Практическое занятие 1

Числовые ряды
Сумма числового ряда. Необходимое условие сходимости.

Определение. Пусть задана числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Составленное из членов этой последовательности выражение

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

называется *числовым рядом*, члены последовательности называются членами этого ряда, a_n - общий член ряда. Обычно числовой ряд кратко записывается в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Рассмотрим суммы

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$. \quad . \quad .$$
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Определение. Сумма $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называется n-ой *частичной суммой* ряда. Частичные суммы образуют новую числовую последовательность $S_1, S_2, ..., S_n, ...$.

Определение. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.

Допускается запись

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,$$

которая придает символу бесконечной суммы числовой смысл.

Определение. Числовой ряд называется *расходящимся*, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Рассмотрим задачи на вычисление суммы ряда.

Задача 1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + ...$$

Решение. Представим общий член ряда в виде разности двух элементарных дробей

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}$$

Найдем *A* и *B*, приравнивая числители левой и правой части равенства:

$A(3n+1) + B(3n-2) = 1$

Составляем систему двух уравнений: $\begin{cases} 3A+3B=0 \\ A-2B=1 \end{cases}$

Решив эту систему получим значения А=1/3   В=-1/3.

Общий член ряда будет: $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1})$

Вычислим частичную сумму с номером n

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+(\frac{1}{7}-\frac{1}{10})...+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})$$

Существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ = 1/3. Значит, данный ряд сходится и его сумма равна 1/3

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)=1+3+5+...+(2n-1)+... .$$

Решение. Вычислим частичную сумму этого ряда

$$S_n=1+3+5+...+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2 .$$

В этом примере $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, следовательно, данный ряд расходится.

Задача 3. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-1)^n}{10^n}$

Решение. Разобьем заданный ряд на сумму двух рядов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-1)^n}{10^n}=$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{3}{10})^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{-1)}{10})^n$ Оба ряда представляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой равна $S=\dfrac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член ряда, а q – знаменатель геометрической прогрессии.

Отсюда получаем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{3}{10})^n=\dfrac{\frac{3}{10}}{1-\frac{3}{10}}=\dfrac{3}{7}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{-1)}{10})^n=\dfrac{-\frac{1}{10}}{1+\frac{1}{10}}=-\dfrac{1}{11}$

Получаем сумму исходного ряда $S=\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{11}=\dfrac{26}{77}$, ряд сходится.

Необходимое условие сходимости числового ряда

Теорема. Если числовой ряд сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Необходимое условие сходимости удобно применять для доказательства расходимости рядов.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}\neq 0$.

Задание Установить расходимость данных рядов, используя необходимое условие сходимости.

Задача 4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)^2}{(3n+1)(n+4)}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2}{(3n+1)(n+4)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+12n+9}{3n^2+13n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}}{3+\frac{13}{n}+\frac{4}{n^2}}=\frac{4}{3}\neq 0$$ ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.

(Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ снимается делением числителя и знаменателя на старшую степень n)

Задача 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n^4+5n+1}}{7n^2+3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^4+5n+1}}{7n^2+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{5}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}{7+\frac{3}{n^2}}=\frac{\sqrt{3}}{7}\neq 0$$ ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.

Задача 6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^7+4n^2+3}}{5n^3+8}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^7+4n^2+3}}{5n^3+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+\frac{4}{n^4}+\frac{3}{n^6}}}{5+\frac{8}{n^3}}=\infty\neq 0$$ ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.

Задача 7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+7^{n+1}}{5\cdot 3^n+4\cdot 7^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+7^{n+1}}{5\cdot 3^n+4\cdot 7^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$(делим все на 7^n) $=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{7})^n+7}{5\cdot(\frac{3}{7})^n+4}=\frac{7}{4}\neq 0$ ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.

Задача 8 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+5n+3}-\sqrt{n^2+2n})$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n+3}-\sqrt{n^2+2n})=[\infty-\infty]=$(домножаем и делим на сопряженный множитель)$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+5n+3}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+5n+3}+\sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2+5n+3}+\sqrt{n^2+2n}})=$
$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{\sqrt{n^2+5n+3}+\sqrt{n^2+2n}})=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{3}{2}\neq 0$ ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.

Для решения следующих задач вспомним понятие *эквивалентных бесконечно малых величин.*

при $\boldsymbol{x\to 0}$

$sinx\sim x;\quad tgx\sim x;\quad arcsinx\sim x;\quad arctgx\sim x;\quad 1-cosx\sim x^2/2;$

$e^x-1\sim x;\quad a^x-1\sim xlna;\quad ln(1+x)\sim x;\quad (1+x)^p-1\sim px$

Задача 9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{3}{n}}{(arctg\frac{5}{n+1})^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{3}{n}}{(arctg\frac{5}{n+1})^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{\frac{(3/n)^2}{2}}{(\frac{5}{n+1})^2}=\frac{9(n+1)^2}{50n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{9}{50}\neq 0$ ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.

Задача10 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\ln(1+\frac{5}{3n^2+1})$

$\lim_{n\to\infty}n^2\ln(1+\frac{5}{3n^2+1})=[\infty\cdot 0]=\frac{5n^2}{3n^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{5}{3}\neq 0$ ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.

Задача11 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4n+3}{4n+8})^{3n}$

Для решения этой задачи применим *второй замечательный предел.*

$\lim x \to \infty\ (1 + 1/x)^x = e$ (неопределенность 1^∞)

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{4n+3}{4n+8})^{3n} = \left[1^\infty\right] = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{4n+3}{4n+8}-1)^{3n} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{-5}{4n+8})^{\frac{4n+8}{-5}}]^{\frac{-5}{4n+8}3n} =$$

$\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{-15n}{4n+8}} = e^{-\frac{15}{4}} \neq 0$ ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.

Задача12 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+3}{5n+1})^{\frac{2}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n+3}{5n+1})^{\frac{2}{n}} = (\frac{2}{5})^0 = 1 \neq 0$ ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.

Задача13 $\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)^{\frac{2}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)^{\frac{2}{n}} = [\infty^0] = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln(3n+1)^{\frac{2}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{2\ln(3n+1)}{n}}$ $=e^0=1\neq0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln(3n+1)}{n} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{3n+1} = 0$ (применили *правило Лопиталя*)

ряд расходится, т.к. необходимое условие сходимости не выполняется.