

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

جلسه ۲

مجتبی خلیلی
دانشکده برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان

سه سوال اساسی در این درس

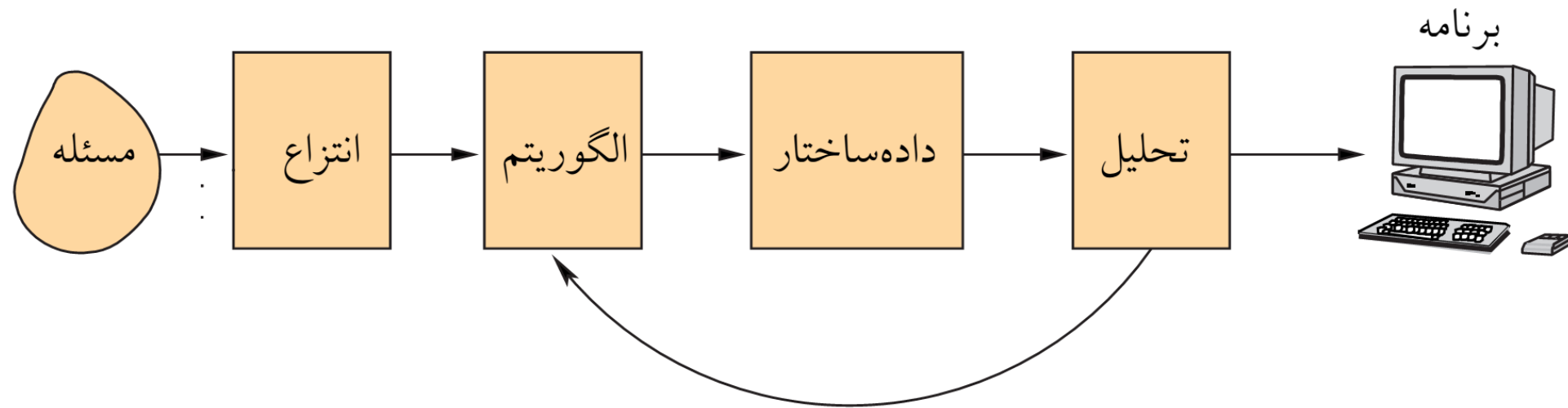
○ کامپیوترها چه مسائلی را می توانند حل کنند؟

○ چه منابعی برای حل یک مسئله نیاز است؟

○ آیا برخی مسائل از برخی دیگر سختترند؟

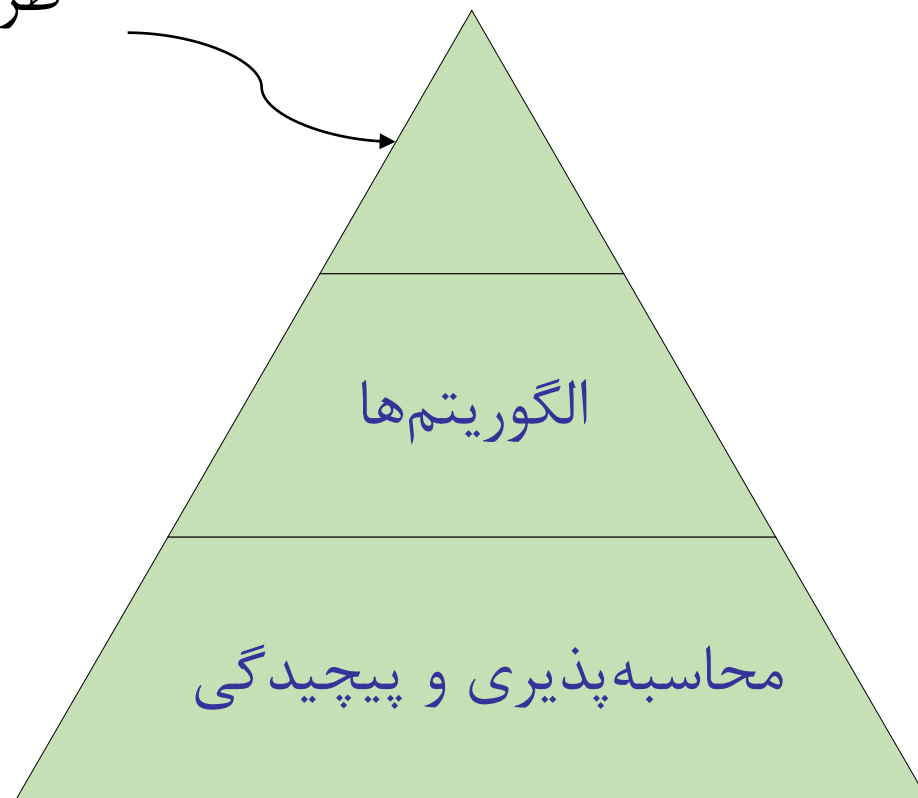
❖ حل مسئله: بر مبنای ورودی، تصمیمی گرفته شود یا مقداری محاسبه شود.

