UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

EL TÍTULO DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER

Trabajo Fin de Grado presentado por

Daniel López García

Curso 2017/18

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

EL TÍTULO DEL TRABAJO
FIN DE MÁSTER

Trabajo Fin de Grado presentado por

Daniel López García

Curso 2017/18

Tutor: Nombre Apellido1 Apellido2
Departamento: Matemática Aplicada
Área de Conocimiento: Matemática Aplicada

(Página de agradecimientos si los hay)
Thank you.

Índice

Capítulo 1

Esféricos Armónicos

1.1. Preliminares

1.1.1. Notación

Usaremos $d \in \mathbb{N}$ para representar la dimensión de un conjunto. El conjunto $\mathbb{R}^d = x = (x_1, ..., x_d)^T : x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq d$ es el espacio euclídeo de dimensión d con el producto escalar y la norma

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j, |x| = (x, x)^{1/2} x, y \in \mathbb{R}^d$$

En $\mathbb{R}^d$ usaremos la base canónica

$$e_1 = (1, 0, ..., 0)^T, ..., e_d = (0, 0, ..., 1)^T$$

y escribiremos $x = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j, x \in \mathbb{R}^d$.

Para indicar la dimensión explícitamente usaremos $x_{(d)}$ en lugar de x. En tal caso, $x_{(d)} = x_{(d-1)} + x_d e_d$ siendo $x_{(d-1)} = (x_1, ..., x_{d-1}, 0)^T$. También usaremos $x_{(d-1)}$ para referirnos al vector (d-1)-dimensional $(x_1, ..., x_{d-1}, 0)^T$.

Definición 1.1. Sean $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, definimos las siguientes distancias:

- La distancia euclídea $|\xi - \eta| = \sqrt{2(1 - \xi\eta)}$
- La distancia geodésica $\theta(\xi, \eta) = arccos(\xi.\eta)$

Nota 1.2. Usando que $\frac{2}{\pi} \leq sint \leq t, t \in [0, \pi/2]$ se deduce la siguiente relación entre ambas distancias:

$$\frac{2}{\pi}\theta(\xi, \theta) \leq |\xi - \eta| \leq \theta(\xi, \eta)$$

Para $x = (x_1, ..., x_d)$ definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_d^{\alpha_d}$. Análogamente, Para el operador gradiente $\nabla = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_d})^T$ definimos

$$\nabla^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_d^{\alpha_d}}$$

Y finalmente definimos el operador laplaciano como

$$\triangle = \nabla.\nabla = \sum_{j=1}^{d} (\partial/\partial x_j)^2$$

1.1.2. La función Γ

Definición 1.3.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, x \in (\mathbb{R})^+$$

Proposición 1.4. *Se verifican las siguientes formulas:*

$$\int_0^\infty tx - 1e^{-at^b} dt = b^{-1} a^{-x/b} \Gamma(x/b), x, a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^1 |lnt|^{x-1} dt = \Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (lnt)^k t^{x-1} e^{-t} dt, k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^+$$

Nota 1.5. Obviamente, $\Gamma(1) = 1$ y de la tercera fórmula se deduce que $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}_0$. Es decir, la función Γ extiende el operador factorial de los números naturales a los reales positivos.

Lema 1.6.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

Definición 1.7. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$,el símbolo de Pochhammer se define como

$$(x)_0 = 1, (x)_n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

Proposición 1.8.

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}, x \in \mathbb{R}^+$$

1.1.3. Resultados básicos de la esfera.

Usaremos dV^d para el elemento de volumen de dimensión d y dS^{d-1} para el elemento (d-1)-dimensional de la superficie de la esfera unidad $\mathbb{S}^{-1}$.Sobre la superficie de un dominio general usaremos d_σ para los elementos de la superficie

Proposición 1.9. *Para $d \geq 3$ y $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$,con $\xi_{(d)} = te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}t \in [-1,1]$, se tiene que*

$$dS^{d-1}(te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}) = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dtdS^{d-2}(\xi_{(d-1)})$$

Equivalentemente,

$$dS^{d-1} = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dtdS^{d-2}$$

Ejemplo 1.10. Sea d=3 y ξ un punto genérico de la esfera. Usando coordenadas esféricas

$$\xi_{(3)} = \begin{pmatrix} cos\phi sen\theta \\ sen\phi sen\theta \\ cos\theta \end{pmatrix} 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Sea $t = cos\theta$ entonces

$$\xi_{(2)} = \begin{pmatrix} cos\phi sen\phi 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,$\xi_{(3)} = te_3 + \sqrt{1-t^2}\xi_{(2)}$ y $dS^1 = d\phi, dS^2 = dtd\phi$

Podemos usar la anterior proposición para el cálculo del área de la superficie de la esfera.

Proposición 1.11.

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} dS^{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

Proposición 1.12. *Sea $A \in \mathbb{R}$ ortogonal entonces*

$$dS^{d-1}(A\xi) = dS^{d-1}(\xi)$$
$$dV^d(A\xi) = dV^d(\xi)$$

Llamamos $C(S^{d-1})$ al espacio de funciones continuas sobre S^{d-1}. Este espacio es un espacio de Banach con la norma $||f||_\infty = sup\{|f(\xi) : \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\}$. Llamaremos $L^2(S^{d-1})$ al espacio de funciones con cuadrado integrable en S^{d-1}. Dicho espacio es un Hilbert con el producto escalar

$$(f,g) = \int_{S^{d-1}} f\overline{g}dS^{d-1}$$

Consideramos el espacio $C(S^{d-1})$ con la norma inducida por el producto escalar de $L^2(S^{d-1})$. Este espacio no es completo. Además, el cierre de $C(S^{d-1})$ respecto a dicha norma es $L^2(S^{d-1})$. Es decir, dado una función $f \in L^2(S^{d-1})$ existe una sucesión $\{f_n\} \subset C(S^{d-1})$ tal que $f_n \to f$

Proposición 1.13. *Sean* $\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in [1-\delta, 1+\delta]\}$ *y* $f^*(x) = f(\frac{x}{|x|}), x \in \Omega_\delta$ *y* $k \in \mathbb{N}$. f *es k veces diferenciable en* S^{d-1} *cuando* f^* *lo es.*

Definición 1.14. Definimos $C^k(S^{d-1}), k \in \mathbb{N} \cup 0$ como el espacio de funciones k veces diferenciables en S^{d-1}

Proposición 1.15. $C^k(S^{d-1})$ *es un espacio de Banach con la norma*

$$||f||_{C^k(S^{d-1})} = ||f^*||_{C^k(\Sigma_\delta)}$$

Nota 1.16. Usaremos $||f||_\infty = ||f||_{C(S^{d-1})}$

1.2. Esféricos Armónicos a partir de Espacios Primitivos.

Consideramos $\mathbb{O}^d$ el conjunto de matrices ortogonales de orden d. Para cualquier $\eta \in \mathbb{O}^d$ vector no nulo, $\mathbb{O}^d(\eta) = \{A \in \mathbb{O}^d : A\eta = \eta\}$ es el subconjunto de matrices ortogonales que deja el subespacio $span\{\eta\} = \{\alpha\eta : \alpha \in \mathbb{R}\}$ invariante.

Definición 1.17. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ y A$\in \mathbb{R}^{dxd}$, se define f_A como:

$$f_A(x) = f(Ax), \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Consideremos un subespacio $\mathbb{V}$ de funciones definidas de $\mathbb{R}^d$ a un subconjunto de $\mathbb{R}^d$.

