

Nume și prenume: MIHAI M. VLAD-GEORGE
Grupa: 243

Nota: _____

Examen - Sesiunea ianuarie - februarie 2022

31 Ianuarie 2022

Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF¹ în folderul vostru de pe Drive aveți 15 minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 9 și 3 minute** și se termină la **ora 12 și 18 minute**.



Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Se consideră variabilele aleatoare X și Y având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.44 & 0.56 \end{pmatrix} \text{ și } Y \sim \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \text{ cu } p_1, p_2 \in (0, 1).$$

- Aflați p_1 și p_2 știind că $\mathbb{P}(X = 1, Y = 4) = 0.22$ și $\mathbb{E}[X|Y = 4] = 1.5$.
- Considerând valorile lui p_1 și p_2 aflate anterior, determinați repartițiile variabilelor aleatoare $X + Y$, $X - Y$, $2X^2 + 5Y^2$ și calculați $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Var}(3X - 6Y + 5)$ precum și coeficientul de corelație $\rho(X, Y)$.

Exercițiul 2

10p

Fie X și Y două variabile aleatoare i.i.d. pozitive și $c > 0$. Pentru fiecare din punctele de mai jos completați cu unul din simbolurile $=$, \leq , \geq sau $?$ (în caz că nu putem decide). Justificați alegerile făcute:

- | | |
|--|---|
| 1. $\mathbb{E}[\log(X)] \dots \log(\mathbb{E}[X])$ | 6. $\mathbb{P}(X + Y > 10) \dots \mathbb{P}(X > 5 \text{ sau } Y > 5)$ |
| 2. $\mathbb{E}[X] \dots \sqrt{\mathbb{E}[X]}$ | 7. $\mathbb{E}[\min(X, Y)] \dots \min \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ |
| 3. $\mathbb{E}[\sin^2(X)] + \mathbb{E}[\cos^2(X)] \dots 1$ | 8. $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \dots \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$ |
| 4. $\mathbb{P}(X > c) \dots \frac{\mathbb{E}[X^3]}{c^3}$ | 9. $\mathbb{E}[X^2(X^2 + 1)] \dots \mathbb{E}[X^2(Y^2 + 1)]$ |
| 5. $\mathbb{P}(X \leq Y) \dots \mathbb{P}(X \geq Y)$ | 10. $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] \dots \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$ |

Exercițiul 3

10p

Știm că într-un lot de 5 telefoane mobile Huawei două prezintă defecte de fabricație. Telefoanele sunt testate unul după celălalt până când cele două telefoane defecte sunt depistate. Fie X numărul de teste efectuate pentru identificarea primului telefon defect și Y numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea telefon defect.

- Determinați repartiția comună a cuplului (X, Y) și repartițiile marginale.
- Găsiți media și varianța lui X și respectiv Y și coeficientul de corelație dintre X și Y .
- Calculați media și varianța repartiției condiționate a lui X la $Y = 2$.

Exercițiul 4

10p

Se dă variabila aleatoare X care are densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{x}{100} e^{-\frac{x^2}{200}} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Să se calculeze raportul $\frac{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$, unde F este funcția de repartiție a lui X .

Exercițiul 5

10p

La alegerile pentru șefia Partidului Național Liberal din 2021 vor participa doi candidați: Florin Cîțu și Ludovic Orban. Să presupunem că numărul alegătorilor care votează poate fi modelat prin intermediul unei variabile aleatoare repartizate $Pois(572)$ și că fiecare alegător votează pentru candidatul Florin Cîțu cu probabilitatea 0.51 iar pentru candidatul Ludovic Orban cu probabilitatea 0.49, independent de ceilalți alegători. Fie V variabila aleatoare care descrie diferența de voturi dintre cei doi candidați, definită ca numărul de voturi pentru Florin Cîțu minus numărul de voturi pentru Ludovic Orban.

- Determinați repartiția cuplului dat de variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru candidatul Florin Cîțu și respectiv Ludovic Orban.
- Arătați că variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru cei doi candidați sunt independente.
- Calculați $\mathbb{E}[V]$ și $\text{Var}[V]$.

Exercițiul 6

10p

Aruncăm în mod repetat cu o monedă pentru care probabilitatea de succes este $p = 0.12$. Fie X variabila aleatoare care descrie numărul de succese înainte de al 3-lea eșec într-o secvență de aruncări repetate. Determinați repartiția lui X , $\mathbb{E}[9X - 18]$ și $\text{Var}(5X + 10)$.

¹Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner