Subiectul 1 (3 puncte)

Se dă un graf neorientat cu n>3 vârfuri și m muchii și un vârf s.
a) Adăugați la G un număr minim de muchii astfel încât să devină conex. Construiți în memorie și afișați pe ecran listele de adiacență ale grafului astfel obținut. **Complexitate O(n+m)**
b) Determinați excentricitatea ecc(s) a vârfului s în noul graf G_1 obținut la a):

$$ecc(s) = \max(d(s,v) \mid v \text{ vârf în } G_1\}$$

unde d(s,v) este distanța de la s la v.
Complexitate O(n+m)
Informațiile despre graf se citesc din fișierul ***graf.in*** cu structura:

- pe prima linie sunt n și m
- pe următoarele m linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii
- pe ultima linie este vârful s

graf.in	***Iesire pe ecran (solutia nu este unica)***
6 4 1 3 1 5 3 5 2 4 6	a) 1 2 2 6 b) 3 Explicații: d(6,1)=2, d(6,2)=1, d(6,3)=3, d(6,4)=2, d(6,5)=3, deci ecc(6)=3

Subiectul 2 (3 puncte)

Se citesc informații despre un graf **orientat** ponderat **fără circuite** G din fișierul `graf.in`. Fișierul are următoarea structură:

- pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri n (n>4) și numărul de arce m ale grafului, **m>n**
- pe următoarele m linii sunt câte 3 numere întregi reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf (**costul poate fi și negativ**)
- pe următoarea linie (a (m+2)-a linie) din fișier este un număr natural k (0<k<n) reprezentând numărul de vârfuri sursă; vârfurile sursă din G vor fi 1, 2, ... , k
- pe ultima linie a fișierului sunt două vârfuri t_1 și t_2, reprezentând vârfurile destinație ale grafului (distincte de vârfurile sursă din G).

Notăm cu S ={1,…,k} mulțimea vârfurilor sursă din G și cu T={t_1,t_2} mulțimea vârfurilor destinație din G. Spunem că un vârf y este accesibil din x în G dacă există un drum de la x la y. Presupunem că există cel puțin un vârf destinație care este accesibil dintr-un vârf sursă.

a) Să se verifice dacă graful dat este fără circuite și să se afișeze un mesaj corespunzător.

b) Să se determine distanța între cele două mulțimi S și T:

$$d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

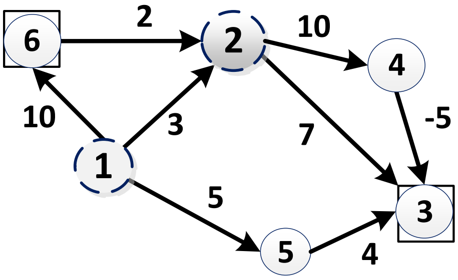
Să se determine în plus și o pereche de vârfuri (s,t) cu $s \in S$ și $t \in T$ cu

$$d(s,t) = d(S,T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

și să se afișeze (pe ecran) un drum minim de la s la t. **Complexitate O(m)**

Exemplu

graf.in	Iesire pe ecran
6 8 1 2 3 1 6 10 6 2 2 2 4 10 4 3 -5 5 3 4 1 5 5 2 3 7 2 3 6	distanta intre multimi = 5 s=2 t=3 drum minim 2 4 3



Explicații

k=2 ⇒ S = {1, 2}

T = {3, 6}

d(1,3)=8, d(2,3)=5

d(1,6)=10, d(2,6)=∞

Cea mai mică este d(2,3)=5

Un drum minim de la 2 la 3 este 2 4 3

Subiectul 3 (3 puncte)

Propuneți un algoritm bazat pe algoritmul Ford-Fulkerson / Edmonds Karp pentru rezolvarea următoarei probleme.
Fișierul graf.in conține următoarele informații despre un graf **bipartit** conex cu $V_1=\{1,\dots,p\}$ și $V_2=\{p+1,\dots,n\}$:

- pe prima linie sunt 2 numere naturale n și m reprezentând numărul de vârfuri și numărul de muchii
- pe a doua linie este p
- pe următoarele m linii sunt perechi de numere x y (separate prin spațiu) reprezentând extremitățile unei muchii, $x \in V_1$ și $y \in V_2$.

Scrieți un program care citește datele despre graful G din fișierul graf.in și afișează:
a) Un cuplaj de cardinal k în G, cu k citit de la tastatură. Dacă nu există un astfel de cuplaj se va afișa mesajul "nu exista" **Complexitate O(km)**
b) Muchiile unui 2-factor în G, dacă există (2-factor = graf parțial în care toate vârfurile au gradul 2) **Complexitate O(nm)**

graf.in	Iesire pe ecran (solutia nu este unica)
8 10 4 1 5 1 6 1 7 2 5 2 6 3 5 3 7 3 8 4 7 4 8	a) pentru k=2 1 5 2 6 b) un 2-factor: 1 5 1 6 2 5 2 6 3 7 3 8 4 7 4 8