UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Laurea triennale in Ingegneria Industriale Meccatronica

Corso di Sistemi Meccanici e Modelli

Equazioni della dinamica di una antenna di un radiotelescopio

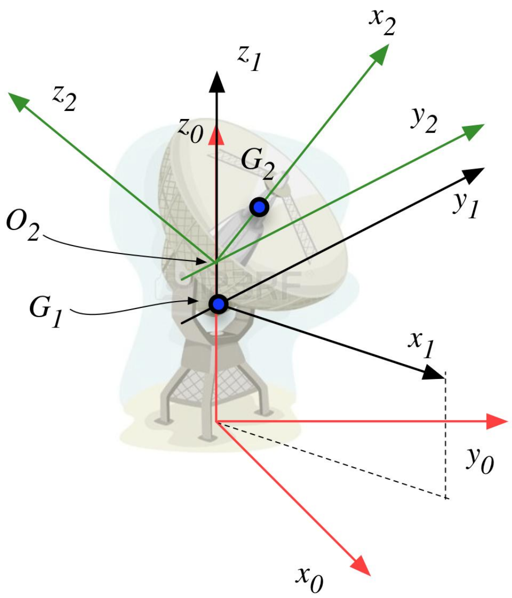
Daniele Serafini mat. 192999
(daniele.serafini@studenti.unitn.it)

Anno Accademico 2019-2020

Indice

1 Introduzione

In questa relazione procedo nell'analisi delle equazioni della dinamica di una antenna di un radiotelescopio mediante il Metodo di Lagrange e successivamente mediante il Metodo di Newton-Eulero. Lo scopo dell'analisi si basa sulla ricerca del momenti esercitati dai due motori durante una rotazione a velocità costante attorno all'asse verticale dell'antenna e successivamente sul confronto dei risultati ottenuti con i due metodi.
Di seguito la consegna del homework.



Consideriamo l'antenna in figura. Sia denotato con "0" il sistema di riferimento al suolo, con "1" il sistema di riferimento solidale alla forcella e con "2" il sistema di riferimento solidale alla antenna. L'origine del sistema "1" è il baricentro della forcella G_1, che sta sull'asse z_0 alla altezza h_1. Il sistema "1" ruota attorno all'asse z_0, dell'angolo $\Theta(t)$. L'origine del sistema "2" è il punto O_2, posto sull'asse z_1 alla distanza h_2 da O_2. Il sistema "2" ruota attorno all'asse y_2 dell'angolo (t). Si assuma, come in figura, che la rotazione positiva sia discorde con y_2 (per positivo x_2 si alza). Il baricentro G_2 dell'antenna è posto sull'asse x_2 alla distanza h_3 da O_2.

2 Applicazione metodo Lagrange

Il metodo di Lagrange consiste nell'analisi del problema mediante la misura di Energia Cinetica, Energia Potenziale intrinseche nell'oggetto in analisi e Forze Generalizzate non conservative agenti sull'oggetto in analisi.

2.1 Posizione Baricentri

Per procedere nella determinazione di energia Cinetica e Potenziale è necessario dunque scrivere le equazioni delle posizioni dei baricentri rispetto al sistema di riferimento al quale ci si riferisce durante l'analisi. Per determinare le equazioni è necessario costruire le **Matrici di Trasformazione** tra i sistemi di riferimento relativi dell'antenna: si procede definendo le **Matrici di Trasformazione Elementari** e tramite la composizione di esse si ottengono le matrici generalizzate.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{h1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Sistema di riferimento "1" solidale alla forcella, con origine nel baricentro della forcella G_1. Traslato verticalmente di h1 rispetto al sistema "0".

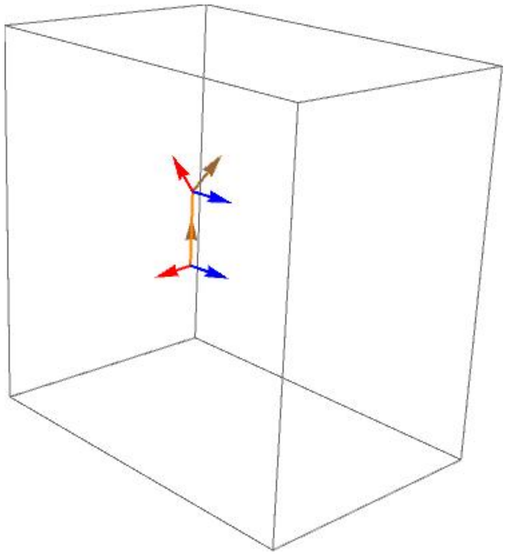
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & \mathrm{h1}+\mathrm{h2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Sistema di riferimento solidale alla parabola dell'antenna, il cui asse x contiene il baricentro della parabola G_2.

