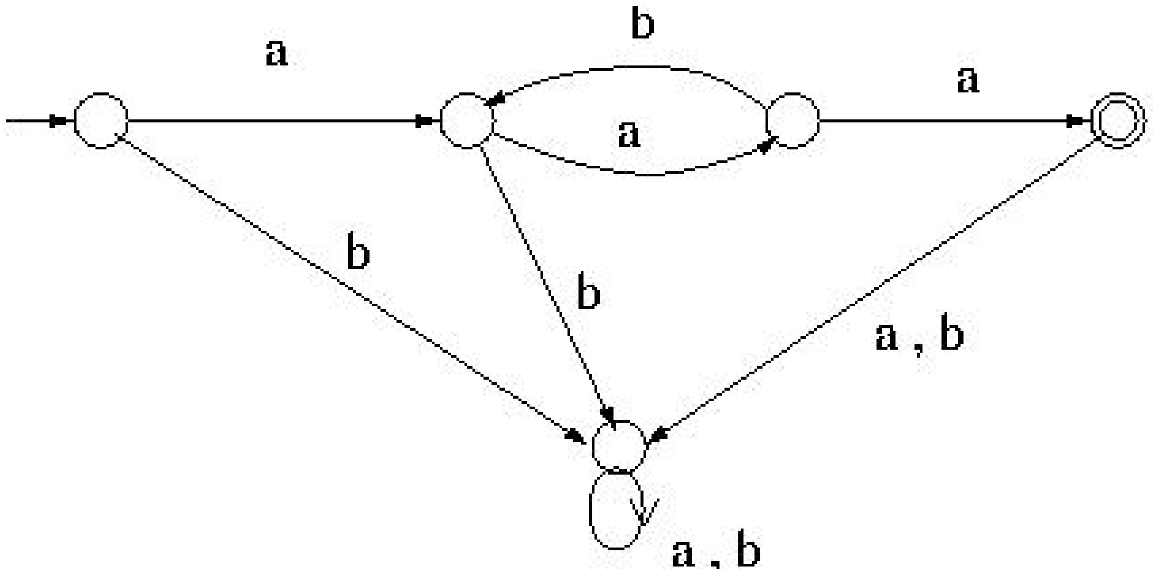
بسم الله الرحمن الرحیم

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

جلسه ۸

مجتبی خلیلی
دانشکده برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان

عبارت‌های منظم



$$a\,(ab)^*aa$$

عبارت‌های منظم

- تاکنون دیدیم که یک زبان منظم است اگر یک اتوماتای متناهی برای آن وجود داشته باشد.
- اکنون قصد داریم روش دیگری برای ارائه یک زبان منظم معرفی کنیم.
- یک روش برای توصیف زبان منظم، استفاده از مجموعه سمبل‌های عبارات منظم است.
- یک عبارت منظم، یک زبان منظم را با استفاده از چند زبان ساده و برخی عملگرهای منظم توصیف می‌کند.
- عبارت منظم، راهی برای توصیف مسائلی است که توسط DFA قابل حل هستند.

عبارت‌های منظم

- عبارات منظم با انجام متوالی برخی قوانین بازگشتی روی اجزا پایه‌ای و به روشی مشابه ساخت عبارات ریاضی ایجاد می‌شوند.
- مثال:

$$(5+3)\times 4 = 32 = \text{Number}$$

$$(a \cup b)a^* = \{a, b, aa, ba, aaa, baa, \ldots\} = \boxed{\text{Regular language}}$$

عبارت‌های منظم

IUT-ECE

DEFINITION 1.52

Say that R is a ***regular expression*** if R is

1. a for some a in the alphabet Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, where R_1 and R_2 are regular expressions,
5. $(R_1 \circ R_2)$, where R_1 and R_2 are regular expressions, or
6. (R_1^*), where R_1 is a regular expression.

regular operations

In items 1 and 2, the regular expressions a and ε represent the languages $\{a\}$ and $\{\varepsilon\}$, respectively. In item 3, the regular expression $\emptyset$ represents the empty language. In items 4, 5, and 6, the expressions represent the languages obtained by taking the union or concatenation of the languages R_1 and R_2, or the star of the language R_1, respectively.

inductive definition

عبارت‌های منظم

- مثال برای الفبای باینری:

First, the symbols 0 and 1 are shorthand for the sets $\{0\}$ and $\{1\}$.

