Subiectul 1 (3 puncte)

Se dă un graf neorientat cu n>3 vârfuri și m muchii care nu este bipartit.
a) Să se determine un ciclu elementar impar în graf (cu număr impar de muchii). Se vor afișa muchiile unui astfel de ciclu. **Complexitate O(n+m)**
b) Să se determine dacă în grad mai există în graf un alt ciclu în afară de cel afișat la punctul a) (nu neapărat impar) și, în caz afirmativ, să se afișeze un astfel de ciclu (diferit de cel de la a)); altfel se va afișa un mesaj corespunzător. **Complexitate O(n+m)**
Informațiile despre graf se citesc din fișierul ***graf.in*** cu structura:

- pe prima linie sunt n și m
- pe următoarele m linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii

graf.in	***Iesire pe ecran***
5 6 1 2 2 3 2 4 4 5 2 5 1 5	a) 2 4 4 5 5 2 b) 1 2 2 4 4 5 5 1

Subiectul 2 (3 puncte)

Se citesc informații despre un graf **orientat** ponderat **fără circuite** G din fișierul `graf.in`. Fișierul are următoarea structură:

- pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri n (n>4) și numărul de arce m ale grafului, **m>n**
- pe următoarele m linii sunt câte 3 numere întregi reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf (**costul poate fi și negativ**)
- pe următoarea linie (a (m+2)-a linie) din fișier este un număr natural k (0<k<n) reprezentând numărul de vârfuri sursă; vârfurile sursă din G vor fi 1, 2, ... , k
- pe ultima linie a fișierului sunt două vârfuri t_1 și t_2, reprezentând vârfurile destinație ale grafului (distincte de vârfurile sursă din G).

Notăm cu S ={1,…,k} mulțimea vârfurilor sursă din G și cu T=$\{t_1,t_2\}$ mulțimea vârfurilor destinație din G. Spunem că un vârf y este accesibil din x în G dacă există un drum de la x la y. Presupunem că există cel puțin un vârf destinație care este accesibil dintr-un vârf sursă.

a) Să se verifice dacă graful dat este fără circuite și să se afișeze un mesaj corespunzător.

b) Să se determine distanța între cele două mulțimi S și T:

$$d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

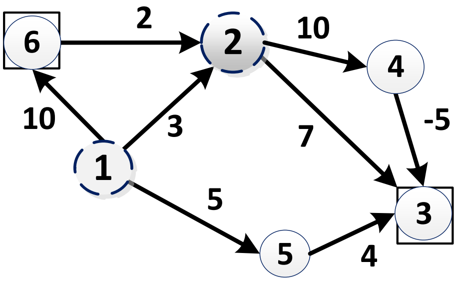
Să se determine în plus și o pereche de vârfuri (s,t) cu $s \in S$ și $t \in T$ cu

$$d(s,t) = d(S,T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

și să se afișeze (pe ecran) un drum minim de la s la t. **Complexitate O(m)**

Exemplu

graf.in	**Iesire pe ecran**
6 8 1 2 3 1 6 10 6 2 2 2 4 10 4 3 -5 5 3 4 1 5 5 2 3 7 2 3 6	distanta intre multimi = 5 s=2 t=3 drum minim 2 4 3



Explicații

k=2 ⇒ S = {1, 2}

T = {3, 6}

d(1,3)=8, d(2,3)=5

d(1,6)=10, d(2,6)=∞

Cea mai mică este d(2,3)=5

Un drum minim de la 2 la 3 este 2 4 3

Subiectul 3 (3 puncte)

Propuneți un algoritm bazat pe algoritmul Ford-Fulkerson / Edmonds Karp pentru rezolvarea următoarei probleme.

Fișierul graf.in conține următoarele informații despre un graf **bipartit** conex cu $V_1=\{1,\ldots,p\}$ și $V_2=\{p+1,\ldots,n\}$:

- pe prima linie sunt 2 numere naturale n și m reprezentând numărul de vârfuri și numărul de muchii
- pe a doua linie este p
- pe următoarele m linii sunt perechi de numere x y (separate prin spațiu) reprezentând extremitățile unei muchii, $x \in V_1$ și $y \in V_2$.

Scrieți un program care citește datele despre graful G din fișierul graf.in și afișează:

a) Un cuplaj de cardinal k în G, cu k citit de la tastatură. Dacă nu există un astfel de cuplaj se va afișa mesajul "nu exista" **Complexitate O(km)**

b) Muchiile unui 2-factor în G, dacă există (2-factor = graf parțial în care toate vârfurile au gradul 2) **Complexitate O(nm)**

graf.in	Iesire pe ecran (solutia nu este unica)
8 10 4 1 5 1 6 1 7 2 5 2 6 3 5 3 7 3 8 4 7 4 8	a) pentru k=2 1 5 2 6 b) un 2-factor: 1 5 1 6 2 5 2 6 3 7 3 8 4 7 4 8