

Subiectul 1 (3 puncte)

Se dă un graf neorientat ponderat G cu $n > 3$ vârfuri, m muchii și un vârf s .

Informațiile despre graf se citesc din fișierul **graf.in** cu structura:

- pe prima linie sunt n și m
- pe următoarele m linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii
- pe ultima linie este un vârf sursă s .

Pentru un lanț P în G definim ponderea lanțului P ca fiind produsul ponderilor muchiilor care îl compun.

Dacă G este arbore, să se afișeze pentru fiecare vârf v ponderea unicului lanț elementar de la s la v (sub forma v : pondere lanț de la s la v), altfel să se afișeze un arbore parțial al componente care conține s . **Complexitate $O(n+m)$**

graf.in	iesire pe ecran
6 5 1 2 3 1 3 2 2 4 2 3 5 1 3 6 3 1	Este arbore 1: 0 2: 3 3: 2 4: 6 5: 2 6: 6



Subiectul 2 (3 puncte)

Se citesc informații despre un graf **orientat** ponderat **fără circuite** G din fișierul `graf.in`.
Fișierul are următoarea structură:

- pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri n ($n > 4$) și numărul de arce m ale grafului, $m > n$
- pe următoarele m linii sunt câte 3 numere întregi reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf (**costul poate fi și negativ**)
- pe următoarea linie (a $(m+2)$ -a linie) din fișier este un număr natural k ($0 < k < n$) reprezentând numărul de vârfuri sursă; vârfurile sursă din G vor fi $1, 2, \dots, k$
- pe ultima linie a fișierului sunt două vârfuri t_1 și t_2 , reprezentând vârfurile destinație ale grafului (distincte de vârfurile sursă din G).

Notăm cu $S = \{1, \dots, k\}$ mulțimea vârfurilor sursă din G și cu $T = \{t_1, t_2\}$ mulțimea vârfurilor destinație din G . Spunem că un vârf y este accesibil din x în G dacă există un drum de la x la y . Presupunem că există cel puțin un vârf destinație care este accesibil dintr-un vârf sursă.

- Să se verifice dacă graful dat este fără circuite și să se afișeze un mesaj corespunzător.
- Să se determine distanța între cele două mulțimi S și T :

$$d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

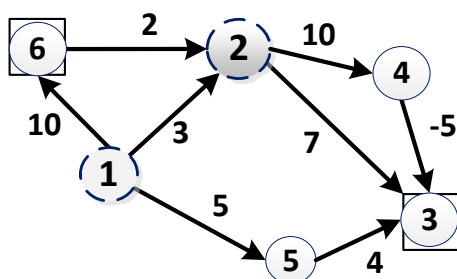
Să se determine în plus și o pereche de vârfuri (s, t) cu $s \in S$ și $t \in T$ cu

$$d(s, t) = d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

și să se afișeze (pe ecran) un drum minim de la s la t . **Complexitate $O(m)$**

Exemplu

graf.in	Iesire pe ecran
<pre> 6 8 1 2 3 1 6 10 6 2 2 2 4 10 4 3 -5 5 3 4 1 5 5 2 3 7 2 3 6 </pre>	<pre> distanța între multimi = 5 s=2 t=3 drum minim 2 4 3 </pre>



Explicații

$k=2 \Rightarrow S = \{1, 2\}$

$T = \{3, 6\}$

$d(1,3)=8, d(2,3)=5$

$d(1,6)=10, d(2,6)=\infty$

Cea mai mică este $d(2,3)=5$

Un drum minim de la 2 la 3 este 2 4 3

Subiectul 3 (3 puncte)

Propuneți un **algoritm bazat pe algoritmul Ford-Fulkerson / Edmonds Karp** pentru rezolvarea următoarei probleme.

Pentru n proiecte, numerotate $1, \dots, n$ s-au înscris m studenți numerotați $1, \dots, m$, fiecare student depunând o listă de opțiuni cu proiectele la care vrea să participe.

- Dat un număr k de la tastatură, să se determine o listă de k asocieri proiect – student prin care k studenți diferiți sunt asociați la k proiecte diferite **Complexitate $O(km)$**
- Să se determine, dacă există, o modalitatea de a asocia toți studenții la proiecte astfel încât un student să fie asociat la exact 2 proiecte, iar la un proiect să fie asociați exact 2 studenți și să se afișeze o astfel de modalitate sub forma prezentată în exemplul de mai jos. Altfel se va afișa mesajul “nu este posibil”. **Complexitate $O(nm)$**

Datele despre proiecte și studenți se vor citi dintr-un fișier cu următoarea structură:

- pe prima linie sunt numerele naturale n și m
- pe următoarele linii sunt perechi de numere naturale i, j cu $i \in \{1, \dots, n\}$ și $j \in \{1, \dots, m\}$ cu semnificația: studentul j s-a înscris la proiectul i .

graf.in	lesire pe ecran (solutia nu este unica)
4 4	a)
1 1	pentru $k=2$
1 2	asocieri proiect - student
1 3	1 1
2 1	2 2
2 2	b)
3 1	asocieri proiect-student
3 3	1 1
3 4	1 2
4 3	2 1
4 4	2 2
	3 3
(primul este indicele proiectului, al doilea al studentului)	3 4
	4 3
	4 4