Definición 1.18. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio de funciones definidas de $\mathbb{R}^d$ a $A \subsetneqq \mathbb{R}^d$. Se dice que $\mathcal{V}$ es invariante si para $f \in \mathcal{V}$ y $A \in \mathbb{O}^d$, entonces $f_A \in \mathcal{V}$. Considerando $\mathcal{V}$ un subespacio invariante de un espacio proveniente de un producto escalar se define:

- $\mathcal{V}$ es reducible si $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ con $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ verificando $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ irreducibles y $\mathcal{V}_1 \perp \mathcal{V}_2$.
- $\mathcal{V}$ es irreducible si no es reducible.
- $\mathcal{V}$ es primitivo si es invariante e irreducible.

Proposición 1.19. *Si* $f_A = f$ *para cualquier* $A \in \mathbb{O}^d$ *entonces f(x) depende de x por medio de |x|, luego f es constante en una esfera de radio arbitrario.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$ con |x| = |y|, podemos encontrar una matriz $A \in \mathbb{O}^d$ tal que $Ax = y$. Entonces $f(x) = f_A(x) = f(y)$.
□

Definición 1.20. Dado $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ se define $span\{f_A : A \in ()^d\}$ como el espacio de las series convergentes $\sum c_j f_{A_j}$ con $A_j \in \mathbb{O}^d$,$c_j \in \mathbb{C}$

De la definición se deduce que $span\{f_A : A \in \mathbb{O}^d\}$ es un subespacio de funciones. Además, si $\mathcal{V}$ es un espacio finito dimensional $\mathcal{V} = span\{f_A\}$

Introduciremos los espacios de armónicos esféricos de diferentes órdenes como subespacios primitivos de $C(\mathbb{S}^{d-1})$.

1.2.1. Espacios de Polinomios Homogéneos.

Consideramos $\mathcal{H}_n^d$ el espacio de polinomios homogéneos de grado n en d dimensiones. Las funciones son de la forma:

$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}.\mathcal{H}_n^d$$

Ejemplo 1.21.

$$\mathbb{H}_2^2 = \{a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2\}$$

$$\mathbb{H}_3^2 = \{a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_1^2x_2 + a_4x_1x_2^2\}$$

A continuación vamos a estudiar la dimensión de $\mathcal{H}_n^d$, llegando a la conclusión de que es un espacio invariante finito dimensional. Para determinar $dim\mathcal{H}_n^d$ contamos los monomios de grado n, es decir, x^α con $\alpha_i \geq 0$ y verificando $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_d = n$. Tomamos un conjunto $S = \{1, 2, ..., n+d-1\}$. Seleccionamos $d-1$ números de dicho conjunto y los llamamos $\beta_i, 1 \leq i \leq d-1$. Definimos $\beta_0 = 0y\beta_d = n + d$.

Ahora, tomamos α_i como el número elementos de S entre 2 β_i consecutivos, es decir, $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1} - 1, 1 \leq i \leq d$. Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i = \sum_{i=1}^{d} \beta_i - \beta_{i-1} - \sum_{i=1}^{d} 1 = \beta_d - d = n + d - d = n$$

Por tanto tenemos una biyección entre el conjunto de α_i que suman n y el conjunto de β_i. Finalmente, contamos las distintas elecciones posibles de los β_i y tenemos que

$$dim\mathbb{H}_n^d = \binom{n+d-1}{d-1} = \binom{n+d-1}{n}$$

Cada $\mathbb{H}_n \in \mathbb{H}_n^d$ se puede escribir como:

$$\mathbb{H}_n(x) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Para el polinomio $\mathbb{H}_n(x)$ definimos

$$\mathbb{H}_n(\nabla) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha \nabla^\alpha.$$

Dados 2 polinomios cualesquiera $\mathbb{H}_n(x)$,

$$\mathbb{H}_{n,1}(x) = \sum_{|\alpha|=n} a_{\alpha,1}x^{\alpha}, \mathbb{H}_{n,2}(x) = \sum_{|\alpha|=n} a_{\alpha,2}x^{\alpha}$$

Se sigue que

Luego $(\mathbb{H}_{n,1}, \mathbb{H}_{n,2})_{\mathbb{H}_n^d} := \mathbb{H}_{n,1}(\triangledown)\overline{\mathbb{H}_{n,2}(x)}$ define un producto escalar en $\mathbb{H}_n^d$

Definición 1.22. Una función f es armónica si $\triangle f(x) = 0$.

