



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

## *EL TÍTULO DEL TRABAJO* *FIN DE GRADO*

Trabajo Fin de Grado presentado por  
Daniel López García

Curso 2017/18



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

***EL TÍTULO DEL TRABAJO***  
***FIN DE GRADO***

Trabajo Fin de Grado presentado por  
Daniel López García

Curso 2017/18

Tutor: Nombre Apellido1 Apellido2  
Departamento: Matemática Aplicada  
Área de Conocimiento: Matemática Aplicada



(Página de agradecimientos si los hay)  
Thank you.



# Índice

<b>I</b>	<b>Distribución de puntos en la esfera.</b>	<b>1</b>
<b>1.</b>	<b>Esféricos Armónicos</b>	<b>3</b>
1.1.	Preliminares . . . . .	3
1.1.1.	Notación . . . . .	3
1.2.	Esféricos Armónicos a partir de Espacios Primitivos. . . . .	5
1.2.1.	Espacios de Polinomios Homogéneos. . . . .	5
1.2.2.	Armónicos de Legendre y Polinomios de Legendre . . . . .	7
1.2.3.	Esféricos Armónicos . . . . .	8
1.3.	Teorema de Adición. Consecuencias. . . . .	9
1.4.	Un Operador de Proyección . . . . .	13
1.5.	Generando Bases Ortonormales para Espacios de Esféricos Armónicos. . . . .	16
<b>2.</b>	<b>Cálculo del Gradiente</b>	<b>19</b>
2.0.1.	Caso particular $d=3$ . . . . .	22
<b>3.</b>	<b>Integración Numérica</b>	<b>25</b>
3.1.	Fórmulas de una variable. . . . .	25
3.2.	Métodos de Gauss de Orden Superior. . . . .	28
3.3.	Integración puntos dispersos . . . . .	29
3.4.	Integración sobre el disco unidad. . . . .	29
<b>II</b>	<b>Competición en Kaggle</b>	<b>31</b>
<b>4.</b>	<b>Introducción</b>	<b>33</b>
4.1.	Introducción. . . . .	33
4.1.1.	Descripción del problema. . . . .	33
4.1.2.	Limitaciones encontradas. . . . .	33
4.1.3.	Herramientas utilizadas . . . . .	33
<b>5.</b>	<b>Visualización</b>	<b>35</b>
<b>6.</b>	<b>Preprocesamiento.</b>	<b>39</b>

<b>III</b>	<b>Apéndices</b>	<b>41</b>
<b>A.</b>	<b>La Función Gamma</b>	<b>43</b>
<b>B.</b>	<b>Resultados básicos de la esfera.</b>	<b>45</b>
<b>C.</b>	<b>Polinomios de Legendre</b>	<b>47</b>
C.1.	Fórmulas de Representación . . . . .	47
C.1.1.	Fórmula de Rodrigues . . . . .	47
C.1.2.	Fórmulas de Representación Integral. . . . .	47
C.2.	Propiedades . . . . .	48
<b>D.</b>	<b>Polinomios de Gegenbauer</b>	<b>49</b>
<b>E.</b>	<b>Funciones de Legendre Asociadas</b>	<b>51</b>



# Índice de figuras

5.0.1.Distribución de <i>ip</i> y <i>app</i> . . . . .	35
5.0.2.Distribución de <i>channel</i> y <i>device</i> . . . . .	36
5.0.3.Distribución de <i>os</i> . . . . .	36
5.0.4.Distribución de <i>day</i> y <i>month</i> . . . . .	37
5.0.5.Distribución de <i>year</i> y <i>timestamp</i> . . . . .	37
5.0.6.Balanceo de clases . . . . .	38

# Índice de cuadros

5.1. Valores perdidos. . . . .	38
6.1. Pruebas realizadas durante el preprocesamiento. . . . .	40



## Parte I

# Distribución de puntos en la esfera.



# Capítulo 1

## Esféricos Armónicos

### 1.1. Preliminares

#### 1.1.1. Notación

Para empezar fijaremos la notación que seguiremos durante el capítulo. Usaremos  $d \in \mathbb{N}$  para representar la dimensión de un conjunto; en particular, el conjunto  $\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, \dots, x_d)^T : x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq d\}$  es el espacio euclídeo de dimensión  $d$  con el producto escalar y la norma

$$(x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j \quad |x| = (x, x)^{1/2} \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

En  $\mathbb{R}^d$  usaremos la base canónica

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_d = (0, 0, \dots, 1)^T$$

y escribiremos  $x = \sum_{j=1}^d x_j e_j, x \in \mathbb{R}^d$ .

Para indicar la dimensión explícitamente usaremos  $x_{(d)}$  en lugar de  $x$ . En tal caso,  $x_{(d)} = x_{(d-1)} + x_d e_d$  siendo  $x_{(d-1)} = (x_1, \dots, x_{d-1}, 0)^T$ . También usaremos  $x_{(d-1)}$  para referirnos al vector  $(d-1)$ -dimensional  $(x_1, \dots, x_{d-1}, 0)^T$ .

Trabajaremos sobre la esfera unidad  $\mathbb{S}^{d-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| = 1\}$ . Por simplicidad, llamaremos esfera a  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

**Definición 1.1.** Sean  $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ , definimos las siguientes distancias:

- La distancia euclídea  $|\xi - \eta| = \sqrt{2(1 - \xi \cdot \eta)}$
- La distancia geodésica  $\theta(\xi, \eta) = \arccos(\xi \cdot \eta)$

*Nota 1.2.* Usando que  $\frac{2}{\pi} \leq \sin t \leq t, t \in [0, \pi/2]$  se deduce la siguiente relación entre ambas distancias:

$$\frac{2}{\pi} \theta(\xi, \eta) \leq |\xi - \eta| \leq \theta(\xi, \eta)$$

Para  $x = (x_1, \dots, x_d)$  definimos  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$ . Análogamente, para el operador gradiente  $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})^T$  definimos

$$\nabla^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Y finalmente definimos el operador laplaciano como

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2$$

**Definición 1.3.** Dado  $x \in (\mathbb{R})^+$  definimos la función gamma como

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

**Proposición 1.4.** Se verifican las siguientes formulas:

$$\int_0^\infty t x - 1 e^{-at^b} dt = b^{-1} a^{-x/b} \Gamma(x/b), x, a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^1 |\ln t|^{x-1} dt = \Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt, k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^+$$

*Nota 1.5.*  $\Gamma(1) = 1$  y de la tercera fórmula se deduce que  $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}_0$ . Es decir, la función  $\Gamma$  extiende el operador factorial de los números naturales a los reales positivos.

**Lema 1.6.**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

**Definición 1.7.** Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , el símbolo de Pochhammer se define como

$$(x)_0 = 1, (x)_n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$

**Proposición 1.8.** Sea  $x \in \mathbb{R}^+$  entonces

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

## 1.2. Esféricos Armónicos a partir de Espacios Primitivos.

Consideramos  $\mathbb{O}^d$  el conjunto de matrices ortogonales de orden  $d$ . Para cualquier  $\eta \in \mathbb{O}^d$  vector no nulo,  $\mathbb{O}^d(\eta) = \{A \in \mathbb{O}^d : A\eta = \eta\}$  es el subconjunto de matrices ortogonales que deja el subespacio  $\text{span}\{\eta\} = \{\alpha\eta : \alpha \in \mathbb{R}\}$  invariante.

**Definición 1.9.** Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  y  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , se define  $f_A$  como:

$$f_A(x) = f(Ax), \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Consideremos un subespacio  $\mathcal{V}$  de funciones definidas de  $\mathbb{R}^d$  a un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ .

**Definición 1.10.** Sea  $\mathcal{V}$  un subespacio de funciones definidas de  $\mathbb{R}^d$  a  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ . Se dice que  $\mathcal{V}$  es invariante si para  $f \in \mathcal{V}$  y  $A \in \mathbb{O}^d$ , entonces  $f_A \in \mathcal{V}$ . Considerando  $\mathcal{V}$  un subespacio invariante de un espacio proveniente de un producto escalar se define:

- $\mathcal{V}$  es reducible si  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$  con  $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$  verificando  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  irreducibles y  $\mathcal{V}_1 \perp \mathcal{V}_2$ .
- $\mathcal{V}$  es irreducible si no es reducible.
- $\mathcal{V}$  es primitivo si es invariante e irreducible.

**Proposición 1.11.** Si  $f_A = f$  para cualquier  $A \in \mathbb{O}^d$  entonces  $f(x)$  depende de  $x$  por medio de  $|x|$ , luego  $f$  es constante en una esfera de radio arbitrario.

*Demostración.* Sean  $x, y \in \mathbb{R}^d$  con  $|x| = |y|$ , podemos encontrar una matriz  $A \in \mathbb{O}^d$  tal que  $Ax = y$ . Entonces  $f(x) = f_A(x) = f(y)$ . □

**Definición 1.12.** Dado  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  se define  $\text{span}\{f_A : A \in \mathbb{O}^d\}$  como el espacio de las series  $\sum c_j f_{A_j}$  convergentes con  $A_j \in \mathbb{O}^d, c_j \in \mathbb{C}$

De la definición se deduce que  $\text{span}\{f_A : A \in \mathbb{O}^d\}$  es un subespacio de funciones. Además, si  $\mathcal{V}$  es un espacio finito dimensional  $\mathcal{V} = \text{span}\{f_A\}$

Introduciremos los espacios de armónicos esféricos de diferentes órdenes como subespacios primitivos de  $C(\mathbb{S}^{d-1})$ .

### 1.2.1. Espacios de Polinomios Homogéneos.

Consideramos  $\mathcal{H}_n^d$  el espacio de polinomios homogéneos de grado  $n$  en  $d$  dimensiones. Las funciones son de la forma:

$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}$$

**Ejemplo 1.13.**

$$\mathbb{H}_2^2 = \{a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2\}$$

$$\mathbb{H}_3^2 = \{a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_1^2x_2 + a_4x_1x_2^2\}$$

A continuación vamos a estudiar la dimensión de  $\mathcal{H}_n^d$ , llegando a la conclusión de que es un espacio invariante finito dimensional. Para determinar  $\dim \mathcal{H}_n^d$  contamos los monomios de grado  $n$ , es decir,  $x^\alpha$  con  $\alpha_i \geq 0$  y verificando  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d = n$ . Tomamos un conjunto  $S = \{1, 2, \dots, n+d-1\}$ . Seleccionamos  $d-1$  números de dicho conjunto y los llamamos  $\beta_i, 1 \leq i \leq d-1$ . Definimos  $\beta_0 = 0$  y  $\beta_d = n+d$ .

Ahora, tomamos  $\alpha_i$  como el número elementos de  $S$  entre  $2\beta_i$  consecutivos, es decir,  $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1} - 1, 1 \leq i \leq d$ . Tenemos que

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i = \sum_{i=1}^d \beta_i - \beta_{i-1} - \sum_{i=1}^d 1 = \beta_d - d = n + d - d = n$$

Por tanto tenemos una biyección entre el conjunto de  $\alpha_i$  que suman  $n$  y el conjunto de  $\beta_i$ . Finalmente, contamos las distintas elecciones posibles de los  $\beta_i$  y tenemos que

$$\dim \mathbb{H}_n^d = \binom{n+d-1}{d-1} = \binom{n+d-1}{n}$$

**Definición 1.14.** Una función  $f$  es armónica si  $\Delta f(x) = 0$ .

**Lema 1.15.** Si  $\Delta f = 0$ , entonces  $\Delta f_A = 0, \quad \forall A \in \mathbb{O}^d$

*Demostración.* Sea  $y = Ax$ , entonces  $\nabla_x = A\nabla_y$ . Como  $A \in \mathbb{O}^d$  se tiene que

$$\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x = \nabla_y \cdot \nabla_y = \Delta_y$$

□

A continuación, vamos a ver un subespacio de  $H_n^d$  importante.

**Definición 1.16.** Llamamos  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$  al espacio de los polinomios homogéneos de grado  $n$  en  $\mathbb{R}^d$  que son armónicos.

