Tese de Doutorado

Estudo da Consistência do Método dos Projetores Simpléticos através de Modelos de Gauge Multidimensionais

Marco Antonio dos Santos

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Dezembro de 2001

Ao meu triunvirato , Alda, Simone e Francine.

Ao **Prof. C. M. do Amaral.**

AGRADECIMENTOS

Ao José Helayël, que impressiona aos que o conhecem por sua dimensões, humanas e profissionais, e que tive a felicidade em ter como orientador e amigo.

Ao Marquinho, não apenas meu co-orientador, mas um companheiro no melhor sentido da palavra, com quem criei uma das amizades mais valiosas em toda a minha vida.

Ao Ion, por todo o auxílio inestimável que prestou neste trabalho, e por também enriquecer tanto minha curta e preciosa lista de grandes amigos.

Ao Prof. Caride, pelo crédito com que nos acolheu na CCP/CBPF, possibilitando a realização deste trabalho.

A Miriam pelo carisma e pela impressionante eficiência com que secretaria a CFC.

Ao maravilhoso Grupo de Física Teórica da UCP, onde tive o ambiente e a hospitalidade fundamentais para a realização deste trabalho, com destaque especial aos novos parceiros Álvaro e Humberto, e ao velho camarada Colatto.

Aos velhos e bons companheiros do CBPF, em especial ao meu "irmão" Paulo Israel, por razões tão variadas quanto essenciais.

Ao grande colega Válter, da UFRRJ, parceiro constante nas dificuldades que enfrentamos hoje na Universidade para realizar nosso trabalho.

Ao Departamento de Física da UFRRJ, que permitiu a realização deste trabalho.

Aos irmãos Beto e Miro Maiworm, que tão bem e gentilmente têm recebido os companheiros em Petrópolis, colaborando para o ambiente saudável em que fazemos nosso trabalho.

Ao Prof. Carlos Márcio do Amaral (in memoriam), mentor original desta tese.

Resumo

Neste trabalho, adotamos o tratamento canônico para estudar a quantização de modelos de gauge de categorias bastante distintas, e em diversas dimensões. O método dos projetores simpléticos é utilizado e sua consistência verificada para identificar o espaço de fase reduzido em cada caso.

Abstract

In this work, we analyse several classes of gauge models from the canonical viewpoint. The symplectic projector method is applied, and its consistency in the identification of the reduced phase space is checked for each case.

Sumário

1 Introdução **3**

2 Fundamentos Teóricos **6**

2.1 Espaços de Configurações 6

2.2 O Projetor Simplético Λ e as Variáveis Físicas 9

2.3 Discussões e Conclusões Gerais 12

3 Modelos Ilustrativos **15**

3.1 Modelo de Christ-Lee 15

3.2 Partícula em um Campo Eletromagnético 18

4 Aplicações em Teorias de Campos de Gauge **21**

4.1 Eletrodinâmica 4-D 21

4.2 Modelo Bosonizado de Schwinger 2-D 24

4.3 Chern-Simons-Maxwell sem Matéria 27

4.4 Modelo Abeliano de Chern-Simons Estendido 31

5 Cordas Bosônicas na Presença de um Campo de Kalb-Ramond **39**

6 Considerações Finais e Perspectivas Futuras **45**

Capítulo 1

Introdução

Uma característica comum a todas as formulações teóricas que descrevem as interações fundamentais da Natureza é a existência de uma simetria interna chamada simetria de gauge:

$$\text{Inter. Fundamental} \Longrightarrow \text{Simetria de Gauge.}$$

Esta simetria introduz aspectos que dificultam o tratamento destas teorias, uma vez que daí decorre uma singularidade na Lagrangeana, refletida no aparecimento de um Hessiano nulo:

$$\text{Simetria de Gauge} \Longrightarrow \mathcal{L} \text{ singular}$$

Por sua vez, uma teoria com Lagrangeana singular implica, ao se tentar construir um formalismo Hamiltoniano, na existência de vínculos entre as coordenadas do espaço de fase:

$$\mathcal{L} \text{ singular} \Longrightarrow \phi_m\left(q,p\right)=0$$

Este quadro tem despertado um grande interesse nos últimos 50 anos, visto que são evidentes as dificuldades em se estabelecer um formalismo de quantização canônica neste caso.

