

# REDES ‘COMPLEXAS’

## *modelagem ‘simples’ da*

**Muitas estruturas ou fenômenos naturais – como nossos pensamentos, nossos relacionamentos, diferentes sistemas biológicos, o conjunto das estradas de um país – têm a forma de redes de múltiplas conexões, conhecidas como ‘redes complexas’.**

**A pesquisa teórica nessa área vem apontando modelos e propriedades dessas redes, que permitem simular fenômenos naturais e estruturas criadas pelo homem, ajudando a entender melhor diversos aspectos de nossa vida e do mundo que nos cerca.**

**Luciano da Fontoura Costa**

Grupo de Pesquisa em Visão Cibernética,  
Instituto de Física de São Carlos,  
Universidade de São Paulo

**O mundo é como no poema *Quadrilha*, de Carlos Drummond de Andrade (figura 1): uma teia intrincada de relacionamentos e acontecimentos, freqüentemente imprevisíveis. Não seria exagero dizer que nosso universo envolve uma infinita rede de conexões entre objetos e ações, permitindo associações entre quaisquer pares de objetos ou conceitos. A caracterização, análise e modelagem de tais redes é o principal objeto da nova área de ‘redes complexas’, que pode ser compreendida como uma motivadora intersecção entre conceitos da ‘teoria dos grafos’ (computação) e da ‘mecânica estatística’ (física). É, portanto, inerentemente inter e multidisciplinar.**

Assim, considerar cada uma dessas áreas em separado e depois integrar os elementos comuns pode dar uma idéia preliminar sobre os objetivos e metodologias da pesquisa de redes complexas. Iniciada no século 18 pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), a teoria dos grafos é hoje uma das mais bem estabelecidas áreas

João amava Teresa que amava Raimundo  
que amava Maria que amava Joaquim que amava Lili  
que não amava ninguém.  
João foi para o Estados Unidos, Teresa para o convento,  
Raimundo morreu de desastre, Maria ficou para tia,  
Joaquim suicidou-se e Lili casou com J. Pinto Fernandes  
que não tinha entrado na história.

**Figura 1.**  
**O poema *Quadrilha*, de Carlos Drummond de Andrade, pode ilustrar uma rede ‘complexa’ de relações (de ‘amor’) e acontecimentos**

# XAS' *natureza*

da computação teórica e matemática, caracterizando-se pelo uso de 'grafos' para a representação de diversas estruturas de interesse (ver 'Conceitos básicos'). Boa parte da importância dessa teoria vem do fato de que praticamente qualquer estrutura pode ser representada (até certo grau de precisão) através de um grafo.

Embora a motivação inicial dessa área tenha sido um problema prático (como percorrer a cidade de Königsberg passando apenas uma vez por cada uma de suas pontes), as pesquisas realizadas hoje focalizam aspectos teóricos envolvendo a 'complexidade', no sentido de custo computacional (ou seja, tempo de execução e necessidade de memória), de algoritmos que utilizam grafos – algoritmos são métodos de solução de problemas através de sua decomposição em uma série de 'passos' mais simples, até o término da execução.

Já os primeiros passos da mecânica estatística podem ser identificados na teoria cinética dos gases, iniciada por outro suíço, o físico e médico Daniel Bernoulli (1700-1782), e outros cientistas do século 18. Um dos principais interesses da mecânica estatística é estabelecer relações entre descrições de fenômenos em nível microscópico e macroscópico. Um sistema de muitas partículas, como um gás em uma garrafa, por exemplo, pode ser caracterizado tanto pela especificação de suas propriedades microscópicas, como a velocidade (ou posição) de cada partícula, quanto por propriedades mais globais do sistema, como pressão e temperatura. Boa parte dos desenvolvimentos modernos em mecânica estatística ocupa-se das chama-

