

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria Industriale



Laurea triennale in Ingegneria Industriale Meccatronica

Corso di Sistemi Meccanici e Modelli

Studio della Cinematica di una Gru

Daniele Serafini mat. 192999
(daniele.serafini@studenti.unitn.it)

Anno Accademico 2019-2020

Indice

1	Analisi di Posizione	2
1.1	Funzione Quadrilatero	2
1.2	Funzione Trilatero	3
1.3	Posizione dei Punti dei Quadrilateri, del Gancio e del Peso	4
1.4	Traiettoria ed Estremi	4
1.5	Deviazione da una retta	5
2	Analisi di Velocità	6
2.1	Rapporto delle velocità <i>verticali</i> del Gancio e Peso	6
2.2	Rapporto delle velocità <i>orizzontali</i> del Gancio e Peso	7
3	Analisi di Accelerazione	8
3.1	Velocità costante Gancio	8
3.2	Accelerazione lungo gli Assi	8
3.3	Accelerazione Angolare	9
4	Animazione	10
5	Configurazioni Singolari	10

1 Analisi di Posizione

In questo capitolo vengono analizzate le posizioni dei vertici dei quadrilateri e le posizioni di Gancio e Peso al variare del movente. Nell'analisi vengono utilizzate due funzioni principali **Quadrilatero** e **Trilatero** che vengono richiamate da funzioni specifiche, definite successivamente, in modo da generalizzare l'analisi della gru: con questo metodo si possono infatti aggiungere un numero a piacere di quadrilateri nel corpo principale della gru e svolgere un'analisi del tutto generalizzata.

1.1 Funzione Quadrilatero

La funzione **Quadrilatero** ci permette di determinare gli angoli e le posizioni dei vertici di un generico quadrilatero mediante l'analisi di un *generico triangolo* generato congiungendo, mediante un vettore o **Corpo Fittizio**, due vertici opposti del quadrilatero in analisi.

```
Quadrilatero[q_, xA_, yA_, L1_, L2_, L3_, modo_, xD_, yD_] :=  
Module[{xB, yB, L5,  $\theta 5$ ,  $\cos\alpha$ ,  $\alpha$ ,  $\theta 2$ , xC, yC,  $\theta 3$ },  
xB = xA + L1Cos[q];  
yB = yA + L1Sin[q];  
L5 =  $\sqrt{(xD - xB)^2 + (yD - yB)^2}$ ;  
 $\theta 5$  = ArcTan[xD - xB, yD - yB];  
 $\cos\alpha$  =  $(L5^2 + L2^2 - L3^2)/(2L5L2)$ ;  
 $\alpha$  = 1;  
If[Abs[ $\cos\alpha$ ] ≤ 1,  
If[modo > 0,  $\alpha$  = 1,  $\alpha$  = -1],  
If[modo > 0,  $\alpha$  = 1,  $\alpha$  = -1]];  
 $\theta 2$  =  $\theta 5 - \alpha * \text{ArcCos}[\cos\alpha]$ ;  
xC = xB + L2Cos[ $\theta 2$ ];  
yC = yB + L2Sin[ $\theta 2$ ];  
 $\theta 3$  = ArcTan[xD - xC, yD - yC];  
{ $\theta 2$ ,  $\theta 3$ , {{xA, yA}, {xB, yB}, {xC, yC}, {xD, yD}}, ArcCos[ $\cos\alpha$ ],  $\alpha$ ,  $\theta 5$ }
```

La funzione ci permette di risolvere il quadrilatero senza dover usare le *Equazioni di Chiusura* che risultano costose dal punto di vista computazionale e complicate nell'uso diretto. La risoluzione del quadrilatero viene suddivisa nella soluzione di due trilateri delimitati dal quadrilatero e dal *Corpo Fittizio*, il quale è noto se sono note le posizioni di due vertici del quadrilatero. Considero come primo vertice il punto del telaio a cui si collega la biella, mentre determino la posizione del secondo vertice mediante il movente **q** e la lunghezza della biella stessa.

$$L5 = \sqrt{(xD - xB)^2 + (yD - yB)^2} \quad (1)$$

$$\theta 5 = \arctan \frac{yD - yB}{xD - xB} \quad (2)$$

Per costruzione, è sempre possibile costruire il primo trilatero mentre la costruzione del secondo triangolo dipende dalle lunghezze delle 2 bielle che lo compongono. Per determinare la possibilità di costruire il secondo triangolo sfrutto il **Teorema del Coseno**: considerata una **Diade** (*coppia di aste*) essa si chiude se $|\cos \alpha| < 1$. Come conseguenza al *Teorema del Consenso* inserisco all'interno della funzione una condizione sull'**Assemblaggio** del meccanismo. In particolare sarà possibile avere due assemblaggi differenti al variare della variabile **modo** inserita nella funzione.

$$\theta 2 = \theta 5 \pm \alpha \arccos(\cos \alpha) \quad (3)$$

La funzione *Quadrilatero* infine mi restituisce gli angoli e i vertici necessari per definire il quadrilatero e poter costruire su di esso la successiva parte della Gru.

1.2 Funzione Trilatero

La funzione **Trilatero** viene utilizzata per definire la geometria dei supporti di Gancio e Peso.

```
Trilatero[θ1_, θ2_, LA_, LB_, xC_, yC_] :=
{{LACos[θ1], LASin[θ1]}, {LACos[θ1] + LBCos[θ2], LASin[θ1] + LBSin[θ2]}, {xC, yC}}
```

1.3 Posizione dei Punti dei Quadrilateri, del Gancio e del Peso

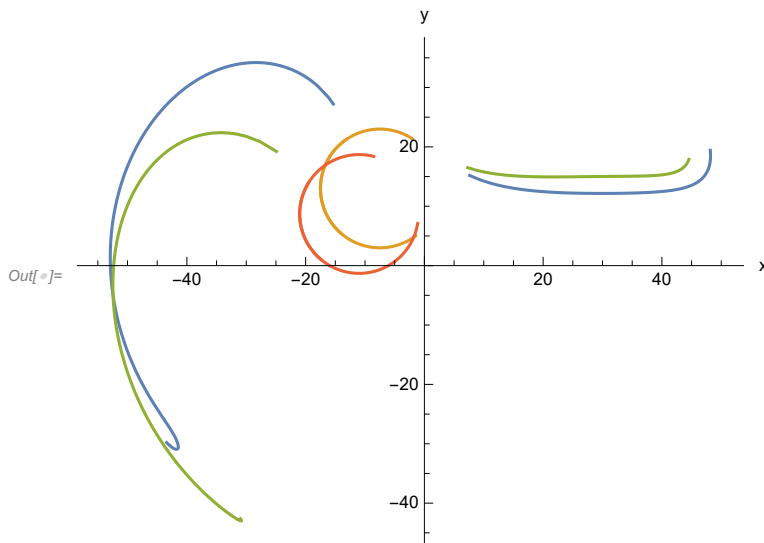
Per determinare le posizioni generali dei quadrilateri definisco delle funzioni che permettano di richiamare le funzioni più generiche *Quadrilatero* e *Trilatero*.

```
Pol1[pol1_]:=Quadrilatero[pol1, xA, yA, Lv1, Lv2, Lv6, modo2, xvD, yvD]
Pol2[pol2_]:=Quadrilatero[pol2,
    Pol1[pol2][[3, 2, 1]],
    Pol1[pol2][[3, 2, 2]], Lv3, Lv4, Lv5, modo2,
    Pol1[pol2][[3, 3, 1]],
    Pol1[pol2][[3, 3, 2]]]
Pol3[pol3_]:=Trilatero[pol3, Pol2[pol3][[1]] +  $\pi$  +  $\theta$ 1noto, Lv1 + Lv3, L1P,
    Pol2[pol3][[3, 3, 1]], Pol2[pol3][[3, 3, 2]]]
Pol4[pol4_]:=Trilatero[ArcTan[xvD, yvD], Pol1[pol4][[2]] -  $\theta$ 2noto,
     $\sqrt{xvD^2 + yvD^2}$ , L1K, Pol1[pol4][[3, 3, 1]], Pol1[pol4][[3, 3, 2]]]
```

La funzione **Pol2** mi permette di aggiungere un numero a piacere di quadrilateri alla Gru, mentre le funzioni **Pol3** e **Pol4** mi permettono rispettivamente di costruire i triangoli su cui sono fissati nella realtà Gancio e Peso.

