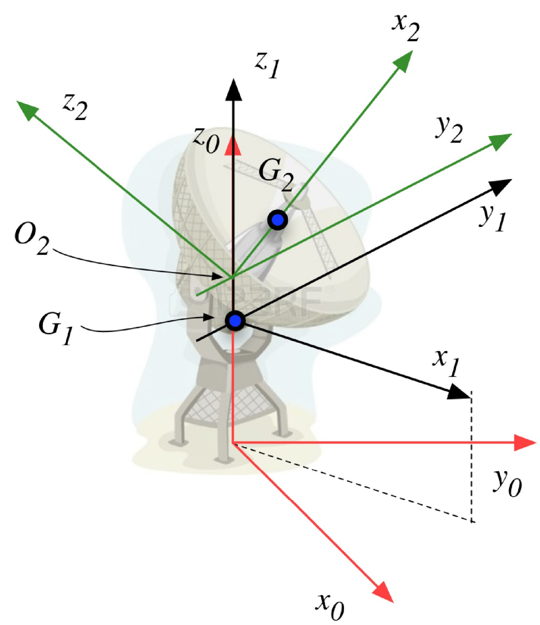
Equazioni della dinamica di un’antenna di un radiotelescopio



Applicazione metodo Lagrange

Definizione delle funzioni che costruiscono le matrici di trasformazione elementari

```
In[ ]:= T[x_, y_, z_] := {{1, 0, 0, x} , {0, 1, 0, y}, {0, 0, 1, z}, {0, 0, 0, 1}}

In[ ]:= Rz[x_] := {{Cos[x], -Sin[x], 0, 0}, {Sin[x], Cos[x], 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

In[ ]:= Rx[x_] := {{1, 0, 0, 0}, {0, Cos[x], -Sin[x], 0}, {0, Sin[x], Cos[x], 0}, {0, 0, 0, 1}}

In[ ]:= Ry[x_] := {{Cos[x], 0, Sin[x], 0} , {0, 1, 0, 0}, {-Sin[x], 0, Cos[x], 0}, {0, 0, 0, 1}};
```

Costruzione delle trasformazioni fra sistemi di riferimento successivi (da sistema “0” a sistema “2”)

1) sistema di riferimento “1” solidale alla forcella, con origine nel baricentro della forcella G1. Traslato

verticalmente di h1 rispetto al sistema “0”.

In[]:=
```
T01 = T[0, 0, h1].Rz[θ]; T1 = T01; MatrixForm@T1
```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta] & 0 & 0 \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \text{h1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) sistema di riferimento solidale alla parabola dell’antenna, il cui asse x contiene il baricentro della parabola G2.

In[]:=
```
T12 = T[0, 0, h2].Ry[-φ]; T2 = FullSimplify[T1.T12]; MatrixForm@T2
```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta]\,\text{Cos}[\varphi] & -\text{Sin}[\theta] & -\text{Cos}[\theta]\,\text{Sin}[\varphi] & 0 \\ \text{Cos}[\varphi]\,\text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta]\,\text{Sin}[\varphi] & 0 \\ \text{Sin}[\varphi] & 0 & \text{Cos}[\varphi] & \text{h1}+\text{h2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posizione delle origini dei sistemi di riferimento

