

## Subiectul 1 (3 puncte)

Se dă un graf neorientat ponderat  $G$  cu  $n > 3$  vârfuri,  $m$  muchii și un vârf  $s$ .

Informațiile despre graf se citesc din fișierul **graf.in** cu structura:

- pe prima linie sunt  $n$  și  $m$
- pe următoarele  $m$  linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii
- pe ultima linie este un vârf sursă  $s$ .

Pentru un lanț  $P$  în  $G$  definim ponderea lanțului  $P$  ca fiind produsul ponderilor muchiilor care îl compun.

Dacă  $G$  este arbore, să se afișeze pentru fiecare vârf  $v$  ponderea unicului lanț elementar de la  $s$  la  $v$  (sub forma  $v$ : pondere lanț de la  $s$  la  $v$ ), altfel să se afișeze un arbore parțial al componente care conține  $s$ . **Complexitate  $O(n+m)$**

<b>graf.in</b>	<b>iesire pe ecran</b>
6 5 1 2 3 1 3 2 2 4 2 3 5 1 3 6 3 1	Este arbore 1: 0 2: 3 3: 2 4: 6 5: 2 6: 6



## Subiectul 2 (3 puncte)

Se citesc informații despre un graf **orientat** ponderat **fără circuite**  $G$  din fișierul `graf.in`.  
Fișierul are următoarea structură:

- pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri  $n$  ( $n > 4$ ) și numărul de arce  $m$  ale grafului,  $m > n$
- pe următoarele  $m$  linii sunt câte 3 numere întregi reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf (**costul poate fi și negativ**)
- pe următoarea linie (a  $(m+2)$ -a linie) din fișier este un număr natural  $k$  ( $0 < k < n$ ) reprezentând numărul de vârfuri sursă; vârfurile sursă din  $G$  vor fi  $1, 2, \dots, k$
- pe ultima linie a fișierului sunt două vârfuri  $t_1$  și  $t_2$ , reprezentând vârfurile destinație ale grafului (distincte de vârfurile sursă din  $G$ ).

Notăm cu  $S = \{1, \dots, k\}$  mulțimea vârfurilor sursă din  $G$  și cu  $T = \{t_1, t_2\}$  mulțimea vârfurilor destinație din  $G$ . Spunem că un vârf  $y$  este accesibil din  $x$  în  $G$  dacă există un drum de la  $x$  la  $y$ . Presupunem că există cel puțin un vârf destinație care este accesibil dintr-un vârf sursă.

- Să se verifice dacă graful dat este fără circuite și să se afișeze un mesaj corespunzător.
- Să se determine distanța între cele două mulțimi  $S$  și  $T$ :

$$d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

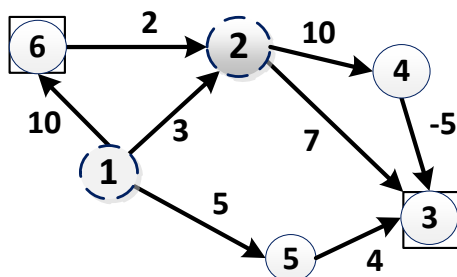
Să se determine în plus și o pereche de vârfuri  $(s, t)$  cu  $s \in S$  și  $t \in T$  cu

$$d(s, t) = d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

și să se afișeze (pe ecran) un drum minim de la  $s$  la  $t$ . **Complexitate  $O(m)$**

Exemplu

graf.in	Iesire pe ecran
<pre> 6 8 1 2 3 1 6 10 6 2 2 2 4 10 4 3 -5 5 3 4 1 5 5 2 3 7 2 3 6 </pre>	<pre> distanța între multimi = 5 s=2 t=3 drum minim 2 4 3 </pre>



### Explicații

$k=2 \Rightarrow S = \{1, 2\}$

$T = \{3, 6\}$

$d(1,3)=8, d(2,3)=5$

$d(1,6)=10, d(2,6)=\infty$

Cea mai mică este  $d(2,3)=5$

Un drum minim de la 2 la 3 este 2 4 3

### Subiectul 3 (3 puncte)

Propuneți un algoritm bazat pe algoritmul Ford-Fulkerson / Edmonds Karp pentru rezolvarea următoarei probleme.

Fișierul graf.in conține următoarele informații despre un graf **bipartit** conex cu  $V_1 = \{1, \dots, p\}$  și  $V_2 = \{p+1, \dots, n\}$ :

- pe prima linie sunt 2 numere naturale  $n$  și  $m$  reprezentând numărul de vârfuri și numărul de muchii
- pe a doua linie este  $p$
- pe următoarele  $m$  linii sunt perechi de numere  $x$   $y$  (separate prin spațiu) reprezentând extremitățile unei muchii,  $x \in V_1$  și  $y \in V_2$ .

Scrieți un program care citește datele despre graful  $G$  din fișierul graf.in și afișează:

a) Un cuplaj de cardinal  $k$  în  $G$ , cu  $k$  citit de la tastatură. Dacă nu există un astfel de cuplaj se va afișa mesajul “nu exista” **Complexitate  $O(km)$**

b) Muchiile unui 2-factor în  $G$ , dacă există (2-factor = graf parțial în care toate vârfurile au gradul 2) **Complexitate  $O(nm)$**

graf.in	Iesire pe ecran (soluția nu este unică)
8 10	a)
4	pentru $k=2$
1 5	1 5
1 6	2 6
1 7	b) un 2-factor:
2 5	1 5
2 6	1 6
3 5	2 5
3 7	2 6
3 8	3 7
4 7	3 8
4 8	4 7
	4 8