So $(0 \cup 1)$ means $(\{0\} \cup \{1\})$.

عبارت‌های منظم

- برای اجتماع گاها از سمبل + استفاده میشود. مثلا:

$$R = 0 \cup 1 = 0 + 1$$

اگر الفبا $\Sigma = \{0,1\}$ باشد، میتوان نوشت $R = \Sigma$.

- برای الحاق نیز:

$$R = 0 \circ 1^* = 01^* = 0(1^*)$$

عبارت‌های منظم

- مثال:

$$(0+1)\,0 \longrightarrow \{00, 10\}$$

$$(0+1)\,(0+\varepsilon) \longrightarrow \{00, 0, 10, 1\}$$

عبارت‌های منظم

- مثال:

$$a^* \longrightarrow \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$$

$$(0+1)^* \longrightarrow \text{All binary strings}$$

عبارت‌های منظم

- عبارت زیر همه رشته‌های باینری با اندازه حداقل دو که سمبل اول و آخر یکسانی دارند را تولید می‌کند:

$$0(0+1)^*0 \;+\; 1(0+1)^*1$$

- تقدم کدام عملگر بالاتر است؟ *
- تقدم کدام عملگر پایینتر است؟ +
- پرانتزها ممکن است تقدم را تغییر دهند.

عبارت‌های منظم

- مثال: همه رشته‌هایی که به aa ختم می‌شوند؟ (الفبای {a,b})

$$(a+b)^{*}aa$$

زبان‌های متناظر با عبارت‌های منظم

- پیش از آنکه درباره ارتباط یک زبان منظم با یک عبارت منظم به صورت فرمال صحبت کنیم، به بررسی برخی ویژگی‌های زبان‌های توصیف شده با عبارات منظم میپردازیم.

- زبان توصیف شده توسط عبارت منظم R را با L(R) نشان می‌دهیم.

زبان‌های متناظر با عبارت‌های منظم

DEFINITION 3.2

The language $L(r)$ denoted by any regular expression r is defined by the following rules.

1. $\varnothing$ is a regular expression denoting the empty set,

2. λ is a regular expression denoting $\{\lambda\}$,

3. For every $a \in \Sigma$, a is a regular expression denoting $\{a\}$.

If r_1 and r_2 are regular expressions, then

4. $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$,

5. $L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1) L(r_2)$,

6. $L((r_1)) = L(r_1)$,

7. $L(r_1^*) = (L(r_1))^*$.

زبان‌های متناظر با عبارت‌های منظم

عبارت منظم	زبان منظم
ϕ	$\{\}$
ϵ	$\{\epsilon\}$
a	$\{a\}$
$a \cup b$	$\{a, b\}$
ab	$\{a\}\{b\}$
a^*	$\{a\}^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$
$(aab)^*(a \cup ab)$	$\{aab\}^*\{a, ab\}$
$(aa \cup bb \cup (a \cup b)(aa)^*(ab \cup ba))^*$	$(\{aa, bb\} \cup \{a, b\}\{aa\}^*\{ab, ba\})^*$

مثال

IUT-ECE

EXAMPLE 3.2

Exhibit the language $L(a^* \cdot (a+b))$ in set notation.

$$\begin{aligned} L(a^* \cdot (a+b)) &= L(a^*)\,L(a+b) \\ &= (L(a))^*\,(L(a) \cup L(b)) \\ &= \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}\{a, b\} \\ &= \{a, aa, aaa, \ldots, b, ab, aab, \ldots\}. \end{aligned}$$

مثال

EXAMPLE 3.3

For $\Sigma = \{a, b\}$, the expression

$$r = (a + b)^* (a + bb)$$

is regular. It denotes the language

$$L(r) = \{a, bb, aa, abb, ba, bbb, ...\}.$$

We can see this by considering the various parts of r. The first part, $(a + b)^*$, stands for any string of a's and b's. The second part, $(a + bb)$ represents either an a or a double b. Consequently, $L(r)$ is the set of all strings on $\{a, b\}$, terminated by either an a or a bb.

