

## Subiectul 1

Se dă un graf neorientat conex cu  $n > 3$  vârfuri,  $m$  muchii,  $m > n$  și un vârf  $s$ .

Să se afișeze muchiile a doi arbori parțiali ai grafului,  $T_1$  și  $T_2$ , dintre care unul,  $T_1$ , este arbore de distanțe față de  $s$  ( $d_{T_1}(s, u) = d_G(s, u)$  pentru orice vârf  $u$  din  $G$ ), iar celălalt,  $T_2$ , nu este arbore de distanțe față de  $s$ . Se va afișa în plus un vârf  $u$  pentru care  $d_{T_2}(s, u) \neq d_G(s, u)$ .

### Complexitate $O(m)$

Informațiile despre graf se citesc din fișierul *graf.in* cu structura:

- pe prima linie sunt  $n$  și  $m$
- pe următoarele  $m$  linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii
- pe ultima linie este vârfurile  $s$

( $d_G(x, y)$  = distanța de la  $x$  la  $y$  în  $G$ )

<i>graf.in</i>	<i>iesire pe ecran (soluția nu este unică)</i>
4 5	T1:
1 2	1 2
1 3	1 3
2 3	2 4
2 4	T2:
3 4	1 2
1	2 3
	2 4
	$u = 3$

## Subiectul 2

Se citesc informații despre un graf **orientat** ponderat  $G$  din fișierul `graf.in`. Fișierul are următoarea structură:

- Pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri  $n$  ( $n > 4$ ) și numărul de arce  $m$  ale grafului,  $m > n$
- Pe a doua linie din fișier sunt un număr natural  $k$  ( $0 < k < n$ ) și un șir de  $k$  vârfuri reprezentând vârfurile sursă ale grafului  $s_1, \dots, s_k$
- Pe a treia linie a fișierului sunt trei vârfuri, reprezentând vârfurile destinație  $t_1, t_2, t_3$  din  $G$ .
- Pe următoarele  $m$  linii sunt câte 3 numere întregi **pozitive** reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf

Notăm cu  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  mulțimea vârfurilor sursă din  $G$  și cu  $T = \{t_1, t_2, t_3\}$  mulțimea vârfurilor destinație din  $G$ . Spunem că un vârf  $y$  este accesibil din  $x$  în  $G$  dacă există un drum de la  $x$  la  $y$ . Să se determine pentru fiecare vârf destinație  $t \in T$  un vârf sursă  $s \in S$  cu proprietatea că  $t$  este accesibil din  $s$  și distanța de la  $s$  la  $t$  este minimă ( $s$  este o sursă din care se poate ajunge cel mai repede în  $t$ ) și să se afișeze un drum minim de la  $s$  la  $t$ . Dacă nu există o astfel de sursă se va afișa un mesaj corespunzător. **Complexitate  $O(m \log(n))$**

graf.in	Iesire pe ecran
6 8	t=3 s=2 drum minim 2 4 3
2 1 2	t=4 s=2 drum minim 2 4
3 4 6	t=6 nu exista s
1 2 3	
6 1 10	
6 2 2	
2 4 1	
4 3 1	
5 3 4	
1 5 5	
3 2 7	



$k=2, S = \{1, 2\}$

$t_1=3, t_2=4, t_3=6 \Rightarrow T=\{3,4,6\}$

$t=3$ : distanta(1,3)=5, distanta(2,3)=2

Cea mai mică este distanta(2,3)  $\Rightarrow s=2$ , drum minim 2 4 3

$t=4$ : distanta(1,4)=4, distanta(2,4)=1  $\Rightarrow s=2$ , drum minim 2 4

$t=6$ : distanta(1,6)= $\infty$ , distanta(2,6)= $\infty \Rightarrow$  nu există  $s$

### Subiectul 3

Se dau  $n$  fabrici de monitoare numerotate  $1 \dots n$  și  $m$  depozite numerotate  $n+1, \dots, n+m$ . Pentru fiecare fabrică  $i$  se cunoaște  $c(i)$  = câte monitoare au fost produse la momentul curent, iar pentru fiecare depozit  $j$  se cunoaște  $c(j)$  = numărul de monitoare pe care le poate depozita la momentul curent. Fiecare fabrică are contracte cu anumite depozite. În contractul dintre fabrică  $i$  și depozitul  $j$  este trecută cantitatea maximă de monitoare care poate fi trimisă spre depozitare de la fabrică  $i$  la depozitul  $j$ , notată  $w(i,j)$ . Datele se vor citi din fișierul `fabrics.in` cu următoarea structură:

- pe prima linie sunt numerele naturale  $n$  și  $m$
- pe a doua linie este un șir de  $n$  numere naturale reprezentând cantitatea de monitoare existente în fiecare dintre cele  $n$  fabrici
- pe a treia linie este un șir de  $m$  numere naturale reprezentând numărul de monitoare pe care le poate depozita fiecare dintre cele  $m$  depozite
- pe a patra linie este un număr  $k$  reprezentând numărul de contracte dintre fabrici și depozite
- pe următoarele  $k$  linii sunt triplete de numere naturale  $i \ j \ w$  (separate prin spațiu) cu semnificația: de la fabrică  $i$  la depozitul  $j$  se pot trimite maxim  $w$  monitoare.

Să se determine, dacă există, o modalitate de a depozita toate monitoarele existente în fabrici la momentul curent în depozite respectând condițiile din contracte și capacitatea de depozitare a fiecărui depozit. **Complexitate**  $O((n+m)k^2)$

Rezultatul se va afișa sub forma prezentată în exemplul de mai jos.

**Observație:** Putem modela problema cu un graf bipartit fabrici-depozite (cu vârfuri corespunzătoare fabricilor și depozitelor și muchii reprezentând existența unui contract între fabrică și depozit). Dacă  $c(i) = 1$  pentru fiecare fabrică  $i$ ,  $c(j)=1$  pentru fiecare depozit și  $w(i,j)=1$  pentru orice contract, atunci problema se reduce la a determina un cuplaj de cardinal maxim în graful bipartit fabrici-depozite și a verifica dacă orice vârf fabrică este saturat.

Se acorda 1p dacă se rezolva doar problema pentru  $c(i) = 1$  pentru fiecare fabrică  $i$ ,  $c(j)=1$  pentru fiecare depozit și  $w(i,j)=1$  pentru orice contract

fabrics.in	lesire pe ecran (soluția nu este unică)
3 3	1 4 3
6 5 4	1 5 3
7 5 4	2 4 2
7	2 5 2
1 4 7	2 6 1
1 5 5	3 4 2
2 4 3	3 6 2
2 5 2	
2 6 3	
3 4 5	
3 6 2	

