

بسمه تعالی

آزمون پایانترم درس طراحی الگوریتم‌ها (۴۰۰۱) — زمان: ۱۵۰ دقیقه

۱. لطفاً به اصول اخلاقی و انسانی پایبند باشید. از فرد دیگری کمک نگیرید، و مشورت نکنید. کمک و راهنمایی‌ای نیز به دیگران ارائه ندهید.
۲. جستجو در اینترنت برای پاسخ دادن به سؤالات ممنوع است، اما استفاده از جزوه و اسلایدهای جلسات مانعی ندارد.
۳. در همه سؤالات، قید توضیحات و جزئیات لازم است. صرف نوشتن جواب نهایی کافی نیست.
۴. استفاده از ماشین حساب مجاز است.

مسئله اول

تعدادی کاراکتر به همراه دفعات تکرار هریک از آنها در اختیار شما قرار گرفته است. اگر قرار باشد این منبع را با روش هافمن کدگذاری کنیم، آنگاه طول کل دنباله باینری حاصل چند خواهد شد؟ ذکر جزئیات مراحل و ترسیم درخت‌های مربوطه ضروری است. صرف نوشتن جواب نهایی کافی نیست. در به دست آوردن عدد نهایی دقت کنید.

مسئله دوم

یک مجموعه n عضوی S از اعداد صحیح مثبت، و یک عدد صحیح مثبت W در اختیار شما قرار گرفته است. فرض کنید که قرار است این نمونه از مسئله sum-of-subsets را با بهره‌گیری از رویکرد backtracking حل کنیم. دو محک برای هرس کردن نودهای درخت فضای حالت معرفی کردیم.

الف. یک نود غیرریشه از درخت فضای حالت که توسط این دو محک هرس نمی‌شود (یعنی امیدبخش تشخیص داده می‌شود) را معرفی کنید. ذکر کامل جزئیات الزامی است.

ب. یک نود غیربرگ از درخت فضای حالت که توسط محک اول غیرامیدبخش تشخیص داده شده و هرس می‌شود را معرفی کنید. ذکر کامل جزئیات الزامی است.

ج. یک نود غیربرگ از درخت فضای حالت که توسط محک دوم غیرامیدبخش تشخیص داده شده و هرس می‌شود را معرفی کنید. ذکر کامل جزئیات الزامی است.

مسئله سوم

یک نمونه از مسئله کوله‌پشتی در اختیار شما قرار گرفته است.

الف. جواب حاصل از اجرای الگوریتم ۲ – تقریبی معرفی شده در کلاس برای این نمونه از مسئله کوله‌پشتی برابر با چند است؟

ب. فرض کنید که قرار است این نمونه را با استفاده از رویکرد شاخه و کران حل کنیم. یکی از نودهای درخت فضای حالت که در سطح سوم درخت قرار دارد، نود

include item₁, exclude item₂, exclude item₃

است. در این نود، آیتم اول انتخاب شده و در کوله‌پشتی قرار می‌گیرد، اما دو آیتم دوم و سوم در کوله‌پشتی قرار نمی‌گیرند. کران بالای نظیر این نود را محاسبه کنید. توجه داشته باشید که ما در کلاس دو روش متفاوت را برای محاسبه کران بالای نظیر یک نود در درخت فضای حالت مسئله کوله‌پشتی معرفی کردیم. شما باید کران بالای نظیر هر دو روش را به دست آورید.

ج. کدام یک از دو کرانی که در قسمت ب به دست آوردید بهتر است؟ چرا؟ توضیح دهید.

مسئله چهارم

یک نمونه از مسئله شاره بیشینه در اختیار شما قرار گرفته است.
الف. نمونه LP نظیر این نمونه از مسئله شاره بیشینه را تشکیل دهید.
ب. فرض کنید صورت مسئله به این شکل تغییر کند که هر یال را یا نباید به کلی مورد استفاده قرار داد، و یا اگر استفاده شد، باید تمام ظرفیت آن مورد استفاده قرار گیرد. (همه ظرفیت یک یال باید یا کامل استفاده شود، و یا به کلی استفاده نشود.) تحت این شرط اضافه، نمونه نظیر خود را در قالب یک نمونه از مسئله ILP (برنامه ریزی خطی عدد صحیح) بیان کنید.

مسئله پنجم

یک درخت ریشه دار که هریک از رئوس آن وزن نظیر خود را دارد در اختیار شما قرار گرفته است. عددی که داخل هر نود نوشته شده، وزن نظیر آن نود است. با بهره گیری از رویکرد برنامه ریزی پویای معرفی شده در کلاس، که دارای پیچیدگی زمان $O(n)$ است، مجموعه مستقلی از این درخت که دارای بیشترین وزن است را بدست آورید. (n همان تعداد رئوس درخت است.) یعنی مجموعه مستقلی که مجموع وزن های نظیر رئوس آن بیشینه باشد. برای ریشه و فرزندان ریشه، نوشتن رابطه بازگشتی الزامی است. اما برای دیگر رئوس، نوشتن رابطه بازگشتی الزامی ندارد.

مسئله ششم

در این سؤال، شما با یک نسخه تغییر یافته از مسئله کوله پشتی مواجه هستید که در آن، به جای یک کوله پشتی، دو کوله پشتی در اختیار دارید. فرض کنید که آیتم های مسئله سوم در اختیار شما قرار گرفته، اما شما به جای یک کوله پشتی با ظرفیت W ، دو کوله پشتی با ظرفیت $\frac{W}{2}$ در اختیار دارید. همان عددی است که در فایل نظیر مسئله سوم قید شده، و آیتم ها نیز همان آیتم ها هستند. این نمونه از نسخه تغییر یافته مسئله را در بستر یک نمونه از مسئله ILP (برنامه ریزی خطی عدد صحیح) بیان کنید. ذکر جزئیات الزامی است. دقت کنید که شما برای پاسخ دادن به این مسئله باید از فایل نظیر مسئله سوم خود استفاده کنید.