مراحل حل مسئله



حل مسئله

طراحی و پیاده‌سازی
نرم‌افزاری



الگوریتم

○ قلب برنامه‌های کامپیوتری، الگوریتم‌ها هستند.

○ برای مطالعه الگوریتم‌ها ما باید بتوانیم به صورت ریاضی درباره موارد زیر صحبت کنیم:

- مسائل محاسباتی

- کامپیوترها

- الگوریتم‌ها

درباره الگوریتم‌ها

○ آیا درستند؟

درس ساختمان گسسته

○ آیا روش بهتری برای حل همان مسئله وجود دارد؟

درس طراحی الگوریتم-نظریه پیچیدگی

○ آیا هر مسئله جواب دارد؟

نظریه محاسبه پذیری

○ اگر دارد، آیا این جواب را می‌توان با یک الگوریتم بدست آورد؟

آیا هر مسئله یک الگوریتم دارد؟

مسئله

○ چند مثال:

- تحت n عدد صحیح، لیست مرتب شده آن را بیابید.
- در یک گراف، کوتاهترین مسیر بین دو گره مشخص را بیابید.
- تجزیه $n=pq$ به فاکتورهایش را بیابید.
- تعیین کنید آیا یک چند جمله‌ای چند متغیره با ضرایب صحیح دارای جواب صحیح است یا خیر.

درباره الگوریتم

- ما برای همه مسائل الگوریتم نداریم (یک اثبات برای آن وجود دارد).
- برای بسیاری از مسائل، متاسفانه یا خوشبختانه ما اطلاعات کمی درباره سریع‌ترین الگوریتم‌های متناظر آنها داریم.
- مثل فاکتور کردن $n=pq$
- چنانچه الگوریتم سریعی برای آنها پیدا شود، دنیا تغییر خواهد کرد.

امکان ناپذیری

○ چرا علاقه داریم درباره امکان ناپذیری برخی مسائل تحقیق کنیم؟

○ مثلاً، زمانی تصور میشد میتوان ماشینی ساخت که انرژی مصرف نکند.

○ بعدها، فیزیکدانان نشان دادند چنین چیزی امکان ندارد.

فهم امکان ناپذیرها کمک می کند وقت صرف آنها نکنید.
و سرعت حل ...