In[]:=
```
O1 = T1.{0, 0, 0, 1}; O1 = Most[O1]
```

Out[]=
```
{0, 0, h1}
```

In[]:=
```
O2 = T2.{0, 0, 0, 1}; O2 = Most[O2]
```

Out[]=
```
{0, 0, h1 + h2}
```

Posizione dei due baricentri

In[]:=
```
G1 = O1
```

Out[]=
```
{0, 0, h1}
```

In[]:=
```
G2 = T2.{h3, 0, 0, 1}; G2 = Most[G2]
```

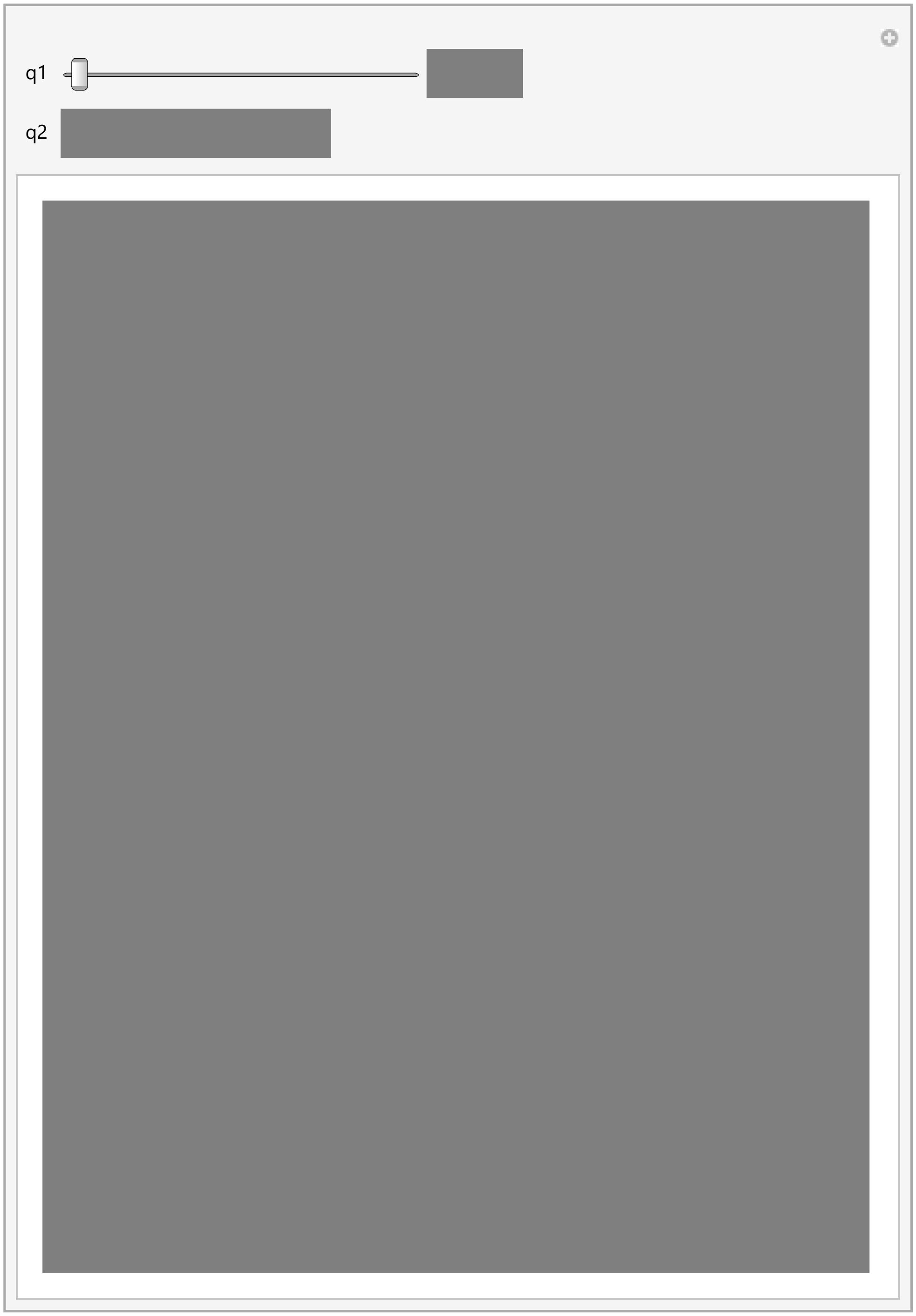
Out[]=
```
{h3 Cos[θ] Cos[φ], h3 Cos[φ] Sin[θ], h1 + h2 + h3 Sin[φ]}
```

Rappresentazione grafica dei sistemi

In[]:=
```
PlotFrame[T_] := Module[{O, X, Y, Z, l = 2},
   O = T[[1 ;; 3, 4]];
   X = O + l T[[1 ;; 3, 1]];
   Y = O + l T[[1 ;; 3, 2]];
   Z = O + l T[[1 ;; 3, 3]];
   Graphics3D[{Thick, Red, Arrow[{O, X}], Blue, Arrow[{O, Y}], Brown, Arrow[{O, Z}]}]
  ]
```

In[ ]:=
```
Manipulate[Block[{h1 = 6, h2 = 3, h3 = 2, θ = q1, φ = q2}, Show[
    Graphics3D[{
      Orange, Thick, Line[{O1, O2}]
     }, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 10}, {0, 15}}],
    PlotFrame[T1], PlotFrame[T2]
   ]
  ],
  {q1, 0, π / 2}, {q2, 0, π / 2}
 ]
```

Out[ ]=



Equazioni del moto usando l’energia cinetica di un corpo rigido

In[ ]:= **θ = q1[t]**

Out[ ]= q1[t]

In[ ]:=
```
φ = q2[t]
```
Out[ ]=
```
q2[t]
```

Velocità angolari (in terna mobile)

Forcella

In[ ]:=
```
R1 = T1[[1 ;; 3, 1 ;; 3]]; MatrixForm@R1
```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[q1[t]] & -\mathrm{Sin}[q1[t]] & 0 \\ \mathrm{Sin}[q1[t]] & \mathrm{Cos}[q1[t]] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
mW1 = FullSimplify[Transpose[R1].∂t R1]; MatrixForm[mW1]
```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -q1'[t] & 0 \\ q1'[t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
ω1 = {mW1[[3, 2]], mW1[[1, 3]], mW1[[2, 1]]}
```
Out[ ]=
```
{0, 0, q1′[t]}
```

Parabola

In[ ]:=
```
R2 = T2[[1 ;; 3, 1 ;; 3]]; MatrixForm@R2
```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[q1[t]]\,\mathrm{Cos}[q2[t]] & -\mathrm{Sin}[q1[t]] & -\mathrm{Cos}[q1[t]]\,\mathrm{Sin}[q2[t]] \\ \mathrm{Cos}[q2[t]]\,\mathrm{Sin}[q1[t]] & \mathrm{Cos}[q1[t]] & -\mathrm{Sin}[q1[t]]\,\mathrm{Sin}[q2[t]] \\ \mathrm{Sin}[q2[t]] & 0 & \mathrm{Cos}[q2[t]] \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
mW2 = FullSimplify[Transpose[R2].∂t R2]; MatrixForm[mW2]
```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Cos}[q2[t]]\,q1'[t] & -q2'[t] \\ \mathrm{Cos}[q2[t]]\,q1'[t] & 0 & -\mathrm{Sin}[q2[t]]\,q1'[t] \\ q2'[t] & \mathrm{Sin}[q2[t]]\,q1'[t] & 0 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
ω2 = {mW2[[3, 2]], mW2[[1, 3]], mW2[[2, 1]]}
```
Out[ ]=
```
{Sin[q2[t]] q1′[t], -q2′[t], Cos[q2[t]] q1′[t]}
```

Energie

Energia cinetica della forcella

In[∘]:= $Tf = \text{FullSimplify}\left[\frac{1}{2} m1\ (\partial_t G1) . (\partial_t G1) + \frac{1}{2} \omega 1 . \begin{pmatrix} IGfx & 0 & 0 \\ 0 & IGfy & 0 \\ 0 & 0 & IGfz \end{pmatrix} . \omega 1\right]$

Out[∘]= $\frac{1}{2} IGfz\ q1'[t]^2$

Energia cinetica della parabola

In[∘]:= $Ta = \text{FullSimplify}\left[\frac{1}{2} m2\ (\partial_t G2) . (\partial_t G2) + \frac{1}{2} \omega 2 . \begin{pmatrix} IGax & 0 & 0 \\ 0 & IGa & 0 \\ 0 & 0 & IGa \end{pmatrix} . \omega 2\right]$

Out[∘]= $\frac{1}{4} \left(\left(IGa + IGax + h3^2 m2 + \left(IGa - IGax + h3^2 m2\right) \text{Cos}[2 q2[t]]\right) q1'[t]^2 + 2 \left(IGa + h3^2 m2\right) q2'[t]^2\right)$

Simmetrico rispetto a x perchè ruota su x quindi Igy = Igz

Energia Potenziale rispetto al baricentro

In[∘]:= $V = \text{FullSimplify}[m1\ g\ G1[[3]] + m2\ g\ G2[[3]]]$

Out[∘]= $g\ h1\ m1 + g\ m2\ (h1 + h2 + h3\ \text{Sin}[q2[t]])$

Lagrangiana

In[∘]:= $L = Tf + Ta - V$

Out[∘]= $-g\ h1\ m1 - g\ m2\ (h1 + h2 + h3\ \text{Sin}[q2[t]]) + \frac{1}{2} IGfz\ q1'[t]^2 + \frac{1}{4} \left(\left(IGa + IGax + h3^2 m2 + \left(IGa - IGax + h3^2 m2\right) \text{Cos}[2 q2[t]]\right) q1'[t]^2 + 2 \left(IGa + h3^2 m2\right) q2'[t]^2\right)$