## CONCEITOS BÁSICOS

Em um diagrama (ou grafo) de relacionamento entre pessoas (no caso, 'amar'), baseado no poema de Drummond, cada pessoa é representada por um 'nó' e os relacionamentos por 'arestas' (figura 2). Como 'amar' é aqui interpretado como direcionado (unilateral), temos um grafo direcionado, também chamado de 'dígrafo' (em teoria dos grafos e redes complexas, também são comuns grafos não-orientados). As relações citadas no poema estão indicadas pelas arestas em negrito, mas outras duas (setas tracejadas) foram incluídas apenas para tornar o grafo mais interessante. O 'grau de saída' de cada nó corresponde ao número de arestas que saem dele em direção a outros nós. O 'grau de entrada' de um nó corresponde ao número de arestas que chegam a ele. Outro conceito importante é o de *hub* – um nó com grau (de entrada e/ou saída) particularmente elevado. Assim, o nó 'Teresa' é o principal *hub* desse grafo, pois apresenta o maior número de conexões (três conexões de saída).

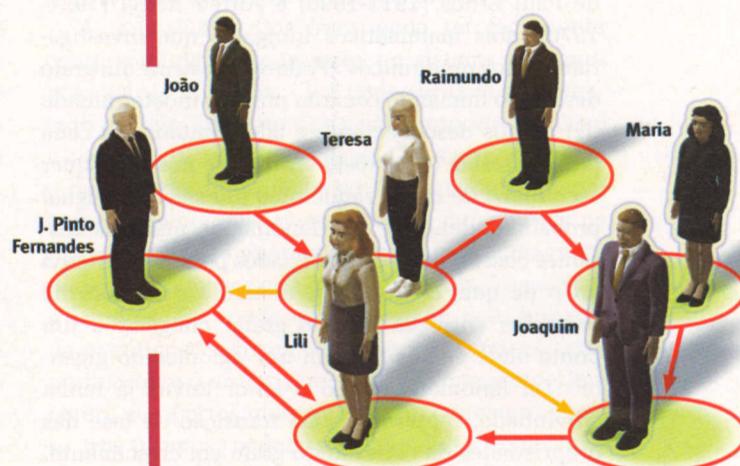
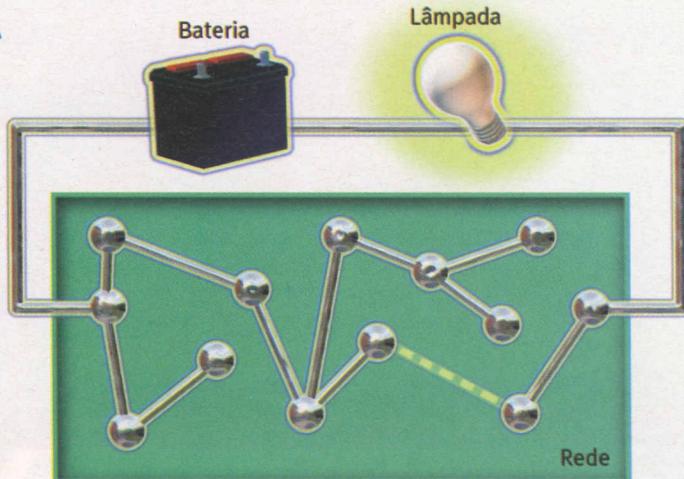


Figura 2. Os relacionamentos citados no poema *Quadrilha* podem ser representados por um grafo (um 'mapa' de conexões)

**Figura 3.**  
Uma rede de conexões elétricas em que uma nova conexão (seta tracejada) provocará o acendimento de uma lâmpada que permite ilustrar a ocorrência de um fenômeno crítico em um sistema complexo



das ‘transições de fase’ – mudanças abruptas de propriedades específicas de um sistema quando algum parâmetro varia. Um exemplo é a transição do gelo para água, e depois para vapor, sob aumento da temperatura.

## Teoria da complexidade

Combinadas com outros conceitos e metodologias, incluindo sistemas dinâmicos e caos, tais idéias originaram a moderna área de ‘teoria da complexidade’, cuja importância deriva do fato de que a maioria dos fenômenos naturais interessantes tem um caráter ‘complexo’ (ver ‘Um universo de conexões’).