Lema 1.23. *Si* $\triangle f = 0$*, entonces* $\triangle f_A = 0 \forall A \in \mathbb{O}^d$

Demostración. Sea $y = Ax$, entonces $\triangledown_x = A\triangledown_y$. Como $A \in \mathbb{O}^d$ se tiene que

$$\triangle_x = \triangledown_x.\triangledown_x = \triangledown_y.\triangledown_y = \triangle_y$$

□

A continuación, vamos a ver un subespacio de H_n^d importante.

Definición 1.24. Llamamos $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ al espacio de los polinomios homogéneos de grado n en $\mathbb{R}^d$ que son armónicos.

Ejemplo 1.25. $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d) = \mathbb{H}_n^d$ si n = 0 o n = 1
Para d = 1, $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}) = \emptyset$ para $n \geq 2$
Para d = 2, $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^2)$, los polinomios de la forma $(x_1 + ix_2)^n$ pertenecen a $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^2)$. En particular, $\mathbb{Y}_2(\mathbb{R}^2)$ está formado por polinomios de la forma $a(x_1^2 - x_2^2) + bx_1x_2, a, b \in \mathbb{C}$

Calculamos ahora la dimensión de $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$. Llamaremos $N_{n,d}$ a la dimensión de $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$. Sea $H_n \in \mathbb{H}_n^d$, dicho polinomio puede ser escrito de la forma

$$H_n(x_1, ..., x_d) = \sum_{j=0}^{n}(x_d)^j h_{n-j}(x_1, ...x_{d-1}), h_{n-j} \in \mathbb{H}_{n-j}^{d-1}$$

Aplicamos el operador laplaciano a H_n,

$$\triangle_{(d)}H_n(x_{(d)}) = \sum_{j=0}^{n-2}(x_d)^j[\triangle_{(d-1)}h_{n-j}(x_{(d-1)}) + (j+2)(j+1)h_{n-j-2}(x_{(d-1)})]$$

Luego, si $H_n \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ entonces $\triangle_(d)H_n(x_{(d)}) \equiv 0$ y

$$h_{n-j-2} = -\frac{1}{(j+2)(j+1)}\triangle_{(d-1)}h_{n-j}, 0 \leq j \leq n-2$$

En consecuencia un armónico homogéneo está únicamente determinado por $h_n \in \mathbb{H}_n^{d-1}$ y$h_{n-1} \in \mathbb{H}_{n-1}^{d-2}$. De este modo, obtenemos la siguiente relación ..

$$N_{n,d} = dim\mathbb{H}_n^{d-1} + \mathbb{H}_{n-1}^{d-1}$$

Usando la formula se tiene que para $d \geq 2$,

$$N_{n,d} = \frac{(2n+d-2)(n+d-3)!}{n!(d-2!)}, n \in \mathbb{N}$$

1.2.2. Armónicos de Legendre y Polinomios de Legendre

Ahora, nos centraremos en unos armónicos homogéneos especiales, los armónicos de Legendre de grado n en d dimensiones.

Definición 1.26. Se define los armónicos de Legendre, $L_{n,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando las siguientes condiciones:

- $L_{n,d} \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$
- $L_{n,d}(Ax) = L_{n,d}(x) \forall A \in \mathbb{O}(), \forall x \in \mathbb{R}^d$
- $L_{n,d}(e_d) = 1$

Nota 1.27. La segunda condición implica que $h_{n-j}(A_1 x_{d-1}) = h_{n-j}(x_{d-1}), \forall A_1 \in (\mathbb{O})^{(d-1)}, x_{(d-1)} \in \mathbb{R}^{d-1}, 0 \leq j \leq n$

De una proposición anteriorse deduce que por ser h_{n-j} polinomio homogéneo,$(n-j)$ es par y

$$h_{n-j}(x_{(d-1)}) = \begin{cases} c_k |x_{(d-1)}|^{2k} & \text{si } n-j = 2k \\ 0 & \text{si } n-j = 2k+1 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Por tanto,

$$L_{n,d}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k |x_{(d-1)}|^{2k} (x_d)^{n-2k}$$

Determinamos ahora los coeficientes c_k

$$c_k = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2k+d-3)} c_{k-1}, 1 \leq k \leq [n/2]$$

Usando la condición de normalidad se tiene que $c_0 = 1$ y

$$c_k = (-1)^k \frac{n!\Gamma(\frac{d-1}{2})}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}, 0 \leq k \leq [n/2]$$

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión

$$L_{n,d}(x) = n!\Gamma(\frac{d-1}{2}) \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{|x_{(d-1)|^{2k}} (x_d)^{n-2k}}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}$$

Usando coordenadas polares $x_{(d)} = r\xi_{(d)}, \xi_{(d)} = te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}$, definimos el polinomio de Legendre de grado n en d dimensiones, $P_{n,d}(t) = L_{n,d}(\xi_{(d)})$ como la restricción a la esfera unidad del armónico de Legendre. Por tanto

$$P_{n,d}(t) = n!\Gamma(\frac{d-1}{2}) \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(1-t^2)^k t^{n-2k}}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}$$

Nota 1.28. $P_{n,d}(1) = 1$ y $L_{n,d}(x) = L_{n,d}(r\xi_{(d)}) = r^n P_{n,d}(t)$

1.2.3. Esféricos Armónicos

Definición 1.29. Se llama espacio de esféricos armónicos de orden n en d dimensiones a $\mathbb{Y}_n^d = \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)|\mathbb{S}^{d-1}$

De la definición se deduce que un esférico armónico $\mathbb{Y}_n \in \mathbb{Y}_n^d$ está asociado a un armónico homogéneo $\mathbb{H}_n \in \mathbb{Y}_n^d$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{H}_n(r\xi) = r^n \mathbb{Y}_n(\xi)$$

En consecuencia, $dim \mathbb{Y}_n^d = N_{n,d}$

Teorema 1.30. *Sea $\mathbb{Y}^d \in \mathbb{Y}_n^d$ y $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. Entonces $\mathbb{Y}_n$ es invariante respecto a $\mathbb{O}^d(\xi)$, si y sólo si, $\mathbb{Y}_n(\eta) = \mathbb{Y}_n(\xi)\mathbb{P}_{n,d}(\xi.\eta)\forall\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$*

Demostración. ($\Rightarrow$) Dado que ξ es un vector unitario podemos encontrar $A_1\mathbb{O}^d$ tal que $\xi = A_1 e_d$. Sea $Y_n(\eta) = Y_n(A_1\eta), \eta \in \mathbb{S}^{d-1}d-1$, que es invariante respecto a $\mathbb{O}^d(e_d)$. De la definición de armónico de Legendre sabemos que $r^n Y_n(\eta) = c_1 L_{n_d}(r^n\eta), r \geq 0, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ con c_1 una constante.

Por tanto, $Y_n(\eta) = c_1 L_{n,d}(\eta)$ y tomando $\eta = e_d$ tenemos que $c_1 = Y_n(e_d)$.

Finalmente como

$$Y_n(\eta) = Y_n(e_d)\mathbb{P}_{n,d}(\eta.e_d)$$

se tiene que

$$\mathbb{Y}_n(\eta) = Y_n(A_1^T\eta) = Y_n(A_1^T\eta)\mathbb{P}_{n,d}(A_1^T\eta.e_d) = Y_n(A_1^T\eta)\mathbb{P}_{n,d}(\eta.A_1e_d) = \mathbb{Y}_n(\xi)\mathbb{P}_{n,d}(\xi.\eta)$$

($\Leftarrow$) Obvio $\square$