Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

Geração Automática de Modelos em Lógicas Modais: Implementação

Daniella Albuquerque dos Angelos

Monografia apresentada como requisito parcial
para conclusão do Bacharelado em Ciência da Computação

Orientadora
Prof.ª Dr.ª Cláudia Nalon

Brasília
2016

Universidade de Brasília — UnB
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

Coordenador: Prof. Dr. Rodrigo Bonifácio de Almeida

Banca examinadora composta por:

Prof.ª Dr.ª Cláudia Nalon (Orientadora) — CIC/UnB
Prof. Dr. Professor I — CIC/UnB
Prof. Dr. Professor II — CIC/UnB

CIP — Catalogação Internacional na Publicação

dos Angelos, Daniella Albuquerque.

Geração Automática de Modelos em Lógicas Modais: Implementação / Daniella Albuquerque dos Angelos. Brasília : UnB, 2016.
37 p. : il. ; 29,5 cm.

Monografia (Graduação) — Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

1. palvrachave1, 2. palvrachave2, 3. palvrachave3

CDU 004.4

Endereço: Universidade de Brasília
Campus Universitário Darcy Ribeiro — Asa Norte
CEP 70910-900
Brasília–DF — Brasil

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

Geração Automática de Modelos em Lógicas Modais: Implementação

Daniella Albuquerque dos Angelos

Monografia apresentada como requisito parcial
para conclusão do Bacharelado em Ciência da Computação

Prof.ª Dr.ª Cláudia Nalon (Orientadora)
CIC/UnB

Prof. Dr. Professor I
CIC/UnB

Prof. Dr. Professor II
CIC/UnB

Prof. Dr. Rodrigo Bonifácio de Almeida
Coordenador do Bacharelado em Ciência da Computação

Brasília, 6 de junho de 2016

Dedicatória

Dedico a....

Agradecimentos

Agradeço a....

Abstract

A ciência...

Palavras-chave: palvrachave1, palvrachave2, palvrachave3

Abstract

The science...

Keywords: keyword1, keyword2, keyword3

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Em [?] são apresentados cálculos baseados em resolução para quinze famílias de lógicas modais. As regras de inferência baseiam-se nas propriedades dos modelos subjacentes, ao invés de se fixar na forma dos axiomas. Deste modo, obtém-se um procedimento uniforme para se lidar com várias lógicas. Uma das intenções de tal proposta é justamente prover técnicas que facilitem o projeto de cálculos combinados tanto para fusões de lógicas quanto para lógicas em que interações fossem permitidas. Interações são, em geral, caracterizadas por axiomas contendo operadores das diferentes lógicas componentes.

Grande parte dos provadores para lógicas modais são, porém, baseados em tradução, o que acaba, por vezes, se tornando inconveniente ao usuário. Além disso, dada a natureza das aplicações descritas com o auxílio destas lógicas, é normal o uso da combinação de diferentes linguagens modais. A combinação de linguagens, todavia, pode acarretar no aumento da complexidade ou mesmo na indecidibilidade do problema de satisfatibilidade na lógica resultante [?]. Portanto, é importante o desenvolvimento de técnicas que possam ser utilizadas de modo uniforme na combinação de métodos de prova para lógicas obtidas a partir de fusões e/ou em linguagens que permitam interações.

Os métodos apresentados em [?] e em trabalhos anteriores têm esta característica de uniformidade, mas carecem de refinamentos a fim de permitir a construção de ferramentas que possam ser, de fato, utilizadas na verificação formal de sistemas complexos.

O problema básico de satisfatibilidade da lógica modal K é PSPACE [?]. Entretanto, as complexidades dos algoritmos propostos em [?] ainda não foram determinadas, sendo um dos objetos de investigação do atual projeto. Sabe-se, porém, que métodos de prova para lógica proposicional são intratáveis [?]. Em geral, métodos baseados em resolução, se ingenuamente implementados, levam também à utilização exponencial de espaço; entretanto, a utilização de estratégias garante a linearidade de espaço do método de resolução para lógicas proposicionais [?]. É, portanto, nosso intuito conduzir investigação da extensão e implementação de estratégias conhecidas (e.g. resolução linear, deleção de unidade e subsunção) que permitam a implementação eficiente dos algoritmos propostos em [?].

A geração automática de modelos é complementar àquela da prova de teoremas e realizada em paralelo com a avaliação experimental. Se o provador de teoremas falha em encontrar uma prova, o modelo automaticamente extraído serve como testemunha da impossibilidade de se encontrar tal prova. Além disso, com a possibilidade de uso combinado de estratégias, a não obtenção de um modelo serve como testemunha da incompletude de tal combinação, sendo portanto ferramenta de suporte ao entendimento teórico.

O objetivo específico deste trabalho consiste na implementação de um gerador automático de modelos para a lógica modal proposicional K. A entrada será o conjunto de cláusulas fornecido pelo provador implementado em [?]. A saída será a declaração da inexistência de um modelo, no caso do conjunto de cláusulas ser insatisfatível, ou a apresentação formal de um modelo que testemunhe a satisfatibilidade do conjunto de cláusulas.

Capítulo 2

Revisão Teórica

2.1 Introdução a Lógica Modal

Neste capítulo, introduziremos a lógica modal através do sistema $S5$. Este sistema, apesar de ser um dos mais simples possíveis, possui algumas das principais características do sistema de lógica modal, e essas serão ilustradas a partir dele.

O sistema $S5$ é determinado semanticamente por uma avaliação de necessidade e possibilidade. Isto é, em resumo , a base da estrutura do pensamento modal que data desde o filósofo Leibniz: uma proposição é *necessária* se ocorre em todos os possíveis mundos e *possível* se ocorre em algum mundo [**?**]. A ideia é que coisas diferentes podem ser verdadeiras em mundos diferentes, mas qualquer que ocorra em todos os possíveis mundos é necessário, enquanto o que ocorre em pelo menos um mundo é possível.

Uma sentença da forma $\Box A$ — *necessariamente* A — é verdadeira se, e somente se, A é uma proposição verdadeira em todos os possíveis mundos; já uma sentença da forma $\Diamond A$ — *possivelmente* A — é verdadeira no caso em que A é uma proposição verdadeira em algum possível mundo.

Uma ilustração válida é uma coleção de possíveis mundos, incluindo nosso próprio, o mundo real, onde sentenças da linguagem são possivelmente verdadeiras ou falsas. O propósito principal da lógica modal é modelar isto, e isto é feito listando uma sequência possivelmente infinita de conjuntos de possíveis mundos,

$$P_0,\ P_1,\ P_2, \dots \tag{2.1}$$

A intuição por trás deste modelo é que, para cada número natural n, o conjunto P_n contém somente os possíveis mundos onde a sentença $\mathbb{P}_n$ é verdadeira. Em outras palavras, a sequência $P_0,\ P_1,\ P_2, \dots$ ilustra as sentenças atômicas estipulando em quais possíveis mundos elas ocorrem, e.g onde são verdadeiras, (e, por omissão, em quais mundos elas são falsas):

$$\mathbb{P}_n\ is\ true\ at\ a\ possible\ world\ \alpha\ if\ and\ only\ if\ \alpha \in P_n \tag{2.2}$$

Um modelo no sistema $S5$ é, portanto, uma tupla: $<W,\ P>$ onde W é um conjunto de possíveis mundos e P uma abreviação para a sequência infinita $P_0,\ P_1,\ P_2, \dots$ de subconjuntos de W. Note que W pode conter mundos que não estão presentes em nenhum dos conjuntos P_n; de fato, qualquer um desses conjuntos pode ser vazio.

Definimos o valor da sentença (verdadeiro ou falso) de acordo com sua forma e em termos de um possível mundo em um modelo. Usamos a notação:

$$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}} A \tag{2.3}$$

onde A é uma sentença e α é um possível mundo em um modelo $\mathcal{M} =< W, P >$. A lei 2.3 é um resumo para: *A is true at α in $\mathcal{M}$*.

As condições de verdade estão expressadas na Tabela 2.3.

Tabela 2.1: Truth conditions

(1)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}} \mathbb{P}_n$ se e somente se $\alpha \in P_n$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$
(2)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}}$
(3)	$Not\ \models_{\alpha}^{\mathcal{M}}$
(4)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}} \neg A$ se e somente se *not* $\models_{\alpha}^{\mathcal{M}} A$
(5)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}}$
(6)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}}$
(7)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}}$
(8)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}}$
(9)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}} \Box A$
(10)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}} \Diamond A$

Alguns esclarecimentos sobre essas definições podem ser úteis:

- A cláusula (1) reflete a premissa sobre os conjuntos $P_0, P_1, P_2, \ldots$ em um modelo: uma sentença atômica $\mathbb{P}_n$ é verdadeira em um possível mundo α somente no caso em que α é um elemento do conjunto P_n.
- De acordo com a cláusula (2), a constante verdadeira $\top$ é sempre válida em α.
- Por (3), a constante falsa $\bot$ é sempre falsa em α.
- A cláusula (4) afirma que a negação $\neg A$ é verdadeira em α se, e somente se, sua negação A é falsa em α.
- A afirmação da cláusula (5) diz que uma conjunção $A \wedge B$ é verdadeira em α somente no caso em que ambas sentenças, A e B o são.
- Já de acordo com a cláusula (6), uma disjunção $A \vee B$ é verdadeira em α quando pelo menos uma das sentençãos, A ou B o é.
- A inteção com a cláusula (7) é compreender que uma implicação $A \to B$ é verdadeira em α desde que nunca ocorra que a sentença antecedente, A, seja verdadeira ao mesmo tempo em que a consequente, B, seja falsa.

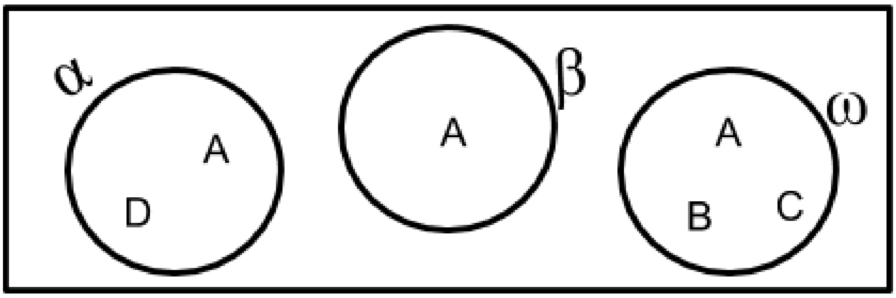

Figura 2.1: Exemplo lógica modal

- Similarmente, na cláusula (8) a intenção se repete de ambos os lados, ou seja, a condição $A \leftrightarrow B$ é verdadeira quando ambas sentenças, A e B, são verdadeiras, ou ambas são falsas.
- A cláusua (9) formula a interpretação leibniziana de necessidade: $\Box A$
- Finalmente, de acordo com a cláusula (10), $\Diamond A$

Uma sentença verdadeira em cada mundo possível de todo modelo é chamada *válida*. Usamos o símbolo $\models$ novamente, mas desta vez sem as marcações superior e inferior (para enfatizar que a sentença é válida, sem importar o mundo ou o modelo), e escrevemos $\models A$ quando A é uma sentença válida. Mais formalmente, então, definimos a validade de uma sentença da seguinte forma:

$$\models A \; se, \; e \; somente \; se, \; para \; todo \; modelo \; \mathcal{M} \; e \; para \; qualquer \; mundo \; \alpha \; em \; \mathcal{M}, \; temos \; que \; \models^{\mathcal{M}}_{\alpha} \tag{2.4}$$

2.2 Preliminares lógicas

2.2.1 Sintaxe

Esta seção é dedicada a trazer o básico dos conceitos de sintaxe da linguagem da lógica modal. As definições formais apresentadas podem ser úteis ao entendimento.

Sentenças. A linguagem é baseada em um conjunto enumerável de sentenças *atômicas*:

$$\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots \tag{2.5}$$

Estas são as sentenças mais simples possíveis.

As *sentenças moleculares* (não-atômicas) são formadas por meio das nove *operações sintáticas*, ou *operadores lógicos*:

$$\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Box, \Diamond \tag{2.6}$$

Como mencionado na seção anterior, $\top$ e $\bot$ são operadores de aridade zero, ou constantes; $\neg$, $\Box$ e $\Diamond$ são operadores de aridade um; e $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são operadores de aridade dois.

O conjunto de sentenças pode, então, ser definido formalmente como mostrado na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Truth conditions

(1) a

(2) a

(3) a

(4) a

(5) a

(6) a

(7) a

(8) a

(9) a

(10) a

As sentenças atômicas são todas distintas entre si, e a intenção é que sentenças de formas diferentes também sejam distintas, como, por exemplo, nenhuma sentença condicional é uma necessidade. Isto é garantido pela suposição de que o alcance dos operadores sintáticos é disjunto dois a dois e ainda, disjunto do conjunto de sentenças atômicas. A falta de ambiguidade das sentenças é garantida pela suposição de que as operações são todas *um-pra-um*, ou seja, duas condicionais são, por exemplo, iguais se, e somente se, ambos antecedentes e consequentes o são. Também é válido lembrar que o conjunto de sentenças é enumerável.

Convenções. É importante definir algumas convenções para minimizar dúvidas que poderiam surgir em algumas expressões. Expressões da forma $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ e $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ representam conjunções e disjunções arbitrárias mas não especificadas das sentenças $A_1, \ldots, A_n$. O objetivo é clarificar que tanto $\wedge$ como $\vee$ obedecem as regras de associatividade lógica.

Fórmulas

Uma *fórmula* é qualquer sequência finita de símbolos lógicos.

Definição 1 [Fórmula bem-formada (FBF)] A lingagem lógica proposicional, denotada por L_p, é equivalente ao seu conjunto de fórmulas bem-formadas, denotado por FBF_{L_P}, que é definito recursivamente como segue:

- se $p \in P$, então $p \in FBF_{L_P}$
- se $\phi \in FBF_{L_P}$ e $\varphi \in FBF_{L_P}$, então: $\neg\phi$, $(\wedge), (\vee), (\rightarrow), (\leftrightarrow) \in FBF_{L_P}$,

2.2.2 Semântica

2.3 Modelos padrões para a lógica modal

A ideia geral dada na seção 2.1 é bastante simples, sendo modelada basicamente em termos de uma coleção de possíveis mundos junto com uma atribuição de valores booleanos, em cada mundo, a cada uma das sentenças atômicas. Vimos que isso dá uma noção de validade um tanto restrita. Nesta seção, iremos estender a definição leibniziana de necessidade e possibilidade introduzindo o conceito de relações. O resultado é uma noção de validade muito mais flexível.

Um modelo padrão será estruturado da seguinte forma:

$$\mathcal{M} = < W, R, P > \tag{2.7}$$

onde W representa o conjunto de possíveis mundos, P representa a atribuição dos subconjuntos de possíveis mundos a cada sentença atômica e o novo elemento R, é uma relação entre possíveis mundos, ou seja, R é uma relação binária em W ($R \subseteq W \times W$).

Escreveremos

$$\alpha R \beta \tag{2.8}$$

para dizer que o mundo β está relacionado com, ou é relevante para, o mundo α. É importante ressaltar que R pode ser qualquer tipo de relação binária em W, nenhuma suposição é feita sobre sua estrutura.

As condições de verdade de sentenças não-modais, dadas na Tabela 2.3, permanecem inalteradas. Já as relacionadas às sentenças modais sofre uma pequena alteração, levando em conta agora, a relação R da seguinte forma:

Tabela 2.3: Condições de verdade: sentenças modais

Seja α e	
(1)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}} \mathbb{P}_n$ se e somente se $\alpha \in P_n$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$
(2)	$\models_{\alpha}^{\mathcal{M}}$

2.3.1 Estrutura de Kripke

Uma das estruturas mais estudadas em lógica modal corresponde à estrutura de Kripke. Uma estrutura de Kripke para P e $A_n = \{1, \ldots, n\}$ é dada da seguinte forma:

$$\mathbb{M} =< W,\ R_1, \ldots,\ R_n, \pi > \tag{2.9}$$

onde:

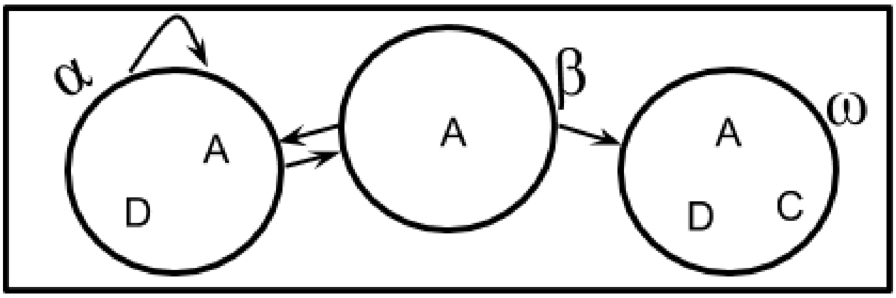

Figura 2.2: Exemplo lógica modal

- W é um conjunto não-vazio de possíveis mundos
- para todo $a \in A_n, R_a \subseteq W \times W$
- $\pi : W \times P \longrightarrow \{Falso, Verdadeiro\}$

2.4 Resolução

2.4.1 Forma Normal Negada

Definição 2 [Forma Normal Negada (FNN)] Seja $\varphi \in FBF_{L_P}$, dizemos que φ está na Forma Normal Negada (FNN) se contém apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ e o conectivo de negação é aplicado apenas a símbolos proposicionais.

A transformação em FNN é dada pelo seguinte procedimento:

1. Substitua
2. Substitua
3. Aplique as leis de De Morgan
4. Elimine

A simplificação de fórmulas aplica as seguintes regras de reescrita:

-

2.4.2 Forma Normal Conjuntiva

Definição 3 [Forma Normal Conjuntiva (FNC)] Seja $\varphi \in FBF_{L_P}$, dizemos que φ está na Forma Normal Conjuntiva se é uma conjunção de cláusulas.

A transformação de uma fórmula φ em uma fórmula semanticamente equivalente, φ', na FNC, é dada pelo seguinte procedimento:

2.4.3 Resolução Clausal

Resolução clausal é um procecimento refutacional: para podermos provar a sentença φ, nós transformamos a negação de φ na Forma Normal Conjuntiva antes de aplicar a regra de inferência

Capítulo 3

Implementação

Referências