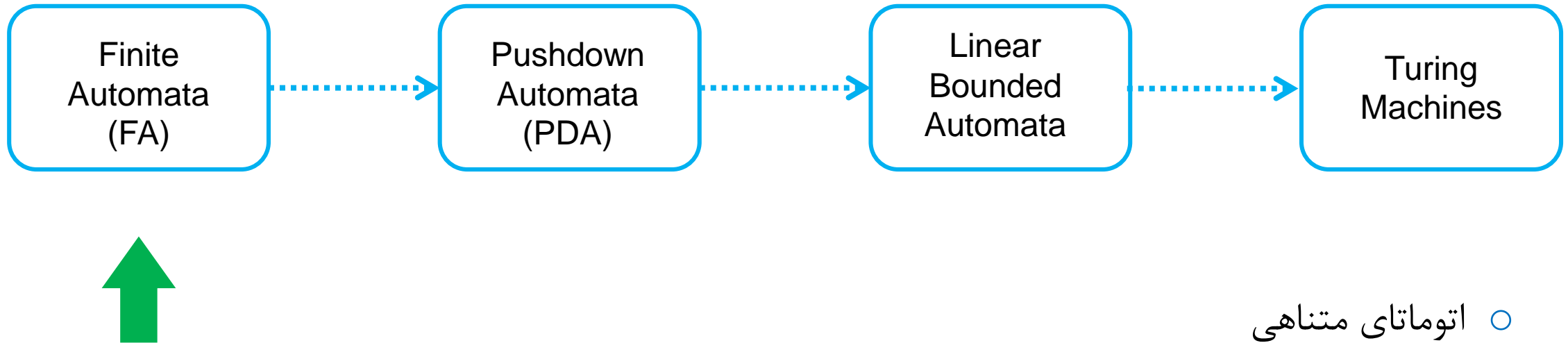
مثال

○ مسئله رنگ آمیزی گراف: تخصیص رنگ به رئوس های یک گراف به طوری که هیچ دو رئوس مجاور هم رنگ نباشند و تعداد رنگ ها کمینه باشد.

مثال

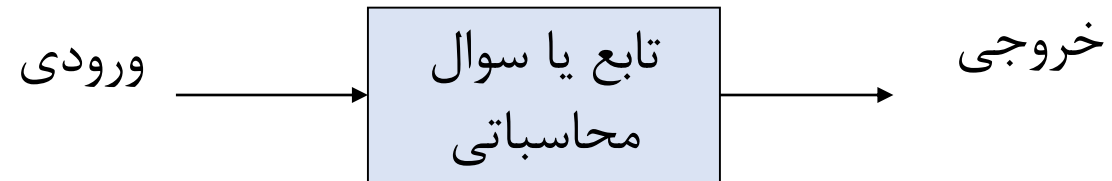
○ جنبه دیگر آن برای توسعه دهندگان نرم افزار این است که تشخیص دهند یک مسئله قابل حل (به صورت عام یا در زمان کارآمد) است یا خیر.

چهار مدل



- حافظه محدود
- زبان‌ها، عبارات و گرامرهای منظم (regular)

مسائل محاسباتی



Decision problem

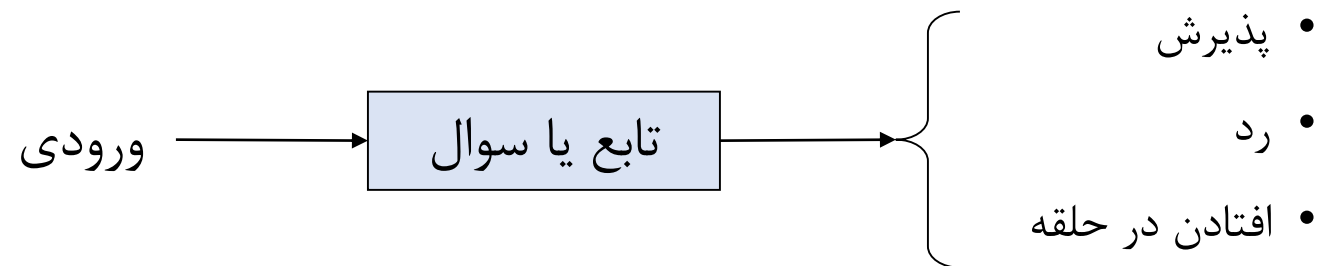
○ مسائلی که در این درس در نظر میگیریم اغلب از نوع **تصمیم** هستند (جواب بله/خیر):

- آیا دو عدد a و b برابرند؟

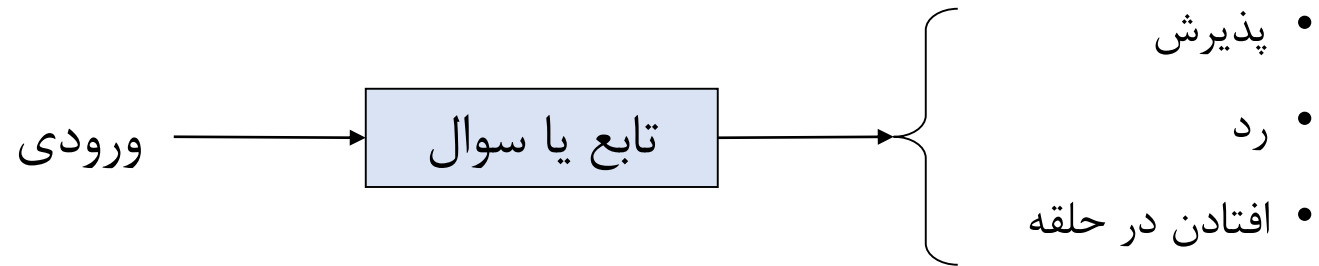
- آیا مقدار x در مجموعه S قرار دارد؟

○ مسائل دیگری نیز هستند، مانند «پیدا کنید» ها که ما کمتر به آنها میپردازیم.

Decision problem



مقدمه‌ای بر اتوماتا

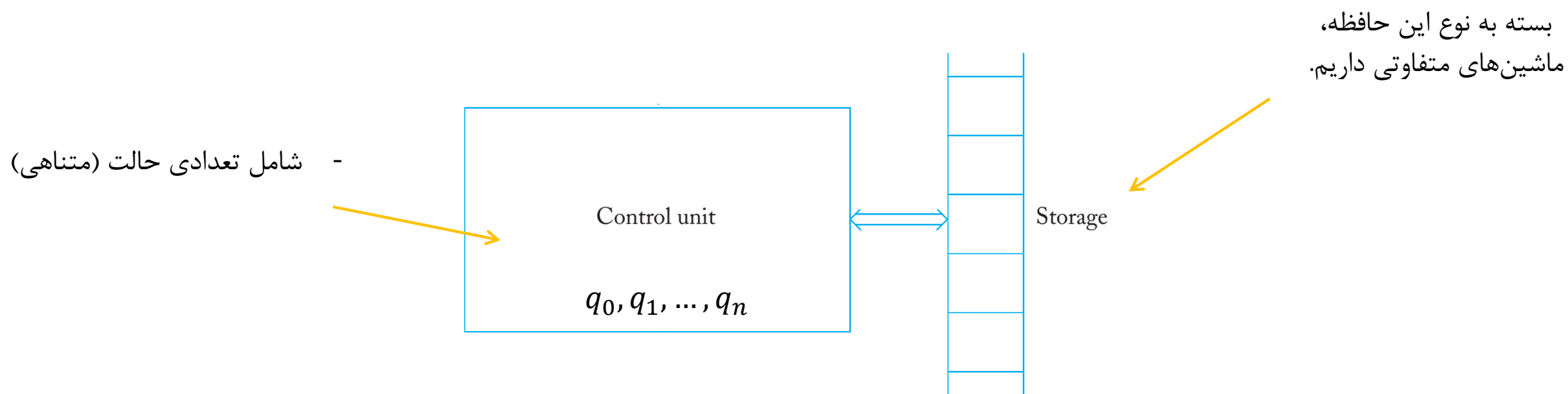


○ ما می‌خواهیم از ساده‌ترین فرمول‌بندی ریاضی برای محاسبه شروع کنیم؛ پس:

- برای جعبه ماشین یک مدل ساده در نظر می‌گیریم.
- تلاش می‌کنیم مسائلی که می‌تواند حل کند را مشخص کنیم.
- مسائلی که این مدل ساده قادر به حلشان نیست را تعیین کنیم.
- ماشینمان را قوی‌تر کنیم تا این محدودیت را برطرف کنیم.

