Linguaggi e Computabilità

Daniele De Micheli

2019

Indice

Parte I
Prima Parte

1 Alfabeti e Linguaggi

Si definisce **alfabeto** un insieme finito e non vuoto di simboli. Ad esempio, l'alfabeto $\{A, B, C, ..., Z\}$ potremmo definirlo come l'insieme delle lettere maiuscole dell'alfabeto italiano. Altri esempi intuitivi sono l'inseme delle cifre che compongono i numeri arabi $\{1, 2, 3, ...9, 0\}$ o l'insieme $\{0, 1\}$ che rappresenta i numeri binari. Un alfabeto si indica con una lettera maiuscola greca:

- $A = \{A, B, C, ..., Z\}$;
- $\Gamma = \{0, 1\}$;

Si definisce invece una **stringa** un insieme vuoto, finito o infinito di simboli presi da un dato alfabeto. Una stringa vuota si indica con $\epsilon o \lambda$.

1.1 Stringhe

Una stringa, come abbiamo già visto, si rappresenta con una lettera greca maiuscola. Nel caso volessimo indicare invece la lunghezza di una stringa bisogna utilizzare la seguente notazione:

$$|\Gamma| = x$$

dove Γ rappresenta la stringa e x la sua lunghezza.

Le stringhe possono inoltre essere "manipolate", o meglio esse si possono *concatenare* per ottenere una nuova stringa. Tale operazione si può indicare così: $\Gamma \circ A$ e si legge "Γ *concatenata ad* A". La concatenazione **non** è un'operazione commutativa. Infatti

$$\Gamma \circ A \neq A \circ \Gamma$$

Se prendiamo ad esempio $A = \{010\}$ e $\Gamma = \{11\}$, allora $A \circ \Gamma = \{01011\}$ mentre $\Gamma \circ A = \{11010\}$ che non sono assolutamente uguali come si può ben vedere.

1.2 Alfabeti

Gli alfabeti, come abbiamo già visto, sono insieme finiti di simboli. Su tali insiemi è possibile definire delle operazioni che generano delle stringhe a partire dall'alfabeto stesso.

Potenza di un alfabeto : dato un alfabeto E, si definisce *potenza di* E la stringa di lunghezza k contenente tutti gli elementi dell'alfabeto E.

$$dato\, E, k \geq 0 \in \mathbb{Z}, \Rightarrow E^k = E \times E \times E \times E \times ... \times E, k\, volte$$

Se $|E| = q$, allora $|E^k| = q^k$. Ad esempio, prendiamo l'alfabeto $E = \{0, 1\}$. Allora:

- $E^1 = \{0, 1\}$
- $E^2 = \{00, 01, 10, 11\}$
- $E^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

Come si può intuire dall'esempio qui sopra, il risultato della potenza di un alfabeto non è altro che l'insieme delle *combinazioni* di numero k degli elementi dell'alfabeto.

Chiusura di Kleene : la chiusura di Kleene è un'operazione che riguarda le potenze di un alfabeto. Infatti tale operazione non è altro che l'unione di tutte le potenze di un alfabeto fino a k. Formalmente:

$$E^{\star} = \cup E^k = E^0 \cup E^1 \cup E^2 ... \cup E^k, \ t.c. \ k \geq 0$$

Un'operazione derivata da quest'ultima è la chiusura di Kleene ma senza l'elemento 0:

$$E^{+} = E^{\star} \setminus E^0$$

1.3 Linguaggio

possiamo definire un *linguaggio* L *su* E un sottoinsieme di $E^{\star}$ tale che $L \subseteq E^{\star}$. Per esempio, preso $E = \{a, b, c\}$, un linguaggio L potrebbe essere $L_1 = \{aa, cbc\}$. Un linguaggio può essere finito (vedi L_1), oppure infiniti (es. $L_2 = \{w \in E^{\star} \mid w \ contiene \ lo \ stesso \ numero \ di \ a \ e \ c\}$).

Preso un linguaggio $L \subseteq E^{\star}$, possiamo affermare che:

1. $\emptyset \subseteq L$;
2. $\varepsilon \subseteq L$;
3. $E^{\star} \subseteq L$;

sono tutti linguaggi. La principale caratteristica di un linguaggio è che esso deve essere riconosciuto e interpretato da una macchina (o automa) ed essa deve anche essere in grado di generarlo tramite una ***grammatica***.

Problema di Decisione. *Il problema di decisione si presenta nel momento in cui, dato un quesito, le possibili risposte sono sempre e sole "sì" o "no".*

Problema di Membership. *Il problema di Memebership è legato al concetto di stringa (come input), di linguaggio e di appartenenza ad un determinato linguaggio. Data una stringa w in input, una determinata macchina deve essere in grado di dire se essa appartiene ad un linguaggio oppure no.*

DEFINIZIONI Una **forma sentenziale** è una stringa di simboli terminali e non terminali: $\gamma \in (V \cup T)^{\star}$

Concatenazione di linguaggi : Dati due linguaggi $L_1, L_2 \subseteq E^\star$ allora

$$L_1 \circ L_2 = \{w|w = w_1 \circ w_2, w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$$

1.4 Grammatica context-free -CFG-

Una grammatica context free è una grammatica che non prevede l'incrocio dei simboli terminali per cui è necessario utilizzare delle regole differenti. Un esempio di linguaggio context free è il seguente:

Stringhe palindrome : le stringhe palindrome sono un esempio semplice di linguaggio che utilizza una grammatica context-free. Abbiamo il l'alfabeto $E = \{0, 1\}$ e il linguaggio costruito su esso $L_{pal} \subseteq E^\star$. Da questo alfabeto e con questo linguaggio possiamo costruire una stringa w palondroma come

$$w = \{0110\}$$

Essa può essere definita per induzione come segue:

1. Passo base: $\varepsilon, 0, 1 \in L_{pal}$
2. Passo induttivo: se $w \in L_{pal}$, allora $0w0, 1w1, \varepsilon \in L_{pal}$

Un esempio di regole del linguaggio possono essere:

$$\begin{aligned} S &\to \varepsilon \\ S &\to 0 \\ S &\to 1 \\ S &\to 0S0 \\ S &\to 1S1 \end{aligned} \tag{1}$$

in cui la **testa** può essere sostituita dal **corpo**.