1.4 Traiettoria ed Estremi

Per poter rappresentare una traiettoria approssimata del *Gancio* e del *Peso* vengono utilizzati inizialmente dei valori ricavati mediante una misura approssimativa della Gru in scala, seguendo il più possibile i rapporti di misura che possono essere presenti nella realtà. Successivamente ho affinato i valori mediante un **Manipulate** per ottenere una traiettoria il più retta possibile entro una distanza dagli estremi della traiettoria, facendo variare le lunghezze dei componenti e le posizioni dei punti del telaio.



Le curve parametriche blu e gialla rappresentano le traiettorie eseguite rispettivamente dal Gancio e dal Peso con le dimensioni misurate, mentre le curve parametriche verde e arancione rappresentano le traiettorie eseguite rispettivamente dal Gancio e dal Peso con le dimensioni ottimizzate mediante *Manipulate*. Nel Grafico vengono rappresentate le traiettorie con parametro $q \in \{0, 2\pi\}$ anche se il tratto parametrizzato da considerare con cui vogliamo rappresentare la realtà ha $q \in \{0, \pi/2\}$.

In particolare per trovare gli estremi corretti viene utilizzato il seguente codice:

```
qmax = 0;
qmin =  $\pi/2$ ;
Timing@Block[{Lv1 = L1, Lv2 = L2, Lv3 = L3, Lv4 = L4, Lv5 = L5, Lv6 = L6,
               xvD = xD, yvD = yD}, Do[If[Pol3[i][[2, 1]]  $\in$  Reals,
               If[i > qmax, qmax = i, 0], 0], {i, 0,  $\pi/2$ ,  $\pi/36000$ }]
Timing@Block[{Lv1 = L1, Lv2 = L2, Lv3 = L3, Lv4 = L4, Lv5 = L5, Lv6 = L6,
               xvD = xD, yvD = yD}, Do[If[Pol3[ $\pi/2 - i$ ][[2, 1]]  $\in$  Reals,
               If[ $\pi/2 - i$  < qmin, qmin =  $\pi/2 - i$ , 0], 0], {i, 0,  $\pi/2$ ,  $\pi/36000$ }]
```

che restituisce come valori

$$qmax = 4589\pi/12000 \quad (4)$$

$$qmin = 8089\pi/36000 \quad (5)$$

1.5 Deviazione da una retta

Come si può notare dal grafico precedente la traiettoria con $q \in \{qmin, qmax\}$ presenta in $qmin$ e $qmax$ le distanze massime da un ipotetica retta orizzontale tangente nel punto di minimo della funzione parametrizzata. Oltre a valutare queste distanze utilizzo un approccio più *scientifico* per la valutazione della deviazione della traiettoria da una retta; utilizzo la funzione **StandardDeviation** che mi permette di calcolare la distanza di un numero finito di punti appartenenti alla traiettoria dalla retta orizzontale corrispondente alla **Mediana** della medesima funzione.

```
deviazione = StandardDeviation[point]
0.426381
```

Minore è il valore della deviazione, minore è la distanza di tutti i punti valutati appartenenti alla traiettoria dalla *Mediana*.

2 Analisi di Velocità

In questo capitolo vengono rappresentate le velocità del Gancio e del Peso in funzione della posizione orizzontale del Gancio. In particolare viene richiesto di parametrizzare il rapporto tra i **Rapporti di velocità verticali** di Gancio e Peso rispetto alla posizione orizzontale del Gancio e successivamente di parametrizzare il rapporto tra i **Rapporti di velocità orizzontali** di Gancio e Peso rispetto alla posizione orizzontale del Gancio.