A integração da teoria dos grafos e da mecânica estatística teve grande impulso em meados dos anos 40 com os trabalhos do norte-americano Paul J. Flory (1910-1985), prêmio Nobel de Química em 1974, e nos anos 50 com os desenvolvimentos de Paul Erdős (1913-1996) e Alfred Rényi (1921-1970), dois matemáticos húngaros que investigaram ‘grafos randômicos’. Pode-se construir um grafo desse tipo iniciando com um número indeterminado ( $N$ ) de nós desconectados e acrescentando, a cada passo, arestas (conexões) entre dois nós quaisquer escolhidos de modo randômico (ou seja, com igual probabilidade). Um dos fenômenos mais interessantes observados e caracterizados por Erdős e Rényi foi o de que, conforme se aumenta o número de conexões entre os nós do grafo, chega-se a um ponto onde os nós formam um ‘aglomerado gigante’. Tal fenômeno, como o leitor talvez já tenha adivinhado, representa uma transição de fase das propriedades de conexão do grafo em crescimento.

Outra forma muito simplificada de caracterizar conceitualmente um fenômeno crítico em um grafo pode ser ilustrado com uma rede de conexões elétricas (figura 3). Nessa rede, uma lâmpada está prestes a acender em consequência da inclusão de uma aresta (a linha tracejada na figura). Tal fenô-

meno envolve uma mudança abrupta das propriedades de conexão da rede em questão (que pode ser associada à criação do aglomerado gigante), e implica o acendimento da lâmpada. O mais interessante é que o fenômeno, semelhante ao que ocorre em diversos sistemas naturais, é bastante ‘simples’. Na verdade, boa parte dos conceitos e métodos básicos da teoria dos grafos e das redes complexas é de fácil compreensão mesmo para não-especialistas. Assim, em resumo, as redes ‘complexas’ oferecem uma maneira bastante ‘simples’ e efetiva de modelar muitos fenômenos naturais. O adjetivo ‘complexo’ diz respeito apenas ao grande número de nós e conexões existentes em tais redes, assim como aos comportamentos que ‘aparecem’ quando elas sofrem alguma interferência.

Embora Erdős e Rényi tenham, em seus estudos, alcançado muitos resultados matemáticos importantes, o tema continuou a ter um interesse basicamente teórico. Como os grafos randômicos raramente reproduzem de modo realista as conexões encontradas em sistemas naturais, por um bom tempo a aplicabilidade dessas estruturas como modelos da natureza permaneceu restrita a poucos casos. O passo seguinte na história das redes complexas foi dado pelos estudiosos das interações sociais, em particular através dos trabalhos de Stanley Milgram (1933-1984), um psicólogo de Harvard interessado em medir os níveis de relacionamento entre os habitantes dos Estados Unidos. Através de experimentos envolvendo o envio de cartas para habitantes de alguns estados selecionados aleatoriamente, Milgram identificou o nível de separação médio entre dois habitantes como sendo próximo a 5,5.

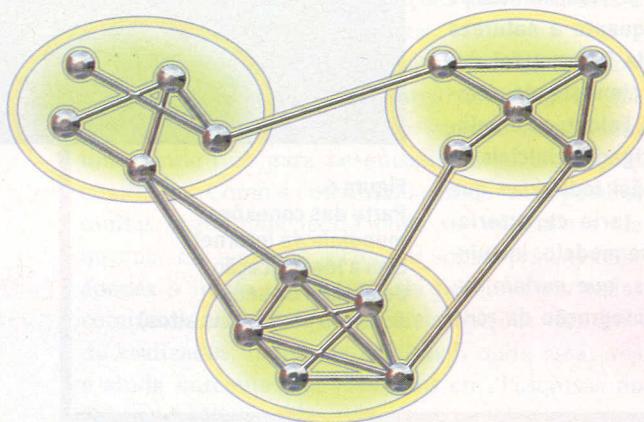
Seguindo esse raciocínio, é bem provável que existam apenas alguns poucos níveis de contato entre o leitor e o jogador Rivaldo, ou mesmo o Ronaldo. Como Ronaldo e Rivaldo se conhecem, basta conhecer um deles para se aproximar também do outro. Por razões evidentes, um sistema com tais propriedades passou a ser conhecido como um ‘pequeno mundo’ (em inglês, *small world*). Comportamentos semelhantes aparecem em muitas outras situações de interesse, como na caracterização da distância entre duas páginas quaisquer da internet, estimada pelo físico húngaro Albert Barabási e colaboradores como sendo de cerca de 19 níveis. Bem maior, portanto, que aquela entre pessoas em um país, mas destinada a diminuir com o inexorável crescimento da teia mundial.

