0.1 Linguaggio

possiamo definire un *linguaggio* L *su* E un sottoinsieme di $E^\star$ tale che $L \subseteq E^\star$. Per esempio, preso $E = \{a, b, c\}$, un linguaggio L potrebbe essere $L_1 = \{aa, cbc\}$. Un linguaggio può essere finito (vedi L_1), oppure infiniti (es. $L_2 = \{w \in E^\star \mid w\, contiene\, lo\, stesso\, numero\, di\, a\, e\, c\}$).

Preso un linguaggio $L \subseteq E^\star$, possiamo affermare che:

1. $\emptyset \subseteq L$;
2. $\varepsilon \subseteq L$;
3. $E^\star \subseteq L$;

sono tutti linguaggi. La principale caratteristica di un linguaggio è che esso deve essere riconosciuto e interpretato da una macchina (o automa) ed essa deve anche essere in grado di generarlo tramite una ***grammatica***.

Problema di Decisione. *Il problema di decisione si presenta nel momento in cui, dato un quesito, le possibili risposte sono sempre e sole "sì" o "no".*

Problema di Membership. *Il problema di Memebership è legato al concetto di stringa (come input), di linguaggio e di appartenenza ad un determinato linguaggio. Data una stringa w in input, una determinata macchina deve essere in grado di dire se essa appartiene ad un linguaggio oppure no.*

DEFINIZIONI Una **forma sentenziale** è una stringa di simboli terminali e non terminali: $\gamma \in (V \cup T)^\star$

0.2 Grammatica context-free -CFG-

Una grammatica context free è una grammatica che non prevede l'incrocio dei simboli terminali per cui è necessario utilizzare delle regole differenti. Un esempio di linguaggio context free è il seguente:

Stringhe palindrome : le stringhe palindrome sono un esempio semplice di linguaggio che utilizza una grammatica context-free. Abbiamo il l'alfabeto $E = \{0, 1\}$ e il linguaggio costruito su esso $L_{pal} \subseteq E^\star$. Da questo alfabeto e con questo linguaggio possiamo costruire una stringa w palondroma come

$$w = \{0110\}$$

Essa può essere definita per induzione come segue:

1. Caso base: $\varepsilon, 0, 1 \in L_{pal}$
2. Caso induttivo: se $w \in L_{pal}$, allora $0w0, 1w1, \varepsilon \in L_{pal}$

0.3 Grammatica NON context-free

Il linguaggio di esempio (di tipo 2): $L = \{w \in \{a, b, c\}^\star | w = a^n b^n c^n, n \geq 1\}$ è generato dalla seguente grammatica (NON context-free):

$$G = (\{S, X, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

e dove le regole di produzione sono:

1. $S \rightarrow aSBC$
2. $S \rightarrow aBC$
3. $CB \rightarrow XB$
4. $XB \rightarrow XC$
5. $XC \rightarrow BC$
6. $aB \rightarrow ab$
7. $bB \rightarrow bb$
8. $bC \rightarrow bc$
9. $cC \rightarrow cc$

Le grammatuche 3,4,5 possono essere "collassate" in $CB \rightarrow BC$ Si può dimostrare , usando il Pumping Lemma per i CFL, che non è context-free.

Esempio di Derivazione:

Deriviamo la stringa abc (corrispondente a n = 1), indicando anche ad ogni passo la regola usata.

$$S(2) \rightarrow aBC(6) \rightarrow abC(8) \rightarrow abc$$

Deriviamo la stringa aabbcc (corrispondente a n = 1), indicando anche ad ogni passo la regola usata.

$$S(1) \rightarrow aSBC(2) \rightarrow aaBCBC(3) \rightarrow aaBXBC(4) \rightarrow aaBXCC(5) \rightarrow$$

$$\rightarrow aaBBCC(6) \rightarrow aabBCC(7) \rightarrow aabbCC(8) \rightarrow aabbcC(9) \rightarrow aabbcc$$

In generale, per derivare $a^n b^n c^n$, per n $<$ 1:

$$S(n-1\, volte \rightarrow (1))a^{n-1}S(BC)^{n-1} \rightarrow (2)a^n(BC)^n(n(n-1)/2\, volte\, la$$

$$sequenza \rightarrow (3), \rightarrow (4), \rightarrow (5))a^nB^nC^n....slide$$

Esercizio: creo una CFG su $L = \{a^{n+m}xc^nyd^m,\ conn, m \geq 0\}$: