Lista de exercícios para estudo – Não é necessário entregar.

1.1) [*Baseado na Tabela 2.3 de Stock e Watson (2003)*] Você precisa usar um computador do RDC para escrever um texto. O computador designado aleatoriamente para você pode ser velho ou novo, e pode "congelar" algumas vezes durante seu uso, sendo necessário reiniciá-lo. Defina Y = variável aleatória que assume valor 0 se o computador é velho e 1 se o computador é novo; X = variável aleatória que assume valor 0 se o computador não congela nenhuma vez, valor 1 se o computador congela 1 vez etc. A distribuição de probabilidade conjunta das variáveis X e Y é dada pela tabela abaixo:

	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3	X = 4	Total
Y = 0	0,35	0,065	0,05	0,025	0,01	0,50
Y = 1	0,45	0,035	0,01	0,005	0,00	0,50
Total	0,80	0,10	0,06	0,03	0,01	1,00

a) Qual é a probabilidade de você receber um computador velho [P(Y=0)]?
b) Qual é a probabilidade de você receber um computador que não congele nenhuma vez [P(X=0)]?
c) Qual é a probabilidade de você receber um computador velho que não congele nenhuma vez [P(X=0,Y=0)]?
d) Você usou o computador e ele não congelou nenhuma vez. Qual é a probabilidade de se tratar de um computador velho [P(Y=0|X=0)]?
e) Você recebeu um computador velho. Qual é a probabilidade dele não congelar nenhuma vez [P(X=0|Y=0)]?
f) Você recebeu um computador velho. Qual é o número esperado de congelamentos [isto é, a "expectativa condicional" de congelamentos, dado que o computador é velho: E(X|Y=0)]?
g) Você recebeu um computador novo. Qual é o número esperado de congelamentos [isto é, a "expectativa condicional" de congelamentos, dado que o computador é novo: E(X|Y=1)]?
h) Você ainda não sabe se receberá um computador velho ou novo. Qual é o número esperado de congelamentos [isto é, a "expectativa incondicional" de congelamentos: E(X)]?

1.2) Todo final de semana, Pedro vai para a “guerra” azarar gatinhas pela cidade. O número de garotas com que Pedro “fica” num final de semana é uma variável aleatória X com a distribuição de probabilidade abaixo:

	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3	X = 4
P(X = i)	0,25	0,50	0,20	0,04	0,01
P(X ≤ i)	0,25	0,75	0,95	0,99	1,00

a) Qual é o número médio de garotas com que Pedro “fica” num fim de semana [E(X)]?

Digamos que o número de garotas com que Pedro “fica” num fim de semana dependa das condições meteorológicas, pois, sendo um cara marombado, ele costuma impressionar as gatas na praia com seu físico sarado, aumentando suas chances de sucesso. Defina Y = variável aleatória que assume valor 2 se fizer sol no sábado e no domingo, valor 1 se fizer sol apenas no sábado ou apenas no domingo, e valor 0 se não fizer sol nenhum dia. Suponha que a probabilidade de fazer sol nos dois dias do fim de semana (Y=2) seja de 20% e de fazer sol em apenas um dos dias (Y=1) seja de 30%, e que a distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y seja dada pela tabela abaixo:

	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3	X = 4	Total
Y = 0	0,15	0,34	0,01	0,00	0,00	0,50
Y = 1	0,09	0,11	0,09	0,01	0,00	0,30
Y = 2	0,01	0,05	0,10	0,03	0,01	0,20
Total	0,25	0,50	0,20	0,04	0,01	1,00

De acordo com a meteorologista da Globo, no próximo fim de semana fará sol durante todo o final de semana na cidade.

b) Supondo que você acredite nessa previsão meteorológica, com quantas garotas você espera que Pedro fique [E(X|Y=2)]?
c) Supondo que você acredite que a previsão meteorológica esteja totalmente errada e que não fará sol nem no sábado nem no domingo, com quantas garotas você espera que Pedro fique [E(X|Y=0)]?
d) Qual é a covariância entre X e Y?

João é um cara igualmente “guerreiro”, mas menos favorecido pela natureza e menos marombado do que seu amigo Pedro. Seja Z a variável aleatória que corresponde ao número de garotas com que João fica num fim de semana, sendo a distribuição conjunta das variáveis Z e Y a seguinte:

	Z = 0	Z = 1	Total
Y = 0	0,40	0,10	0,50
Y = 1	0,24	0,06	0,30
Y = 2	0,16	0,04	0,20
Total	0,80	0,20	1,00

e) Qual é o número médio de garotas com que João fica num fim de semana [E(Z)]?
f) Qual é o número médio de garotas com que João fica quando faz sol durante todo o fim de semana [E(Z|Y=2)]? E quando faz sol apenas um dia do final de semana [E(Z|Y=1)]? E quando não faz sol no fim de semana [E(Z|Y=0)]?
g) Qual é a covariância entre Z e Y? Comente.

Suponha que a distribuição conjunta das variáveis X e Z seja a seguinte:

	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3	X = 4	Total
Z = 0	0,25	0,42	0,11	0,02	0,00	0,80
Z = 1	0,00	0,08	0,09	0,02	0,01	0,20
Total	0,25	0,50	0,20	0,04	0,01	1,00

h) Suponha que, em certo final de semana, João tenha ficado com uma garota. O que você pode dizer sobre o número provável de garotas com que Pedro ficou? E se João não tivesse ficado com nenhuma garota?

i) Como você poderia usar os resultados obtidos no item anterior a fim de calcular o número médio de garotas com que Pedro "fica" num fim de semana qualquer [E(X)]? [*Note que, no item anterior, você calculou E(X|Z=1) e E(X|Z=0). Você também dispõe das probabilidades P(Z=1) e P(Z=0). Logo...*]

j) Os resultados anteriores sugerem que o conhecimento de Z ajuda a prever/adivinhar o número de garotas com que Pedro ficou em certo final de semana. Isso significa que existe uma relação de "causalidade" entre Z e X?

1.3) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com médias Mx e My e variâncias Vx e Vy respectivamente. Prove:

a) Se My = 0 ou Mx = 0, então cov(X,Y) = E(XY).

b) Se E(Y|X) = My, então cov(X,Y) = 0.

1.4) [*Extraído de Stock e Watson (2003)*] Este exercício mostra que cov(X,Y)=0 não implica necessariamente E(Y|X)=My (uma constante independente de X). Sejam X e Z duas variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão, e $Y=X^2+Z$.

a) Mostre que $E(Y|X)=X^2$.

b) Mostre que E(XY)=0. [Você deve usar o resultado do item (a) e o fato de que, para uma variável normal padrão w qualquer, $E(w^3)=0$]

c) Mostre que cov(X,Y)=0.

1.5) Prove a lei das expectativas iteradas para o caso discreto.

1.6) Seja X igual ao número de gols que um jogador faz em dois lances para o gol. Sendo P(X=0)=0,2; P(X=1)=0,5; P(X=2)= 0,3; calcule as probabilidades abaixo:

a) $P(X \geq 1)$

b) $P(X \leq 1)$

c) $P(0 < X \leq 2)$