Retornando à questão das interações sociais, os trabalhos do sociólogo norte-americano Mark Gra-

novos anos 60 indicaram que essas redes caracterizam-se por conter sub-redes – ‘agrupamentos’ (em inglês, *clusters*) ou ‘comunidades’, densamente conectados –, que se interligam de forma relativamente fraca com as outras partes da rede (figura 4). Há diversos exemplos desse tipo de organização social. Cada um dos agrupamentos da figura poderia ser relacionado, por exemplo, a uma seção dentro de uma empresa: os funcionários dessa seção tendem a se conhecer melhor, enquanto o contato com os de outras seções concentra-se em algumas pessoas. Isso também ocorre em clubes, associações e em outras redes de relações. Se o leitor tentar esboçar sua rede de relacionamentos pessoais, provavelmente encontrará algo semelhante à figura. O canadense Duncan Watts e o norte-americano Steven Strogatz traçaram, em meados dos anos 90, outra contribuição importante ao estudo de redes ‘pequeno mundo’, ao mostrar que o acréscimo de algumas poucas conexões entre agrupamentos relativamente isolados pode transformá-los em um pequeno mundo.

## Redes livres de escala

Um dos fatos mais importantes da história recente das redes complexas foi a descoberta de que a conectividade, em diversas estruturas naturais, obedece a uma ‘lei de potência’ (ou seja, a distribuição dos graus dos nós pode ser escrita como uma potência dos valores dos graus). Tais redes também são denominadas ‘livres de escala’, pois, ao contrário das redes aleatórias (ou randômicas), mostram uma distribuição heterogênea dos graus dos nós, ou seja, não apresentam um grau médio típico. Em outras palavras, enquanto nas redes randômicas a chance de existirem nós com graus muito maiores que o grau médio é desprezível, em diversos tipos de redes naturais é maior a chance de surgirem nós com



## UM UNIVERSO DE CONEXÕES

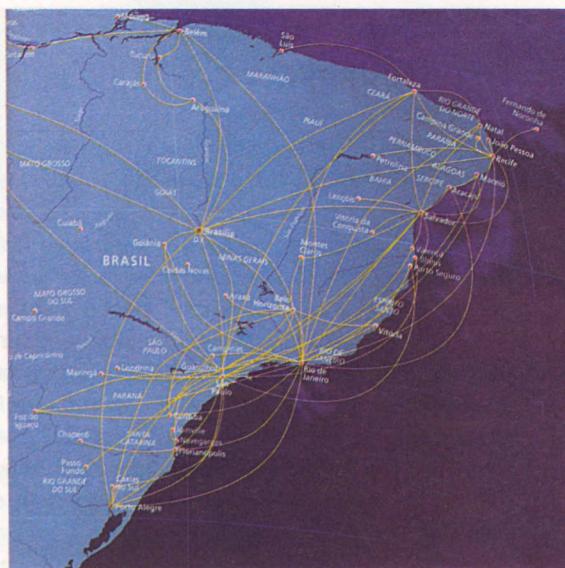
**Se uma rede complexa não-dirigida tem  $N$  nós, é possível mostrar que o número máximo de conexões possível nessa rede é igual a  $N(N-1)/2$ , valor bastante grande. Assim, em uma rede com 40 nós (uma sala de aula, por exemplo) há 780 possíveis relacionamentos. Já uma rede com 10 mil nós (uma cidade pequena) permite pouco menos de 50 milhões de possíveis conexões. É um fenômeno interessante da natureza humana (e não apenas desta) que nossa atenção só possa se concentrar em um número muito reduzido de nossas possíveis conexões. Nossos relacionamentos em nossa cidade, por exemplo, envolvem apenas uma quantidade ínfima de todas as possibilidades. Em outras palavras, nossa percepção da realidade é limitada a uma pequena amostra da vasta quantidade de relacionamentos entre as pessoas e objetos que conhecemos, por limitações de nossa memória. Como não podemos ‘aproveitar’ todas as possibilidades, nossa atenção limita-se às mais relevantes, ou às aquelas das quais temos conhecimento. Boa parte do fenômeno da ‘complexidade’ nas ciências, em especial em biologia, está ligada ao fato de os fenômenos naturais envolverem uma quantidade de conexões que excede nossa capacidade de memorização ou interpretação. Felizmente, computadores e métodos de inteligência artificial, agora aliados aos poderosos conceitos de redes complexas, tornam possível o aumento de nossa capacidade de representação e investigação da natureza, domando sua complexidade pela organização em modelos complexos e densamente conectados.**