**Ejemplo 1.17.**  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d) = \mathbb{H}_n^d$  si  $n = 0$  o  $n = 1$

Para  $d = 1$ ,  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}) = \emptyset$  para  $n \geq 2$

Para  $d = 2$ ,  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^2)$ , los polinomios de la forma  $(x_1 + ix_2)^n$  pertenecen a  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^2)$ . En particular,  $\mathbb{Y}_2(\mathbb{R}^2)$  está formado por polinomios de la forma  $a(x_1^2 - x_2^2) + bx_1x_2, \quad a, b \in \mathbb{C}$



## 1.2. ESFÉRICOS ARMÓNICOS A PARTIR DE ESPACIOS PRIMITIVOS.7

Calculamos ahora la dimensión de  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ . Llamaremos  $N_{n,d}$  a la dimensión de  $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ . Sea  $H_n \in \mathbb{H}_n^d$ , dicho polinomio puede ser escrito de la forma

$$H_n(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j=0}^n (x_d)^j h_{n-j}(x_1, \dots, x_{d-1}), h_{n-j} \in \mathbb{H}_{n-j}^{d-1}$$

Aplicamos el operador laplaciano a  $H_n$ ,

$$\Delta_{(d)} H_n(x_{(d)}) = \sum_{j=0}^{n-2} (x_d)^j [\Delta_{(d-1)} h_{n-j}(x_{(d-1)}) + (j+2)(j+1)h_{n-j-2}(x_{(d-1)})]$$

Luego, si  $H_n \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$  entonces  $\Delta_{(d)} H_n(x_{(d)}) \equiv 0$  y

$$h_{n-j-2} = -\frac{1}{(j+2)(j+1)} \Delta_{(d-1)} h_{n-j}, 0 \leq j \leq n-2$$

En consecuencia un armónico homogéneo está únicamente determinado por  $h_n \in \mathbb{H}_n^{d-1}$  y  $h_{n-1} \in \mathbb{H}_{n-1}^{d-2}$ . De este modo, obtenemos la siguiente relación

$$N_{n,d} = \dim \mathbb{H}_n^{d-1} + \mathbb{H}_{n-1}^{d-1}$$

Usando la formula obtenida para  $\dim \mathbb{H}_n^d$  se tiene que para  $d \geq 2$ ,

$$N_{n,d} = \frac{(2n+d-2)(n+d-3)!}{n!(d-2!)}, n \in \mathbb{N}$$

### 1.2.2. Armónicos de Legendre y Polinomios de Legendre

Ahora, nos centraremos en unos armónicos homogéneos especiales, los armónicos de Legendre de grado  $n$  en  $d$  dimensiones.

**Definición 1.18.** Se define los armónicos de Legendre,  $L_{n,d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando las siguientes condiciones:

- $L_{n,d} \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$
- $L_{n,d}(Ax) = L_{n,d}(x) \quad \forall A \in \mathcal{O}^d(e_d), \forall x \in \mathbb{R}^d$
- $L_{n,d}(e_d) = 1$

*Nota 1.19.* La segunda condición implica que  $h_{n-j}(A_1 x_{d-1}) = h_{n-j}(x_{d-1}), \forall A_1 \in \mathcal{O}^{(d-1)}, x_{(d-1)} \in \mathbb{R}^{d-1}, 0 \leq j \leq n$

De la proposición 1.11 se deduce que por ser  $h_{n-j}$  polinomio homogéneo,  $(n-j)$  es par y

$$h_{n-j}(x_{(d-1)}) = \begin{cases} c_k |x_{(d-1)}|^{2k} & \text{si } n-j = 2k \\ 0 & \text{si } n-j = 2k+1 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Por tanto,

$$L_{n,d}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k |x_{(d-1)}|^{2k} (x_d)^{n-2k}$$

Determinamos ahora los coeficientes  $c_k$

$$c_k = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2k+d-3)} c_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq [n/2]$$

Usando la condición de normalidad se tiene que  $c_0 = 1$  y

$$c_k = (-1)^k \frac{n! \Gamma(\frac{d-1}{2})}{4^k k! (n-2k)! \Gamma(k + \frac{d-1}{2})}, \quad 0 \leq k \leq [n/2]$$

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión

$$L_{n,d}(x) = n! \Gamma(\frac{d-1}{2}) \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{|x_{(d-1)}|^{2k} (x_d)^{n-2k}}{4^k k! (n-2k)! \Gamma(k + \frac{d-1}{2})}$$

Usando coordenadas polares  $x_{(d)} = r\xi_{(d)}$ ,  $\xi_{(d)} = te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}$ , definimos el polinomio de Legendre de grado  $n$  en  $d$  dimensiones,  $P_{n,d}(t) = L_{n,d}(\xi_{(d)})$  como la restricción a la esfera unidad del armónico de Legendre. Por tanto

$$P_{n,d}(t) = n! \Gamma(\frac{d-1}{2}) \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(1-t^2)^k t^{n-2k}}{4^k k! (n-2k)! \Gamma(k + \frac{d-1}{2})}$$

*Nota 1.20.*  $P_{n,d}(1) = 1$  y  $L_{n,d}(x) = L_{n,d}(r\xi_{(d)}) = r^n P_{n,d}(t)$

### 1.2.3. Esféricos Armónicos

**Definición 1.21.** Se llama espacio de esféricos armónicos de orden  $n$  en  $d$  dimensiones a  $\mathbb{Y}_n^d = \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)_{|\mathbb{S}^{d-1}}$

De la definición se deduce que un esférico armónico  $\mathbb{Y}_n \in \mathbb{Y}_n^d$  está asociado a un armónico homogéneo  $\mathbb{H}_n \in \mathbb{Y}_n^d$  de la siguiente forma:

$$\mathbb{H}_n(r\xi) = r^n \mathbb{Y}_n(\xi)$$

En consecuencia,  $\dim \mathbb{Y}_n^d = N_{n,d}$

**Teorema 1.22.** Sea  $\mathbb{Y}^d \in \mathbb{Y}_n^d$  y  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Entonces  $\mathbb{Y}_n$  es invariante respecto a  $\mathbb{O}^d(\xi)$ , si y sólo si,  $\mathbb{Y}_n(\eta) = \mathbb{Y}_n(\xi) \mathbb{P}_{n,d}(\xi, \eta) \forall \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Dado que  $\xi$  es un vector unitario podemos encontrar  $A_1 \mathbb{O}^d$  tal que  $\xi = A_1 e_d$ . Sea  $Y_n(\eta) = Y_n(A_1 \eta)$ ,  $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ , que es invariante respecto a  $\mathbb{O}^d(e_d)$ . De la definición de armónico de Legendre sabemos que  $r^n Y_n(\eta) = c_1 L_{n,d}(r^n \eta)$ ,  $r \geq 0$ ,  $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$  con  $c_1$  una constante.

Por tanto,  $Y_n(\eta) = c_1 L_{n,d}(\eta)$  y tomando  $\eta = e_d$  tenemos que  $c_1 = Y_n(e_d)$ .

Finalmente como

$$Y_n(\eta) = Y_n(e_d) \mathbb{P}_{n,d}(\eta \cdot e_d)$$

se tiene que

$$\mathbb{Y}_n(\eta) = Y_n(A_1^T \eta) = Y_n(A_1^T \eta) \mathbb{P}_{n,d}(A_1^T \eta \cdot e_d) = Y_n(A_1^T \eta) \mathbb{P}_{n,d}(\eta \cdot A_1 e_d) = \mathbb{Y}_n(\xi) \mathbb{P}_{n,d}(\xi \cdot \eta)$$

( $\Leftarrow$ ) Obvio  $\square$

### 1.3. Teorema de Adición. Consecuencias.

**Teorema 1.23.** Sea  $\{Y_{n,j} : 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_n^d$ , es decir,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,j}(\eta) \overline{Y_{n,j}(\eta)} d\mathbb{S}^{d-1} = \delta_{j,k}, \quad 1 \leq j, k \leq N_{n,d}$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi) \overline{Y_{n,j}(\eta)} = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} P_{n,d}(\xi \cdot \eta) \forall \xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$$

*Demostración.* Sean  $A \in \mathbb{O}^d$  y  $1 \leq k \leq N_{n,d}$ ,  $Y_{n,k}(A\xi) \in \mathbb{Y}_n^d$  podemos escribir

$$Y_{n,k}(A\xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} c_{kj} Y_{n,j}(\xi), \quad c_{kj} \in \mathbb{C}$$

Como

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,k}(A\xi) \overline{Y_{n,k}(A\xi)} d\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,k}(\eta) \overline{Y_{n,k}(A\eta)} d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \delta_{j,k}$$

tenemos que

$$\delta_{jk} = \sum_{l,m=1}^{N_{n,d}} c_{j,l} \overline{c_{k,m}} (Y_{n,l}, Y_{n,m}) = \sum_{l,m=1}^{N_{n,d}} c_{j,l} \overline{c_{k,l}}$$

Sea  $C = (c_{j,l})$  y  $C^H$  su matriz conjugada transpuesta. Se verifica que  $CC^H = I$  y  $C^H C = I$  luego  $C$  es unitaria y

$$\sum_{j=1}^{N_{n,d}} \overline{c_{j,l}} c_{j,k} = \delta_{lk} \quad 1 \leq l, k \leq N_{n,d}$$

Ahora, consideramos la suma

$$Y(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi) \overline{Y_{n,j}(\eta)}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Para  $A \in \mathbb{O}^d$  y fijado  $\xi$  se tiene que

$$Y(A\xi, A\eta) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(A\xi) \overline{Y_{n,j}(A\eta)} = \sum_{j,k,l=1}^{N_{n,d}} c_{jk} \overline{c_{jl}} Y_{n,k}(\xi) \overline{Y_{n,l}(\eta)} = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,k}(\xi) \overline{Y_{n,k}(\eta)} = Y(\xi, \eta)$$

luego  $Y(\xi, \cdot) \in \mathbb{Y}_n^d$  es invariante respecto a  $\mathbb{O}^d(\xi)$ . Por el teorema 1.22  $Y(\xi, \eta) = Y(\xi, \xi) P_{n,d}(\xi, \eta)$ . Análogamente,  $Y(\xi, \eta) = Y(\eta, \eta) P_{n,d}(\xi, \eta)$ . En consecuencia,  $Y(\xi, \xi) = Y(\eta, \eta)$  y es una constante en  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Para determinar dicha constante, integramos la igualdad  $Y(\xi, \xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} |Y_{n,j}(\xi)|^2$  sobre la esfera, obteniendo que

$$Y(\xi, \xi) |\mathbb{S}^{d-1}| = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y_{n,j}(\xi)|^2 d\mathbb{S}^{d-1} = N_{n,d}$$

Por tanto,  $Y(\xi, \xi) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}$  y se cumple  $\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi) \overline{Y_{n,j}(\eta)} = Y(\xi, \eta) = Y(\xi, \xi) P_{n,d}(\xi, \eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} P_{n,d}(\xi, \eta)$   $\square$

**Ejemplo 1.24.** En el caso  $d = 2$

$$\sum_{j=1}^2 Y_{n,j}(\xi) \overline{Y_{n,j}(\eta)} = \frac{1}{\pi} P_{n,2}(\xi, \eta) \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{S}^1$$

Si tomamos  $\xi = (\cos\theta, \sin\theta)^T$ ,  $\eta = (\cos\psi, \sin\psi)^T$ . Entonces  $\xi \cdot \eta = \cos(\theta - \psi)$  y

$$Y_{n,1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\theta) \quad (1.3.1)$$

$$Y_{n,2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\theta) \quad (1.3.2)$$

es una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_n^2$ .

**Ejemplo 1.25.** Si  $d = 3$

$$\sum_{j=1}^{2n+1} Y_{n,j}(\xi) \overline{Y_{n,j}(\eta)} = \frac{2n+1}{4\pi} P_{n,3}(\xi, \eta) \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{S}^2$$

Veamos ahora algunas aplicaciones del teorema de adición. En primer lugar, aplicaremos el teorema para encontrar una expresión reducida del kernel de  $\mathbb{Y}_n^d$ .

Cada  $Y_n \in \mathbb{Y}_n^d$  puede escribirse de la forma

$$Y_n(\xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} (Y_n, Y_{n,j})_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,j}(\xi)$$

Aplicando el teorema,

$$Y(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_n(\eta) \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi) \overline{Y_{n,j}(\eta)} d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d}(\xi \cdot \eta) Y_n(\eta) d\mathbb{S}^{d-1}(\eta)$$

Por tanto,

$$K_{n,d}(\xi \cdot \eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} P_{n,d}(\xi \cdot \eta)$$

es el kernel reproductivo de  $\mathbb{Y}_n^d$ , es decir,

$$Y_n(\xi) = (Y_n, K_{n,d}(\xi, \cdot))_{\mathbb{S}^{d-1}} \quad \forall Y_n \in \mathbb{Y}_n^d, \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Definimos  $\mathbb{Y}_{0:m}^d = \bigoplus_{n=0}^m \mathbb{Y}_n^d$  como el espacio de todos los esféricos armónicos de orden menor o igual a  $m$ . Entonces

$$K_{0:m,d}(\xi, \eta) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \sum_{n=0}^m N_{n,d} P_{n,d}(\xi \cdot \eta)$$

es el kernel reproductivo de  $\mathbb{Y}_{0:m}^d$ .

A continuación, obtendremos límites para los esféricos armónicos y los polinomios de Legendre.