Premoltiplicando la posizione dei baricentri riferiti rispetto ai propri sistemi per le matrici di trasformazione ottenute si trova la posizione generalizzata dei baricentri rispetto al sistema di riferimetno generale.

$$\{\mathrm{h3}\cos(\theta)\cos(\varphi), \mathrm{h3}\sin(\theta)\cos(\varphi), \mathrm{h1}+\mathrm{h2}+\mathrm{h3}\sin(\varphi)\} \tag{3}$$

Posizione baricentro dell'antenna rispetto al sistema di riferimento "0". Successivamente rappresento i sistemi di riferimento.



2.2 Velocità Angolari

Per determinare l'Energia Cinetica è necessario determinare le **Velocità Angolari** dei baricentri rispetto al sistema di riferimento fisso. Per fare ciò basta ricordarsi della **Formula di Poisson** per cui $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}$ e quindi premoltiplicare alla derivata della matrice di rotazione la trasposta della matrice di rotazione

$$[P\omega] = [R]^T \cdot \frac{d[R]}{dt} \tag{4}$$

E' noto che $[P\omega]$ è antisimmetrica, quindi bisogna prendere gli elementi giusti della matrice per ottenere la rotazione. Di seguito le rotazioni ottenute rispettivamente della Forcella e della Parabola dove q1 e q2 sono i moventi.

$$\{0, 0, \mathrm{q1}'(t)\} \tag{5}$$

$$\{\mathrm{q1}'(t)\sin(\mathrm{q2}(t)), -\mathrm{q2}'(t), \mathrm{q1}'(t)\cos(\mathrm{q2}(t))\} \tag{6}$$

2.3 Energia ed Equazioni di Lagrange

Per il calcolo dell'Energia Cinetica considero il baricentro come punto di applicazione e dunque sommando il termine lineare e rotativo

$$T = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \tag{7}$$

dove $\vec{I}$ è Tensore d'Inerzia rispetto al baricentro.

Per il calcolo dell'Energia Potenziale basta utilizzare la formula $U = mgh$ con le rispettive altezze dei baricentri. Successivamente applicando la **Seconda forma dell'equazione di Lagrange** è necessario definire la Lagrangiana $L = T - U$ che ci permette di correlare direttamente le Forze Generalizzate Non Conservative alla Energia Cinetica e Potenziale

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q^{nc} \tag{8}$$

dove per ogni direzioni del k-esimo grado di libertà sono associati rispettivamente un movente q e una forza generalizzata non conservativa Q. Si ottiene cosi l'equazione applicata nell'analisi.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^{nc} \tag{9}$$

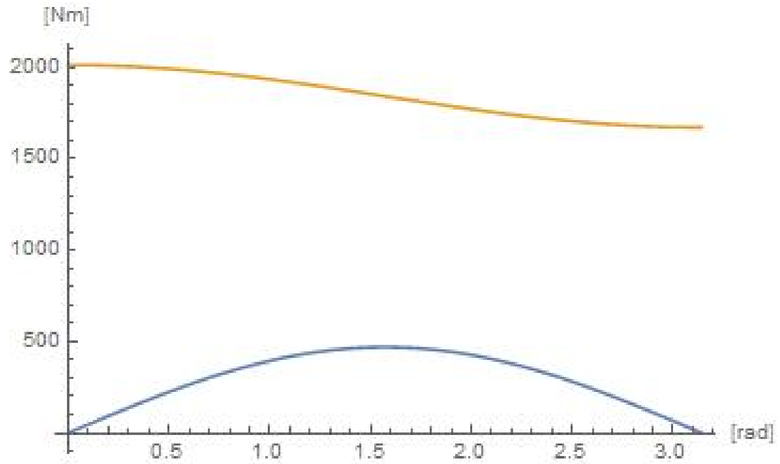
Essendo la Forza Generalizzata definita come $Q = \sum F \cdot \tau$ dove τ è il Rapporto di Velocità nella direzione del k-esimo grado di libertà, per determinare le Forze Generalizzate Non Conservative calcolo la **Potenza Virtuale** $W = Q\frac{\partial q}{\partial t}$ che mi permette di associare i momenti agenti dei motori e la forza del vento agente sulla parabola direttamente all'Equazioe di Lagrange senza dover calcolare i Rapporti di Velocità.

