

## Subiectul 1 (3 puncte)

Se dă un graf neorientat cu  $n > 3$  vârfuri și  $m$  muchii care nu este bipartit.

a) Să se determine un ciclu elementar impar în graf (cu număr impar de muchii). Se vor afișa muchiile unui astfel de ciclu. **Complexitate  $O(n+m)$**

b) Să se determine dacă în graf mai există în graf un alt ciclu în afară de cel afișat la punctul a) (nu neapărat impar) și, în caz afirmativ, să se afișeze un astfel de ciclu (diferit de cel de la a)); altfel se va afișa un mesaj corespunzător. **Complexitate  $O(n+m)$**

Informațiile despre graf se citesc din fișierul *graf.in* cu structura:

- pe prima linie sunt  $n$  și  $m$
- pe următoarele  $m$  linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii

<i>graf.in</i>	<i>iesire pe ecran</i>
5 6	a)
1 2	2 4
2 3	4 5
2 4	5 2
4 5	b)
2 5	1 2
1 5	2 4
	4 5
	5 1

## Subiectul 2 (3 puncte)

Se citesc informații despre un graf **orientat** ponderat **fără circuite**  $G$  din fișierul `graf.in`.  
Fișierul are următoarea structură:

- pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri  $n$  ( $n > 4$ ) și numărul de arce  $m$  ale grafului,  $m > n$
- pe următoarele  $m$  linii sunt câte 3 numere întregi reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf (**costul poate fi și negativ**)
- pe următoarea linie (a  $(m+2)$ -a linie) din fișier este un număr natural  $k$  ( $0 < k < n$ ) reprezentând numărul de vârfuri sursă; vârfurile sursă din  $G$  vor fi  $1, 2, \dots, k$
- pe ultima linie a fișierului sunt două vârfuri  $t_1$  și  $t_2$ , reprezentând vârfurile destinație ale grafului (distincte de vârfurile sursă din  $G$ ).

Notăm cu  $S = \{1, \dots, k\}$  mulțimea vârfurilor sursă din  $G$  și cu  $T = \{t_1, t_2\}$  mulțimea vârfurilor destinație din  $G$ . Spunem că un vârf  $y$  este accesibil din  $x$  în  $G$  dacă există un drum de la  $x$  la  $y$ . Presupunem că există cel puțin un vârf destinație care este accesibil dintr-un vârf sursă.

- Să se verifice dacă graful dat este fără circuite și să se afișeze un mesaj corespunzător.
- Să se determine distanța între cele două mulțimi  $S$  și  $T$ :

$$d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

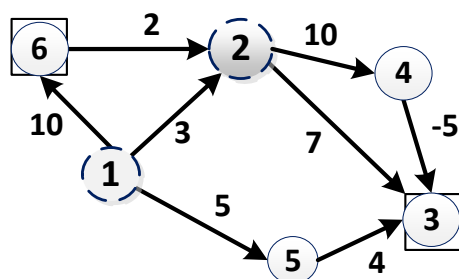
Să se determine în plus și o pereche de vârfuri  $(s, t)$  cu  $s \in S$  și  $t \in T$  cu

$$d(s, t) = d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

și să se afișeze (pe ecran) un drum minim de la  $s$  la  $t$ . **Complexitate  $O(m)$**

Exemplu

graf.in	Iesire pe ecran
<pre> 6 8 1 2 3 1 6 10 6 2 2 2 4 10 4 3 -5 5 3 4 1 5 5 2 3 7 2 3 6 </pre>	<pre> distanța între multimi = 5 s=2 t=3 drum minim 2 4 3 </pre>



### Explicații

$k=2 \Rightarrow S = \{1, 2\}$

$T = \{3, 6\}$

$d(1,3)=8, d(2,3)=5$

$d(1,6)=10, d(2,6)=\infty$

Cea mai mică este  $d(2,3)=5$

Un drum minim de la 2 la 3 este 2 4 3

### Subiectul 3 (3 puncte)

Propuneți un algoritm **bazat pe algoritmul Ford-Fulkerson / Edmonds Karp** pentru rezolvarea următoarei probleme.

Într-un restaurant sunt  $n$  mese numerotate  $1, \dots, n$  sunt și  $m$  ospătari numerotați  $1, \dots, m$  ( $m \geq n$ ).

Proprietarul restaurantului urmează să aibă un eveniment în restaurant și dorește să repartizeze fiecărui ospătar mesele de care trebuie să se ocupe. El întreabă pe fiecare ospătar la câte mese ar vrea să servească maxim și notează cu  $o_1, \dots, o_m$  răspunsurile acestora.

Proprietarul ar vrea ca la fiecare masa  $i$  să **fie exact  $k_i$  ospătari** și ar vrea ca numărul de mese la care repartizează un ospătar  $i$  să **nu depășească** opțiunea acestuia  $o_i$ .

Scrieți un program care, dacă este posibilă o distribuție a ospătarilor la mese care să respecte dorințele proprietarului, să afișeze o astfel de distribuție sub forma prezentată în exemplul de mai jos. Altfel se va afișa mesajul “imposibil”

Datele despre restaurant și opțiunile ospătarilor se vor citi dintr-un fișier cu următoarea structură:

- pe prima linie sunt numerele naturale  $n, m$
- pe următoarea linie  $n$  numere naturale  $k_1, \dots, k_n$  reprezentând câți ospătari trebuie să fie la fiecare masă
- pe următoarea linie  $m$  numere naturale  $o_1 \dots o_m$  reprezentând opțiunile ospătarilor.

**Complexitate  $O(n^2m^2)$**

restaurant.in	lesire pe ecran (solutia nu este unica)
3 3 1 2 1 1 2 2	Masa 1: ospătari 1 Masa 2: ospătari 2 3 Masa 3: ospătari 3
restaurant.in	lesire pe ecran
4 4 1 1 4 4 1 1 4 4	Imposibil