muitas conexões, os chamados *hubs*, cuja presença é favorecida no modelo livre de escala.

A importância dos *hubs* pode ser facilmente compreendida se pensarmos no sistema de conexões aéreas mundiais (que pode ser bem representado por um grafo em que cada aeroporto é um nó e cada rota de vôo uma aresta). Um aeroporto como o de Ribeirão Preto pode ser bastante conveniente (especialmente para quem, como o autor, mora na região), mas sua importância para a rede aérea mundial é muito menor que os de São Paulo, Nova York e Londres. Isso pode ser constatado pelo impacto de eventuais interrupções de serviço nesses aeroportos sobre o sistema mundial de transporte. Com efeito, aeroportos que concentram conexões, como os três últimos, podem ser entendidos como *hubs* na terminologia de redes complexas (figura 5).

**Figura 4. Inúmeras redes complexas são compostas por sub-redes (*clusters* ou comunidades) que apresentam maior número de conexões internas, e poucas conexões com outras sub-redes**

**Figura 5.**  
Um mapa  
de linhas  
aéreas ilustra  
bem o que  
são os *hubs*  
(‘nós’ que  
apresentam  
maior número  
de conexões)  
em uma rede  
complexa



Há *hubs* em muitos outros sistemas, como atuações de atores de cinema e músicos, disseminação de notícias, interação de proteínas, ou mesmo a internet (ver ‘A internet é uma rede complexa?’). Como deve estar claro para o leitor, *hubs* têm papel crítico em diversos sistemas reais. Para entender melhor um dos principais aspectos de importância dos *hubs* – sua criticalidade a ataques – vamos retornar ao exemplo da lâmpada que se acendia com as conexões de uma rede aleatória. Podemos ter uma rede simples e acrescentar conexões até ver a lâmpada acender, mas também podemos iniciar com uma rede mais densamente conectada e remover conexões até vê-la se apagar. Tal tipo de simulação é de grande interesse, pois representa

um modelo poderoso de situações reais de perigo, como o desligamento de transmissores de energia (lembrem-se do apagão?), catástrofes naturais, ataques a sistemas de comunicação e outras.

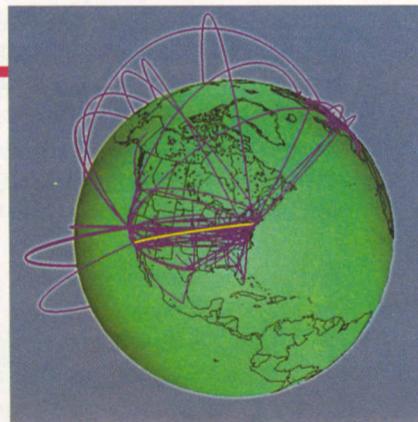
Um resultado muito interessante obtido no estudo de redes complexas é que, sob certas condições pouco restritivas, podemos retirar muitos nós ao acaso sem que haja o colapso da conectividade. Como as redes aleatórias, as redes livres de escala também são bastante resistentes à remoção de nós, mas se o ataque for dirigido aos *hubs*, a conexão nesse tipo de rede logo é destruída e a rede despedaçada.