مثال

EXAMPLE 3.4

The expression

$$r = (aa)^* (bb)^* b$$

denotes the set of all strings with an even number of a's followed by an odd number of b's; that is,

$$L(r) = \{a^{2n} b^{2m+1} : n \geq 0,\ m \geq 0\}.$$

مثال

$R = 0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1$

$L(R) = \{w | w \text{ starts and ends with the same symbol}\}$

عبارت‌های معادل/هم ارز

- دو عبارت منظم را معادل گوییم اگر هر دو یک زبان را توصیف کنند. مثال:

$$(a^*b^*)^* = (a+b)^* = \Sigma^*$$

عبارت‌های منظم

EXAMPLE 1.53

In the following instances, we assume that the alphabet Σ is $\{0,1\}$.

$$0^*10^* = \{w \mid w \text{ contains a single } 1\}.$$

عبارت‌های منظم

EXAMPLE 1.53

In the following instances, we assume that the alphabet Σ is $\{0,1\}$.

$$\Sigma^* 1 \Sigma^* = \{w |\ w \text{ has at least one } 1\}.$$

عبارت‌های منظم

IUT-ECE

EXAMPLE 1.53

In the following instances, we assume that the alphabet Σ is $\{0,1\}$.

$$\Sigma^* 001 \Sigma^* = \{w \mid w \text{ contains the string } 001 \text{ as a substring}\}.$$

عبارت‌های منظم

EXAMPLE 1.53

In the following instances, we assume that the alphabet Σ is $\{0,1\}$.

$$1^*(01^+)^* = \{w \mid \text{every } 0 \text{ in } w \text{ is followed by at least one } 1\}.$$

R^+ has all strings that are 1 or more concatenations of strings from R.

$R^+ \cup \varepsilon = R^*$.

عبارت‌های منظم

EXAMPLE 1.53 ....

In the following instances, we assume that the alphabet Σ is $\{0,1\}$.

$$(\Sigma\Sigma)^* = \{w |\ w \text{ is a string of even length}\}.$$

عبارت‌های منظم

EXAMPLE 1.53

In the following instances, we assume that the alphabet Σ is $\{0,1\}$.

6. $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* = \{w|$ the length of w is a multiple of 3$\}$.
7. $01 \cup 10 = \{01, 10\}$.
8. $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 = \{w|\ w$ starts and ends with the same symbol$\}$.
9. $(0 \cup \varepsilon)1^* = 01^* \cup 1^*$.
   The expression $0 \cup \varepsilon$ describes the language $\{0, \varepsilon\}$, so the concatenation operation adds either 0 or ε before every string in 1^*.

عبارت‌های منظم

EXAMPLE 1.53

In the following instances, we assume that the alphabet Σ is $\{0,1\}$.

10. $(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon) = \{\varepsilon, 0, 1, 01\}$.

11. $1^*\emptyset = \emptyset$.
Concatenating the empty set to any set yields the empty set.

12. $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.
The star operation puts together any number of strings from the language to get a string in the result. If the language is empty, the star operation can put together 0 strings, giving only the empty string.

مثال

- عبارت منظمی بنویسید که زبان زیر را توصیف کند:

$$\{w \mid w \text{ ends with } b \text{ and does not contain } aa\}$$

- پاسخ:

$$(b \cup ab)^{+}$$

مثال

- عبارت منظم برای رشته‌هایی که شامل تعداد فرد 0 باشد (الفبای باینری).

$$1^*01^*(1^*01^*01^*)^*$$

چند قاعده

$R \cup \varepsilon$ may not equal R.
For example, if $R = 0$, then $L(R) = \{0\}$ but $L(R \cup \varepsilon) = \{0, \varepsilon\}$.

چند قاعده

$R \circ \emptyset$ may not equal R.
For example, if $R = 0$, then $L(R) = \{0\}$ but $L(R \circ \emptyset) = \emptyset$.