Realmente, um progresso notável foi alcançado nas últimas duas décadas com o chamado formalismo BRST [1]. Verificou-se, em linhas gerais, que o tratamento deste problema poderia ser feito de maneira eficaz ao se estender o espaço de fase, via introdução de variáveis extras (com paridade de Grassmann invertida), e obter uma simetria mais geral, que permite a recuperação da estrutura canônica desejada. As quantidades clássicas e quânticas são vistas como objetos no grupo de cohomologia de um operador nilpotente que codifica a simetria do sistema. A superfície "física" encontra-se embebida neste espaço "aumentado" e a física é resgatada na solução do problema cohomológico. Apesar deste método, em suas várias formulações, tratar com todas as situações de uma maneira marcadamente eficiente, permitindo a solução de problemas complexos como a identificação de anomalias, termos de Schwinger e renormalização, perde-se aí um tanto do quadro intuitivo do espaço físico.

Por outro lado, a solução no sentido oposto, qual seja, o de *reduzir* o espaço original, eliminando-se as variáveis espúrias cuja existência os vínculos acusam, e obtendo assim o espaço físico correspondente, não tem obtido o mesmo progresso. A dificuldade fundamental neste sentido seria a de não ser trivial a eliminação de variáveis através da expressão dos vínculos no caso geral. É precisamente nesta direção que o presente trabalho de tese caminha.

O método que apresentaremos, e que doravante chamaremos de "método dos projetores simpléticos (MPS), nasceu de um trabalho original do Prof. C. M. do Amaral [2], tratando sistemas clássicos discretos, não- relativísticos, sujeitos a um conjunto de vínculos holônomos independentes no espaço de configurações. Ao identificar a hipersuperfície onde se realiza a dinâmica com aquela definida pelos vínculos, Amaral construiu um projetor que define, localmente, um conjunto de coordenadas linearmente independentes no espaço tangente isomorfo à superfície dos vínculos. Este conjunto de coordenadas, livre de vínculos, serve como base para a descrição da dinâmica sobre a superfície.

Foi seguindo sugestão sua que nos pusemos a trabalhar de forma análoga na construção de uma estrutura geometricamente equivalente no espaço de fase de teorias de gauge. Não foi difícil perceber que sua estratégia geométrica poderia ser utilizada no espaço de fase ([3],[4]) com a única e severa restrição de que os vínculos presentes se enquadrem na categoria de vínculos de segunda-classe, na terminologia de Dirac [5]. O que em teorias de gauge significa exatamente a condiçao de realizar o *gauge-fixing* desde o início ([6] ,[7] ,[1]). Desta maneira, pudemos testar o MPS em diversos exemplos de teorias de gauge, desde situações clássicas como o eletromagnetismo em 4-D [8] até problemas mais atuais como cordas não-comutativas [9]. Apesar do fato de ser menos poderoso que o método BRST e mais restrito em suas aplicações, o MPS é bem mais simples de tratar nas várias situações em que não se esteja interessado em manter toda a generalidade de BRST. Em alguns casos os resultados concordaram com aquilo que já se conhecia, enquanto que em outros o MPS ajudou na investigação do conteúdo físico dos modelos em questão.

Este trabalho estará organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 faremos uma breve revisão dos conceitos básicos utilizados por Amaral [2], a extensão ao espaço de fase e às teorias de gauge, assim como algumas considerações gerais a respeito do projetor e a estrutura do espaço físico. No Capítulo 3 trataremos de sistemas simples que podem bem ilustrar o MPS ([10] , [11]). Em seguida, no Capítulo 4, analisaremos alguns problemas de teorias de gauge onde pudemos aplicar o MPS e obter resultados interessantes ([8], [12], [14]). Finalmente, o Capítulo 5 detém-se na aplicação do método a teorias de campos para objetos estendidos, tratando especificamente de uma corda bosônica com extremidades ligadas a D-branas [9]. Concluímos com as Considerações Finais e Futuras Perspectivas, discutidas no Capítulo 6.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Neste capítulo mostraremos como, partindo dos argumentos originais do Prof. C. M. do Amaral [2], construímos o projetor simplético para teorias de campos no espaço de fase. A construção, puramente geométrica, toma por base a natureza simplética da geometria presente. Conexões com o tratamento usual, de Dirac [5], são também discutidas, assim como algumas propriedades gerais recentemente estudadas [11].