مقدمه‌ای بر اتوماتا

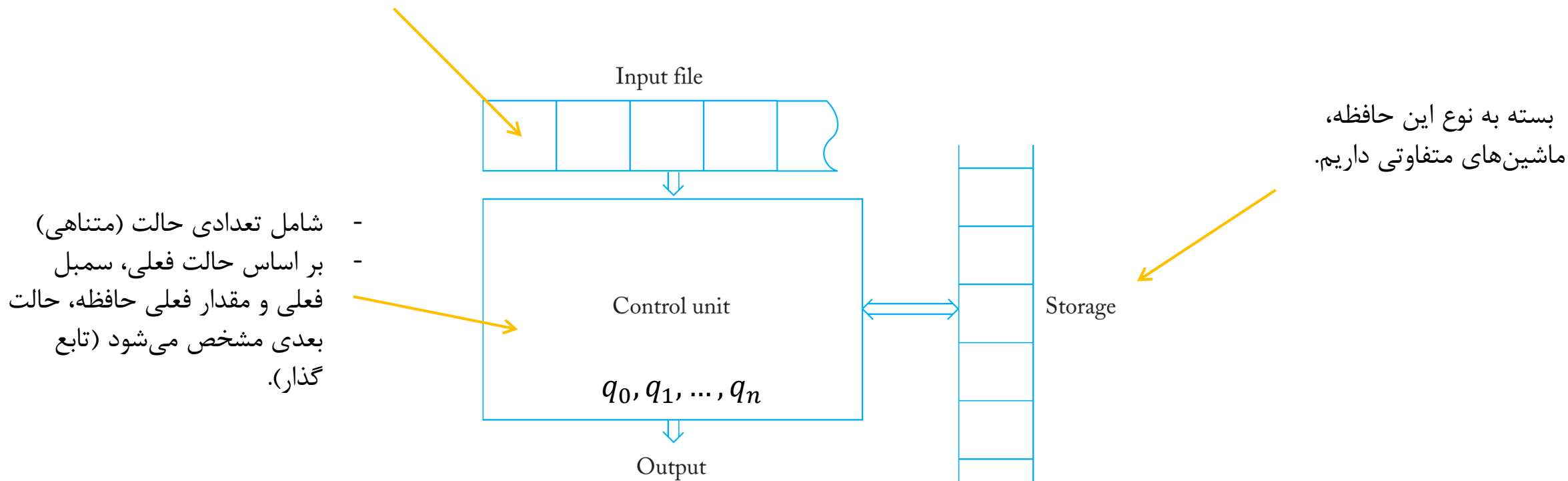
○ یک اتوموتن، یک مدل انتزاعی از یک کامپیوتر دیجیتال است.



مقدمه‌ای بر اتوماتا

○ یک اتوموتن، یک مدل انتزاعی از یک کامپیوتر دیجیتال است.

اولین سمبل از رشته ورودی



مقدمه‌ای بر اتوماتا

○ یک اتوموتن، یک مدل انتزاعی از یک کامپیوتر دیجیتال است.

اولین سمبل از رشته ورودی

Input file



- شامل تعدادی حالت (متناهی)
- بر اساس حالت فعلی و سمبل فعلی، حالت بعدی مشخص می‌شود (تابع گذار).