**Proposición 1.26.** *Se verifican las siguientes desigualdades:*

$$\|Y_n\|_{\infty} \leq \left( \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \right)^{\frac{1}{2}} \|Y_n\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \quad (1.3.3)$$

$$|P_{n,d}(t)| \leq 1 = P_{n,d}(1) \quad (1.3.4)$$

*Demostración.* Tomando  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$  por el teorema de adición

$$\sum_{j=1}^{N_{n,d}} |Y_{n,j}(\xi)|^2 = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} P_{n,d}(\|\xi\|^2) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \quad (1.3.5)$$

Por tanto,  $\max\{|Y_{n,j}(\xi)|\} \leq \left( \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \right)^{1/2}$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y_n(\xi)|^2 d\mathbb{S}^{d-1}(\xi) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \sum_{k=1}^{N_{n,d}} (Y_n, Y_{n,j})_{\mathbb{S}^{d-1}} (Y_n, Y_{n,k})_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,j} Y_{n,k} d\mathbb{S}^{d-1} \\ &= \sum_{j=1}^{N_{n,d}} |(Y_n, Y_{n,j})_{\mathbb{S}^{d-1}}|^2 \end{aligned}$$

Finalmente uniendo lo anterior se tiene que

$$|Y_n(\xi)|^2 \leq \left( \sum_{j=1}^{N_{n,d}} (Y_n, Y_{n,j}) \right)^2 \left( \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j} \right)^2 = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y_n|^2 dS^{d-1} = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \|Y_n\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}^2$$

y en consecuencia

$$\|Y_n\|_{\infty} \leq \left( \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \right)^{1/2} \|Y_n\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

Ahora, usando 1.3.5 y el teorema de adición tenemos que

$$\frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} |P_{n,d}(\xi \cdot \eta)| = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} |Y_{n,j}(\xi) \overline{Y_{n,j}(\eta)}| \leq \left( \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}^2(\xi) \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}^2(\eta) \right)^{1/2} = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}$$

es decir,

$$|P_{n,d}(\xi \cdot \eta)| \leq 1 = P_{n,d}(1)$$

□

**Proposición 1.27.** *Se verifica la siguiente igualdad*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |P_{n,d}(\xi \cdot \eta)|^2 dS^{d-1}(\eta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |P_{n,d}(\xi \cdot \eta)|^2 dS^{d-1}(\eta) = \\ & \left( \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \right)^2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left| \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_{n,j}(\xi) \overline{Y_{n,j}(\eta)} \right|^2 dS^{d-1}(\eta) = \\ & \left( \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \right)^2 \sum_{j=1}^{N_{n,d}} |Y_{n,j}(\xi)|^2 = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.28.** *Para cualquier  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $d \in \mathbb{N}$  el espacio  $\mathbb{Y}_n^d$  es irreducible*

*Demostración.* Razonamos por deducción al absurdo. Supongamos que  $\mathbb{Y}_n^d$  es reducible entonces  $\exists V_1, V_2$  no vacíos, verificando que  $\mathbb{Y}_n^d = V_1 + V_2$  y  $V_1 \perp V_2$ . Tomamos una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_n^d$  tal que las primeras  $N_1$  funciones recubren  $V_1$  y las restantes  $N_2 = N_{n,d} - N_1$  recubren  $V_2$ . Podemos aplicar el teorema de adición a  $V_1$  y  $V_2$  con las funciones de Legendre  $P_{n,d,1}$  y  $P_{n,d,2}$ .

Como  $V_1 \perp V_2$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d,1}(\xi\eta)P_{n,d,2}(\xi\eta)d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1} \quad (1.3.6)$$

Fijamos  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$  y sea  $\phi$  una función tal que  $\phi(\eta) = P_{n,d,1}(\xi\eta)$ . Tomamos  $A \in \mathbb{O}^d(\xi)$  y se cumple que  $A^T\xi = \xi$ . Entonces

$$P_{n,d,1}(\xi \cdot A \cdot \eta) = P_{n,d,1}(A^T\xi \cdot \eta) = P_{n,d,1}(\xi \cdot \eta)$$

es decir,  $\phi$  es invariante respecto a  $\mathbb{O}^d(\xi)$ . Por el teorema 1.22

$$P_{n,d,1}(\xi \cdot \eta) = P_{n,d,1}(\xi \cdot \xi) \cdot P_{n,d}(\xi \cdot \eta) = P_{n,d}(\xi \cdot \eta)$$

Razonando de forma análoga para  $P_{n,d,2}$  se tiene que

$$P_{n,d,2}(\xi \cdot \eta) = P_{n,d}(\xi \cdot \eta)$$

Sin embargo, tenemos que

$$0 = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d,1}(\xi\eta)P_{n,d,2}(\xi\eta)d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |P_{n,d}(\xi\eta)|^2 d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}$$

Hemos llegado a una contradicción, por tanto,  $\mathbb{Y}_n^d$  es irreducible  $\square$

## 1.4. Un Operador de Proyección

Buscamos la mejor aproximación de una función  $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$  en  $\mathbb{Y}_n^d$ , es decir,  $\inf\{\|f - Y_n\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} : Y_n \in \mathbb{Y}_n^d\}$ . Si  $\{Y_{n,j} : 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_n^d$  entonces la solución es la proyección de  $f$  en  $\mathbb{Y}_n^d$  que está definido para  $f \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$

$$(P_{n,d}f)(\xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} (f, Y_{n,j})_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,j}(\xi)$$

**Definición 1.29.** Se define la proyección de  $f \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$  en  $\mathbb{Y}_n^d$  como

$$(P_{n,d}f)(\xi) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d}(\xi \cdot \eta) f(\eta) d\mathbb{S}^{d-1}(\eta), \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$$

*Nota 1.30.* El operador  $P_{n,d}$  es lineal

**Proposición 1.31.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$  entonces  $\|P_{n,d}f\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})} \leq N_{n,d}\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}$

*Demostración.* Como  $|P_{n,d}(t)| \leq 1$  entonces dado  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$|P_{n,d}f(\xi)| \leq \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\eta)| d\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}$$

Por tanto,

$$\|P_{n,d}f\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})} \leq N_{n,d}\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}$$

$\square$

**Proposición 1.32.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$  entonces  $\|P_{n,d}f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq (N_{n,d})^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$

*Demostración.* Sea  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$|(P_{n,d}f)(\xi)|^2 \leq \left( \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \right)^2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |P_{n,d}(\xi \cdot \eta)|^2 dS^{d-1}(\eta) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\eta)|^2 dS^{d-1}(\eta)$$

Usando la proposición 1.27 tenemos que

$$|(P_{n,d}f)(\xi)|^2 \leq \left( \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \right)^2 \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\eta)|^2 dS^{d-1}(\eta) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}^2$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|P_{n,d}f\|_{C(\mathbb{S}^{d-1})}^2 &\leq \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \\ \|P_{n,d}f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} &\leq N_{n,d}^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.33.** El operador proyección  $P_{n,d}$  conmuta con las transformaciones ortogonales, es decir,  $P_{n,d}f_A = (P_{n,d}f)_A \quad \forall A \in \mathbb{O}^d$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} (P_{n,d}f_A)(\xi) &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d}(\xi \cdot \eta) f(A\eta) dS^{d-1}(\eta) \\ &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,d}(A\xi \cdot \zeta) f(\zeta) dS^{d-1}(\zeta) = (P_{n,d}f)_A(\xi) \end{aligned}$$

□

**Corolario 1.34.** Si  $\mathbb{V}$  es un espacio invariante, entonces  $P_{n,d}\mathbb{V} = \{P_{n,d}f : f \in \mathbb{V}\}$  es un subespacio invariante de  $\mathbb{Y}_n^d$ .

**Teorema 1.35.** Si  $\mathbb{V}$  es un espacio invariante de  $C(\mathbb{S}^{d-1})$  entonces o  $\mathbb{V} \perp \mathbb{Y}_n^d$  o  $P_{n,d}$  es una biyección de  $\mathbb{V}$  sobre  $\mathbb{Y}_n^d$ . En el último caso,  $\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$

*Demostración.* Veamos que si  $P_{n,d} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{Y}_n^d$  es una biyección entonces  $\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$ . Ambos espacios son de dimensión finita y tienen la misma dimensión,  $N_{n,d} = \dim(\mathbb{Y}_n^d)$ . Sea  $\{V_j : 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{V}$ . Por ser  $\mathbb{V}$  primitivo, para cada  $A \in \mathbb{O}^d$

$$V_j(A\xi) = \sum_{k=1}^{N_{n,d}} c_{jk} V_k(\xi), \quad c_{jk} \in \mathbb{C}$$

siendo la matriz  $(c_{jk})$  unitaria. Definimos la función  $V(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{N_{n,d}} V_j(\xi) \overline{V_j(\eta)}$  y  $V(A\xi, A\eta) = V(\xi, \eta)$ ,  $\forall A \in \mathbb{O}^d$ . Dados  $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$  podemos encontrar



$A \in \mathbb{O}^d$  tal que,  $A\xi = e_d$ ,  $A\eta = te_d + (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}e_{d-1}$  para  $t = \xi\eta$ . Entonces  $V(\xi, \eta) = V(e_d, te_d + (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}e_{d-1})$  es una función de  $t = \xi\eta$ . Llamaremos a esta función  $P_d(t)$ . Fijado  $\xi$ , la aplicación  $\eta \rightarrow \overline{P_d(\xi.\eta)}$  es una función en  $\mathbb{V}$ , del mismo modo, fijado  $\zeta$  la aplicación  $\eta \rightarrow P_{n,d}(\zeta.\eta)$  es una función en  $\mathbb{Y}_n^d$ . Consideramos la función  $\phi(\xi, \zeta) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \overline{P_d(\xi.\eta)} P_{n,d}(\zeta.\eta) dS^{d-1}(\eta)$  con  $\phi(A\xi, A\zeta) = \phi(\xi, \zeta)$ ,  $\forall A \in \mathbb{O}^d$ . Es decir,  $\phi(\xi, \zeta)$  depende sólo de  $\xi.\zeta$ .  $\phi$  pertenece a  $\mathbb{V}$  y a  $\mathbb{Y}_n^d$ , luego o  $\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$  o  $\phi \equiv 0$ . En el último caso tenemos que

$$\sum_{j,k=1}^{N_{n,d}} \overline{V_j(\xi)} Y_{n,k}(\zeta) (V_j, Y_{n,k})_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} = 0 \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{S}^{d-1}$$

donde  $\{Y_{n,k} : 1 \leq k \leq N_{n,d}\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_n^d$ . Como cada elemento de los conjuntos  $\{V_j : 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$  y  $\{Y_{n,j} : 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$  son linealmente independientes, deducimos de la igualdad anterior que

$$(V_j, Y_{n,k})_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} = 0, \quad 1 \leq j, k \leq N_{n,d}$$

. Por lo que  $(V) \perp \mathbb{Y}_n^d$ . □

**Corolario 1.36.** Para  $m \neq n$ ,  $\mathbb{Y}_m^d \perp \mathbb{Y}_n^d$

*Demostración.* Sean  $Y_m \in \mathbb{Y}_m^d$  e  $Y_n \in \mathbb{Y}_n^d$  restricciones sobre la esfera de  $H_m \in \mathbb{Y}_m(\mathbb{R}^d)$  y  $H_n \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$  respectivamente. Como  $\triangle H_m(x) = \triangle H_n(x) = 0$  tenemos que

$$\int_{||x|| < 1} (H_m \triangle H_n - H_n \triangle H_m) dx = 0$$

Aplicando la fórmula de Green

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (H_m \frac{\partial H_n}{\partial r} - H_n \frac{\partial H_m}{\partial r}) d\mathbb{S}^{d-1} = 0$$

Además, por ser  $H_m$  un polinomio homogéneo de grado  $m$

$$\left. \frac{\partial H_m(x)}{\partial r} \right|_{x=\xi} = mY_m(\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Análogamente,

$$\left. \frac{\partial H_n(x)}{\partial r} \right|_{x=\xi} = nY_n(\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (n - m) Y_m(\xi) Y_n(\xi) d\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = 0$$

Finalmente, como  $m \neq n$ ,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_m(\xi) Y_n(\xi) d\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = 0$$

□

### 1.5. Generando Bases Ortonormales para Espacios de Esféricos Armónicos.

A continuación, generaremos una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_n^d$  a partir de bases ortonormales de dimensión  $d-1$ . Para ello, haremos uso de las funciones de Legendre asociadas (Apéndice E).

**Proposición 1.37.** Si  $Y_{j,d-1} \in \mathbb{Y}_j^{d-1}$  entonces  $P_{n,d,j}(t)Y_{j,d-1}(\xi_{(d-1)}) \in \mathbb{Y}_n^d$  en coordenadas polares.

*Demostración.* Tomamos  $d \geq 3$  y

$$f(x) = \frac{i^{-j}}{|\mathbb{S}^{d-2}|} \int_{\mathbb{S}^{d-2}} (x_d + ix_{(d-1)} \cdot \eta)^n Y_{j,d-1}(\eta) dS^{d-2}(\eta)$$

es un polinomio homogéneo de grado  $n$ . Usando coordenadas polares  $x = |x|\xi$ ,  $\xi = te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}$ ,  $|t| \leq 1$ ,  $\xi_{(d-1)} \in \mathbb{S}^{d-1}$ . La restricción de  $f(x)$  a la esfera es

$$f(\xi) = \frac{i^{-j}}{|\mathbb{S}^{d-2}|} \int_{\mathbb{S}^{d-2}} (t + i\sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)} \cdot \eta)^n Y_{j,d-1}(\eta) dS^{d-2}(\eta)$$

Ahora, aplicamos la fórmula de Funk-Hecke

$$\int_{\mathbb{S}^{d-2}} (t + i\sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)} \cdot \eta)^n Y_{j,d-1}(\eta) dS^{d-2}(\eta) = \lambda Y_{j,d-1}(\xi)$$

siendo  $\lambda = |\mathbb{S}^{d-3}| \int_{-1}^1 P_{j,d-1}(s)(t + i\sqrt{1-t^2}s)^j (1-t^2)^{\frac{d-4}{2}} dt$ .

Por tanto,  $f(\xi) = P_{n,d,j}(t)Y_{j,d-1}(\xi_{(d-1)})$  es un esférico armónico de orden  $n$  y dimensión  $d$ .  $\square$

Este resultado nos permite construir una base de  $\mathbb{Y}_n^d$  a partir de bases de  $\mathbb{Y}_0^{d-1}, \dots, \mathbb{Y}_n^{d-1}$

**Definición 1.38.** Para  $d \geq 3$  y  $m \leq n$  definimos el operador

$$\tilde{P}_{n,m} : \mathbb{Y}_m^{d-1} \rightarrow \mathbb{Y}_n^d$$

como

$$(\tilde{P}_{n,m} Y_{m,d-1})(\xi) = \tilde{P}_{n,d,m}(t) Y_{m,d-1}(\xi_{(d-1)}), \quad Y_{m,d-1} \in \mathbb{Y}_m^{d-1}$$

Llamaremos a  $\mathbb{Y}_{n,m}^d = \tilde{P}_{n,m}(\mathbb{Y}_m^{d-1})$  el espacio de orden  $m$  asociado a  $\mathbb{Y}_n^d$ .

El siguiente resultado nos permite descomponer  $\mathbb{Y}_n^d$  como suma ortogonal de espacios asociados.

### 1.5. GENERANDO BASES ORTONORMALES PARA ESPACIOS DE ESFÉRICOS ARMÓNICOS

**Teorema 1.39.** Para  $d \geq 3$  y  $n \geq 0$  se tiene que

$$\mathbb{Y}_n^d = \mathbb{Y}_{n,0}^d \oplus \dots \oplus \mathbb{Y}_{n,n}^d$$

*Demostración.* En primer lugar, veamos que los subespacios  $\mathbb{Y}_{n,i}^d$  son ortogonales 2 a 2. Sea  $0 \leq k, m \leq n$  con  $k \neq m$ . Para cualesquiera  $Y_{k,d-1} \in \mathbb{Y}_k^{d-1}$ ,  $Y_{m,d-1} \in \mathbb{Y}_m^{d-1}$ ,

$$(\tilde{P}_{n,k} Y_{k,d-1}, \tilde{P}_{n,m} Y_{m,d-1})_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \quad (1.5.1)$$

$$= (Y_{k,d-1}, Y_{m,d-1})_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{-1}^1 \tilde{P}_{n,d,k}(t) \tilde{P}_{n,d,m}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = 0 \quad (1.5.2)$$

Por tanto,  $\mathbb{Y}_{n,k}^d \perp \mathbb{Y}_{n,m}^d$  para  $k \neq m$ .

Para cada  $0 \leq m \leq n$ ,  $\mathbb{Y}_{m,n}^d$  es un subespacio de  $\mathbb{Y}_n^d$  y

$$\mathbb{Y}_n^d \supset \mathbb{Y}_{n,0}^d \oplus \dots \oplus \mathbb{Y}_{n,n}^d$$

Como  $\tilde{P}_{n,m} : \mathbb{Y}^{-1} \rightarrow \mathbb{Y}$  es una biyección entonces  $\dim \mathbb{Y}_n^d = \dim \mathbb{Y}^{-1} = N_{m,d-1}$ . Por otro lado,  $\sum_{m=0}^n \dim \mathbb{Y}_m^d = \sum_{m=0}^n N_{m,d-1} = N_{n,d} = \dim \mathbb{Y}_n^d$ . Es decir, ambos lados de la igualdad son espacios de dimensión finita con la misma dimensión.  $\square$

*Nota 1.40.* Si  $\{Y_{m,d-1,j} : 1 \leq j \leq N_{m,d-1}\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_m^{d-1}$ ,  $0 \leq m \leq n$  entonces  $\{\tilde{P}_{n,d,m} Y_{m,d-1,j}(\xi_{(d-1)}) : 1 \leq j \leq N_{m,d-1}, 0 \leq m \leq n\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_n^d$ .

A partir de la base ortonormal de  $\mathbb{Y}_n^2$  obtenida en 1.3.1 y del resultado anterior, construiremos una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_n^3$ .

Usaremos que  $\xi_{(3)} = t e_3 + \sqrt{1-t^2} \begin{pmatrix} \xi_{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}$  con  $t = \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $\xi_{(2)} = (\cos(\phi), \sin(\phi))^T$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Por lo visto anteriormente,

$$\left\{ Y_{m,2,1}(\xi_{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(m\phi), Y_{m,2,2}(\xi_{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(m\phi) \right\}$$

es una base ortonormal de  $\mathbb{Y}_m^2$ .

Por otro lado tenemos que (E.7)

$$\tilde{P}_{n,3,m}(t) = \left[ \frac{(n + \frac{1}{2})(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} P_{n,3}^{(m)}(t)$$

Entonces una base ortonormal viene dada por las funciones

$$\left[ \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} (\sin \theta)^m P_{n,3}^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\phi) \quad 0 \leq m \leq n \quad (1.5.3)$$

$$\left[ \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} (\sin \theta)^m P_{n,3}^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\phi), \quad 1 \leq m \leq n \quad (1.5.4)$$

Esta base también puede ser escrita de otra forma más cómoda para realizar cálculos

$$(-1)^{(m+|m|)/2} \left[ \frac{(2n+1)(n-|m|!)}{4\pi(n+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} (\sin\theta)^m P_{n,3}^{(m)}(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad -n \leq m \leq n$$

(1.5.5)

## Capítulo 2

# Cálculo del Gradiente

Para el cálculo del gradiente usaremos una expresión de la base en términos de los polinomios de Gegenbauer. De la proposición D.2, se deduce que esta base es equivalente a la calculada anteriormente. Sean,  $T_n(t), U_n(t)$  los polinomios de Chebyshev de 1<sup>er</sup> y 2<sup>o</sup> orden respectivamente. Y definimos

$$g_{0,n}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) T_n^2(x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2})$$

$$g_{1,n-1}(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} U_{n-1}(x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2})$$

entonces, si tomamos  $n = (n_1, \dots, n_d)$  con  $n_1 = \{0, 1\}$  se define

$$Y_n = g_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \prod_{j=3}^d (x_1^2 + \dots + x_j^2)^{n_j/2} C_{n_j, \lambda_j}(x_j(x_1^2 + \dots + x_j^2)^{-1/2})$$

donde  $\lambda_j = \lambda_j(n_1, \dots, n_{j-1}) = \sum_{i=1}^{j-1} n_i + \frac{j-2}{2}$

Tomamos,  $F_n^\lambda(x) = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{n/2} C_{n, \lambda}(\frac{x_d}{\sqrt{(x_1^2 + \dots + x_d^2)}})$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_d), n = (n_1, \dots, n_d)$  y  $x' = (x_1, \dots, x_{d-1}), n = (n_1, \dots, n_{d-1})$ .  $Y_n(x) = Y_{n'}(x') F_{n_d}^{\lambda_d}(x)$  siendo  $Y_{n'}(x')$  un esférico armónico de dimensión  $d-1$  y grado  $n - n_d$ .

**Proposición 2.1.** Para  $i = 1, \dots, d-1$

$$\partial_i F_n^\lambda(x) = -2\lambda x_i F_{n-2}^{\lambda+1}(x)$$

$$\partial_d F_n^\lambda(x) = (n + 2\lambda - 1) F_{n-1}^\lambda(x)$$

*Demostración.* Sean  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}, i = 1, 2, \dots, d-1$ . Usando que  $\frac{d}{dx} C_{n, \lambda}(x) = 2\lambda C_{n-1, \lambda+1}(x)$  y los apartados (i) y (ii) de la proposición D.4 entonces

$$\partial_i F_n^\lambda = x_i r^{n-2} \left[ n C_{n, \lambda}(\frac{x_d}{r}) - 2\lambda \frac{x_d}{r} C_{n+1, \lambda+1}(\frac{x_d}{r}) \right] = -2\lambda x_i r^{n-2} C_{n-2, \lambda+1}(\frac{x_d}{r})$$

Además,

$$\partial_d F_n^\lambda(x) = r^{n-1} \left[ n \frac{x_d}{r} C_{n,\lambda} \left( \frac{x_d}{r} \right) + 2\lambda \left( 1 - \frac{x_d^2}{r^2} \right) C_{n-1,\lambda+1} \left( \frac{x_d}{r} \right) \right] = (n+2\lambda-1) r^{n-1} C_{n-1,\lambda} \left( \frac{x_d}{r} \right)$$

□

Ahora, tomamos la proyección del espacio de los polinomios homogéneos al espacio de los esféricos armónicos  $proj_{n,\mathbb{S}^{d-1}}^d : H_n^d \rightarrow \mathbb{Y}_n^d$  tal que para  $Y_n \in \mathbb{Y}_n^d$  verifica

$$proj_{n,\mathbb{S}^{d-1}}^d(x_i Y_n(x)) = x_i Y_n(x) - \frac{1}{2(n + (d-2)/2)} \|x\|^2 \partial_i Y_n(x)$$

**Proposición 2.2.** Sea  $n' = |n'| = n - n_d$  e  $i = 1, 2, \dots, d-1$

$$\begin{aligned} \partial_i Y_n(x) &= -2\lambda_d proj_{n'+1,\mathbb{S}^{d-1}}^{d-1}(x Y_{n'}(x')) F_{n_d-2}^{\lambda_d+1}(x) + \frac{(n_d + 2\lambda_d - 1)(n_d + 2\lambda_d - 2)}{(2\lambda_d - 1)(2\lambda_d - 2)} \partial_i Y_{n'}(x') F_{n_d-1}^{\lambda_d-1}(x) \\ \partial_d Y_n(x) &= (n_d + 2\lambda_d - 1) Y_{n'}(x') F_{n_d-1}^{\lambda_d}(x) \end{aligned}$$

*Demostración.* Usando los resultados anteriores y que  $2\lambda_d - 1 = 2n' + d - 3$

$$\begin{aligned} \partial_i Y_n(x) &= \partial_i Y_{n'}(x') F_{n_d}^{\lambda_d}(x) - 2\lambda_d x_i Y_{n'}(x') F_{n_d-2}^{\lambda_d+1}(x) \\ &= -2\lambda_d proj_{n'+1,\mathbb{S}^{d-1}}^{d-1}(x_i Y_{n'}(x')) F_{n_d-2}^{\lambda_d+1}(x) + \partial_i Y_{n'}(x') \left[ F_{n_d}^{\lambda_d}(x) - \frac{2\lambda_d}{2\lambda_d - 1} \|x'\|^2 F_{n_d-2}^{\lambda_d+1}(x) \right] \end{aligned}$$

Además, como  $\|x'\|^2 = r^2 - x_d^2$  y en virtud de los apartados (i) y (iv) de la proposición D.4

$$\begin{aligned} F_{n_d}^{\lambda_d}(x) - \frac{2\lambda_d}{2\lambda_d - 1} \|x'\|^2 F_{n_d-2}^{\lambda_d+1}(x) &= r^{n_d} \left[ C_{n_d}^\lambda \left( \frac{x_d}{r} \right) - \frac{2\lambda_d}{2\lambda_d - 1} \left( 1 - \frac{x_d^2}{r^2} \right) C_{n_d-2}^{\lambda_d+1} \left( \frac{x_d}{r} \right) \right] \\ &= \frac{(n_d + 2\lambda_d - 1)(n_d + 2\lambda_d - 2)}{(2\lambda_d - 1)(2\lambda_d - 2)} r^{n_d} C_{n_d-1}^{\lambda_d-1} \left( \frac{x_d}{r} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo esta igualdad en la obtenida anteriormente, se prueba el resultado. □

**Proposición 2.3.** Sea  $n' = |n| = n - n_d$  e  $i = 1, \dots, d-1$

$$\begin{aligned} proj_{n+1,\mathbb{S}^{d-1}}^d(x_i Y_n(x)) &= \frac{\lambda_d}{n_d + \lambda_d} proj_{n'+1,\mathbb{S}^{d-1}}^{d+1}(x_i Y_{n'}(x')) F_{n_d}^{\lambda_d+1}(x) + \\ &\quad \frac{(n_d + 1)(n_d + 2)}{(2\lambda_d - 1)(2\lambda_d - 2)2(n_d + \lambda_d)} \partial_i Y_{n'}(x') F_{n_d+2}^{\lambda_d-1}(x) \\ proj_{n+1,\mathbb{S}^{d-1}}^d(x_d Y_n(x)) &= \frac{n_d + 1}{2(n_d + \lambda_d)} Y_{n'}(x') F_{n_d+1}^{\lambda_d}(x) \end{aligned}$$

*Demostración.*

$$proj_{n+1, \mathbb{S}^{d-1}}^d(x_i Y_n(x)) = x_i Y_{n'} F_{n_d}^{\lambda_d}(x) - \frac{r^2}{2(n_d + \lambda_d)} \partial_i(Y_{n'}(x') F_{n_d}^{\lambda_d}(x))$$

Usando la proposición 2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} proj_{n+1, \mathbb{S}^{d-1}}^d(x_i Y_n(x)) &= proj_{n'+1, \mathbb{S}^{d-1}}^{d-1}(x_i Y_{n'}(x')) \left[ F_{n_d}^{\lambda_d} + \frac{\lambda_d}{n_d + \lambda_d} r^2 F_{n_d-2, \lambda_d+1}(x) \right] \\ &\quad + \partial_i Y_{n'}(x') \left[ \frac{\|x'\|^2}{2\lambda_d - 1} F_{n_d}^{\lambda_d}(x) - \frac{(n_d + 2\lambda_d - 1)(n_d + 2\lambda_d) - 2}{2(n_d + \lambda_d)(2\lambda_d - 1)(2\lambda_d - 2)} r^2 F_{n_d}^{\lambda_d-1}(x) \right] \end{aligned}$$

Ahora, aplicando el apartado (iv) de la proposición D.4

$$F_{n_d}^{\lambda_d} + \frac{\lambda_d}{n_d + \lambda_d} r^2 F_{n_d-2, \lambda_d+1}(x) = r^{n_d} \left[ C_{n_d}^{\lambda_d} \left( \frac{x_d}{r} \right) + \frac{\lambda_d}{n_d + \lambda_d} C_{n_d-2}^{\lambda_d+1} \left( \frac{x_d}{r} \right) \right] = \frac{\lambda_d}{n_d + \lambda_d} r^{n_d} C_{n_d}^{\lambda_d+1} \left( \frac{x_d}{r} \right)$$

Por otro lado, aplicando el apartado (i) de la proposición D.4

$$\begin{aligned} \frac{\|x'\|^2}{2\lambda_d - 1} F_{n_d}^{\lambda_d}(x) - \frac{(n_d + 2\lambda_d - 1)(n_d + 2\lambda_d) - 2}{2(n_d + \lambda_d)(2\lambda_d - 1)(2\lambda_d - 2)} r^2 F_{n_d}^{\lambda_d-1}(x) \\ = \frac{r^{n_d+2}}{2\lambda_d - 1} \left[ \left( 1 - \frac{x_d^2}{r^2} \right) C_{n_d}^{\lambda_d} \left( \frac{x_d}{r} \right) - \frac{(n_d + 2\lambda_d - 1)(n_d + 2\lambda_d - 2)}{2(n_d + \lambda_d)(2\lambda_d - 2)} C_{n_d}^{\lambda_d-1} \left( \frac{x_d}{r} \right) \right] \\ = \frac{(n_d + 1)(n_d + 2)}{2(n_d + \lambda_d)(2\lambda_d - 1)(2\lambda_d - 2)} r^{n_d+2} C_{n_d+2}^{\lambda_d-1} \left( \frac{x_d}{r} \right) \end{aligned}$$

Uniando ambas igualdades se prueba la primera igualdad de la proposición.

Finalmente,

$$\begin{aligned} proj_{n+1, \mathbb{S}^{d-1}}^d(x_d Y_n(x)) &= x_d Y_{n'}(x') F_{n_d}^{\lambda_d}(x) - \frac{r^2}{2(n_d + \lambda_d)} \partial_d(Y_{n'}(x') F_{n_d}^{\lambda_d}(x)) \\ &= Y_{n'}(x') \left[ x_d F_{n_d}^{\lambda_d}(x) - \frac{r^2}{2(n_d + \lambda_d)} (n_d + 2\lambda_d - 1) F_{n_d-1}^{\lambda_d}(x) \right] \\ &= \frac{n_d + 1}{2(n_d + \lambda_d)} Y_{n'}(x') F_{n_d+1}^{\lambda_d}(x) \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.4.** Sea  $n = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$  con  $n_1 = \{0, 1\}$  y  $|n| = n$ . Entonces (1)  $\partial_i Y_n(x)$  es un esférico armónico de grado  $n-1$

$$\langle \partial_i Y_n, Y_m \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} \neq 0 \quad |m| = n - 1$$

para  $s \geq 2$   $m \in \mathbb{N}_0^d$  con  $m_1 = \{0, 1\}$

*Demostración.* La afirmación del teorema equivale a  $\partial_i Y_n = \sum_m a_m Y_m^{n-1}$  siendo  $a_m$  una constante real. El resultado se prueba por inducción sobre la dimensión  $d$  usando las proposiciones anteriores. Para  $d = 2$ ,

$$\begin{aligned}\partial_1 Y_n^{(1)}(x) &= nY_{n-1}^{(1)}(x) & \partial_2 Y_n^{(1)}(x) &= -nY_{n-1}^{(2)}(x) \\ \partial_1 Y_n^{(2)}(x) &= nY_{n-1}^{(2)}(x) & \partial_2 Y_n^{(2)}(x) &= nY_{n-1}^{(1)}(x)\end{aligned}$$

Supongamos cierto el resultado para dimensión  $d - 1$ . Entonces  $\partial_i Y_{n'}(x')$  puede escribirse como combinación lineal de a lo sumo  $2^{d-3}$  esféricos  $Y_m^{n'-1}$ . Como  $Y_m^{n'-1} F_{n_d}^{\lambda_d-1} = Y_{m_1, \dots, m_{d-1}, n_d}^{n-1}$ , el resultado se obtiene aplicando la proposición 2.2.  $\square$

### 2.0.1. Caso particular d=3

El espacio de los esféricos armónicos de grado  $n$  en dimensión 3 tiene dimensión  $2n+1$ . Tomando coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x_2 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x_3 &= r \cos \theta \\ 0 &\leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi, r > 0\end{aligned}$$

una base ortogonal de  $\mathbb{Y}_n^d$  es

$$\begin{cases} Y_{k,1}^n = r^n (\sin \theta)^k C_{n,k}^{k+1/2}(\cos \theta) \cos(k\phi), & 0 \leq k \leq n \\ Y_{k,2}^n(x) = r^{n-k} (\sin \theta)^k C_{n-k}^{k+1/2}(\cos \theta) \sin(k\phi), & 1 \leq k \leq n \end{cases} \quad (2.0.1)$$

**Proposición 2.5.** Para  $k = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned}\partial_1 Y_{k,1}^n(x) &= -\frac{(n+k)(n+k-1)}{2(2k-1)} Y_{k-1,2}^{n-1}(x) - (k + \frac{1}{2}) Y_{k+1,2}^{n-1}(x) \\ \partial_2 Y_{k,1}^n(x) &= \frac{(n+k)(n+k-1)}{2(2k-1)} Y_{k-1,1}^{n-1}(x) - (k + \frac{1}{2}) Y_{k+1,1}^{n-1}(x) \\ \partial_3 Y_{k,1}^n(x) &= (n+k) Y_{k,1}^{n-1}(x)\end{aligned}$$

Para  $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\partial_1 Y_{k,2}^n(x) &= \frac{(n+k)(n+k-1)}{2(2k-1)} Y_{k-1,1}^{n-1}(x) + (k + \frac{1}{2}) Y_{k+1,1}^{n-1}(x) \\ \partial_2 Y_{k,2}^n(x) &= \frac{(n+k)(n+k-1)}{2(2k-1)} Y_{k-1,2}^{n-1}(x) - (k + \frac{1}{2}) Y_{k+1,2}^{n-1}(x) \\ \partial_3 Y_{k,2}^n(x) &= (n+k) Y_{k,2}^{n-1}(x)\end{aligned}$$



Finalmente, queremos conocer el número de puntos que anulan el gradiente, para ello haremos uso de las siguientes igualdades trigonométricas

$$\cos(k\phi) = \operatorname{sen}(k\phi + \frac{\pi}{2}) \quad (2.0.2)$$

$$\operatorname{sen}(k\phi) = \cos(k\phi - \frac{\pi}{2}) \quad (2.0.3)$$

$$\cos(k+1)\phi = \cos(k\phi)\cos\phi - \operatorname{sen}k\phi\operatorname{sen}\phi \quad (2.0.4)$$

$$\cos(k-1)\phi = \cos(k\phi)\cos\phi + \operatorname{sen}k\phi\operatorname{sen}\phi \quad (2.0.5)$$

$$\operatorname{sen}(k+1)\phi = \operatorname{sen}(k\phi)\cos\phi + \operatorname{sen}(\phi)\cos(k\phi) \quad (2.0.6)$$

$$\operatorname{sen}(k-1)\phi = \operatorname{sen}(k\phi)\cos\phi - \operatorname{sen}(\phi)\cos(k\phi) \quad (2.0.7)$$

$$(2.0.8)$$

Llamaremos  $c_{n,k}, d_k$  a las constantes  $\frac{(n+k)(n+k-1)}{2(2k-1)}, k + \frac{1}{2}$  respectivamente. Igualando a 0 las parciales calculadas anteriormente tenemos que

$$\partial_3 Y_{k,1}^n(x) = (n+k)Y_{k,1}^{n-1}(x) = (n+k)(\operatorname{sen}\theta)^k C_{n-k-1}^{k+1/2}(\cos\theta)\cos k\phi = 0 \implies \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = 0 \\ \cos k\phi = 0 \\ C_{n-k-1}^{k+1/2}(\cos\theta) = 0 \end{cases} \quad (2.0.9)$$

Suponemos que  $\cos k\phi = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \partial_1 Y_{k,1}^n(x) &= \\ &= (\operatorname{sen}\theta)^{k-1} [-c_{n,k} C_{n-k}^{k-1/2}(\cos\theta)\operatorname{sen}(k\phi)\cos\phi + d_k \operatorname{sen}^2\theta C_{n-k-2}^{k+3/2}(\cos\theta)\operatorname{sen}(k\phi)\cos\phi] \\ &= (\operatorname{sen}\theta)^{k-1} \operatorname{sen}(k\phi)\cos\phi [-c_{n,k} C_{n-k}^{k-1/2}(\cos\theta) + d_k \operatorname{sen}^2\theta C_{n-k-2}^{k+3/2}(\cos\theta)] \end{aligned} \quad (2.0.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 Y_{k,1}^n(x) &= \\ &= (\operatorname{sen}\theta)^{k-1} [-c_{n,k} C_{n-k}^{k-1/2}(\cos\theta)\operatorname{sen}(k\phi)\operatorname{sen}\phi + d_k \operatorname{sen}^2\theta C_{n-k-2}^{k+3/2}(\cos\theta)\operatorname{sen}(k\phi)\operatorname{sen}\phi] \\ &= (\operatorname{sen}\theta)^{k-1} \operatorname{sen}(k\phi)\operatorname{sen}\phi [-c_{n,k} C_{n-k}^{k-1/2}(\cos\theta) + d_k \operatorname{sen}^2\theta C_{n-k-2}^{k+3/2}(\cos\theta)] \end{aligned} \quad (2.0.11)$$

Ahora, igualando ambas expresiones e igualando a 0

$$\begin{aligned} \partial_1 Y_{k,1}^n(x) = \partial_2 Y_{k,1}^n(x) &= \\ &= (\operatorname{sen}\theta)^{k-1} \operatorname{sen}(k\phi)\cos\phi [c_{n,k} C_{n-k}^{k-1/2}(\cos\theta) + d_k \operatorname{sen}^2\theta C_{n-k-2}^{k+3/2}(\cos\theta)] \\ &= (\operatorname{sen}\theta)^{k-1} \operatorname{sen}(k\phi)\operatorname{sen}\phi [c_{n,k} C_{n-k}^{k-1/2}(\cos\theta) + d_k \operatorname{sen}^2\theta C_{n-k-2}^{k+3/2}(\cos\theta)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.0.12)$$

Como  $\cos(k\phi) = 0$  entonces  $\sin(k\phi) \neq 0$ . Además,  $\sin\phi$  y  $\cos\phi$  no se anulan simultáneamente, luego de la expresión anterior se verifica que

$$c_{n,k}C_{n-k}^{k-1/2}(\cos\theta) + d_k\sin^2\theta C_{n-k-2}^{k+3/2}(\cos\theta) = 0 \quad (2.0.13)$$

Haciendo el cambio  $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ , y tomando como variable  $t = \cos\theta$ , se tiene que la expresión anterior es un polinomio de grado  $n - k$ . Por tanto, tiene a lo sumo  $n - k$  raíces.