2.1 Espaços de Configurações

Consideremos como ponto de partida um sistema discreto para o qual o espaço de configurações E^n é Euclidiano e isomorfo a R^n. As coordenadas Cartesianas globais são x^ν, onde $\nu = 1, \ldots, n$. Por hipótese o sistema se encontra sujeito a um conjunto mínimo de r vínculos holônomos independentes. A superfície de vínculos é descrita pelo seguinte conjunto de equações independentes

$$\Sigma \ : \quad \phi^I(x^\nu) = 0, \tag{2.1}$$

onde $I = 1, 2, \ldots, r$. A superfície Σ é geométrica e independente da dinâmica. Portanto, os objetos geométricos relacionados a ela são invariantes frente a evolução do sistema. Entretanto, a dinâmica se realiza sobre Σ e queremos encontrar um sistema de coordenadas local sobre ela e livre de vínculos.

O primeiro ponto a ser notado é que é possível construir um sistema de coordenadas local em cada ponto $x \in E^n$ de coordenadas globais x^ν se um campo matricial regular $M(x^\nu)$ é dado. Como a construção é puramente geométrica, os elementos de $M(x^\nu)$ devem ser independentes do tempo. Se $\mathbf{e}_\mu$ é a base ortogonal de E^n associada às coordenadas Cartesianas globais, a base local $\mathbf{f}_a(x)$, onde $a = 1, 2, \ldots, n$, associada ao sistema de coordenadas em P é dada por

$$\mathbf{f}_a(x) = M_a^\mu(x)\mathbf{e}_\mu. \tag{2.2}$$

Em geral, $M_a^\mu(x)$ definirá coordenadas locais também em Σ. A configuração do sistema no instante t será dada por um vetor posição $\mathbf{x}(t)$, no espaço de configurações, de um ponto da trajetória contida em Σ.

A fim de projetar na superfície de vínculos, escolhemos uma base local específica em cada ponto $x \in \Sigma$ separando o espaço tangente $T_x^n(E)$ a E^n em x na soma direta $T_x^{n-r}(\Sigma) \oplus N_x^r(\Sigma)$. Aqui,$T_x^{n-r}(\Sigma)$ é o espaço tangente a Σ em x e $N_x^r(\Sigma)$ é o espaço normal. A base local é então separada como $\mathbf{f_a}(x) = \{\mathbf{n}_I(x), \mathbf{t}_j(x)\}$, onde $\mathbf{n}_I(x)$ forma a base normalizada de $N_x^r(\Sigma)$ enquanto $\mathbf{t}_j$, $j = r+1, \ldots, n$, é a base no espaço tangente $T_x^{n-r}(\Sigma)$.

A base $\mathbf{n}^I(x)$ pode ser construída em termos dos vínculos $\phi^I(x)$; sejam

$$C_\mu^I \equiv \frac{\partial \phi^I(x)}{\partial x^\mu} \tag{2.3}$$

as componentes do vetor $\mathbf{C}^I$, normal à superfície de vínculos. Como os vínculos são, por hipótese, linearmente independentes, o conjunto de vetores unitários

$$\mathbf{n}^I(x) = \frac{\mathbf{C}^I\,(x)}{|\mathbf{C}^I\,(x)|} \tag{2.4}$$

forma uma base não - ortogonal no espaço $N_x^r(\Sigma)$. Estes vetores geram a métrica $g^{IJ}(x)$, que pode ser expressa em termos da métrica global $g^{\mu\nu}$ como

$$g^{IJ} = g^{\mu\nu}\partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J\ . \tag{2.5}$$

