الگوریتم ـ ۱

دانیال مینی ۴۰۱۳۰۰۲۳

۱ـ

$$\binom{100}{n} \to 2^{(2^{10}+1)^{10}} \to \log\log n \to \log n^{\log n} \to \log n! \to \log^* n \to$$

$$\to n^2 \log n \to n^n \to \sqrt{2}^{\log n} \to 3^{\log n} \to 2^{\frac{n}{2}} \to \left(\frac{3}{2}\right)^n \to e^n$$

$$n^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \to n^2 2^n \to n 3^n \to \sqrt{2} \to n! \to 2^n n! \to n^n$$

۲ـ

$f(x)$	$g(x)$	o	O	ω	Ω	Θ
$\log n$	$\log^2 n$	✓	✓	×	×	×
2^n	$2^{\frac{n}{2}}$	×	×	✓	✓	×
$\log \log n$	n^2	✓	✓	×	×	×
n^n	$n!$	✓	✓	×	×	×
$n \log^2 n$	$n^2 \log \log n$	×	×	✓	✓	×
$\log n^2$	$\log n$	×	✓	×	✓	✓
$n 2^n$	3^n	✓	✓	×	×	×
n^2	n^2	✓	✓	×	×	×

۳- نادرست

(۱) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$

$f(n) = 2n \cdot g(n) = n \Rightarrow 2^{2n} \notin O(2^n)$

---

(۲) $\log^n \in O(\sqrt[9]{n})$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\log^n}{\sqrt[9]{n}} = 0 \Rightarrow$ درست

$\log^n$ یا $\ln^n$ نوعی چندجمله‌ای هستند.

---

(۳) $f(n) \in o((f(n))^2)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(f(n))^2} = \frac{1}{f(n)} = 0 \Rightarrow$ درست

---

(۴) $f'(n) + o(f(n)) \in \Theta(f(n))$ نادرست

مثلا: $f(n) = 2n^2$, $o(f(n)) = n^3 \Rightarrow n^3 + 2n^2 \notin \Theta(2n^2)$

---

(۵) $f(n) \in O(s(n))$, $g(n) \in O(r(n)) \Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \in O\left(\frac{s(n)}{r(n)}\right)$

$f(n) < c\, s(n)$, $g(n) < c' r(n) \Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} < \frac{c}{c'} \frac{s(n)}{r(n)}$

$\frac{c}{c'} = k$

$\Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} < k \frac{s(n)}{r(n)} \Rightarrow$ درست

۴- الف:

$$T(n) = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} \frac{(n)(n+2)}{2}$$

ب:

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) \Rightarrow T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$

$\Rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$T(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$T(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad : 7$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^{i+1} \sum_{k=j}^{j+1} 1 \Rightarrow T(n) = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} - (n-1) = \frac{2n^3 - 3n^2 - 5n + 6}{6} \quad : 1$$