Queste regole possono essere applicate tramite le due *relazioni*:

1. $\Rightarrow$

2. $\Rightarrow^{\star}$

La prima (1) possiamo definirla come segue:

Prima relazione. *Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG e sia $\alpha A \beta$ tale che $\alpha, \beta \in (V \cup T)^{\star}$ e $A \in V$. Sia $A \rightarrow \gamma \in P$. Allora $\alpha A \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta$.*

Seconda relazione. *Si ha che $\alpha \Rightarrow^{\star} \beta$, con $\alpha, \beta \in (V \cup T)^{\star}$, se e solo se $\exists\, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \in (V \cup T)^{\star}$ tale che $\alpha \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \Rightarrow ... \Rightarrow \gamma_n \Rightarrow \beta$ con $n \geq 1$. Se $n = 1$, allora $\alpha = \beta$ e vale $\alpha \Rightarrow^{\star} \beta$ cioè $\alpha \Rightarrow^{\star} \gamma$.*

1.5 Grammatica NON context-free

Il linguaggio di esempio (di tipo 2): $L = \{w \in \{a, b, c\}^{\star} | w = a^n b^n c^n, n \geq 1\}$ è generato dalla seguente grammatica (NON context-free):

$$G = (\{S, X, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

e dove le regole di produzione sono:

1. $S \rightarrow aSBC$

2. $S \rightarrow aBC$

3. $CB \rightarrow XB$

4. $XB \rightarrow XC$

5. $XC \rightarrow BC$

6. $aB \rightarrow ab$

7. $bB \rightarrow bb$

8. $bC \rightarrow bc$

9. $cC \rightarrow cc$

Le grammatiche 3,4,5 possono essere "collassate" in $CB \rightarrow BC$ Si può dimostrare , usando il Pumping Lemma per i CFL, che non è context-free.

Esempio di Derivazione:

Deriviamo la stringa abc (corrispondente a n = 1), indicando anche ad ogni passo la regola usata.

$$S(2) \rightarrow aBC(6) \rightarrow abC(8) \rightarrow abc$$

Deriviamo la stringa aabbcc (corrispondente a n = 1), indicando anche ad ogni passo la regola usata.

$$S(1) \rightarrow aSBC(2) \rightarrow aaBCBC(3) \rightarrow aaBXBC(4) \rightarrow aaBXCC(5) \rightarrow$$

$$\rightarrow aaBBCC(6) \rightarrow aabBCC(7) \rightarrow aabbCC(8) \rightarrow aabbcC(9) \rightarrow aabbcc$$

In generale, per derivare $a^n b^n c^n$, per n < 1:

$$S(n-1\,volte \rightarrow (1))a^{n-1}S(BC)^{n-1} \rightarrow (2)a^n(BC)^n(n(n-1)/2\,volte\,la$$

$$sequenza \rightarrow (3), \rightarrow (4), \rightarrow (5))a^nB^nC^n....slide$$

Esercizio: creo una CFG su $L = \{a^{n+m}xc^nyd^m,\ conn, m \geq 0\}$:

2 Alberi Sintattici

Un albero sintattico è una rappresentazione grafica (ad albero) che mostra come una forma sentenziale o una stringa è stata ottenuta tramite le regole di derivazione.

Albero Sintattico. *Data una CFG definita come*

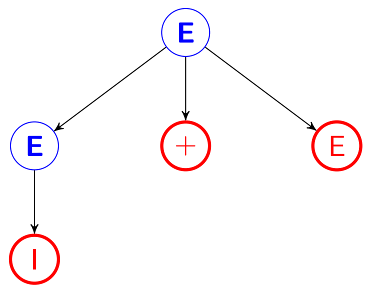
$$G = (V, T, P, S)$$

l'albero sintattico è un albero tale che

1. *Ogni nodo interno è* ***etichettato*** *da una variabile;*
2. *Ogni foglia è etichettata da una variabile, oppure un simbolo terminale o ancora da ε. Se è etichettata con ε allora è l'unico figlio riscontrato.*
3. *Se un nodo è etichettato con A (variabile) e i rispettivi figli sono etichettati da sinistra verso destra con $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$, allora $A \rightarrow X_1, X_2, X_3, ..., X_k \in P$ (ovvero A è una produzione della grammatica).*

Un esempio pratico di albero sintattico: data la CFG definita come

$$E \to I \mid E + E \mid E * E \mid (E) \;\; e \;\; I \to a \mid b \mid Ia \mid I0 \mid I1 \tag{2}$$



abbiamo che l'albero sintattico ottenuto è un albero **radicato** e **ordinato**. Si può notare che i nodi interni rappresentano i passaggi per arrivare alle foglie. Difatti è possibile ricostruire il processo di derivazione:

$$E \to E \; + \; E \to I \; + \; E$$