En resumen, hemos encontrado  $2k(n - k) + 2$  valores que anulan las 3 parciales.

Razonando análogamente, se obtiene la misma conclusión para las parciales de segundo tipo.

## Capítulo 3

# Integración Numérica

En este capítulo vamos a obtener una aproximación numérica de la integral

$$I(f) = \int_{\mathbb{S}^2} f(\eta) dS^2(\eta)$$

.

### 3.1. Fórmulas de una variable.

En primer lugar tomaremos la siguientes coordenadas esféricas

$$\eta \mapsto (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Ahora,

$$I(f) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi.$$

Una vez hemos simplificado la expresión de la integral podemos aplicar métodos de integración numérica de una variable a cada una de las integrales. Comenzaremos integrando respecto a  $\phi$ .

*Nota 3.1.* Regla del trapecio.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right]$$

Como el integrando es periódico en  $\pi$  con periodo  $2\pi$ , usando la regla del trapecio tenemos que

$$\tilde{I}(g) \equiv \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi \approx \widetilde{I}_m(g) \equiv \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^m g\left(j \frac{2\pi}{m}\right)$$

**Lema 3.2.** Para  $m \geq 2, k \geq 0$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\phi) d\phi = \begin{cases} 2\pi, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

$$\frac{2\pi}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \cos(k \frac{2j\pi}{m}) = \begin{cases} 2\pi, & k = 0, m, 2m, \dots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\phi) d\phi = \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \sin(k \frac{2j\pi}{m}) = 0 \quad (3.1.3)$$

*Demostración.* Basta con sustituir las siguientes expresiones en la fórmula del trapecio

$$\begin{aligned} \cos(iw) &= \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \\ \sin(iw) &= \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \end{aligned}$$

□

Finalmente estudiaremos la convergencia de  $\tilde{I}(g)$  a  $I(g)$ . Para estudiar la convergencia de funciones periódicas, introduciremos el espacio  $H^q(2\pi)$  como aquel de las funciones de cuadrado integrable en  $(0, 2\pi)$  que verifican que

$$\|f\|_q = \sqrt{|a_0|^2 + \sum |k| |a_k|^2} < +\infty$$

siendo  $a_k$  los coeficientes de la serie de Fourier. El espacio  $H^q(2\pi)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f, g)_q = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |k|^{2q} a_k b_k$$

siendo  $a_k, b_k$  los coeficientes de la serie de Fourier para  $f$  y  $g$  respectivamente.

**Teorema 3.3.** Sean  $q > \frac{1}{2}, g \in H^q(2\pi)$ , entonces

$$|I(g) - I_m(g)| \leq \frac{\sqrt{4\pi\zeta(2q)}}{m^q} \|g\|_q, \quad m \geq 1$$

siendo  $\zeta$  la función zeta,

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s}$$

Por otro lado, estudiamos el valor de la integral  $\int_0^{2\pi} f(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)\sin\theta d\theta$ . Para ello, hacemos el cambio de variable  $z = \cos\theta$ , la integral queda:

$$\int_{-1}^1 f(\cos\phi\sqrt{1-z^2}, \sin\phi\sqrt{1-z^2}, z) dz$$

*Nota 3.4.* Integración de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Aplicamos la integración de Gauss-Legendre en  $-1 < z < 1$ .

$$\begin{aligned} I_n(f) &= h \sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{k=1}^n w_k f(\cos\phi_j\sqrt{1-z^2}, \sin\phi_j\sqrt{1-z^2}, z) \\ &= h \sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{k=1}^n w_k f(\cos\phi_j\sin\theta_k, \sin\phi_j\sin\theta_k, \cos\theta_k) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

siendo  $z_i, w_i$  los nodos y los pesos de la fórmula de Gauss-Legendre respectivamente.

**Teorema 3.5.** Sea  $f$  un polinomio esférico de grado menor o igual a  $2n-1$ . Entonces  $I(f) = I_n(f)$ . Además, para  $f(x, y, z) = z^{2n}$ ,  $I(f) \neq I_n(f)$

*Demostración.* Supongamos  $f(x, y, z) = x^r y^s z^t$ ,  $r + s + t \leq 2n-1$ . Haciendo el cambio a coordenadas esféricas:

$$I = \int_{\mathbb{S}^2} x^r y^s z^t dS^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^r \phi \sin^{r+s+1} \theta \sin^s \phi \cos^t \theta d\phi d\theta$$

y la correspondiente aproximación numérica

$$I_m = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h w_k \cos^r \phi_j \sin^s \phi_j \sin^{r+s+1} \theta_k \cos^t \theta_k$$

Analizamos el error,  $E_n = I - I_n (\dots)$  □

Finalmente, obtendremos una cota del error. Para ello haremos uso del teorema 4.5 [p.142] y del corolario del teorema 4.11 [p.149]. El error minimax de la aproximación de una función  $f \in C(\mathbb{S}^2)$  por un polinomio esférico de grado menor o igual a  $m$ , se define como

$$E_{m,\infty}(f) = \min ||f - p||_\infty$$

Sea  $p_m^*$  un polinomio esférico de grado menor o igual a  $m$  cuyo error minimax se alcanza. La existencia  $p_m^*$  es consecuencia de los resultados citados anteriormente.

De 3.1.4 se deduce que  $I(p_{2n-1}^*) = I_n(p_{2n-1}^*)$  Ahora, para  $g \in C(\mathbb{S}^2)$

$$|I(g)| \leq 4\pi \|g\|_\infty \quad (3.1.5)$$

$$|I_n(g)| \leq 4\pi \|g\|_\infty \quad (3.1.6)$$

y

$$I(f) - I_n(f) = I(f - p_{2n-1}^*) - I_n(f - p_{2n-1}^*) \quad (3.1.7)$$

$$|I(f) - I_n(f)| \leq |I(f - p_{2n-1}^*)| + |I_n(f - p_{2n-1}^*)| \leq 8\pi \|f - p_{2n-1}^*\|_\infty \quad (3.1.8)$$

### 3.2. Métodos de Gauss de Orden Superior.

En el caso de integración en una variable los métodos gaussianos se basan en pedir que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible. Si tenemos  $n$  nodos es posible alcanzar esa exactitud para polinomios de grado  $2n - 1$ . Este enfoque generaliza la integración en varias variables. Sea

$$I(f) = \int f(\eta) dS^2(\eta) \approx I_N(f) = \sum_{k=1}^N w_k f(\eta_k)$$

Los nodos  $\eta_k$ , y los pesos  $w_k$  se eligen de forma que los esféricos armónicos sean exactos para el grado mayor posible.

**Teorema 3.6.** *Sea  $\mathcal{G}$  un grupo finito de rotaciones sobre la esfera. Y supongamos que el sistema anterior es invariante para todos los elementos de  $\mathcal{G}$ , es decir,  $I_N(f_\gamma) = I_N(f)$ ,  $\forall \gamma \in \mathcal{G}$ . Entonces*

$$\{\eta_i : i = 1, \dots, N\} = \{\gamma(\eta_i) : i = 1, \dots, N\}$$

Además, para cada nodo  $\eta_i$  sea  $\mathcal{S}_i = \{\gamma(\eta_i) : \gamma \in \mathcal{G}\}$ . Entonces los pesos asociados a los nodos son iguales. Es condición necesaria y suficiente que  $f$  sea invariante para todo elemento de  $\mathcal{G}$  para que se verifique  $I(f) = I_N(f)$ . En tal caso, decimos que  $I_N(f)$  tiene grado de precisión  $d$ .

*Demostración.* Como la esfera es simétrica por rotaciones se verifica que

$$I(f) = \int_{\mathbb{S}^2} f(\eta) dS^2(\eta) = \int_{\mathbb{S}^2} f_\gamma(\eta) dS^2(\eta) = I(f_\gamma)$$

. Sea  $f^* = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} f_\gamma$ .  $f^*$  es invariante por  $\mathcal{G}$  e  $I(f) = I(f^*)$ . Por hipótesis del teorema,

$$I(f) - I_N(f) = I(f^*) - I_N(f^*)$$

Por tanto, si queremos que  $I(f) = I_N(f)$  para todo polinomio esférico  $f$ , basta con mostrar que el resultado es cierto para todo polinomio esférico que sea invariante por la acción de  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Razonando análogamente al apartado anterior se prueba que

$$|I(f) - I_N(d)| \leq 8\pi E_d(f)$$

y la velocidad con la que  $I_N(d)$  converge a  $I(d)$  depende de la regularidad de  $f$ .

Los nodos y los pesos han de ser elegidos de forma que sean invariantes por  $\mathcal{G}$ . Además, el error  $I(f) - I_N(d)$  debe ser 0 para polinomios del mayor grado posible, lo que requiere la resolución de un sistema de ecuaciones no lineal. Estas condiciones hacen que la elección de los nodos y los pesos sea una tarea complicada.

### 3.3. Integración puntos dispersos

Supongamos que tenemos  $N$  nodos,  $P = \{\eta_1, \dots, \eta_N\}$  y sus valores aproximados  $f_i \approx f(\eta_i)$ . Queremos aproximar la integral  $I(f) = \int_{\mathbb{S}^2} f(\eta) dS^2(\eta)$ .

Tomamos  $T_N = \{\Delta_1, \dots, \Delta_{M(N)}\}$  la triangulación de  $\mathbb{S}^2$ , donde los vértices de la triangulación son los nodos.

$$I(f) = \sum_{k=1}^M \int_{\Delta_k} f(n) dS^2(n) \approx \sum_{k=1}^M \frac{1}{3} [f(n_{k,1}) + f(n_{k,2}) + f(n_{k,3})] \text{area}(\Delta_k)$$

Realizando un análisis del error cometido similar al realizado anteriormente, obtenemos que el método tiene grado de precisión 0 y  $|I(f) - I_n(f)| \leq 4\pi c_f h$  siendo  $h = \max \text{diam}(\Delta)$ ,  $\Delta \in T_N$ . Luego,  $f$  es lipschitziana en  $\mathbb{S}^2$  con constante  $c_f$ .

Finalmente, se nos plantean 2 cuestiones: elegir una triangulación y un conjunto de nodos. Una de las opciones más frecuentes para la primera cuestión es la triangulación de Delaunay. En cuanto al conjunto de nodos, es conocido que se obtienen buenos resultados tomando un conjunto en el que los puntos están bien distribuidos.

### 3.4. Integración sobre el disco unidad.

Finalmente, integraremos sobre el disco unidad  $\mathbb{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . La semiesfera superior es la imagen de  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$   $(x, y) \in \mathbb{D}$

$$\int_D f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int_D f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(\eta) dS^2(\eta) = \int_D \left[ f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) + f(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \right] \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Es decir, la integración sobre la esfera es equivalente a una integración con pesos sobre el disco unidad.

$$I(f) = \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

Para integrar sobre  $\theta$  usamos la regla del trapecio y para hacerlo respecto de  $r$  usamos la integración de Gauss-Legendre al integrando.

$$I_n(f) = h \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^n w_k r_k f(r_k \cos \theta_j, r_k \sin \theta_j)$$

**Teorema 3.7.** *Sea  $f(x, y)$  un polinomio de grado menor o igual a  $2n$ , entonces  $I(f) = I_n(f)$ . Además, la fórmula anterior tiene exactitud  $2n$ .*

*Demostración.* Supongamos  $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$  con  $\alpha, \beta$  enteros positivos y tales que  $\alpha + \beta \leq m$ , entonces

$$I(f) = \left( \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^\alpha (\sin \theta)^\beta d\theta \right) \left( \int_0^1 r^{\alpha+\beta+1} \right) \equiv J^{\alpha, \beta} K^{\alpha+\beta+1}$$

$$I_n(f) = \left( h \sum_{j=0}^{2n} (\cos \theta_j)^\alpha (\sin \theta_j)^\beta \right) \left( \sum_{k=0}^n w_k r_k^{\alpha+\beta+1} \right) \equiv J_n^{\alpha, \beta} K_n^{\alpha+\beta+1}$$

siendo

$$k^t = \int_0^1 r^t \quad k_n^t = \sum_{k=0}^n w_k r_k^t$$

Por otro lado, si  $\beta$  es impar las integrales  $J^{\alpha, \beta}, J_n^{\alpha, \beta} = 0$  (visto en la demostración del teorema 3.5). Si  $\beta$  es par podemos transformar el integrando  $(\cos \theta)^\alpha (\sin \theta)^\beta$  en un polinomio de potencias de  $\cos \theta$  con grado  $\alpha + \beta$ . Usando el lema 3.2 se tiene que  $J_n^{\alpha, \beta} = J^{\alpha, \beta}, \alpha + \beta \leq 2n$ . La fórmula de Gauss-Legendre para  $(n+1)$  puntos tiene exactitud  $2n+1$ , luego  $K_n^{\alpha+\beta+1} = K^{\alpha+\beta+1}, \alpha + \beta \leq 2n$ .

Por tanto, hemos probado que  $I(f) = I_n(f) \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, 0 \leq \alpha + \beta \leq 2n$ . Para comprobar que  $I_n(f)$  tiene exactitud  $2n$  basta considerar la función  $f(x, y) = r(r \cos \theta)^{2n+1}$ . En este caso,  $J^{2n+1, 0} = 0$  y  $J_n^{2n+1, 0}, K_n^{2n+2}$  no se anulan.  $\square$



## Parte II

# Competición en Kaggle



## Capítulo 4

# Introducción.

### 4.1. Introducción.

#### 4.1.1. Descripción del problema.

Los atributos son los siguientes

- ip
- app
- device
- so : El sistema operativo desde el
- click\_time: La hora
- attributed\_time : La hora
- is\_attributed : La variable a clasificar, toma valores 1 o 0.

#### 4.1.2. Limitaciones encontradas.

La principal limitación hardware que he encontrado es el uso de memoria RAM debido al gran tamaño del conjunto de entrenamiento (7.7 GB).

#### 4.1.3. Herramientas utilizadas

Boosting es un enfoque donde el resultado se da usando la media ponderada de varios árboles y combina las ventajas de cada árbol al darle a éste un peso en la decisión final. En este enfoque, los árboles tienen que ir construyéndose de manera lineal para intentar añadir árboles que mejoren aquello en lo que el resto ha fallado. El objetivo final es eliminar el sesgo. [9] Para la competición en particular, se ha usado la librería XGBoost, que nos permite usar Boosting con árboles de forma paralela, eficiente y flexible. Este ha sido

el algoritmo usado en el resultado final debido a su capacidad para obtener valores significativamente superiores a Random Forest, aunque sacrificando velocidad en el entrenamiento. He usado las siguientes bibliotecas

- xgboost
- matplotlib
- pandas
- numpy

## Capítulo 5

### Estudio de los datos.

Para poder elegir una estrategia para el preprocesamiento es necesario realizar una visualización de los datos. De esta forma, podremos obtener cómo están distribuidos los valores de cada uno de los atributos o si existe alguna relación de correlación entre ellos. En primer lugar, veamos la distribución de las variables categóricas *ip*, *app*, *channel*, *device* y *os*.

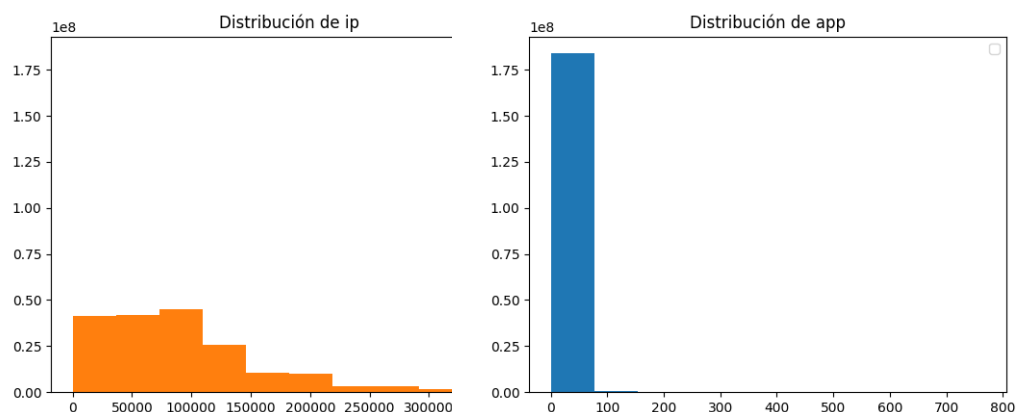
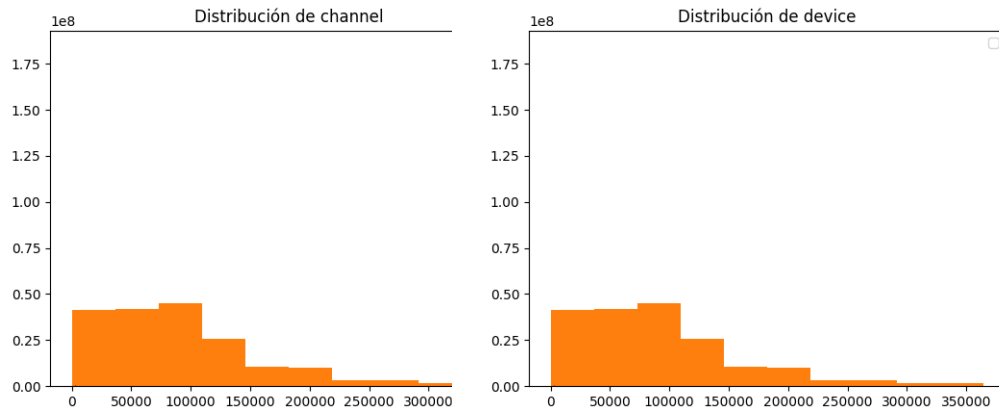
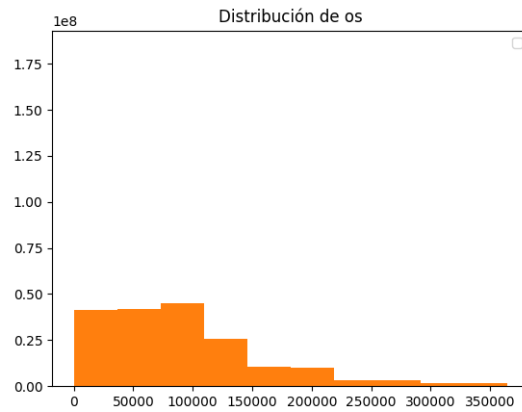


Figura 5.0.1: Distribución de *ip* y *app*

Figura 5.0.2: Distribución de *channel* y *device*Figura 5.0.3: Distribución de *os*

Podemos observar que aunque los valores no se concentran en torno a un valor, la distribución no es uniforme.

Ahora, estudiaremos la variable *click\_time*. Al tratarse de una variable que representa una hora y fecha, la dividiremos en día, mes, año y valor timestamp(segundos transcurridos desde una fecha fijada por el sistema operativo).

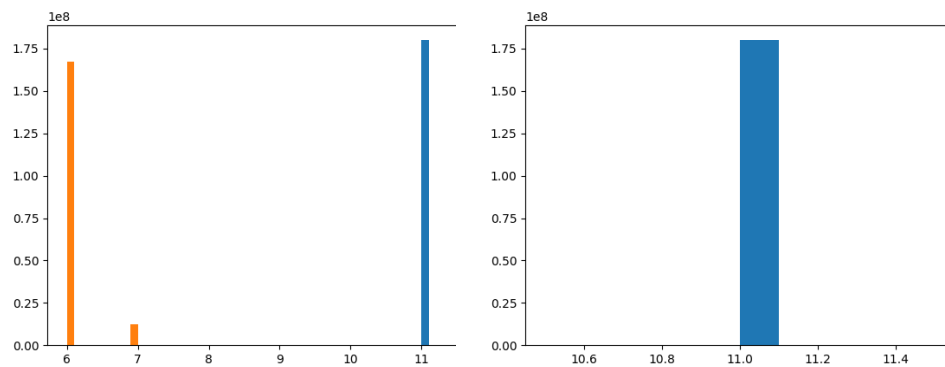


Figura 5.0.4: Distribución de *day* y *month*

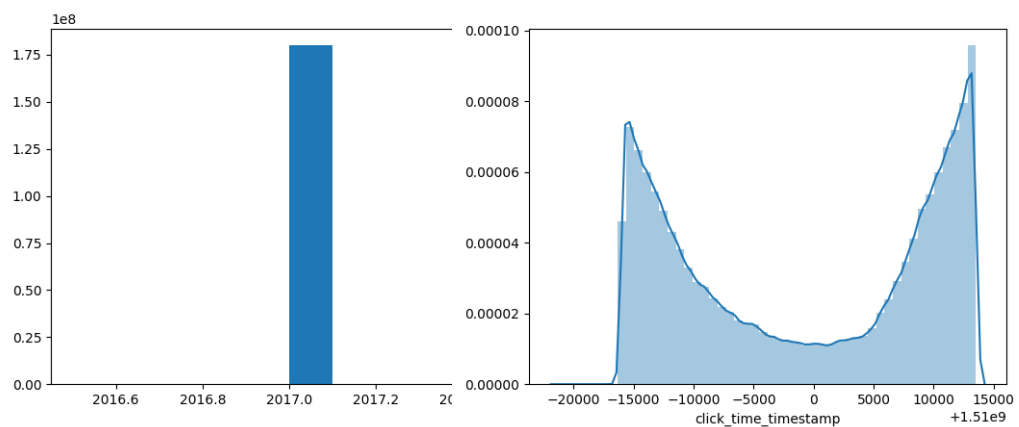


Figura 5.0.5: Distribución de *year* y *timestamp*

En esta ocasión si podemos establecer valores fijos para algunos campos:

- Los datos corresponden a los días 6,7 y 8.
- Todos los valores corresponden al mes 11.
- Todos los registros son del año 2017.

Finalmente, estudiaremos el balanceo de clases de la variable a clasificar. Cabe recordar que un desbalanceo de clases provocará que el modelo de aprendizaje que vamos a construir tienda a obviar la clase minoritaria.

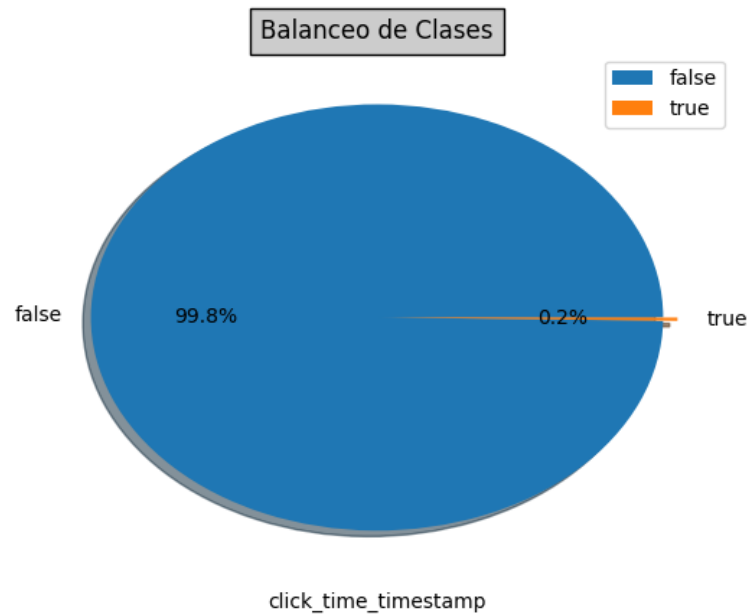


Figura 5.0.6: Balanceo de clases

Una vez hemos visto cómo se distribuyen los datos, a continuación calcularemos el número de valores desconocidos de cada columna. Esta información nos será de ayuda para detectar si una variable no aporta información. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla.

Atributo	Total	%
ip	0	0
app	0	0
os	0	0
chanel	0	0
device	0	0
click_time	0	0
attributed_time	184447044	0.997529

Cuadro 5.1: Valores perdidos.

Finalmente, obtenemos la matriz de correlación entre las variables categóricas.



## Capítulo 6

# Preprocesamiento.

Durante esta sección nos centraremos en tratar el conjunto de datos de proporcionado, con el objetivo de extraer la máxima información posible que nos permita la construcción de un buen modelo de aprendizaje. En este tipo de competiciones la fase de preprocesamiento suele ser la que marca más la diferencia. Esto es debido a que a igualdad de capacidad de procesamiento, se puede obtener la configuración de parámetros óptima para los algoritmos usados, siendo los algoritmos usados similares entre los participantes. Para evaluar la bondad de las decisiones tomadas haremos uso de la clasificación mediante boosting usando la librería *xgboost*, debido a que nos permite ver la importancia de cada atributo a la hora de construir el modelo de aprendizaje. Esto nos permitirá discriminar que cambios nos proporcionan mejoras. A partir de los resultados obtenidos en la sección anterior concluimos que:

- La columna *attributed\_time* puede ser eliminada ya que la mayoría de sus valores son vacíos.
- A priori, de la variable *click\_time* podemos obviar los datos relativos al mes y al año.
- La variable *app* concentra sus valores en torno al intervalo  $[0, 100]$ , por lo que podemos realizar agrupaciones sobre dicha variable, añadiendo una columna que contabilice el número de instancias coincidentes.

