

Subiectul 1

Se dă un graf neorientat conex G cu $n > 3$ vârfuri, m muchii, $m > n$. Să se determine doi arbori parțiali T și T' ai lui G cu proprietățile:

- T este arbore de distanțe față de vârful 1: $d_T(1, v) = d_G(1, v)$ pentru orice vârf v din G
- În T' există cel puțin un vârf v cu $d_{T'}(1, v) \neq d_G(1, v)$.

Se vor afișa muchiile celor doi arbori parțiali determinați și, în plus, se vor afișa toate vârfurile v pentru care $d_{T'}(1, v) \neq d_G(1, v)$. **Complexitate $O(m)$**

Informațiile despre graf se citesc din fișierul graf.in cu structura:

- pe prima linie sunt n și m
- pe următoarele m linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii

($d_G(x, y)$ = distanța de la x la y în G)

graf.in	Iesire pe ecran (solutia nu este unica)
5 7 1 2 1 3 2 3 2 4 3 4 3 5 4 5	T: 1 2 1 3 2 4 3 5 T': 1 2 2 4 4 5 3 4 v: 3 5

Subiectul 2

Se citesc informații despre un graf **orientat** ponderat G din fișierul `graf.in`. Fișierul are următoarea structură:

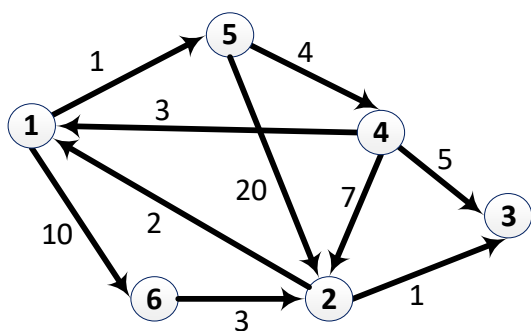
- Pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri n ($n > 4$) și numărul de arce m ale grafului, $m > n$
- Pe următoarele m linii sunt câte 3 numere întregi **pozitive** reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf
- Pe penultima linie este un număr natural b
- Pe ultima linie este un număr s reprezentând un nod sursă în graf.

În punctul s se află un călător care are bugetul b .

a) Să se determine un cel mai depărtat nod v din graf la care călătorul poate ajunge din s printr-un drum (elementar) de cost cel mult b , cât să se încadreze în buget (acel vârf pentru care se obține $\max\{d(s,u) \mid d(s,u) \leq b, u \text{ vârf în } V\}$) și să se afișeze un drum de cost minim de la s la v . Dacă sunt mai multe astfel de noduri se va alege cel cu indicele cel mai mic.

b) Observând că un circuit este format totuși dintr-un drum și un arc, călătorul va mai roagă să determinați în plus dacă poate face un traseu de cost cel mult b care pornește din s și se termina tot în s fără a trece de mai multe ori prin același vârf, altfel spus să determinați dacă există un circuit elementar în G de cost mai mic sau egal cu b care conține s și, în caz afirmativ, să afișați un astfel de circuit. **Complexitate $O(m \log(n))$**

graf.in	Ieșire pe ecran
6 10 1 5 1 1 6 10 2 1 2 4 1 3 5 2 20 5 4 4 4 2 7 4 3 5 2 3 1 6 2 3 11 1	a) v=3 1 5 4 3 b) 1 5 4 1



$d(1, 2) = 12$
 $d(1, 3) = 10$
 $d(1, 4) = 5$
 $d(1, 5) = 5$
 $d(1, 6) = 1$
 $d(1, 7) = 10$
 $b = 11 \Rightarrow$ cele mai mari distanțe mai mici sau egale cu 11 sunt $d(1, 3)$ și $d(1, 7)$

Subiectul 3

Fișierul graf.in conține următoarele informații despre un graf **bipartit** conex:

- pe prima linie sunt 2 numere naturale n și m reprezentând numărul de vârfuri și numărul de muchii
- pe următoarele m linii sunt perechi de numere x y (separate prin spațiu) reprezentând extremitățile unei muchii

Se consideră graful G dat în fișierul graf.in. Notăm cu k numărul de vârfuri de grad impar din graf.

a) Folosind un algoritm de determinare a unui flux maxim într-o rețea de transport, determinați un cuplaj maxim în subgraful indus de mulțimea vârfurilor de grad impar din G .

b) Folosind punctul a) determinați dacă există $k/2$ muchii care se pot elimina din G astfel încât să se obțină un graf cu următoarele proprietăți:

- gradul fiecărui vârf din G' este egal cu cel din G sau cu unu mai mic.
- în G' în fiecare componentă conexă există câte un ciclu care conține toate muchiile din componentă (o singura dată) **Complexitate $O(nm^2)$**

graf.in	lesire pe ecran (solutia nu este unica)
8 9 1 5 1 6 1 7 2 5 3 5 3 7 3 4 8 7 8 4	1 6 2 5 3 7