Calcolo la Potenza Virtuale

In[∘]:= $W = M1\ q1'[t] + M2\ q2'[t] + Fv\ \partial_t G2[[1]]$

Out[∘]= $M1\ q1'[t] + M2\ q2'[t] + Fv\ (-h3\ \text{Cos}[q2[t]]\ \text{Sin}[q1[t]]\ q1'[t] - h3\ \text{Cos}[q1[t]]\ \text{Sin}[q2[t]]\ q2'[t])$

Forze Generalizzate non conservative

In[∘]:= $Q1 = \text{Coefficient}[W, q1'[t]]$

Out[∘]= $M1 - Fv\ h3\ \text{Cos}[q2[t]]\ \text{Sin}[q1[t]]$

In[ ]:= **Q2 = Coefficient[W, q2'[t]]**

Out[ ]= M2 - Fv h3 Cos[q1[t]] Sin[q2[t]]

Equazioni di Lagrange

In[ ]:= **eq1 = FullSimplify[$\partial_t \partial_{q1'[t]}$ L - $\partial_{q1[t]}$ L] == Q1**

Out[ ]= $-\left(\text{IGa}-\text{IGax}+\text{h3}^2\,\text{m2}\right)\text{Sin}[2\,\text{q2}[t]]\,\text{q1}'[t]\,\text{q2}'[t]+\frac{1}{2}\left(\text{IGa}+\text{IGax}+2\,\text{IGfz}+\text{h3}^2\,\text{m2}+\left(\text{IGa}-\text{IGax}+\text{h3}^2\,\text{m2}\right)\text{Cos}[2\,\text{q2}[t]]\right)\text{q1}''[t]==\text{M1}-\text{Fv h3 Cos}[\text{q2}[t]]\,\text{Sin}[\text{q1}[t]]$

In[ ]:= **eq2 = FullSimplify[$\partial_t \partial_{q2'[t]}$ L - $\partial_{q2[t]}$ L] == Q2**

Out[ ]= $\text{g h3 m2 Cos}[\text{q2}[t]]+\left(\text{IGa}-\text{IGax}+\text{h3}^2\,\text{m2}\right)\text{Cos}[\text{q2}[t]]\,\text{Sin}[\text{q2}[t]]\,\text{q1}'[t]^2+\left(\text{IGa}+\text{h3}^2\,\text{m2}\right)\text{q2}''[t]==\text{M2}-\text{Fv h3 Cos}[\text{q1}[t]]\,\text{Sin}[\text{q2}[t]]$

In[ ]:= **sol = FullSimplify@Solve[{eq1, eq2}, {M1, M2}]**

Out[ ]= $\{\{\text{M1}\to\text{Fv h3 Cos}[\text{q2}[t]]\,\text{Sin}[\text{q1}[t]]-\left(\text{IGa}-\text{IGax}+\text{h3}^2\,\text{m2}\right)\text{Sin}[2\,\text{q2}[t]]\,\text{q1}'[t]\,\text{q2}'[t]+\frac{1}{2}\left(\text{IGa}+\text{IGax}+2\,\text{IGfz}+\text{h3}^2\,\text{m2}+\left(\text{IGa}-\text{IGax}+\text{h3}^2\,\text{m2}\right)\text{Cos}[2\,\text{q2}[t]]\right)\text{q1}''[t],$
$\text{M2}\to\text{h3}\left(\text{g m2 Cos}[\text{q2}[t]]+\text{Fv Cos}[\text{q1}[t]]\,\text{Sin}[\text{q2}[t]]\right)+\left(\text{IGa}-\text{IGax}+\text{h3}^2\,\text{m2}\right)\text{Cos}[\text{q2}[t]]\,\text{Sin}[\text{q2}[t]]\,\text{q1}'[t]^2+\left(\text{IGa}+\text{h3}^2\,\text{m2}\right)\text{q2}''[t]\}\}$

