Además, por ser H_m un polinomio homogéneo de grado m

$$\left.\frac{\partial H_m(x)}{\partial r}\right|_{x=\xi} = mY_m(\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Análogamente,

$$\left.\frac{\partial H_n(x)}{\partial r}\right|_{x=\xi} = mY_n(\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (n-m) Y_m(\xi) Y_n(\xi) dS^{d-1}(\xi) = 0$$

Finalmente, como $m \neq n$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_m(\xi) Y_n(\xi) dS^{d-1}(\xi) = 0$$

□

1.5. Generando Bases Ortonormales para Espacios de Esféricos Armónicos.

Tomamos $d \geq 3$ y el vector $\zeta = \zeta_{(d)} \in \mathbb{C}$

Proposición 1.37. *Si* $Y_{j,d-1} \in \mathbb{Y}_j^{d-1}$ *entonces* $Pn, d, j(t) Y_{j,d-1}(\xi_{(d-1)}) \in \mathbb{Y}_n^d$ *en coordenadas polares.*

Definición 1.38. Para $d \geq 3$ y $m \leq n$ definimos el operador

$$\tilde{P}_{n,m} : \mathbb{Y}_m^{d-1} \to \mathbb{Y}_n^d$$

como

$$(\tilde{P}_{n,m} Y_{m,d-1})(\xi) = \tilde{P}_{n,d,m}(t) Y_{m,d-1}(\xi_{(d-1)}), \quad Y_{m,d-1} \in \mathbb{Y}_m^{d-1}$$

Ahora, definimos $\mathbb{Y}_{n,m}^d = \tilde{P}_{n,m}(\mathbb{Y}^{-\mathbb{1}})$ como el espacio de orden m asociado a $\mathbb{Y}_n^d$

Teorema 1.39. *Para* $d \geq 3$ *y* $n \geq 0$ *se tiene que*

$$\mathbb{Y}_n^d = \mathbb{Y}_{n,0}^d \oplus ... \oplus \mathbb{Y}_{n,n}^d$$

Demostración. En primer lugar,veamos que los subespacios $\mathbb{Y}_{n,i}^d$ son ortogonales 2 a 2. Sea $0 \leq k, m \leq n$ con $k \neq m$. Para cualesquiera $\mathbb{Y}_{k,d-1} \in \mathbb{Y}_k^{d-1}, \mathbb{Y}_{m,d-1} \in \mathbb{Y}_m^{d-1}$,

$$(\tilde{P}_{n,k} Y_{k,d-1}, \tilde{P}_{n,m} Y_{m,d-1})_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \tag{1.5.1}$$

$$= (Y_{k,d-1}, Y_{m,d-1})_{L^2(\mathbb{S}^{-})} \int_{-1}^{1} \tilde{P}_{n,d,k}(t) \tilde{P}_{n,d,m}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = 0 \tag{1.5.2}$$

Por tanto, $\mathbb{Y}_{n,k}^d \perp \mathbb{Y}_{n,m}^d$ para $k \neq m$.

Para cada $0 \leq m \leq n$, $\mathbb{Y}_{m,n}^d$ es un subespacio de $\mathbb{Y}_n^d$ y

$$\mathbb{Y}_n^d \supset \mathbb{Y}_{n,0}^d \oplus ... \oplus \mathbb{Y}_{n,n}^d$$

Como $\tilde{P}_{n,m} : \mathbb{Y}_,^{-\mathbb{1}} \to \mathbb{Y}$ es una biyección entonces $dim\mathbb{Y}_, = dim\mathbb{Y}^{-\mathbb{1}} = N_{m,d-1}$ Por otro lado, $\sum_{m=0}^n dim\mathbb{Y}_, = \sum_{m=0}^n N_{m,d-1} = N_{n,d} = dim\mathbb{Y}_n^d$ Es decir, ambos lados de la igualdad son espacios de dimensión finita con la misma dimensión. □

Nota 1.40. Si $\{Y_{m,d-1,j} : 1 \leq j \leq N_{m,d-1}$ es una base ortonormal de $\mathbb{Y}_m^{d-1}, 0 \leq m \leq n$ entonces $\{\tilde{P}_{n,d,m} Y_{m,d-1,j}(\xi_{(d-1)}) : 1 \leq j \leq N_{m,d-1}, 0 \leq m \leq n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^d$

A partir de la base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^2$ obtenida en 1.3.1 y del resultado anterior, construiremos una base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^3$.

$\xi_{(3)} = te_3 + \sqrt{1-t^2}\begin{pmatrix}\xi_{(2)}\\ 0\end{pmatrix}$

$$\tilde{P}_{n,3,m}(t) = \left[\frac{(n+\frac{1}{2})(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}(1-t^2)^{\frac{m}{2}}P_{n,3}^{(m)}(t)$$

Entonces una base ortonormal viene dada por las funciones

$$\left[\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}(sen\theta)^m P_{n,3}^{(m)}(cos\theta)cos(m\phi) \quad 0 \leq m \leq n \tag{1.5.3}$$

$$\left[\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}(sen\theta)^m P_{n,3}^{(m)}(cos\theta)sen(m\phi), \quad 1 \leq m \leq n \tag{1.5.4}$$

Esta base también puede ser escrita de otra forma más cómoda para realizar cálculos

$$(-1)^{m+|m|}/2\left[\frac{(2n+1)(n-|m|!)}{4\pi(n+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}(sen\theta)^m P_{n,3}^{(m)}(cos\theta)e^{im\phi}, \qquad -n \leq m \leq n \tag{1.5.5}$$

Apéndice A

La Función Gamma

Definición A.1. Dado $x \in (\mathbb{R})^+$ definimos la función gamma como

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Proposición A.2. *Se verifican las siguientes formulas:*

$$\int_0^\infty tx - 1e^{-at^b} dt = b^{-1} a^{-x/b} \Gamma(x/b), x, a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^1 |lnt|^{x-1} dt = \Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (lnt)^k t^{x-1} e^{-t} dt, k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^+$$

Nota A.3. $\Gamma(1) = 1$ y de la tercera fórmula se deduce que $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}_0$. Es decir, la función Γ extiende el operador factorial de los números naturales a los reales positivos.

Lema A.4.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

Definición A.5. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$,el símbolo de Pochhammer se define como

$$(x)_0 = 1, (x)_n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

Proposición A.6. *Sea* $x \in \mathbb{R}^+$ *entonces*

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

Apéndice B

Resultados básicos de la esfera.

Usaremos dV^d para elemento diferencial de volumen y dS^{d-1} para elemento diferencial de superficie de la esfera. $\mathbb{S}^{-1}$

Proposición B.1. *Para $d \geq 3$ y $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$,con $\xi_{(d)} = te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}, t \in [-1, 1]$, se tiene que*

$$dS^{d-1}(te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}) = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt dS^{d-2}(\xi_{(d-1)})$$

Equivalentemente,

$$dS^{d-1} = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt dS^{d-2}$$

Ejemplo B.2. Sea d=3 y ξ un punto genérico de la esfera. Usando coordenadas esféricas

$$\xi_{(3)} = \begin{pmatrix} cos\phi sen\theta \\ sen\phi sen\theta \\ cos\theta \end{pmatrix} 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Sea $t = cos\theta$ entonces

$$\xi_{(2)} = \begin{pmatrix} cos\phi \\ sen\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,$\xi_{(3)} = te_3 + \sqrt{1-t^2}\xi_{(2)}$ y $dS^1 = d\phi, dS^2 = dt d\phi$

Podemos usar la anterior proposición para el cálculo del área de la superficie de la esfera.

Proposición B.3. *Se verifica que*

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} dS^{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

Proposición B.4. *Sea* $A \in \mathbb{R}^{dxd}$ *ortogonal entonces*

$$dS^{d-1}(A\xi) = dS^{d-1}(\xi)$$

$$dV^d(A\xi) = dV^d(\xi)$$

Llamamos $C(S^{d-1})$ al espacio de funciones continuas sobre S^{d-1}. Este espacio es un espacio de Banach con la norma $||f||_\infty = sup\{|f(\xi) : \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\}$. Llamaremos $L^2(S^{d-1})$ al espacio de funciones con cuadrado integrable en S^{d-1}. Dicho espacio es un Hilbert con el producto escalar

$$(f, g) = \int_{S^{d-1}} f\overline{g}dS^{d-1}$$

Consideramos el espacio $C(S^{d-1})$ con la norma inducida por el producto escalar de $L^2(S^{d-1})$. Este espacio no es completo. Además, el cierre de $C(S^{d-1})$ respecto a dicha norma es $L^2(S^{d-1})$. Es decir, dado una función $f \in L^2(S^{d-1})$ existe una sucesión $\{f_n\} \subset C(S^{d-1})$ tal que $f_n \to f$

Proposición B.5. *Sean* $\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in [1-\delta, 1+\delta]\}$ *y* $f^*(x) = f(\frac{x}{|x|}), x \in \Omega_\delta$ *y* $k \in \mathbb{N}$.*Entonces* f *es* k *veces diferenciable en* S^{d-1} *cuando* f^* *lo es.*

Definición B.6. Definimos $C^k(S^{d-1}), k \in \mathbb{N} \cup 0$ como el espacio de funciones k veces diferenciables en S^{d-1}

Proposición B.7. $C^k(S^{d-1})$ *es un espacio de Banach con la norma*

$$||f||_{C^k(S^{d-1})} = ||f^*||_{C^k(\Sigma_\delta)}$$

Nota B.8. Usaremos $||f||_\infty = ||f||_{C(S^{d-1})}$

Apéndice C

Polinomios de Legendre

C.1. Fórmulas de Representación

C.1.1. Fórmula de Rodrigues

Teorema C.1.

$$P_{n,d}(t) = (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{2^n \Gamma(n + \frac{d-1}{2})} (1-t^2)^{\frac{3-d}{2}} (\frac{d}{dt})^n (1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}}, \quad d \geq 2$$

Nota C.2. A la constante $R_{n,d} = \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{2^n \Gamma(n+\frac{d-1}{2})}$ se le llama constante de Rodrigues

Ejemplo C.3.

- Si d = 2,

$$P_{n,2}(t) = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} (1-t^2)^{\frac{1}{2}} (\frac{d}{dt})^n (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

  Una forma reducida se obtiene usando el polinomio de Chebyshev obteniendo que $P_{n,2}(t) = cos(narccost), t \in [-1,1]$

- Si d=3,

$$P_{n,3}(t) = \frac{1}{2^n n!} (\frac{d}{dt})^n (t^2-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

C.1.2. Fórmulas de Representación Integral.

Teorema C.4. *Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y $d \geq 3$,*

$$P_{n,d}(t) = \frac{|\mathbb{S}^{d-3}|}{|\mathbb{S}^{d-2}|} \int_{-1}^{1} [t + i(1-t^2)^{\frac{1}{2}} s]^n (1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} ds, \quad t \in [-1,1]$$

Nota C.5. Como consecuencia de la fórmula anterior se tiene que $P_{n,d}(-t) = (-1)^n P_{n,d}(t), t \in [-1,1]$, es decir $P_{n,d}(t)$ tiene la misma paridad que n.

Podemos obtener otra fórmula de representación integral, usando funciones trigonométricas mediante el cambio de variable $s = tanh u, u \in \mathbb{R}$

Teorema C.6. *Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y $d \geq 3$,*

$$P_{n,d}(t) = \frac{|\mathbb{S}^{d-3}|}{|\mathbb{S}^{d-2}|} \int_{-1}^{1} \frac{(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}}}{[t \pm i(1-t^2)^{\frac{1}{2}} s]^{n+d-2}} ds, \quad t \in (0,1]$$

C.2. Propiedades

Proposición C.7. *Si $f \in C^n([-1,1])$ entonces*

$$\int_{-1}^{1} f(t) P_{n,d}(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = R_{n,d} \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t)(1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}} dt$$

siendo $R_{n,d}$ la constante de Rodrigues (Nota C.2)

Proposición C.8. *$P_{n,d}(t)$ tiene n raíces distintas en (-1,1)*

Proposición C.9. *Los polinomios de Legendre satisfacen la siguiente relación de recurrencia*

$$P_{n,d}(t) = \frac{2n+d-4}{n+d-3} t P_{n-1,d}(t) - \frac{n-1}{n+d-3} P_{n-2,d}(t), \qquad n \geq 2, d \geq 2$$
$$P_{0,d}(t) = 1, P_{1,d}(t) = t$$

Proposición C.10.

$$(1-t^2) P'_{n,d}(t) = n[P_{n-1,d}(t) - t P_{n,d}(t)], \quad n \geq 1, d \geq 2, t \in [-1,1]$$

Proposición C.11. *Para $d \geq 2$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_{n,d} r^n P_{n,d}(t) = \frac{1-r^2}{(1+r^2-2rt)^{\frac{d}{2}}}, \quad |r| < 1, t \in [-1,1]$$

Proposición C.12.

$$P_{n,d}(0) = \frac{|\mathbb{S}^{d-3}|}{|\mathbb{S}^{d-2}|} \int_{-1}^{1} i^n s^n (1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} ds$$
$$P_{n,d}(-1) = (-1)^n$$

Proposición C.13.

$$|P_{n,d}(t)| < \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{4}{n(1-t^2)}\right]^{\frac{d-2}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, d \geq 2, t \in (-1,1)$$

Apéndice D

Polinomios de Gegenbauer

Definición D.1. Sean $v \geq 0, n \in \mathbb{N}_0$ se define el polinomio de Gegenbauer de grado n e índice v, como:

$$C_{n,v}(t) = \binom{n+2v-1}{n} \frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(v)} \int_{-1}^{1} \left[t + i(1-t^2)^{1/2}s\right]^n (1-s^2)^{v-1} ds$$

Proposición D.2. *(Identidad de Gegenbauer.)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,v}(t) = \frac{1}{(1+r^2-2rt)^v}, \qquad |r| < 1, t \in [-1,1]$$

Apéndice E

Funciones de Legendre Asociadas

Definición E.1. Sea $d \geq 3$ y $n, j \in \mathbb{N}_0$ se define la función asociada de Legendre de grado n y orden j en dimensión d, como

$$P_{n,d,j}(t) = \frac{|\mathbb{S}^{d-3}|}{|\mathbb{S}^{d-2}|} i^{-j} \int_{-1}^{1} \left[t + i(1-t^2)^{1/2} s\right]^n P_{j,d-1}(s)(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}}, \quad t \in [-1, 1]$$

Nota E.2. Si $j = 0, P_{n,d,0}(t) = P_{n,d}$

Las funciones asociadas de Legendre nos permiten generar "sistemas"de esféricos armónicos en la esfera.

Proposición E.3. *Sea* $d \leq 3y0 \leq j \leq n$

$$P_{n,d,j}(t) = \frac{n!\Gamma(\frac{d-1}{2})}{2^j(n-j)!\Gamma(j+\frac{d-1}{2})}(1-t^2)^{1/2} P_{n-j,d+2j}(t), t \in [-1, 1]$$

El siguiente resultado nos proporciona una relación entre las funciones asociadas de Legendre y las derivadas de los polinomios de Legendre.

Proposición E.4. *Sea* $d \leq 3y0 \leq j \leq n$

$$P_{n,d,j}(t) = \frac{(n+d-3)!}{(n+j+d-3)!}(1-t^2)^{1/2} P_{n,d}^{(j)}(t), t \in [-1, 1]$$