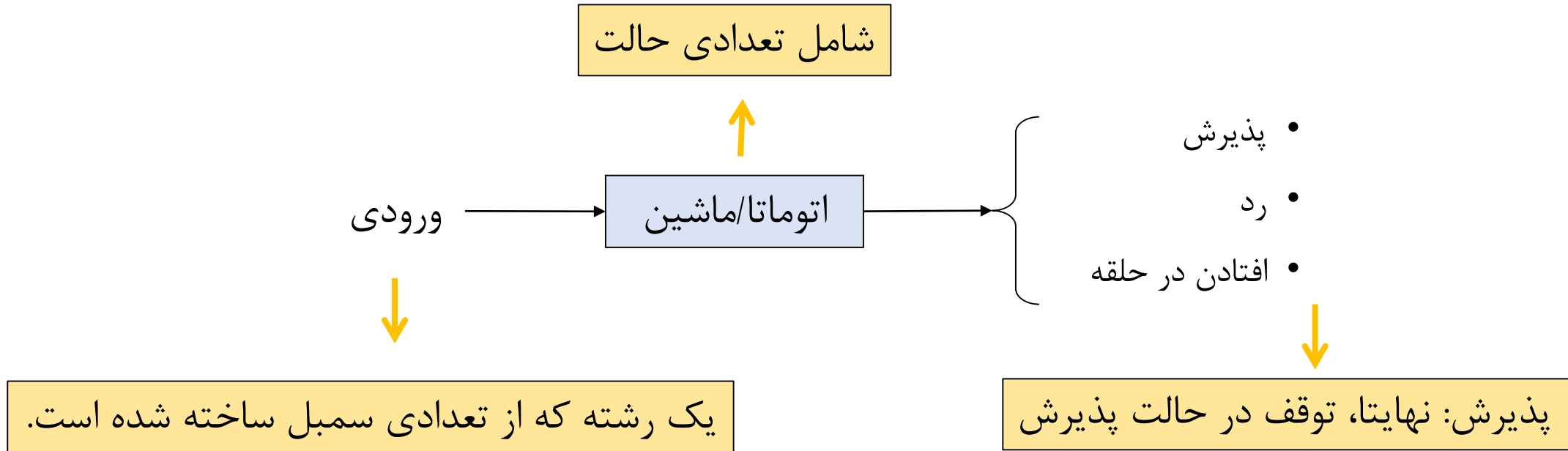
Control unit

q_0, q_1, \dots, q_n

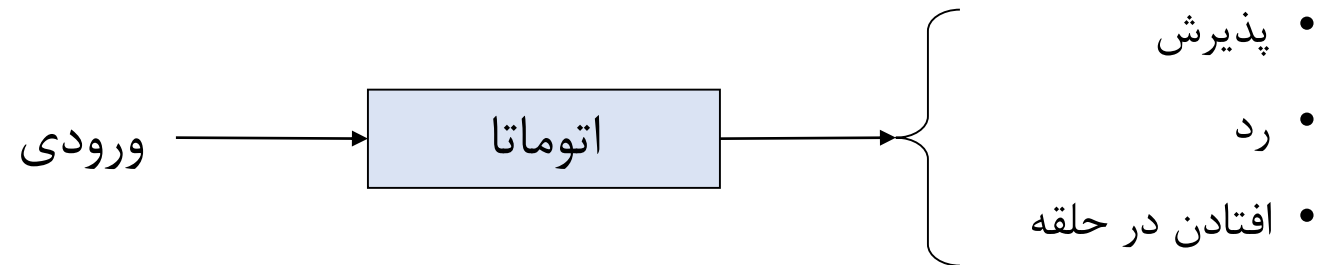
Output

Finite Automata (FA)

Decision problem



تشخیص زبان

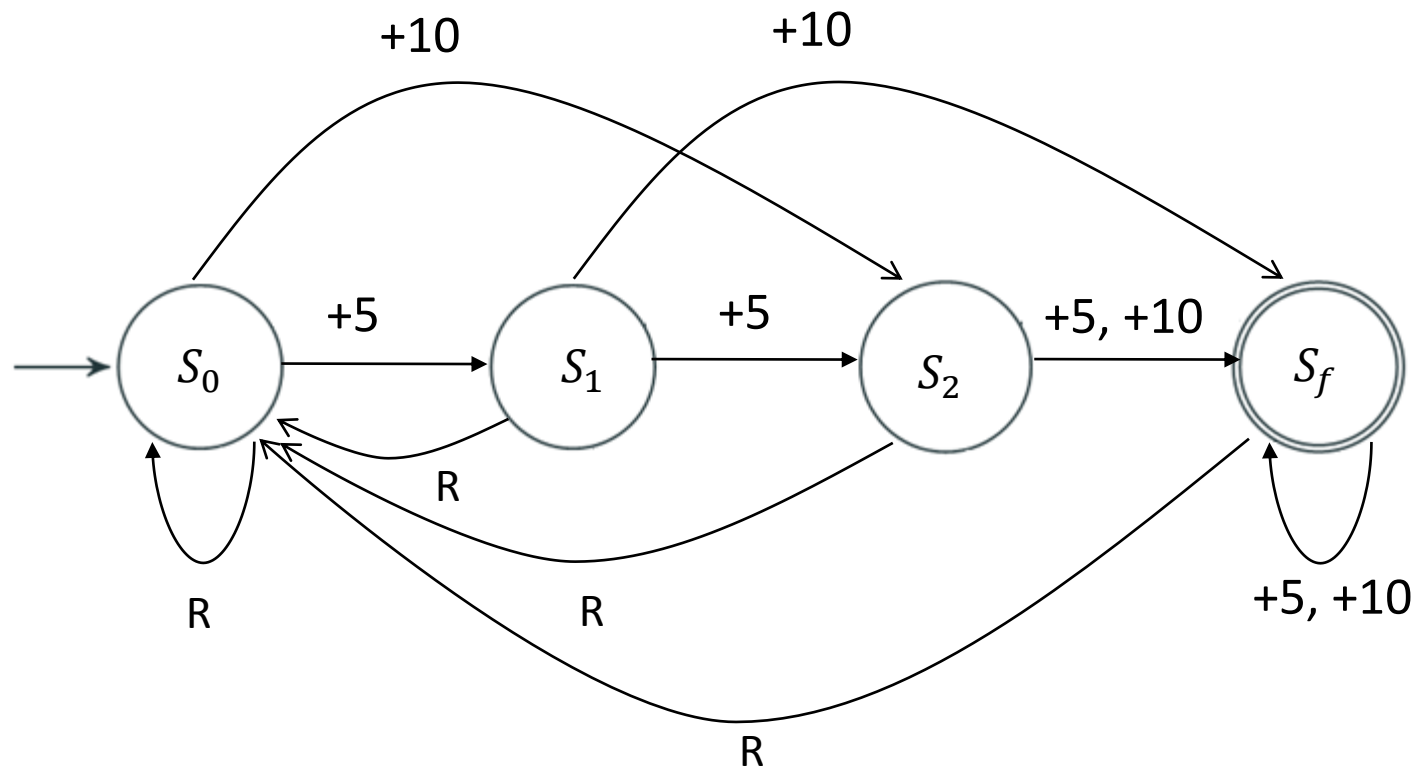


○ مجموعه همه رشته‌هایی که به پذیرش منتهی می‌شوند، **زبانی** است که ماشین تشخیص می‌دهد.

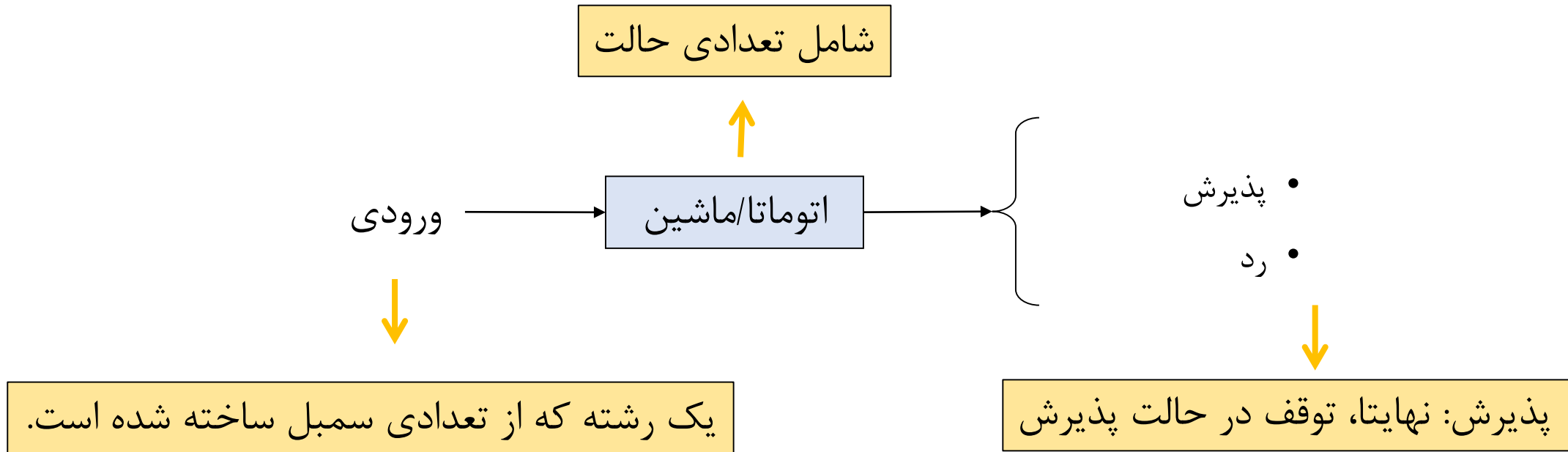
$$L = \{w \mid M \text{ accepts } w\}$$

مقدمه‌ای بر اتوماتا

○ مثال زیر را در نظر بگیرید:



Decision problem



○ مجموعه همه رشته‌هایی که به پذیرش منتهی می‌شوند، **زبانی** است که ماشین تشخیص می‌دهد.

$$L = \{w \mid M \text{ accepts } w\}$$

نمایش ورودی

○ برای محاسبه، نیاز به نمایش مناسبی از داده ورودی داریم.

الفبا

○ الفبای Σ یک مجموعه **متناهی غیرتهی** از سمبل‌هاست.

○ مثال:

$$\Sigma_1 = \{0, 1\}$$

$$\Sigma_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, x, y, z\}$$

رشته

○ به هر دنباله متناهی از سمبل‌های الفبا، یک رشته روی الفبا گوئیم.