I *Rapporti di Velocità* vengono calcolati seguendo la teoria affrontata nel corso, come rapporto della velocità del Gancio e Peso rispetto alla velocità del movente.

$$\tau_{Pyq} = \frac{dPy/dt}{dq/dt} \quad (6)$$

$$\tau_{Kq} = \frac{dKy/dt}{dq/dt} \quad (7)$$

Viene evitato il calcolo dei Rapporti di velocità mediante la matrice Jacobiana perchè necessiterebbe la risoluzione delle Equazioni di Chiusura, che come già specificato sono troppo dispendiose.

2.1 Rapporto delle velocità *verticali* del Gancio e Peso

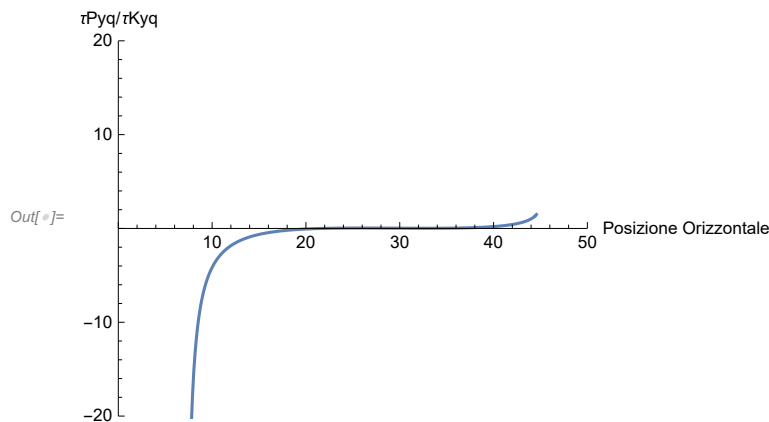
Rappresento il codice utilizzato nell'analisi delle Velocità e il grafico della funzione parametrizzata richiesta. L'utilizzo delle funzioni definite in precedenza mi permette di valutare molto facilmente i Rapporti di Velocità

```

$$\tau_{Pyq} = \partial_q \text{Pol3}[q][[2, 2]]; \\ \tau_{Kyq} = \partial_q \text{Pol4}[q][[2, 2]]; \\$$

```

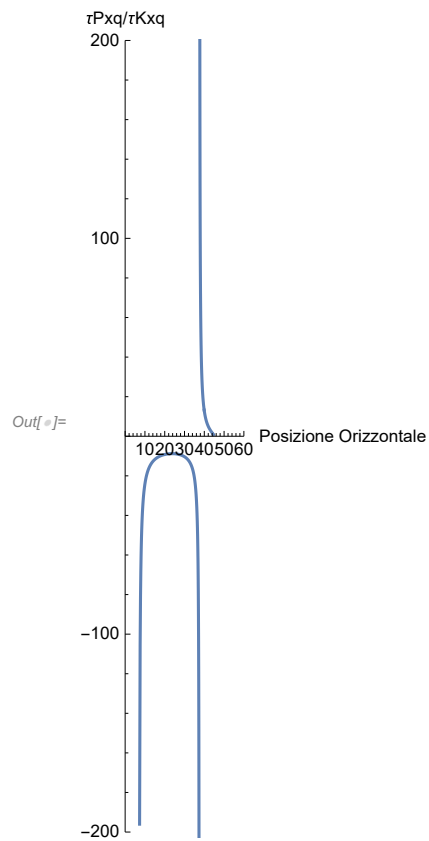
Il grafico ottenuto è il seguente.



2.2 Rapporto delle velocità *orizzontali* del Gancio e Peso

Rappresento il codice utilizzato nell'analisi delle Velocità e il grafico della funzione parametrizzata richiesta.

$$\tau_{Pxq} = \partial_q \text{Pol3}[q][[2, 1]]; \\ \tau_{Kxq} = \partial_q \text{Pol4}[q][[2, 1]]; \\$$



3 Analisi di Accelerazione

In questo capitolo vengono rappresentate le accelerazioni lungo gli assi e l'accelerazione angolare del Peso mentre il Gancio si muove orizzontalmente a velocità costante.

3.1 Velocità costante Gancio

La condizione di velocità costante viene inserita all'interno della funzione sfruttando il *Rapporto di Velocità* τ_{Pyq} seguendo il seguente sviluppo:

$$\tau_{Pxq} = \frac{dPx/dt}{dq/dt} \quad (8)$$

$$q' = \frac{costante}{\tau_{Pxq}} \quad (9)$$

$$q'' = \frac{dq'}{dt} = costante * q' \frac{d \frac{costante}{\tau_{Pxq}}}{dq} \quad (10)$$

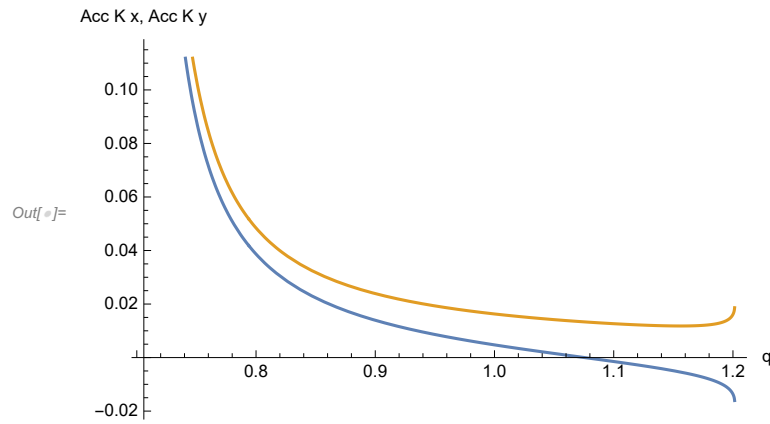
3.2 Accelerazione lungo gli Assi

L'accelerazione orizzontale e verticale del Peso vengono calcolate seguendo la seguente equazione:

$$P''_{Kx} = \tau_{Kxq} * q'' + \frac{d\tau_{Kxq}}{dq} * (q')^2 \quad (11)$$

$$P''_{Ky} = \tau_{Kyg} * q'' + \frac{d\tau_{Kyg}}{dq} * (q')^2 \quad (12)$$

Dalle equazioni ottengo come grafico



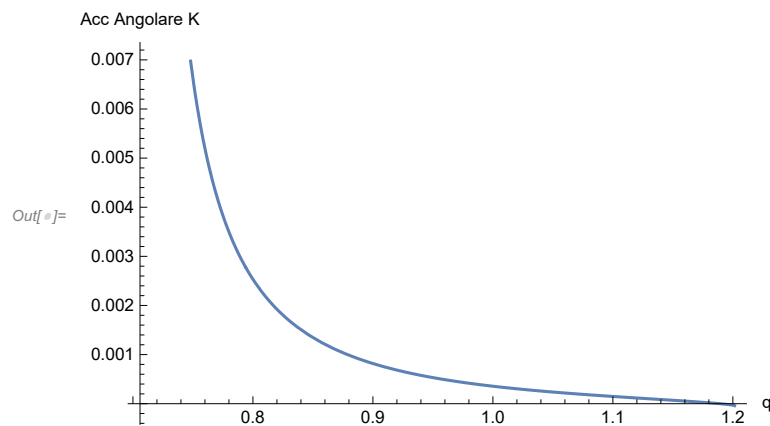
dove la traiettoria azzurra rappresenta l'accelerazione lungo l'asse x del Peso mentre la traiettoria arancione rappresenta l'accelerazione lungo l'asse y del Peso.

3.3 Accelerazione Angolare

Il ragionamento applicato per le accelerazioni lineari è applicabile anche per l'accelerazione angolare, che viene rappresentata dalla seguente equazione

$$\theta_K'' = \tau_{K\theta q} * q'' + \frac{d\tau_{K\theta q}}{dq} * (q')^2 \quad (13)$$

che ha come risultato



4 Animazione

L'animazione si rimanda all'esecuzione del programma di Mathematica svolto e allegato alla relazione

5 Configurazioni Singolari

Nell'analisi delle configurazioni singolari utilizzo le equazioni di chiusura in cui gli angoli e le lunghezze degli elementi vengono lasciati variabili per rendere la computazione meno pesante.

$$\begin{aligned} \text{eq1x} &= (\text{Lv1} + \text{Lv3})\text{Cos}[\theta 1] + \text{Lv4}\text{Cos}[\theta 4] + \text{Lv5}\text{Cos}[\theta 5] + \text{Lv6}\text{Cos}[\theta 6] + \text{Lv0}\text{Cos}[\theta 0]; \\ \text{eq1y} &= (\text{Lv1} + \text{Lv3})\text{Sin}[\theta 1] + \text{Lv4}\text{Sin}[\theta 4] + \text{Lv5}\text{Sin}[\theta 5] + \text{Lv6}\text{Sin}[\theta 6] + \text{Lv0}\text{Sin}[\theta 0]; \\ \text{eq2x} &= \text{Lv1}\text{Cos}[\theta 1] + \text{Lv2}\text{Cos}[\theta 2] + \text{Lv6}\text{Cos}[\theta 6] - \text{Lv0}\text{Cos}[\theta 0]; \\ \text{eq2y} &= \text{Lv1}\text{Sin}[\theta 1] + \text{Lv2}\text{Sin}[\theta 2] + \text{Lv6}\text{Sin}[\theta 6] - \text{Lv0}\text{Sin}[\theta 0]; \end{aligned}$$

Per ottenere le configurazioni singolari costruisco la matrice Jacobiana e risolvo l'equazione $\det[J] = 0$ in funzione degli angoli $\theta 2, \theta 4, \theta 5, \theta 6$. Nella soluzione trovo quattro condizioni differenti, quindi per essere sicuro di ottenere tutte le configurazioni singolari inserisco due a due (per un totale di 4 condizioni generali differenti) le condizioni trovate all'interno delle equazioni di chiusura.

$$\{0.25, \{\{\theta 5 \rightarrow \theta 4\}, \{\theta 5 \rightarrow \theta 4 - \pi\}, \{\theta 6 \rightarrow \theta 2\}, \{\theta 6 \rightarrow \theta 2 - \pi\}\}\}$$

Successivamente per trovare i valori del movente a cui corrispondono le configurazioni iniziali utilizzo come valore degli angoli quelli ottenuti dalle funzioni *Pol1*, *Pol2* e risolvo le equazioni di chiusura negli intorni dei valori $qmin, qmax$: facendo così sono sicuro di ottenere tutti i valori del movente a cui corrispondono delle configurazioni singolari (è da notare che alcune soluzioni si ripetono e alcune non permettono al meccanismo di assemblarsi).

$$\begin{pmatrix} \{x \rightarrow 0.90929\} \\ \{x \rightarrow 0.68276 - 3.1948169245809447 \cdot 10^{-15}i\} \\ \{x \rightarrow 0.367049 + 0.367326i\} \\ \{x \rightarrow 0.821198\} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \{x \rightarrow 0.705888\} \\ \{x \rightarrow 0.674436 - 4.628529614445249 \cdot 10^{-15}i\} \\ \{x \rightarrow 1.61252 + 1.0229403822264392 \cdot 10^{-16}i\} \\ \{x \rightarrow 1.15365\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \{x \rightarrow 1.06688\} \\ \{x \rightarrow 0.279669 + 0.230121i\} \\ \{x \rightarrow 0.367049 + 0.367326i\} \\ \{x \rightarrow 0.821198\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \{x \rightarrow 1.16674\} \\ \{x \rightarrow 3.65522\} \\ \{x \rightarrow 1.61252 + 1.0229403822264392^{*^{\wedge}-16}i\} \\ \{x \rightarrow 1.15365\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \{x \rightarrow 0.90929\} \\ \{x \rightarrow 1.20368 + 4.792666558228116^{*^{\wedge}-15}i\} \\ \{x \rightarrow 0.367049 + 0.367326i\} \\ \{x \rightarrow 0.821198\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \{x \rightarrow 0.705888\} \\ \{x \rightarrow 1.20357 + 4.450938316972776^{*^{\wedge}-15}i\} \\ \{x \rightarrow 1.61252\} \\ \{x \rightarrow 1.15365\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \{x \rightarrow 1.06688\} \\ \{x \rightarrow 0.279669 + 0.230121i\} \\ \{x \rightarrow 0.367049 + 0.367326i\} \\ \{x \rightarrow 0.821198\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \{x \rightarrow 1.16674\} \\ \{x \rightarrow 0.422426 + 0.317199i\} \\ \{x \rightarrow 1.61252\} \\ \{x \rightarrow 1.15365\} \end{pmatrix}$$