Ahora, vamos a seguir trabajando con la variable *click\_time* los siguientes cambios a probar son introducir el día de la semana y la hora. Los resultados obtenidos en las distintas fases de preprocesamiento se muestran en la siguiente tabla.

Cambio realizado	Resultado	Importancia del cambio introducido
Configuración inicial		
Eliminar mes,año y click_time		
Añadir día de la semana y hora		
Agrupar ip-app		
Agrupar ip-app-os		

Cuadro 6.1: Pruebas realizadas durante el preprocesamiento.

## Apéndices A

# La Función Gamma

**Definición A.1.** Dado  $x \in (\mathbb{R})^+$  definimos la función gamma como

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

**Proposición A.2.** Se verifican las siguientes formulas:

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-at^b} dt = b^{-1} a^{-x/b} \Gamma(x/b), x, a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^1 |\ln t|^{x-1} dt = \Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt, k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^+$$

*Nota A.3.*  $\Gamma(1) = 1$  y de la tercera fórmula se deduce que  $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}_0$ . Es decir, la función  $\Gamma$  extiende el operador factorial de los números naturales a los reales positivos.

**Lema A.4.**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

**Definición A.5.** Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , el símbolo de Pochhammer se define como

$$(x)_0 = 1, (x)_n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$

**Proposición A.6.** Sea  $x \in \mathbb{R}^+$  entonces

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$



## Apéndices B

# Resultados básicos de la esfera.

Usaremos  $dV^d$  para elemento diferencial de volumen y  $dS^{d-1}$  para elemento diferencial de superficie de la esfera.  $\mathbb{S}^{-1}$

**Proposición B.1.** Para  $d \geq 3$  y  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ , con  $\xi_{(d)} = te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}$ ,  $t \in [-1, 1]$ , se tiene que

$$dS^{d-1}(te_d + \sqrt{1-t^2}\xi_{(d-1)}) = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt dS^{d-2}(\xi_{(d-1)})$$

Equivalentemente,

$$dS^{d-1} = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt dS^{d-2}$$

**Ejemplo B.2.** Sea  $d=3$  y  $\xi$  un punto genérico de la esfera. Usando coordenadas esféricas

$$\xi_{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Sea  $t = \cos\theta$  entonces

$$\xi_{(2)} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $\xi_{(3)} = te_3 + \sqrt{1-t^2}\xi_{(2)}$  y  $dS^1 = d\phi$ ,  $dS^2 = dt d\phi$

Podemos usar la anterior proposición para el cálculo del área de la superficie de la esfera.

**Proposición B.3.** Se verifica que

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} dS^{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

**Proposición B.4.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  ortogonal entonces

$$dS^{d-1}(A\xi) = dS^{d-1}(\xi)$$

$$dV^d(A\xi) = dV^d(\xi)$$

Llamamos  $C(S^{d-1})$  al espacio de funciones continuas sobre  $S^{d-1}$ . Este espacio es un espacio de Banach con la norma  $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\xi)| : \xi \in S^{d-1}\}$ . Llamaremos  $L^2(S^{d-1})$  al espacio de funciones con cuadrado integrable en  $S^{d-1}$ . Dicho espacio es un Hilbert con el producto escalar

$$(f, g) = \int_{S^{d-1}} f \bar{g} dS^{d-1}$$

Consideramos el espacio  $C(S^{d-1})$  con la norma inducida por el producto escalar de  $L^2(S^{d-1})$ . Este espacio no es completo. Además, el cierre de  $C(S^{d-1})$  respecto a dicha norma es  $L^2(S^{d-1})$ . Es decir, dado una función  $f \in L^2(S^{d-1})$  existe una sucesión  $\{f_n\} \subset C(S^{d-1})$  tal que  $f_n \rightarrow f$

**Proposición B.5.** Sean  $\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in [1 - \delta, 1 + \delta]\}$  y  $f^*(x) = f(\frac{x}{|x|})$ ,  $x \in \Omega_\delta$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces  $f$  es  $k$  veces diferenciable en  $S^{d-1}$  cuando  $f^*$  lo es.

**Definición B.6.** Definimos  $C^k(S^{d-1})$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup 0$  como el espacio de funciones  $k$  veces diferenciables en  $S^{d-1}$

**Proposición B.7.**  $C^k(S^{d-1})$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{C^k(S^{d-1})} = \|f^*\|_{C^k(\Sigma_\delta)}$$

*Nota B.8.* Usaremos  $\|f\|_\infty = \|f\|_{C(S^{d-1})}$

## Apéndices C

# Polinomios de Legendre

### C.1. Fórmulas de Representación

#### C.1.1. Fórmula de Rodrigues

**Teorema C.1.**

$$P_{n,d}(t) = (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{2^n \Gamma(n + \frac{d-1}{2})} (1-t^2)^{\frac{3-d}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}}, \quad d \geq 2$$

*Nota C.2.* A la constante  $R_{n,d} = \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{2^n \Gamma(n + \frac{d-1}{2})}$  se le llama constante de Rodrigues

**Ejemplo C.3.**    ■ Si  $d = 2$ ,

$$P_{n,2}(t) = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Una forma reducida se obtiene usando el polinomio de Chebyshev obteniendo que  $P_{n,2}(t) = \cos(n \arccos t)$ ,  $t \in [-1, 1]$

■ Si  $d=3$ ,

$$P_{n,3}(t) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

#### C.1.2. Fórmulas de Representación Integral.

**Teorema C.4.** Sea  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $d \geq 3$ ,

$$P_{n,d}(t) = \frac{|\mathbb{S}^{d-3}|}{|\mathbb{S}^{d-2}|} \int_{-1}^1 [t + i(1-t^2)^{\frac{1}{2}} s]^n (1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} ds, \quad t \in [-1, 1]$$

*Nota C.5.* Como consecuencia de la fórmula anterior se tiene que  $P_{n,d}(-t) = (-1)^n P_{n,d}(t)$ ,  $t \in [-1, 1]$ , es decir  $P_{n,d}(t)$  tiene la misma paridad que  $n$ .

Podemos obtener otra fórmula de representación integral, usando funciones trigonométricas mediante el cambio de variable  $s = \tanh(u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$

**Teorema C.6.** Sea  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $d \geq 3$ ,

$$P_{n,d}(t) = \frac{|\mathbb{S}^{d-3}|}{|\mathbb{S}^{d-2}|} \int_{-1}^1 \frac{(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}}}{[t \pm i(1-t^2)^{\frac{1}{2}}s]^{n+d-2}} ds, \quad t \in (0, 1]$$

## C.2. Propiedades

**Proposición C.7.** Si  $f \in C^n([-1, 1])$  entonces

$$\int_{-1}^1 f(t) P_{n,d}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = R_{n,d} \int_{-1}^1 f^{(n)}(t) (1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}} dt$$

siendo  $R_{n,d}$  la constante de Rodrigues (Nota C.2)

**Proposición C.8.**  $P_{n,d}(t)$  tiene  $n$  raíces distintas en  $(-1, 1)$

**Proposición C.9.** Los polinomios de Legendre satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$P_{n,d}(t) = \frac{2n+d-4}{n+d-3} t P_{n-1,d}(t) - \frac{n-1}{n+d-3} P_{n-2,d}(t), \quad n \geq 2, d \geq 2$$

$$P_{0,d}(t) = 1, P_{1,d}(t) = t$$

**Proposición C.10.**

$$(1-t^2)P'_{n,d}(t) = n[P_{n-1,d}(t) - tP_{n,d}(t)], \quad n \geq 1, d \geq 2, t \in [-1, 1]$$

**Proposición C.11.** Para  $d \geq 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_{n,d} r^n P_{n,d}(t) = \frac{1-r^2}{(1+r^2-2rt)^{\frac{d}{2}}}, \quad |r| < 1, t \in [-1, 1]$$

**Proposición C.12.**

$$P_{n,d}(0) = \frac{|\mathbb{S}^{d-3}|}{|\mathbb{S}^{d-2}|} \int_{-1}^1 i^n s^n (1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} ds$$

$$P_{n,d}(-1) = (-1)^n$$

**Proposición C.13.**

$$|P_{n,d}(t)| < \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{4}{n(1-t^2)} \right]^{\frac{d-2}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, d \geq 2, t \in (-1, 1)$$



## Apéndices D

# Polinomios de Gegenbauer

**Definición D.1.** Sean  $v \geq 0, n \in \mathbb{N}_0$  se define el polinomio de Gegenbauer de grado  $n$  e índice  $v$ , como:

$$C_{n,v}(t) = \binom{n+2v-1}{n} \frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(v)} \int_{-1}^1 [t + i(1-t^2)^{1/2}s]^n (1-s^2)^{v-1} ds$$

**Proposición D.2.** Se verifica la siguiente relación

$$C_{n, \frac{d-2}{2}}(t) = \binom{n+d-3}{b} P_{n,d}(t)$$

**Proposición D.3.** (Identidad de Gegenbauer.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,v}(t) = \frac{1}{(1+r^2-2rt)^v}, \quad |r| < 1, t \in [-1, 1]$$

**Proposición D.4.** Se verifican las siguientes igualdades:

$$(I) \quad (1-x^2) \frac{d}{dx} C_{n,v}(x) = 2\lambda C_{n,\lambda+1}(x)$$

$$(II) \quad n C_{n,\lambda}(x) = x \frac{d}{dx} C_{n,\lambda}(x) - \frac{d}{dx} C_{n-1,\lambda}(x)$$

$$(III) \quad (n+2\lambda) C_{n,\lambda}(x) = \frac{d}{dx} C_{n,\lambda+1}(x) - x \frac{d}{dx} C_{n,\lambda}(x) \quad n \geq 0$$

$$(IV) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} C_{n+1,\lambda}(x) - C_{n-1,\lambda}(x) &= 2(n+\lambda) C_{n,\lambda}(x) \\ &= 2\lambda C_{n,\lambda+1}(x) - C_{n-2,\lambda+1}(x) \quad n \geq 1 \end{aligned}$$



## Apéndices E

# Funciones de Legendre Asociadas

Las funciones asociadas de Legendre nos permiten construir esféricos armónicos a partir de otros de menor dimensión.

**Definición E.1.** Sea  $d \geq 3$  y  $n, j \in \mathbb{N}_0$  se define la función asociada de Legendre de grado  $n$  y orden  $j$  en dimensión  $d$ , como

$$P_{n,d,j}(t) = \frac{|\mathbb{S}^{d-3}|}{|\mathbb{S}^{d-2}|} i^{-j} \int_{-1}^1 \left[ t + i(1-t^2)^{1/2}s \right]^n P_{j,d-1}(s) (1-s^2)^{\frac{d-4}{2}}, \quad t \in [-1, 1]$$

*Nota E.2.* Si  $j = 0$ ,  $P_{n,d,0}(t) = P_{n,d}(t)$

**Proposición E.3.** Sea  $d \leq 3$  y  $0 \leq j \leq n$

$$P_{n,d,j}(t) = \frac{n! \Gamma(\frac{d-1}{2})}{2^j (n-j)! \Gamma(j + \frac{d-1}{2})} (1-t^2)^{1/2} P_{n-j,d+2j}(t), \quad t \in [-1, 1]$$

El siguiente resultado nos proporciona una relación entre las funciones asociadas de Legendre y las derivadas de los polinomios de Legendre.

**Proposición E.4.** Sea  $d \leq 3$  y  $0 \leq j \leq n$

$$P_{n,d,j}(t) = \frac{(n+d-3)!}{(n+j+d-3)!} (1-t^2)^{1/2} P_{n,d}^{(j)}(t), \quad t \in [-1, 1]$$

**Proposición E.5.**

$$\int_{-1}^1 P_{m,d,j}(t) P_{n,d,j}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = 0, \quad m \neq n$$

**Proposición E.6.** Las funciones  $\tilde{P}_{n,d,j}$  definidas como

$$\tilde{P}_{n,d,j}(t) = \frac{[(2n+d-2)(n-j)!(n+d+j-3)!]^{1/2}}{2^{\frac{d-2}{2}} n! \Gamma(\frac{d-1}{2})} P_{n,d,j}(t), \quad t \in [-1, 1]$$

están normalizadas, es decir  $\int_{-1}^1 [\tilde{P}_{n,d,j}]^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = 1$

*Nota E.7.* Las funciones  $\tilde{P}_{n,d,j}$  pueden ser escritas en función de las derivadas de los polinomios de Legendre

$$\tilde{P}_{n,d,j}(t) = \frac{(n+d-3)!}{n!\Gamma(\frac{d-1}{2})} \frac{[(2n+d-2)(n-j)!]^{1/2}}{2^{d-2}(n+d+j-3)!} (1-t^2)^{j/2} P_{n,d}^{(j)}(t), \quad t \in [-1, 1]$$