

# Introducción al reconocimiento de patrones:

## Trabajo Práctico 4, Estimación del flujo óptico

M. Sc. Saúl Calderón Ramírez  
Instituto Tecnológico de Costa Rica,  
Escuela de Computación, bachillerato en Ingeniería en Computación,  
PAttern Recongition and MACHine Learning Group (PARMA-Group)

12 de septiembre de 2018

**Fecha de entrega:** 2 de Octubre.

**Entrega:** Un archivo .zip con el código fuente LaTeX o Lyx, el pdf, y un script en MATLAB, debidamente documentado, con una función definida por ejercicio. A través del TEC-digital.

**Modo de trabajo:** Grupos de 3 personas.

### Abstract

Este material está basado en el material artículo *Optical Flow Measurement using Lucas kanade Method*, Patel et. al. y en <http://tina.wiau.man.ac.uk/docs/memos/2004-012.pdf>

## 1 Estimación del movimiento

El movimiento es una característica importante en series de imágenes. La estimación del movimiento se refiere a la transformación 2-D de una imagen a otra, y corresponde a la estimación de la velocidad de las estructuras de la imagen de un cuadro a otro en una secuencia de imágenes 2-D. El flujo óptico se refiere al patrón de movimiento aparente de objetos bordes causado por el movimiento relativo entre el observador (la cámara) y la escena en el mundo real. El flujo óptico corresponde a la proyección en 2D del flujo de los objetos en el mundo real, lo cual se conoce como el campo de movimiento. La Figura 1 ejemplifica estos conceptos.

En la Figura 2 se muestra dos imágenes de la serie de imágenes representada como una función de tres dimensiones

$$I(x, y, t),$$

donde los primeros dos parámetros denotan la posición espacial y el tercer parámetro  $t$  indica el número de cuadro o tiempo en el que se muestreó la imagen.

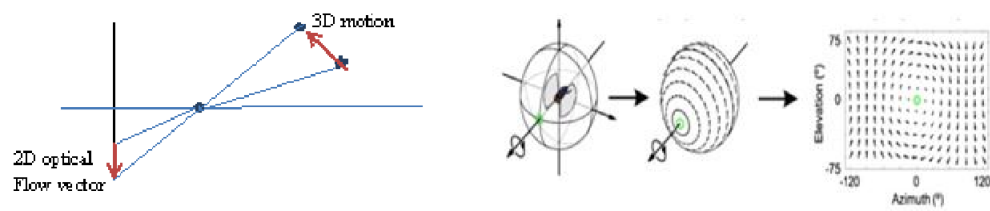


Figure 1: Espacio de movimiento y flujo óptico.

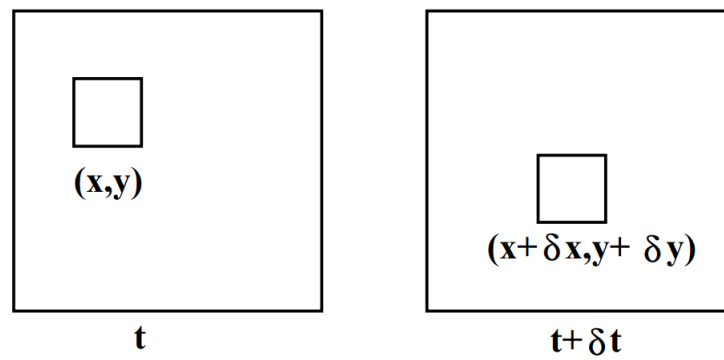


Figure 2: Estimación del vector de velocidad a partir de dos imágenes.

La Figura 2 muestra gráficamente lo que se conoce como la **restricción de movimiento 2D**, la cual establece que un punto en el cuadro  $t$  y en posición  $(x_1, y_1)$  el cual se mueve a la posición  $(x_1 + \delta x, y_1 + \delta y)$  en el tiempo  $t + \delta t$  conserva su valor de intensidad:

$$I(x_1 + \delta x, y_1 + \delta y, t_1 + \delta t) = I(x_1, y_1, t_1) \quad (1)$$

La descomposición de uno de los términos de la igualdad por medio de series de Taylor facilita el análisis de tal expresión.

### 1.1 Series de Taylor

Para una función  $f(x)$ , las series de Taylor permiten aproximar a una función alrededor de un punto de operación  $x = a$  de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Con lo que entonces la aproximación de primer orden o linear alrededor del punto  $x = a$  toma sólo dos términos:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

Para una función multivariable con  $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  la aproximación de Taylor de primer orden alrededor de un punto  $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  está dada por:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - a_n).$$

La Figura 3 muestra la aproximación de Taylor de distintos órdenes alrededor del punto de operación  $x = 0$ .

### 1.2 Descomposición de la restricción de movimiento 2D

La Ecuación 1 por series de Taylor, permite expresar la imagen  $I(x, y, t)$  alrededor de un punto de operación  $(x_2, y_2, t_2)$  de la siguiente forma:

$$I(x, y, t) \approx I(x_2, y_2, t_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_2) + \frac{\partial f}{\partial t}(t - t_2)$$

Suponga que el punto de operación  $(x_2, y_2, t_2)$  es lo más cercano posible al punto  $(x_1, y_1, t_1)$ , de forma que:

$$x_2 = x_1 + \delta x$$

$$y_2 = y_1 + \delta y$$

$$t_2 = t_1 + \delta t$$

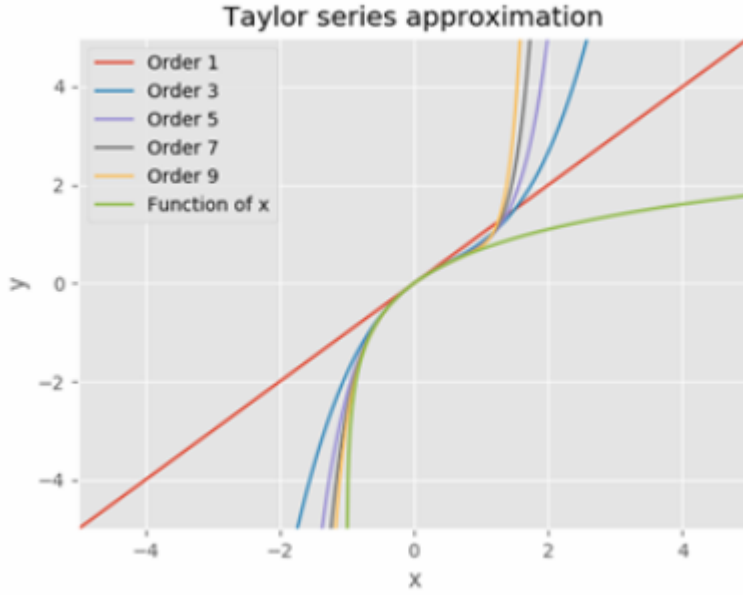


Figure 3: Aproximación por series de Taylor alrededor del punto de operación  $x = 0$ .

con lo que por la naturaleza de las imágenes las cuales siguen un patrón de cambio suave, se establece que  $I(x_2, y_2, t_2) \approx I(x_1, y_1, t_1)$ , por lo que entonces la serie de Taylor se reescribe como:

$$I(x_1, y_1, t_1) \approx I(x_1, y_1, t_1) + \frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t$$

por lo que se sigue que:

$$\frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t = 0$$

y dividiendo por  $\delta t$  sin cambiar la igualdad, se arriba a:

$$\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\delta t}{\delta t} = 0.$$

La ecuación anterior se reescribe haciendo  $v_x = \frac{\delta x}{\delta t}$ ,  $v_y = \frac{\delta y}{\delta t}$ , y  $I_x = \frac{\partial I}{\partial x}$ ,  $I_y = \frac{\partial I}{\partial y}$ ,  $I_t = \frac{\partial I}{\partial t}$ , donde los términos  $v_x$  y  $v_y$  corresponden al flujo óptico en las dimensiones  $x$  e  $y$ , y los términos  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_t$  a las derivadas parciales respecto a  $x$ ,  $y$  y  $t$ :

$$I_x v_x + I_y v_y + I_t = 0 \Rightarrow [I_x, I_y] \cdot [v_x, v_y] = -I_t$$

y de forma aún más compacta en términos del gradiente de la Imagen  $\nabla I$  y el vector de flujo óptico  $\vec{v}$  se reescribe tal resultado de la siguiente forma:

$$\nabla I \cdot \vec{v} = -I_t \quad (2)$$

y es el desarrollo de la restricción de movimiento 2D.

### 1.3 El método de Lukas-Kanade

Existen diversos enfoques de estimación del vector de flujo óptico  $\vec{v}$  a partir de la Ecuación 2, uno de los más populares es el método de Lukas-Kanade. Para una imagen  $I \in \mathbb{R}^{a \times b}$ , el vector de flujo óptico puede suponerse equivalente para una ventana  $\Omega_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  alrededor del pixel  $p = [x, y]$ . Tal suposición permite desarrollar el siguiente sistema de ecuaciones para los  $p_n$  pixeles dentro del vecindario  $\Omega_p$ :

$$\begin{aligned} I_x(p_1) v_x + I_y(p_1) v_y &= -I_t(p_1) \\ I_x(p_2) v_x + I_y(p_2) v_y &= -I_t(p_2) \\ &\vdots \\ I_x(p_n) v_x + I_y(p_n) v_y &= -I_t(p_n) \end{aligned}$$

Reescribiendo tal sistema de ecuaciones de forma matricial con los siguientes términos:

$$A = \begin{bmatrix} I_x(p_1) & I_y(p_1) \\ I_x(p_2) & I_y(p_2) \\ \vdots & \vdots \\ I_x(p_n) & I_y(p_n) \end{bmatrix} \quad \vec{v} = [v_x, v_y] \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -I_t(p_1) \\ -I_t(p_2) \\ \vdots \\ -I_t(p_n) \end{bmatrix}$$

se obtiene:

$$A\vec{v} = \vec{b} \Rightarrow A\vec{v} - \vec{b} = 0$$

dado que la matriz  $A$  no se puede suponer invertible, el sistema de ecuaciones no tiene una única solución que haga cero la parte derecha. Es por ello que se procede a buscar el vector  $\vec{v}$  resolviendo el problema de optimización de minimizar la siguiente distancia Euclidiana:

$$\operatorname{argmin}_{\vec{v}} \|A\vec{v} - \vec{b}\|$$

Tal problema de minimización es resuelto por mínimos cuadrados:

$$\vec{v} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

Y si se implementa una ventana Gaussiana para dar peso menor a los pixeles más lejanos del centro en la matriz  $W$ :

$$\vec{v} = (A^T W A)^{-1} A^T W \vec{b}$$

El método de Lukas Kanade no funciona correctamente cuando:

- Existen texturas y bordes con gradientes de muy baja magnitud.
- Los movimientos son muy repentinos.
- La iluminación es variable en la escena.

La Figura 4 muestra la aproximación del flujo óptico por pixel para el movimiento de un cuadro hacia la derecha.

## 1.4 Implementación

Para cada par de imágenes  $I_\tau$  e  $I_{\tau+1}$ :

- Para aproximar el gradiente  $I_x$  e  $I_y$ , implemente las máscaras de Sobel en  $2 \times 2$ :  $d_x = 0.25 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  y  $d_y = 0.25 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  para un computo más ágil, usando la imagen  $I_t$ .
- Para computar el gradiente en el tiempo, realice  $I_t = I_\tau * 0.25 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + I_{\tau+1} * -0.25 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .
- Utilice la función provista para graficar los vectores de flujo óptico.