Di queste soluzioni considero come corrette le soluzioni che fanno sì che nella catena cinematica ci siano tre coppie rotoidali differenti allineate: la coppia rotoidale posta in mezzo alle due altre coppie rotoidali sarà in una condizione singolare nella quale la sua velocità perpendicolare alla congiungente delle due coppie rotoidali esterne tende all'infinito. Considero queste ipotesi corrette sulla base della teoria affrontata.

Di seguito aggiungo i meccanismi assemblati rappresentanti le 4 configurazioni iniziali dove si possono vedere le coppie rotoidali allineate.

Si lascia un'analisi più approfondita al programma effettuato con Mathematica.

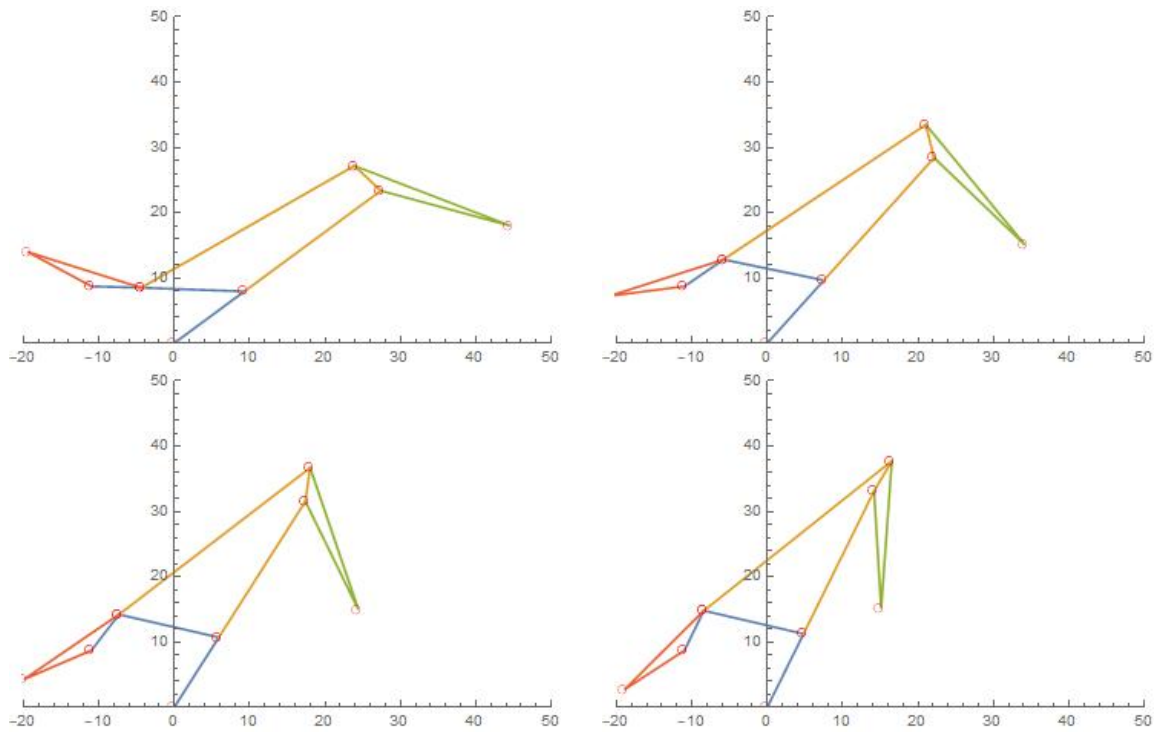


Figura 1: Le immagini rappresentate si riferiscono rispettivamente a
 $q = 0.70588 \text{ rad}$,
 $q = 0.90929 \text{ rad}$,
 $q = 1.06688 \text{ rad}$,
 $q = 1.16674 \text{ rad}$