



پروژه درس احتمال مهندسی

۱۹-۱۲-۲۹۶

پدید آورنده:

نیما شمالی

اساتید درس:

خانم دکتر احمدی پور

خانم دکتر فخاری

آقای دکتر نریمانی

زمستان ۱۴۰۳

با سلام

این پروژه‌ی شبیه سازی شامل دو بخش است. در بخش نخست به بررسی قانون اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی می‌پردازیم و در بخش دوم، یک مساله آشکار سازی در کانال با نویز جمعی را بررسی خواهیم کرد. شبیه سازی‌ها باید با نرم افزار متلب انجام شوند.

- برای گزارش تحویلی موارد زیر را در نظر بگیرید:
  - گزارش شامل توضیحات هر بند، محاسبات تئوری (در صورت درخواست صورت پروژه)، نمودارهای خواسته شده در فرم مناسب؛ و فایل‌های متلب است.
  - همه موارد در یک فولدر زیپ شده در سامانه درس آپلود شوند.
  - نام فایل‌ها به صورت نام\_فامیل\_شماره دانشجویی باشد.
  - در ابتدای گزارش نام استاد خود را ذکر نمایید.
- پروژه به صورت تک نفره انجام شود.
- علاوه بر گزارش، پروژه دارای ارائه حضوری است.
- تاریخ تحویل و ارائه در سامانه درس یا از طریق ایمیل اعلام می شود.

## پروژه اول: بررسی قضیه حد مرکزی

فرض کنید  $X_1, X_2, X_3, \dots$  یک دنباله از متغیرهای تصادفی با توزیع های مشابه و مستقل (iid) باشند که هر یک دارای میانگین  $m$  و واریانس  $\sigma^2$  باشند. بنابر قضیه ی حد مرکزی، در صورتی که  $n$  به اندازه ی کافی بزرگ باشد آنگاه مجموع  $n$  متغیر تصادفی، یعنی  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n X_i$ ، دارای توزیع تقریباً گاوسی با میانگین  $nm$  و واریانس  $n\sigma^2$  می باشد؛ و به بیان بهتر، اگر  $n$  به بی نهایت میل کند آنگاه  $Z_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$  دارای توزیع گاوسی با میانگین صفر و واریانس یک خواهد شد.

در این بخش قصد داریم تا به صورت عملی این پدیده را مشاهده کنیم. برای این منظور سه توزیع یکنواخت و نمایی و برنولی خواهیم داشت.

الف) پارامتر  $a$  را برابر "رقم یکان شماره دانشجویی خود" در نظر بگیرید. کدی بنویسید که مقدار  $a$  را دریافت کند و در بازه ی  $[a, 2a + 1]$  عدد به صورت یکنواخت تولید کند (این عدد را  $X_i$  در نظر بگیرید). با این کد تعداد  $n$  نمونه تولید کنید ( $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ) و در برداری ذخیره کند (پیشنهاد: ابتدا با حدود  $n = 10000$  داده شروع کنید و در صورت نیاز تعداد را تغییر دهید) و هیستوگرام آن را در گزارش خود بیاورید. میانگین و واریانس این نمونه ها را نیز (با کد زنی) به دست بیاورید. در صورتی که میانگین، واریانس و هیستوگرام حاصله با قانون اعداد بزرگ و statistical regularity همخوان نیست،  $n$  را افزایش دهید تا به حالت مطلوب برسید.

ب) بردار  $n$  تایی که در قسمت الف تولید کردید را  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  بنامید و از روی آن ها یک نمونه از  $Z_n$  را به دست آورید. با تکرار این عملیات به تعداد زیاد (مثلاً ۱۰۰۰ بار) چندین نمونه از  $Z_n$  تولید کرده و در یک بردار بریزید. برای بردار به دست آمده هیستوگرام رسم کنید. توزیع به دست آمده از چه نوعی است؟ میانگین و واریانس آن را از روی نمونه های داده ها محاسبه کنید. آیا با قضیه حد مرکزی مطابقت دارد؟ اگر خیر، سعی کنید با افزایش تعداد نمونه های تولید شده از  $Z_n$  وضعیت را بهبود دهید.

ج)  $\lambda$  را برابر "رقم دهگان شماره دانشجویی خود به علاوه یک" در نظر بگیرید. کدی بنویسید که توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  را شبیه سازی کند و تمامی مراحل الف و ب را برای این قسمت نیز انجام داده و گزارش دهید.

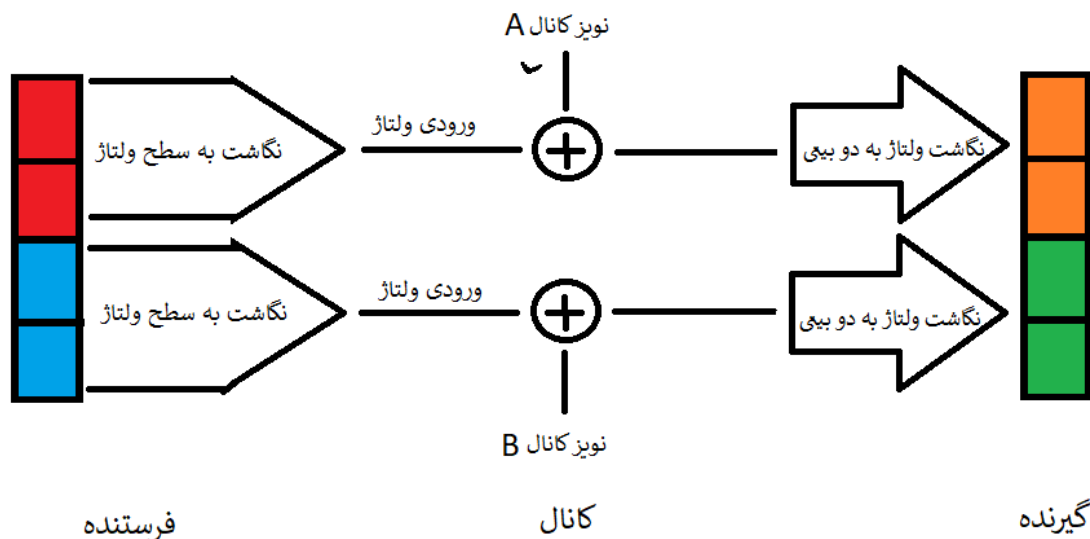
د) کدی بنویسید که عدد تصادفی با توزیع برنولی با پارامتر  $p = \frac{1}{3}$  تولید کند و تمامی مراحل الف و ب را تکرار کنید.

## پروژه دوم: سیستم مخابراتی

دو کانال A و B در اختیار داریم که ورودی هر کانال ولتاژ بوده و خروجی نیز همان ولتاژ است که با نویز کانال‌ها جمع شده‌اند. با توجه به شکل ۱-۲ سیستم فرستنده-گیرنده‌ای داریم که در آن، فرستنده دنباله‌ای از بیت‌های مستقل تولید می‌کند و سپس هر ۴ بیت را به یک زوج مرتب نگاشت می‌کند. برای این نگاشت، ابتدا هر ۴ بیت به دو بیت چپ و دو بیت راست تقسیم می‌شوند و به هر کدام از این دو بیتی‌ها یک سطح ولتاژ طبق جدول ۲ اختصاص داده می‌شود و سپس ولتاژ به دست آمده از کانال‌ها عبور داده می‌شوند که چنان که گفته شد، در کانال، پیام با نویز جمع می‌شود. در خروجی کانال‌ها دو عدد به دست آمده را دمدوله می‌کنیم و خروجی هر کانال را به دو بیت نگاشت می‌کنیم که به این عمل آشکارسازی می‌گویند.

جدول ۲: پروتکل مدوله و دمدوله‌سازی داده‌ها

نگاشت بیت به ولتاژ برای مدوله کردن	بیت دوم	بیت اول	نگاشت بیت به ولتاژ برای مدوله کردن	بیت دوم	بیت اول
-1/5	0	0	$V \leq -1$	0	0
-0/5	1	0	$-1 < V \leq 0$	0	1
+0/5	0	1	$0 < V \leq 1$	1	0
+1/5	1	1	$1 < V$	1	1



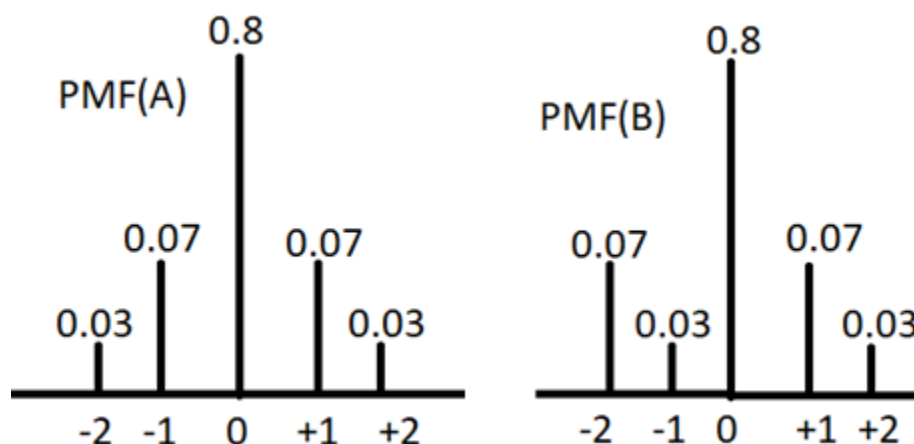
شکل ۱-۲: ساختار سیستم مخابراتی

با توجه به سیستم مخابراتی که توضیح داده شد به سوالات زیر پاسخ دهید و کدهای مربوطه متلب را نیز انجام دهید.

الف) ابتدا ۲۰ هزار بیت تولید کنید که ۷۰ درصد آن یک باشد و ۳۰ درصد آن صفر باشد. هیستوگرام آن را رسم کنید.

ب) ۲۰ هزار بیت را به بردارهای ولتاژ برای ارسال در کانال‌های A و B نگاشت کنید و هیستوگرام این بردارها را رسم کنید. (پس از نگاشت از بردار بیت‌ها به بردارهای ولتاژ، دو بردار برای ارسال در کانال‌ها خواهیم داشت که هر کدام ۵ هزار مولفه خواهند داشت که هر مولفه یکی از اعداد از جدول ۱ می‌باشد.)

ج) نویزهای کانال‌های A و B به صورت اعداد گسسته هستند که از pmf های زیر پیروی می‌کنند:



شکل ۲-۲: تابع جرم احتمال نویز کانال‌های A , B

بردارهای ۵۰۰۰ مولفه از نویزها با توابع جرم احتمال که در شکل ۲-۲ داده شده است بسازید و هیستوگرام آن را رسم کنید.

د) بردارهای مدوله شده از قسمت ب همان ورودی کانال‌ها هستند. این بردارها را با بردارهای نویز از بخش "ج" جمع کنید تا خروجی کانال‌ها به دست بیاید. سپس آشکارسازی را انجام دهید و ۲۰ هزار بیت را آشکار کرده و در برداری ذخیره کنید.

ه) بردار به دست آمده در گیرنده را با بردار داده در فرستنده بیت به بیت مقایسه کنید و تعداد بیت‌هایی که دچار خطا شده‌اند را به دست بیاورید و بر تعداد کل بیت‌ها تقسیم کنید. عدد به دست آمده چه چیزی را نشان می‌دهد؟  
 ی) احتمال خطای این سیستم را به صورت تئوری نیز به دست بیاورید و با بند ه مقایسه کنید.

پایان

موفق باشید