0.1 Linguaggio

possiamo definire un *linguaggio* L *su* E un sottoinsieme di $E^\star$ tale che $L \subseteq E^\star$. Per esempio, preso $E = \{a, b, c\}$, un linguaggio L potrebbe essere $L_1 = \{aa, cbc\}$. Un linguaggio può essere finito (vedi L_1), oppure infiniti (es. $L_2 = \{w \in E^\star \mid w\, contiene\, lo\, stesso\, numero\, di\, a\, e\, c\}$).

Preso un linguaggio $L \subseteq E^\star$, possiamo affermare che:

1. $\emptyset \subseteq L$;
2. $\varepsilon \subseteq L$;
3. $E^\star \subseteq L$;

sono tutti linguaggi. La principale caratteristica di un linguaggio è che esso deve essere riconosciuto e interpretato da una macchina (o automa) ed essa deve anche essere in grado di generarlo tramite una ***grammatica***.

Problema di Decisione. *Il problema di decisione si presenta nel momento in cui, dato un quesito, le possibili risposte sono sempre e sole "sì" o "no".*

Problema di Membership. *Il problema di Memebership è legato al concetto di stringa (come input), di linguaggio e di appartenenza ad un determinato linguaggio. Data una stringa w in input, una determinata macchina deve essere in grado di dire se essa appartiene ad un linguaggio oppure no.*

DEFINIZIONI Una **forma sentenziale** è una stringa di simboli terminali e non terminali: $\gamma \in (V \cup T)^\star$

Concatenazione di linguaggi : Dati due linguaggi $L_1, L_2 \subseteq E^\star$ allora

$$L_1 \circ L_2 = \{w | w = w_1 \circ w_2, w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$$

0.2 Grammatica context-free -CFG-

Una grammatica context free è una grammatica che non prevede l'incrocio dei simboli terminali per cui è necessario utilizzare delle regole differenti. Un esempio di linguaggio context free è il seguente:

Stringhe palindrome : le stringhe palindrome sono un esempio semplice di linguaggio che utilizza una grammatica context-free. Abbiamo il l'alfabeto $E = \{0, 1\}$ e il linguaggio costruito su esso $L_{pal} \subseteq E^{\star}$. Da questo alfabeto e con questo linguaggio possiamo costruire una stringa w palondroma come

$$w = \{0110\}$$

Essa può essere definita per induzione come segue:

1. Passo base: $\varepsilon, 0, 1 \in L_{pal}$
2. Passo induttivo: se $w \in L_{pal}$, allora $0w0, 1w1, \varepsilon \in L_{pal}$

Un esempio di regole del linguaggio possono essere:

$$\begin{aligned} S &\to \varepsilon \\ S &\to 0 \\ S &\to 1 \\ S &\to 0S0 \\ S &\to 1S1 \end{aligned} \tag{1}$$

in cui la **testa** può essere sostituita dal **corpo**.

Queste regole possono essere applicate tramite le due *relazioni*:

1. $\Rightarrow$
2. $\Rightarrow^{\star}$

La prima (1) possiamo definirla come segue:

Prima relazione. *Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG e sia $\alpha A \beta$ tale che $\alpha, \beta \in (V \cup T)^{\star}$ e $A \in V$. Sia $A \to \gamma \in P$. Allora $\alpha A \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta$.*

Seconda relazione. *Si ha che $\alpha \Rightarrow^{\star} \beta$, con $\alpha, \beta \in (V \cup T)^{\star}$, se e solo se $\exists\, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \in (V \cup T)^{\star}$ tale che $\alpha \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \Rightarrow ... \Rightarrow \gamma_n \Rightarrow \beta$ con $n \geq 1$. Se n = 1, allora $\alpha = \beta$ e vale $\alpha \Rightarrow^{\star} \beta$ cioè $\alpha \Rightarrow^{\star} \gamma$.*

0.3 Grammatica NON context-free

Il linguaggio di esempio (di tipo 2): $L = \{w \in \{a, b, c\}^{\star} | w = a^n b^n c^n, n \geq 1\}$ è generato dalla seguente grammatica (NON context-free):

$$G = (\{S, X, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

e dove le regole di produzione sono:

1. $S \rightarrow aSBC$
2. $S \rightarrow aBC$
3. $CB \rightarrow XB$
4. $XB \rightarrow XC$
5. $XC \rightarrow BC$
6. $aB \rightarrow ab$
7. $bB \rightarrow bb$
8. $bC \rightarrow bc$
9. $cC \rightarrow cc$

Le grammatuche 3,4,5 possono essere "collassate" in $CB \rightarrow BC$ Si può dimostrare , usando il Pumping Lemma per i CFL, che non è context-free.

Esempio di Derivazione:

Deriviamo la stringa abc (corrispondente a n = 1), indicando anche ad ogni passo la regola usata.

$$S(2) \rightarrow aBC(6) \rightarrow abC(8) \rightarrow abc$$

Deriviamo la stringa aabbcc (corrispondente a n = 1), indicando anche ad ogni passo la regola usata.

$$S(1) \rightarrow aSBC(2) \rightarrow aaBCBC(3) \rightarrow aaBXBC(4) \rightarrow aaBXCC(5) \rightarrow$$

$$\rightarrow aaBBCC(6) \rightarrow aabBCC(7) \rightarrow aabbCC(8) \rightarrow aabbcC(9) \rightarrow aabbcc$$

In generale, per derivare $a^n b^n c^n$, per n < 1:

$$S(n-1\, volte \to (1))a^{n-1}S(BC)^{n-1} \to (2)a^n(BC)^n(n(n-1)/2\, volte\, la$$

$$sequenza \to (3), \to (4), \to (5))a^n B^n C^n....slide$$

Esercizio: creo una CFG su $L = \{a^{n+m}xc^n yd^m,\, con n, m \geq 0\}$:

1 Alberi Sintattici

Un albero sintattico è una rappresentazione grafica (ad albero) che mostra come una forma sentenziale o una stringa è stata ottenuta tramite le regole di derivazione.

Albero Sintattico. *Data una CFG definita come*

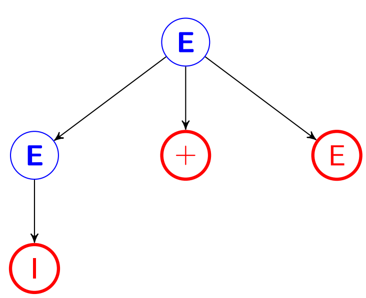
$$G = (V, T, P, S)$$

l'albero sintattico è un albero tale che

1. *Ogni nodo interno è* ***etichettato*** *da una variabile;*
2. *Ogni foglia è etichettata da una variabile, oppure un simbolo terminale o ancora da ε. Se è etichettata con ε allora è l'unico figlio riscontrato.*
3. *Se un nodo è etichettato con A (variabile) e i rispettivi figli sono etichettati da sinistra verso destra con $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$, allora $A \to X_1, X_2, X_3, ..., X_k \in P$ (ovvero A è una produzione della grammatica).*

Un esempio pratico di albero sintattico: data la CFG definita come

$$E \to I \mid E + E \mid E * E \mid (E) \;\; e \;\; I \to a \mid b \mid Ia \mid I0 \mid I1 \tag{2}$$



abbiamo che l'albero sintattico ottenuto è un albero **radicato** e **ordinato**. Si può notare che i nodi interni rappresentano i passaggi per arrivare alle foglie. Difatti è possibile ricostruire il processo di derivazione:

$$E \rightarrow E \ + \ E \rightarrow I \ + \ E$$