In[ ]:= **solM1 = M1 /. sol[[1, 1]] /. {q1'[t] → q10, q1''[t] → 0, q2[t] → q20, q2'[t] → 0}**

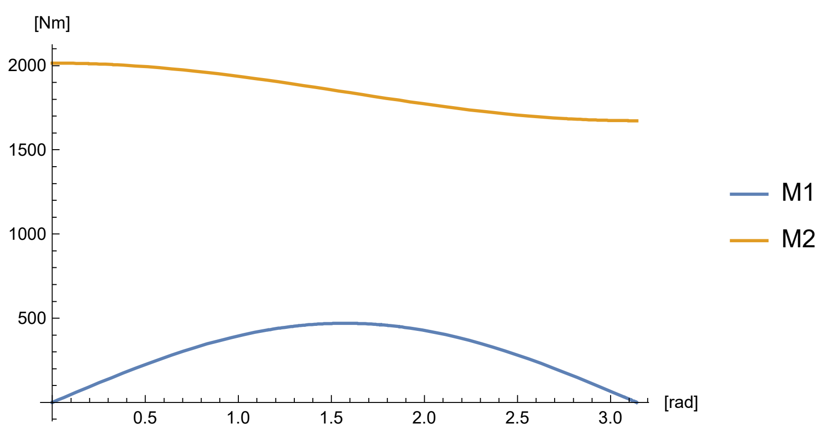
Out[ ]= Fv h3 Cos[q20] Sin[q1[t]]

In[ ]:= **solM2 = Simplify[**
M2 /. sol[[1, 2]] /. {q1'[t] → q10, q1''[t] → 0, q2[t] → q20, q2'[t] → 0, q2''[t] → 0}]

Out[ ]= $\text{Fv h3 Cos}[\text{q1}[t]]\,\text{Sin}[\text{q20}]+\text{Cos}[\text{q20}]\left(\text{g h3 m2}+\left(\text{IGa}-\text{IGax}+\text{h3}^2\,\text{m2}\right)\text{q10}^2\,\text{Sin}[\text{q20}]\right)$

In[ ]:= **Block[{Fv = 250, h3 = 2, q20 = 20 °, g = 9.81, m2 = 100, IGa = 0, IGax = 0, q10 = 0}, Plot[**
{solM1, solM2}, {q1[t], 0, π}, AxesLabel → {"[rad]", "[Nm]"}, PlotLegends → {"M1", "M2"}]]

Out[ ]=



Applicazione metodo Newton-Eulero

Per scrivere le equazioni di Newton-Eulero occorre specificare la posizione dei corpi e dei punti di applicazione delle forze in funzione delle coordinate generalizzate.
E' noto che la forza vento agisce esattamente nel baricentro del corpo 2.

Momenti delle forze rispetto ai baricentri

Si definiscono i momenti dati dalle reazioni vincolari rispetto ai due baricentri. Le reazioni Vincolari sono espresse rispetto al sistema di riferimento 1.
Momento rispetto al baricentro G1 delle reazioni vincolari alla base della forcella

```
In[]:= MRAG1 = G1 × {RAx, RAy, RAz}
Out[]= {-h1 RAy, h1 RAx, 0}
```

Esprimo il momento ottenuto nel sistema di riferimento 1 per la successiva scrittura delle equazioni di Eulero.

```
In[]:= MRAG101 = Transpose[T1[[1 ;; 3, 1 ;; 3]]].MRAG1
Out[]= {-h1 RAy Cos[q1[t]] + h1 RAx Sin[q1[t]], h1 RAx Cos[q1[t]] + h1 RAy Sin[q1[t]], 0}
```

Momento rispetto al baricentro G1 delle reazioni vincolari sussistenti tra antenna e forcella.

```
In[]:= MRBG1 = (O2 - G1) × {-RBx, -RBy, -RBz}
Out[]= {h2 RBy, -h2 RBx, 0}
```

Esprimo il momento ottenuto nel sistema di riferimento 1 per la successiva scrittura delle equazioni di Eulero.

```
In[]:= MRBG101 = Transpose[T1[[1 ;; 3, 1 ;; 3]]].MRBG1
Out[]= {h2 RBy Cos[q1[t]] - h2 RBx Sin[q1[t]], -h2 RBx Cos[q1[t]] - h2 RBy Sin[q1[t]], 0}
```

Momento rispetto al baricentro G2 delle reazioni vincolari sussistenti tra antenna e forcella:
(Viene gia applicato il principio di Azione-Reazione)

```
In[]:= MRBG2 = (O2 - G2) × {RBx, RBy, RBz}
Out[]= {-h3 RBz Cos[q2[t]] Sin[q1[t]] + h3 RBy Sin[q2[t]],
  h3 RBz Cos[q1[t]] Cos[q2[t]] - h3 RBx Sin[q2[t]],
  -h3 RBy Cos[q1[t]] Cos[q2[t]] + h3 RBx Cos[q2[t]] Sin[q1[t]]}
```

Esprimo il momento ottenuto nel sistema di riferimento 2 per la successiva scrittura delle equazioni di Eulero.

In[ ]:= `MRBG202 = Transpose[T2[[1 ;; 3, 1 ;; 3]]].MRBG2`

Out[ ]= `{(-h3 RBy Cos[q1[t]] Cos[q2[t]] + h3 RBx Cos[q2[t]] Sin[q1[t]]) Sin[q2[t]] + Cos[q2[t]] Sin[q1[t]] (h3 RBz Cos[q1[t]] Cos[q2[t]] - h3 RBx Sin[q2[t]]) + Cos[q1[t]] Cos[q2[t]] (-h3 RBz Cos[q2[t]] Sin[q1[t]] + h3 RBy Sin[q2[t]]), Cos[q1[t]] (h3 RBz Cos[q1[t]] Cos[q2[t]] - h3 RBx Sin[q2[t]]) - Sin[q1[t]] (-h3 RBz Cos[q2[t]] Sin[q1[t]] + h3 RBy Sin[q2[t]]), Cos[q2[t]] (-h3 RBy Cos[q1[t]] Cos[q2[t]] + h3 RBx Cos[q2[t]] Sin[q1[t]]) - Sin[q1[t]] Sin[q2[t]] (h3 RBz Cos[q1[t]] Cos[q2[t]] - h3 RBx Sin[q2[t]]) - Cos[q1[t]] Sin[q2[t]] (-h3 RBz Cos[q2[t]] Sin[q1[t]] + h3 RBy Sin[q2[t]])}`

Equazioni di Newton-Eulero

Corpo 1 Supporto

In[ ]:= `e1x = m1 ∂t ∂t G1[[1]] == RAx - RBx`

Out[ ]= `0 == RAx - RBx`

In[ ]:= `e1y = m1 ∂t ∂t G1[[2]] == RAy - RBy`

Out[ ]= `0 == RAy - RBy`

In[ ]:= `e1z = m1 ∂t ∂t G1[[3]] == RAz - RBz - m1 g`

Out[ ]= `0 == -g m1 + RAz - RBz`

Il vincolo inferiore nel corpo 1 permette soltanto la rotazione attorno a z, definisco quindi i Momenti di reazione rispetto al sistema 1

In[ ]:= `MA = {MAx, MAy, 0};`

Il vincolo superiore nel corpo 2 permette soltanto la rotazione attorno a y, definisco quindi i Momenti di reazione rispetto al sistema 1

In[ ]:= `MB = {MBx, 0, MBz};`

In[ ]:= `e1θx = 0 == MRAG101[[1]] + MRBG101[[1]] + MA[[1]] - MB[[1]]`

Out[ ]= `0 == MAx - MBx - h1 RAy Cos[q1[t]] + h2 RBy Cos[q1[t]] + h1 RAx Sin[q1[t]] - h2 RBx Sin[q1[t]]`

In[ ]:= `e1θy = 0 == MRAG101[[2]] + MRBG101[[2]] + M2 + MA[[2]]`

Out[ ]= `0 == M2 + MAy + h1 RAx Cos[q1[t]] - h2 RBx Cos[q1[t]] + h1 RAy Sin[q1[t]] - h2 RBy Sin[q1[t]]`

In[ ]:= `e1θz = IGfz ∂t ω1[[3]] == MRAG101[[3]] + MRBG101[[3]] + M1 - MB[[3]]`

Out[ ]= `IGfz q1''[t] == M1 - MBz`

Corpo 2 Parabola

In[ ]:= `e2x = FullSimplify[m2 ∂t ∂t G2[[1]] == RBx + Fv]`

Out[ ]= $Fv + RBx + h3\ m2\ Cos[q2[t]]\ \left(Cos[q1[t]]\ \left(q1'[t]^2 + q2'[t]^2\right) + Sin[q1[t]]\ q1''[t]\right) + h3\ m2\ Sin[q2[t]]\ (-2\ Sin[q1[t]]\ q1'[t]\ q2'[t] + Cos[q1[t]]\ q2''[t]) == 0$

In[ ]:= `e2y = FullSimplify[m2 ∂t ∂t G2[[2]] == RBy]`

Out[ ]= $h3\ m2\ \left(Cos[q1[t]]\ (-2\ Sin[q2[t]]\ q1'[t]\ q2'[t] + Cos[q2[t]]\ q1''[t]) - Sin[q1[t]]\ \left(Cos[q2[t]]\ \left(q1'[t]^2 + q2'[t]^2\right) + Sin[q2[t]]\ q2''[t]\right)\right) == RBy$

In[ ]:= `e2z = FullSimplify[m2 ∂t ∂t G2[[3]] == RBz - m2 g]`

Out[ ]= $m2\ \left(g - h3\ Sin[q2[t]]\ q2'[t]^2 + h3\ Cos[q2[t]]\ q2''[t]\right) == RBz$

Il Momento di reazione MB deve essere riferito rispetto al corpo 2

In[ ]:= `MB12 = Transpose[T12[[1 ;; 3, 1 ;; 3]]].MB`

Out[ ]= {MBx Cos[q2[t]] + MBz Sin[q2[t]], 0, MBz Cos[q2[t]] - MBx Sin[q2[t]]}

In[ ]:= `e2φx = FullSimplify[IGax ∂t ω2[[1]] == MRBG202[[1]] + MB12[[1]]]`

Out[ ]= $Cos[q2[t]]\ (MBx - IGax\ q1'[t]\ q2'[t]) + Sin[q2[t]]\ (MBz - IGax\ q1''[t]) == 0$

In[ ]:= `e2φy = Simplify[IGa ∂t ω2[[2]] - (IGa - IGax) ω2[[3]] ω2[[1]] == MRBG202[[2]] - M2]`

Out[ ]= $M2 + h3\ RBx\ Cos[q1[t]]\ Sin[q2[t]] + h3\ RBy\ Sin[q1[t]]\ Sin[q2[t]] == h3\ RBz\ Cos[q2[t]] + (IGa - IGax)\ Cos[q2[t]]\ Sin[q2[t]]\ q1'[t]^2 + IGa\ q2''[t]$

In[ ]:= `e2φz = Simplify[IGa ∂t ω2[[3]] - (IGax - IGa) ω2[[1]] ω2[[2]] == MRBG202[[3]] + MB12[[3]]]`

Out[ ]= $h3\ RBy\ Cos[q1[t]] + MBx\ Sin[q2[t]] + IGa\ Cos[q2[t]]\ q1''[t] == MBz\ Cos[q2[t]] + h3\ RBx\ Sin[q1[t]] + (2\ IGa - IGax)\ Sin[q2[t]]\ q1'[t]\ q2'[t]$

Risoluzione

```
Reazioni = Simplify@Solve[{e1x, e1y, e1z, e2x, e2y, e2z, e1θx, e1θy, e1θz, e2φx, e2φy, e2φz},
    {RAx, RAy, RAz, RBx, RBy, RBz, MAx, MAy, MBx, MBz, M1, M2}];
```

In[ ]:= `SolM1 = FullSimplify[M1 /. Reazioni /. {q1'[t] → q10, q1''[t] → 0, q2[t] → q20, q2'[t] → 0}]`

Out[ ]= {Fv h3 Cos[q20] Sin[q1[t]]}

In[ ]:=
```
SolM2 = First@FullSimplify[
   M2 /. Reazioni /. {q1'[t] → q10, q1''[t] → 0, q2[t] → q20, q2'[t] → 0, q2''[t] → 0}]
```

Out[ ]= $Fv\ h3\ Cos[q1[t]]\ Sin[q20] + Cos[q20]\ \left(g\ h3\ m2 + \left(IGa - IGax + h3^2\ m2\right)\ q10^2\ Sin[q20]\right)$