○ مثال:

$$\Sigma_1 = \{0, 1\} \longrightarrow 01011$$

$$\Sigma_1 = \{0, 1\} \longrightarrow \epsilon \quad (\lambda)$$

رشته

○ به هر دنباله متناهی از سمبل‌های الفبا، یک **رشته روی الفبا** گوییم.

○ Σ^* نشان‌دهنده مجموعه همه رشته‌ها روی Σ است.

○ Σ^+ نشان‌دهنده مجموعه همه رشته‌های غیرتهی روی Σ است.

مثال

○ $\{a, b\}^*$: مجموعه رشته‌های متناهی بر روی a, b

- شامل رشته تهی ϵ (با اندازه صفر)
- شامل a, aa, aaa
- شامل b, bb, bbb
- شامل $ab, ababab, aaaaaaabb$
- شامل دنباله‌های نامتناهی نیست
- تعداد نامتناهی عضو

عملگرها (رشته)

$$x = bab, \quad y = abbaab$$

Operation	Name	Example
$ x $	Length	$ x = 3$
xy	Concatenation	$xy = bababbaab$
x^n	Repetition	$x^3 = babbabbab, x^0 = \lambda$
x^*	Kleene Star	$x^* = \{\lambda, bab, babbab, \dots\}$
x^R	Reversal	$y^R = baabba$

زبان

- یک زبان صوری (روی الفبای Σ)، یک زیرمجموعه از Σ^* است.
- زبان‌ها مسائل با جواب بله/خیر را که در نظر خواهیم گرفت نشان می‌دهند.
- مثال: زبان $L_1 =$ همه رشته‌های شامل زیررشته bo بر روی الفبای $\Sigma_1 = \{a, b, \dots, z\}$

For example: boss, body, fibo are in L_1

$$L_1 = \{x \in \Sigma_1^* \mid x \text{ contains the substring "bo"}\}$$

مثال

$$\Sigma_2 = \{0, 1, \dots, 9\}$$

$$L_2 = \{x \in \Sigma_2^* \mid x \text{ is dividable by } 3\}$$

مثال

$$\Sigma_3 = \{a, b\}$$

$$L_3 = \{w \in \Sigma_2^* \mid |w| = 3\}$$

$$L_3 = \{aaa, aab, aba, baa, bba, bab, abb, bbb\}$$

مثال

○ مجموعه $L_4 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ نیز یک زبان بر روی الفبای $\Sigma = \{a, b\}$ است.

$$L_4 = \{\epsilon, ab, aabb, \dots\}$$

عملگرهای روی زبان

- هر رشته از زبان L را گاهها کلمه (word) یا جمله (sentence) گوییم.
- هر زبان یک مجموعه است. بنابراین، عملیات مربوط به مجموعه‌ها بر روی زبان قابل اعمال است.
- مجموعه تهی $\emptyset = \{\}$ یک زبان است.

عملگرهای روی زبان

○ A و B دو زبان صوری

- Complement: $\bar{A} = \{w \mid w \notin A\}$
- Union: $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ or } w \in B\}$
- Intersection: $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ and } w \in B\}$
- Reverse: $A^R = \{w_1 \dots w_k \mid w_k \dots w_1 \in A\}$
- Concatenation: $A \circ B = \{vw \mid v \in A \text{ and } w \in B\}$
- Star: $A^* = \{w_1 \dots w_k \mid k \geq 0 \text{ and each } w_i \in A\}$
 $= \{\epsilon\} \cup A \cup AA \cup AAA \cup AAAA \cup \dots$

عملگرهای روی زبان

EXAMPLE 1.24

Let the alphabet Σ be the standard 26 letters $\{a, b, \dots, z\}$. If $A = \{\text{good}, \text{bad}\}$ and $B = \{\text{boy}, \text{girl}\}$, then

$$A \cup B = \{\text{good}, \text{bad}, \text{boy}, \text{girl}\},$$

$$A \circ B = \{\text{goodboy}, \text{goodgirl}, \text{badboy}, \text{badgirl}\}, \text{ and}$$

$$A^* = \{\epsilon, \text{good}, \text{bad}, \text{goodgood}, \text{goodbad}, \text{badgood}, \text{badbad}, \\ \text{goodgoodgood}, \text{goodgoodbad}, \text{goodbadgood}, \text{goodbadbad}, \dots\}.$$