De posse destes objetos, é fácil construir um projetor que projete os vetores de E^n na vizinhança de x [2]. Uma maneira de ver isso é, usando a notação bra-ket de Dirac, onde $\langle \mathbf{n}_K|$ está na base canônica do espaço cotangente $T_x^{*(n-r)}$ associado a $|\mathbf{n}_J\rangle$, escrever o projetor $\Lambda(x)$ como

$$\Lambda(x) = \mathbf{1} - g^{JK} |\mathbf{n}_J\rangle \langle \mathbf{n}_K| \,. \tag{2.6}$$

Realmente, escrevendo o vetor genérico $\mathbf{V}$ na base local como $\mathbf{V} = V^I |\mathbf{n}_I\rangle + V^j |\mathbf{t}_j\rangle$ vemos que

$$\begin{aligned}
\Lambda V &= \left[\mathbf{1} - g^{JK} |\mathbf{n}_J\rangle \langle \mathbf{n}_K|\right] \left(V^I |\mathbf{n}_I\rangle + V^j |\mathbf{t}_j\rangle\right) \\
&= \mathbf{V}^I |\mathbf{n}_I\rangle + V^j |\mathbf{t}_j\rangle - g^{JK} |\mathbf{n}_J\rangle \langle \mathbf{n}_K| \left(V^I |\mathbf{n}_I\rangle + V^j |\mathbf{t}_j\rangle\right) \\
&= V^I |\mathbf{n}_I\rangle + V^j |\mathbf{t}_j\rangle - g^{JK} |\mathbf{n}_J\rangle \langle \mathbf{n}_K| V^I |\mathbf{n}_I\rangle \\
&= V^I |\mathbf{n}_I\rangle + V^j |\mathbf{t}_j\rangle - V^I |\mathbf{n}_I\rangle = V^j |\mathbf{t}_j\rangle
\end{aligned}$$

A partir de (2.6), com (2.5), podemos escrever os elementos de matriz do projetor explícitamente em termos dos vínculos:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi^I g_{IJ} \partial_\nu \phi^J \tag{2.7}$$

O projetor (2.7) selecionará as componentes paralelas ao espaço tangente a Σ em x de qualquer vetor no espaço de configurações. Como discutido em [2], o espaço tangente local é livre de vínculos. A fim de encontrar a configuração local do sistema em qualquer instante t basta projetar o vetor de configuração $\mathbf{x}(t)$ fazendo Λ atuar sobre ele. Os dois espaços T_x^{n-r} e N_x^r são dados pelos autovetores do projetor complementar $Q(x) = \mathbf{1} - \Lambda(x)$ associados aos autovalores 0 e 1, respectivamente.

Com uma escolha apropriada da matriz $M_a^\mu(x)$, podemos separar as componentes do vetor de configuração em dois conjuntos $\{x^j(t), x^I(t)\}$ que satisfazem as seguintes condições de contorno [2]

$$\dot{x}^I(t) = 0 \quad , \quad x^I(t) = \phi^I(x) = 0, \tag{2.8}$$

onde os vetores foram ordenados com $I = n - r + 1, \ldots, n$. A transformação regular geral para coordenadas locais que satisfaz (2.8) deixa invariante a Lagrangeana e, portanto, a Lagrangeana projetada pode ser localmente escrita como

$$L'(x^j(t), \dot{x}^j(t)) = L(x^\nu(t), \dot{x}^\nu(t)) \tag{2.9}$$

A dinâmica local é dada pelas equacões livres de Euler-Lagrange obtidas a partir de L' em termos de x^j apenas, ou de L com as condições de contorno (2.8).

2.2 O Projetor Simplético Λ e as Variáveis Físicas

A passagem para o espaço de fase nos obriga, em princípio, a tomar em conta a estrutura de geometria simplética agora presente, e que deve ser cuidadosamente levada em consideração. Veremos que esta estrutura define exatamente o tipo de vínculos com o qual é possível construir um projetor em analogia com o que foi feito acima. Antes, entretanto, vamos estabelecer alguns conceitos fundamentais na formulação canônica de teorias de gauge.