Avendo risolto le equazioni di Lagrange ottengo i momenti esercitati dai motori in funzione della forza del vento, dei moventi e delle inerzie: definendo le velocità dei moventi come costanti e azzerando le accelerazioni ottengo le seguenti equazioni

$$M1 = \mathrm{Fvh3}\cos(\mathrm{q20})\sin(\mathrm{q1}(t)) \tag{10}$$

$$M2 = \mathrm{Fvh3}\sin(\mathrm{q20})\cos(\mathrm{q1}(t)) + \cos(\mathrm{q20})\left(g\mathrm{h3m2} + \mathrm{q10}^2\sin(\mathrm{q20})\left(\mathrm{h3}^2\mathrm{m2} + \mathrm{IGa} - \mathrm{IGax}\right)\right) \tag{11}$$

ed esplicitando ulteriormente le inerzie e il resto delle variabili ottengo il seguente grafico dove la linea gialla rappresenta M2 e la linea blu rappresenta M1.



3 Applicazione metodo Newton-Eulero

Il metodo di Newton-Eulero consiste nella suddivisione in singoli corpi della composizione tra antenna a supporto, analizzando ogni singolo corpo singolarmente applicando la **Prima equazione Cardinale** (Newton) riguardante le Forze e la **Seconda equazione Cardinale** (Eulero) riguardante i Momenti e infine mettendo in correlazione le equazioni tramite le **Reazioni Vincolari** sussistenti tra i corpi.

3.1 Momenti delle forze rispetto ai Baricentri

Per scrivere le equazioni di Eulero occorre specificare la posizione dei corpi e dei punti di applicazione delle forze in funzione delle coordinate generalizzate. Considero i baricentri espressi rispetto al sistema di riferimento principale e calcolo i momenti agenti su essi dalle Reazioni Vincolari sempre rispetto al sistema principale. Una volta determinate queste equazioni è possibile applicare la Matrice di Trasporto per riferire le equazioni ai singoli sistemi ed eseguire il bilancio dei momenti come indicato dalla Seconda equazione Cardinale.

$$[I]\vec{\omega} + [P\omega][I]\vec{\omega} = \vec{M} \tag{12}$$

3.2 Equazioni di Newton-Eulero

Successivamente passo alla scrittura delle equazioni di Newton-Eulero in cui vengono riferiti i bilanci tra le forze agenti sui singoli corpi e i momenti agenti sui singoli corpi. Si arriva a risolvere un sistema in 12 equazioni (6 di Newton e 6 di Eulero) nelle 12 incognite. Avviene questo in quanto nella scrittura delle equazioni è già stato esplicitato il principio di azione-reazione delle reazioni vincolari, quindi si ottiene appunto un sistema risolvibile che oltre a restituire i momenti richiesti restituisce tutte le reazioni vincolari. Essendo le equazioni complesse rimando al file Mathematica allegato alla relazione per una lettura più facile di esse.

3.3 Osservazioni

Come si può notare i due metodi considerati restituiscono i medesimi risultati per i momenti cercati, ma mentre il Metodo di Lagrange risulta più "snello" nell'esecuzione in quanto il risultato si ottiene calcolando soltanto Energie Cinetica e Potenziale e Potenza Virtuale il metodo di Newton-Eulero risulta computativamente più pesante in quanto è necessario calcolare nei minimi dettagli cosa accade in ogni coppia cinematica dell'oggetto in analisi anche se ha il vantaggio di restituire, oltre che ai momenti, anche tutte le reazioni vincolari. Ritengo dunque più utile il metodo di Newton-Eulero in quanto fornisce una analisi decisamente più completa del problema.