Embora as propriedades ‘livre de escala’ de muitas redes naturais já fossem conhecidas, ainda faltavam modelos matemáticos que reproduzissem esse tipo de organização, dando origem aos *hubs* e tudo o mais. O primeiro modelo bem-sucedido foi desenvolvido por Barabási, na Universidade de Notre-Dame (Estados Unidos). A idéia básica de tal modelo é privilegiar, enquanto a rede é construída, novas conexões com os nós que já têm muitas conexões. Esse princípio de construção de redes complexas, que logo ficou conhecido (por razões óbvias) como ‘conexão preferencial’ ou modelo ‘rico fica mais rico’, permite não só obter redes ‘livre de escala’, mas também compreender melhor por que existem essas redes em casos particulares. Um dos primeiros tipos de rede caracterizada como ‘livre de escala’ foi a rede de atuações de atores de cinema, pois os produtores preferem contratar um ator mais famoso (que, por isso, já atuou com muitas

## A INTERNET É UMA REDE COMPLEXA?

O desenvolvimento da área de redes complexas tem ocorrido com velocidade e abrangência praticamente sem precedentes na história da ciência, como atestam os inúmeros avanços e resultados obtidos nos últimos três anos. Essa velocidade e a popularidade das novidades nessa área devem-se, em boa parte, às facilidades de comunicação e divulgação oferecidas pela internet. Hoje, boa parte desses avanços é imediatamente disponibilizada no excelente endereço ‘arXiv’, da Universidade de Cornell, e/ou nas páginas dos pesquisadores e grupos de pesquisa da área. Como não podia deixar de ser, a própria internet tem sido um dos principais objetos de estudos em redes complexas. Uma pergunta que tem es-

timulado a comunidade de redes complexas é: que tipo de rede complexa é a www (a teia mundial)? E a internet? Enquanto a natureza livre de escala da internet foi demonstrada pelo cientista da computação Michalis Faloutsos e colaboradores, investigações iniciais da equipe de Barabási indicaram que a www também teria características típicas desse modelo, incluindo diversos *hubs*, que seriam essenciais para a integração da rede (figura 6).



**Figura 6.**  
Parte das conexões mundiais da internet, com a identificação de alguns de seus hubs (os pinos mais altos)

## PESQUISA EM REDES COMPLEXAS NO GRUPO DE VISÃO CIBERNÉTICA

O envolvimento do autor com redes complexas começou em 2002, sob o incentivo do físico Dietrich Stauffer, da Universidade de Colônia (Alemanha), em esforço conjunto visando caracterizar as propriedades de memória de um tipo de rede neuronal artificial (conhecido como 'rede Hopfield'), cujas conexões obedecem a um modelo de conexão preferencial (conhecido como Barabási-Albert). Desde então, temos desenvolvido novos conceitos e métodos em redes complexas, seguidos de suas aplicações em problemas reais. Uma das primeiras linhas de investigação foi a possibilidade de representar o fluxo de idéias de um indivíduo como um grafo direcionado com pesos (ou 'preferências'). A motivação principal desse estudo é a tendência de nossos próximos pensamentos serem fortemente influenciados pelo que estamos imaginando no momento: se pensarmos em 'sol', por exemplo, logo imaginaremos uma praia, um guarda-sol, o barulho do mar e assim por diante. Para investigar essa possibilidade de modelagem do fluxo de idéias, criamos um programa que apresenta palavras a um voluntário, que responde com a primeira palavra que lhe vem à cabeça. O programa só especifica a primeira palavra (no caso, 'sol'), usando as palavras apresentadas pela pessoa para continuar a experiência. Métodos estatísticos são empregados para garantir um equilíbrio no número de vezes em que cada palavra é apresentada. Após o experimento, constrói-se uma rede onde cada palavra é um nó e as arestas direcionadas entre os nós indicam quantas vezes uma