No tratamento geral de teorias com Lagrangeano singular [5], revela-se a existência de relações envolvendo momenta e coordenadas ao se realizar a transformação de Legendre. Estas relações são chamadas de vínculos primários da teoria. Condições de consistência, ao serem impostas sobre estes, dão origem a outros vínculos, que por isso são chamados de vínculos secundários. Este processo de verificação de condições de consistência e geração de novos vínculos é conhecido na literatura como algoritmo de Dirac. Findo este processo obtem-se o conjunto de vínculos ao qual o modelo se sujeita, não possuindo maior relevância a distinção entre vínculos primários ou secundários. Entretanto, uma outra distinção, esta sim de caráter fisicamente bastante relevante, tem então lugar. Alguns vínculos possuem parênteses de Poisson nulos, ao menos fracamente, na terminologia de Dirac, com todos os outros e com a Hamiltoniana. Servem então como geradores de transformações canônicas, e são rotulados de vínculos de primeira-classe. Serão denotados por

$$\chi_m(q,p) \approx 0 , \tag{2.10}$$

onde o símbolo $\approx$ significa igual sobre a superfície definida pelos vínculos.

Todos os demais são chamados vínculos de segunda-classe, e serão denotados por

$$\varphi_n(q,p) \approx 0 . \tag{2.11}$$

Pela sua definição, estes vínculos são tais que a matriz com elementos

$$\Delta_{mn} = \{\varphi_m, \varphi_n\} \tag{2.12}$$

é inversível.

A simples presença de vínculos entre as coordenadas do espaço de fase induz à possibilidade de expressar algumas destas em termos de um conjunto mínimo de coordenadas independentes, e este é em essência o argumento funtamental que norteia a busca de um espaço de fase reduzido, ou físico. Naquelas teorias em que os vínculos presentes são todos de segunda-classe esta possibilidade, em princípio, é plenamente realizável, como veremos adiante. As dificuldades aumentam quando da presença de vínculos de primeira-classe, como veremos a seguir.

A simetria obtida pelas transformações geradas pelos vínculos de primeira-classe é chamada simetria de gauge, neste contexto. As teorias de campos de gauge são então teorias que contêm vínculos de primeira-classe, por definição. Porém, a existência desta simetria implica na não-biunivucidade na relação entre estados físicos e pontos do espaço de fase; ou seja, a um estado físico estão associados pontos do espaço de fase que diferem por uma transformação canônica gerada pelos vínculos de primeira-classe. Para eliminar esta ambiguidade na descrição do sistema, um conjunto de relações deve ser imposto *ad hoc* de maneira a tornar o conjunto original de vínculos de primeira-classe em um novo conjunto, estendido, agora de segunda-classe. Este procedimento é conhecido na literatura como *gauge fixing*.

Retornemos à questão da construção do projetor no espaço de fase. A geometria da superfície de vínculos [1], em se tratando de um espaço de fase, é caracterizada pela existência de uma dois-forma induzida, J^{ij}, herança do fato de esta superfície estar embebida em um espaço que possui uma dois-forma simplética natural, um tensor antissimétrico não-degenerado de rank-2, $J^{\mu\nu}$, cujas componentes, em um sistema de coordenadas simplético ξ^λ são fornecidas pelos parênteses de Poisson fundamentais:

$$J^{\mu\nu} = \{\xi^\mu, \xi^\nu\} \tag{2.13}$$

Seja $2N$ a dimensão do espaço original, e M o número de vínculos presentes. Como desejamos obter um espaço de fase reduzido que contenha apenas a física do sistema, devemos procurar condições que nos garantam que este espaço reduzido possua uma dois-forma induzida inversível e uma estrutura de parênteses de Poisson bem definida. É relativamente simples mostrar [1] que esta estrutura estará garantida se o conjunto de vínculos em questão é um conjunto irredutível e de segunda-classe.

Embora esta seja uma restrição aparentemente forte, na maior parte dos casos de interesse físico ela pode ser contornada. A questão envolvida aqui está relacionada ao teorema de Darboux, que assegura que, pelo menos localmente, é sempre possível garantir a existência de um conjunto de condições de gauge fixing que transforme um conjunto de vínculos de primeira-classe em outro de segunda-classe.

Desta maneira, supondo um conjunto de vínculos de segunda-classe adequadamente construído, e levando em consideração que a estrutura geométrica que sustenta a construção do projetor no espaço de configurações e no espaço de fase é basicamente a mesma, é fácil ver que a extensão natural do projetor (2.7) para o espaço de fase, agora no contínuo, é obtida com a seguinte expresão para o projetor simplético:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(x,y) = \delta^{\mu}_{\nu}\,\delta^3(x-y) - J^{\mu\alpha}\int d^3\rho\, d^3\sigma\, \delta_{\alpha(x)}\varphi^i(\rho)\, J_{ij}(\rho,\sigma)\, \delta_{\nu(y)}\varphi^j(\sigma) \tag{2.14}$$

onde $\delta_{\alpha(x)}\varphi^i(\rho) \equiv \frac{\delta\varphi^i(\rho)}{\delta\xi^{\alpha}(x)}$, e J_{ij} é a matriz inversa daquela formada pelos Parênteses de Poisson entre os vínculos, e vem a ser a 2-forma induzida na superfície dos vínculos.

As variáveis projetadas

$$\xi^{*\mu}(x) = \int dy \Lambda^{\mu}_{\nu}(x,y)\xi^{\nu}(y) \tag{2.15}$$

são, em princípio, independentes, livres de vínculos, e possuem regras canônicas de comutação. Serão, daqui por diante, chamadas de variáveis físicas.

Por analogia ao que foi discutido acima (2.8 , 2.9) é fácil concluir que a Hamiltoniana projetada deve ser obtida da Hamiltoniana original via $H^* = H(\xi^*)$; ou seja, a Hamiltoniana física é obtida da Hamiltoniana original reescrevendo esta em termos das variáveis projetadas. As equações de movimento obtidas através do princípio variacional neste espaço reduzido livre de vínculos são as equações de Hamilton-Jacobi usuais:

$$\dot{\xi}^* = \{\xi^*, H^*\} \tag{2.16}$$

2.3 Discussões e Conclusões Gerais

Algumas considerações nos parecem dignas de notas. Em primeiro lugar, pode-se observar a semelhança estrutural entre a expressão (2.14) e a bem conhecida matriz dos Parênteses de Dirac fundamentais:

$$D^{MN} = \{\xi^M\ ,\ \xi^N\}_D = J^{MN} - J^{ML} J^{KN} \frac{\delta\varphi_m}{\delta\xi^L} \Delta^{-1}_{mn} \frac{\delta\varphi_n}{\delta\xi^K}\ . \tag{2.17}$$

Foi proposto originalmente por Dirac utilizar estes parênteses para fazer a passagem aos comutadores quânticos. Entretanto, existe um sério defeito na estrutura dos parênteses de Dirac, qual seja, como parênteses estendidos, os comutadores obtidos a partir deles perdem a estrutura de deltas de Kronecker. Uma maneira de evitar este problema é manter parênteses com estrutura canônica, reduzindo a análise do sistema ao subespaço físico embebido no espaço de fase. Este objetivo pode ser alcançado através da construção de operadores de projeção sobre a superfície física, da maneira que estamos propondo.

É fácil ver que a seguinte relação entre o projetor geométrico e a matriz algébrica de Dirac existe:

$$\Lambda = -DJ. \tag{2.18}$$

Esta relação simples conecta dois objetos que são construidos por abordagens completamente independentes.

Uma segunda observação que podemos fazer refere-se ao traço da matriz do projetor: considere em (2.14) $\mu = 1, .., 2N$ e $i = 1, .., M$; sendo J_{jk} definido por

$$\{\varphi^i, \varphi^j\} J_{jk} = \delta^i_k \tag{2.19}$$

e como, da definição dos Parênteses de Poisson

$$\{A, B\} = J^{\alpha\mu} \frac{\delta A}{\delta \xi^\alpha} \frac{\delta B}{\delta \xi^\mu}, \tag{2.20}$$

podemos reescrever (2.19) como

$$- J^{\alpha\mu} \frac{\delta \varphi^i}{\delta \xi^\alpha} J_{kj} \frac{\delta \varphi^j}{\delta \xi^\mu} = \delta^i_k. \tag{2.21}$$

Logo,

$$J^{\mu\alpha} \frac{\delta \varphi^i}{\delta \xi^\alpha} J_{ij} \frac{\delta \varphi^j}{\delta \xi^\mu} = \delta^i_i = M. \tag{2.22}$$

Podemos então computar o traço $\Lambda^{\mu\mu}$ em (2.14). Usando que $\delta^\mu_\mu = 2N$ e mais o resultado em (2.22), encontramos que

$$Tr\Lambda = 2N - M. \tag{2.23}$$

Nota-se que este coincide com o número de graus de liberdade do sistema, ou seja, partindo de um sistema com $2N$ coordenadas simpléticas sujeitas a $2M$ vínculos de segunda-classe, este será descrito por $2(N-M)$ coordenadas independentes, auto-vetores com auto-valores não-nulos da matriz do projetor.

Um outro resultado que obtivemos recentemente está relacionado com uma forma alternativa de escrever e ver a estrutura do MPS. Para isso, escrevamos simplesmente o projetor como

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + S) \tag{2.24}$$

Naturalmente, o projetor suplementar, que chamaremos V, pode ser escrito como

$$V = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - S) \tag{2.25}$$

Qual seria a motivação para escrever estes projetores nesta forma? Podemos ver facilmente que os auto-vetores da matriz S são as variáveis físicas, ξ^*, com auto-valores $+1$, e as variáveis não-físicas, $\bar{\xi}^*$, com auto-valores -1:

$$S\xi^* = (2\Lambda - \mathbf{1})\, \xi^* = \xi^* \tag{2.26}$$

$$S\,\bar{\xi}^* = -\,(2V - \mathbf{1})\,\bar{\xi}^* = -\,\bar{\xi}^* \tag{2.27}$$

Isto é, encontrar os auto-vetores da matriz S corresponde a encontrar, explícitamente, quais são as variáveis físicas e quais são as não-físicas! É interessante notar que a condição $\det S = +1$ garante a dimensão par para o espaço físico!

Realmente, encontrar as variáveis não-físicas não é algo que usualmente se pretenda. Mas observamos que quando encontramos o vetor ξ^* através de (2.15) não encontramos, em geral, explicitamente as variáveis físicas: algumas das componentes deste vetor são identicamente nulas, mas algumas são linearmente dependentes das outras, e enxergar esta dependência pode não ser simples em alguns problemas, seja por uma escolha *infeliz* de condições de *gauge fixing*, seja pela própria complexidade do modelo. Então, pelo menos nestas situações mais complicadas, a matriz S pode ser a mais útil.

Também vale notar que as observáveis da teoria dependem localmente das coordenadas ξ^* sobre a superfície dos vínculos. Realmente, como para a Lagrangeana, as condições de contorno (2.8)(observada a extensão natural para o espaço de fase) devem ser tomadas em conta ao se determinar qualquer observável, o que ultimamente expressa a independência da função correspondente nas coordenadas locais normais à superfície física.

Finalmente, uma questão central em teorias de campo com simetria de gauge, no que diz respeito ao método de projetores simpléticos, merece alguns comentários. Como vimos, o MPS toma como ponto de partida um "bom" conjunto de vínculos de segunda classe. Entretanto, a simetria de gauge em uma teoria de campo implica na existência de vínculos de primeira-classe. Tem-se então como central a questão do gauge-fixing. Uma escolha de condições de gauge que "fixe" o gauge de maneira correta, e que não gere ambiguidades, como as de Gribov, é uma condição determinante na aplicabilidade do MPS. