

## Subiectul 1 (3 puncte)

Se dă un graf neorientat ponderat  $G$  cu  $n > 3$  vârfuri,  $m$  muchii și un vârf  $s$ .

Informațiile despre graf se citesc din fișierul **graf.in** cu structura:

- pe prima linie sunt  $n$  și  $m$
- pe următoarele  $m$  linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii
- pe ultima linie este un vârf sursă  $s$ .

Pentru un lanț  $P$  în  $G$  definim ponderea lanțului  $P$  ca fiind produsul ponderilor muchiilor care îl compun.

Dacă  $G$  este arbore, să se afișeze pentru fiecare vârf  $v$  ponderea unicului lanț elementar de la  $s$  la  $v$  (sub forma  $v$ : pondere lanț de la  $s$  la  $v$ ), altfel să se afișeze un arbore parțial al componente care conține  $s$ . **Complexitate  $O(n+m)$**

<b>graf.in</b>	<b>iesire pe ecran</b>
6 5 1 2 3 1 3 2 2 4 2 3 5 1 3 6 3 1	Este arbore 1: 0 2: 3 3: 2 4: 6 5: 2 6: 6



## Subiectul 2 (3 puncte)

Se citesc informații despre un graf **orientat** ponderat **fără circuite**  $G$  din fișierul `graf.in`.  
Fișierul are următoarea structură:

- pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri  $n$  ( $n > 4$ ) și numărul de arce  $m$  ale grafului,  $m > n$
- pe următoarele  $m$  linii sunt câte 3 numere întregi reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf (**costul poate fi și negativ**)
- pe următoarea linie (a  $(m+2)$ -a linie) din fișier este un număr natural  $k$  ( $0 < k < n$ ) reprezentând numărul de vârfuri sursă; vârfurile sursă din  $G$  vor fi  $1, 2, \dots, k$
- pe ultima linie a fișierului sunt două vârfuri  $t_1$  și  $t_2$ , reprezentând vârfurile destinație ale grafului (distincte de vârfurile sursă din  $G$ ).

Notăm cu  $S = \{1, \dots, k\}$  mulțimea vârfurilor sursă din  $G$  și cu  $T = \{t_1, t_2\}$  mulțimea vârfurilor destinație din  $G$ . Spunem că un vârf  $y$  este accesibil din  $x$  în  $G$  dacă există un drum de la  $x$  la  $y$ . Presupunem că există cel puțin un vârf destinație care este accesibil dintr-un vârf sursă.

- Să se verifice dacă graful dat este fără circuite și să se afișeze un mesaj corespunzător.
- Să se determine distanța între cele două mulțimi  $S$  și  $T$ :

$$d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

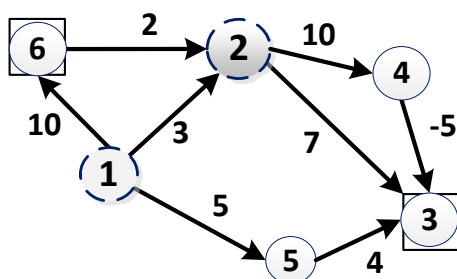
Să se determine în plus și o pereche de vârfuri  $(s, t)$  cu  $s \in S$  și  $t \in T$  cu

$$d(s, t) = d(S, T) = \min \{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

și să se afișeze (pe ecran) un drum minim de la  $s$  la  $t$ . **Complexitate  $O(m)$**

Exemplu

graf.in	Iesire pe ecran
<pre> 6 8 1 2 3 1 6 10 6 2 2 2 4 10 4 3 -5 5 3 4 1 5 5 2 3 7 2 3 6 </pre>	<pre> distanța între multimi = 5 s=2 t=3 drum minim 2 4 3 </pre>



### Explicații

$k=2 \Rightarrow S = \{1, 2\}$

$T = \{3, 6\}$

$d(1,3)=8, d(2,3)=5$

$d(1,6)=10, d(2,6)=\infty$

Cea mai mică este  $d(2,3)=5$

Un drum minim de la 2 la 3 este 2 4 3

### Subiectul 3 (3 puncte)

Propuneți un **algoritm bazat pe algoritmul Ford-Fulkerson / Edmonds Karp** pentru rezolvarea următoarei probleme.

Pentru  $n$  proiecte, numerotate  $1, \dots, n$  s-au înscris  $m$  studenți numerotați  $1, \dots, m$ , fiecare student depunând o listă de opțiuni cu proiectele la care vrea să participe.

- Dat un număr  $k$  de la tastatură, să se determine o listă de  $k$  asocieri proiect – student prin care  $k$  studenți diferiți sunt asociați la  $k$  proiecte diferite **Complexitate  $O(km)$**
- Să se determine, dacă există, o modalitatea de a asocia toți studenții la proiecte astfel încât un student să fie asociat la exact 2 proiecte, iar la un proiect să fie asociați exact 2 studenți și să se afișeze o astfel de modalitate sub forma prezentată în exemplul de mai jos. Altfel se va afișa mesajul “nu este posibil”. **Complexitate  $O(nm)$**

Datele despre proiecte și studenți se vor citi dintr-un fișier cu următoarea structură:

- pe prima linie sunt numerele naturale  $n$  și  $m$
- pe următoarele linii sunt perechi de numere naturale  $i, j$  cu  $i \in \{1, \dots, n\}$  și  $j \in \{1, \dots, m\}$  cu semnificația: studentul  $j$  s-a înscris la proiectul  $i$ .

graf.in	lesire pe ecran (solutia nu este unica)
4 4	a)
1 1	pentru $k=2$
1 2	asocieri proiect - student
1 3	1 1
2 1	2 2
2 2	b)
3 1	asocieri proiect-student
3 3	1 1
3 4	1 2
4 3	2 1
4 4	2 2
	3 3
(primul este indicele proiectului, al doilea al studentului)	3 4
	4 3
	4 4