certa palavra sucedeu a outra. Os resultados já obtidos indicam que tais redes seriam 'livres de escala', o que indica um aspecto interessante de nosso fluxo de pensamentos. Ao 'caminharmos' pela rede obtida – 'escolhendo' o caminho sempre com probabilidade proporcional ao respectivo peso da conexão – obtemos fluxos de associações de idéias que mostram alguma semelhança com os produzidos pela pessoa que participou do experimento. Além disso, a medida de propriedades específicas das redes obtidas (o grau das conexões, por exemplo) poderá vir a permitir a identificação do autor das associações, ou mesmo de sua idade, nível de instrução ou estado de espírito no momento do experimento. Um trabalho nosso mais recente envolve a identificação de classes de palavras derivadas das redes de associação através da respectiva colonização dos nós a partir dos *hubs*, uma tarefa que tem sido denominada na literatura como 'identificação de comunidades' das redes.

Outros tópicos de pesquisa do grupo incluem aplicações em bioinformática, como a modelagem de estruturas neuronais (ver 'De olho nos neurônios', em CH nº 167), a modelagem da expressão genética espaço-temporal (ver 'O futuro do genoma', em CH nº 178), caracterização de textos em lingüística, análise de imagens e modelagem de sistemas paralelos de computação, entre outras. Estamos ainda avaliando como modelos de redes complexas poderiam eventualmente contribuir para o avanço socioeconômico e o melhor aproveitamento de recursos em países em desenvolvimento.

pessoas). Assim, rico fica mais rico ou, no caso, famoso fica mais famoso. Fenômeno semelhante acontece também nas associações entre músicos e entre pesquisadores científicos.

Curiosamente, um fenômeno semelhante tem acontecido com a própria área de pesquisa em redes complexas: seu rápido sucesso atua como um grande *hub* para pesquisadores e instituições científicas. Como é comum no estudo dessas redes, muitas vezes uma teoria pode ser aplicada a ela mesma. Os avanços relatados acima representam apenas o início da história da pesquisa em redes complexas, e muitas novas investigações vêm sendo realizadas, inclusive no Brasil, onde essa área é ainda nascente (ver exemplos em 'Pesquisas no Grupo de Visão Cibernética').

Uma tendência particularmente importante nessa pesquisa é a relação entre a estrutura de conectividade das redes naturais e a função das mesmas. Até que ponto, por exemplo, nossos pensamentos são influenciados por ou influenciam as conexões sinápticas entre os neurônios do nosso cérebro? É provável que boa parte das investigações científicas se concentre, daqui por diante, em tais relacionamentos estrutura-função, essenciais não só para a explicação do comportamento observado, mas também para a previsão de comportamentos futuros. Algo que, diga-se de passagem, já estava de certa forma presente na *Quadrilha de Drummond*, que agora também fica incluída na história das redes complexas. ■

### SUGESTÕES PARA LEITURA

- CARYSTIN, G.D.; BIER, A. & BATIST, G. 'The role of connexin-mediated cell-to-cell communication in breast cancer metastasis', in *Journal of Mammary Gland Biology and Neoplasia*, v. 6, p. 431, 2002.
- LIN, J.-H.C.; TAKANO, T.; COTRINA, M.L.; ARCUINO, G.; KANG, J.; GAO, Q.; JIANG, L.; LI, F.; LICHTENBERG-FRATE, H.; HAUBRICH, S.; WILLECKE, K.; GOLDMAN, S. & NEDERGAARD, M. 'Connexin 43 enhances the adhesivity and mediates the invasion of malignant glioma cells', in *Journal of Neuroscience*, v. 22, p. 4.302, 2002.
- MESNIL, M. 'Junctions communicantes et cancer: implications et perspectives', in *Medecin/Sciences*, v. 20, p. 197, 2004.