## 1.5 Experimentación

1. Grafique los vectores de flujo para el flujo óptico estimado con las imágenes *cuadro1.jpg* y *cuadro2.jpg*.
2. Experimente con distintos tamaños de ventana,  $\Omega_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $n = 1$ ,  $n = 3$ ,  $n = 9$  y  $n = 21$  y compare con los resultados con el archivo *resultado.mat* y *resultado.bmp*.
  - (a) Compare los resultados de forma cuantitativa y cualitativa. Proponga una métrica para comparar los resultados y repórtelos utilizándola.
3. Puntos extra: Implemente una ventana Gaussiana y de Hamming para el pesado  $W$  y compare los resultados, reportando los parámetros de la ventana utilizada.

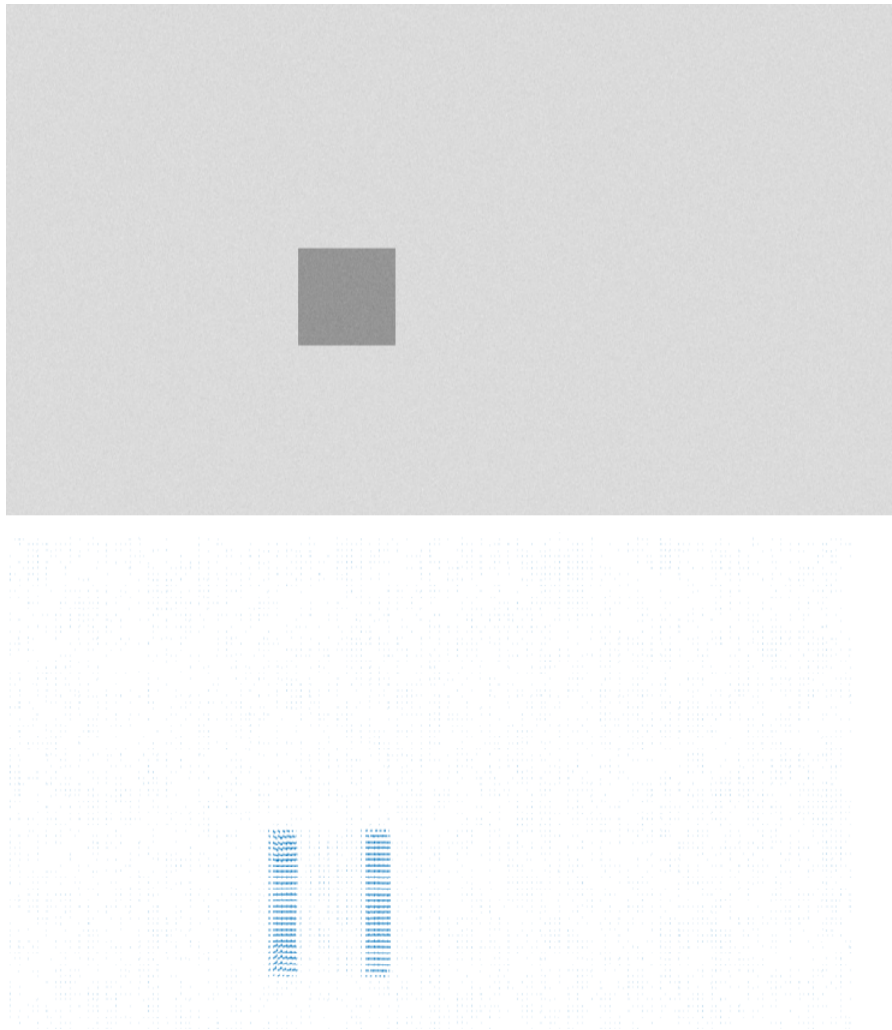


Figure 4: Estimación del flujo óptico.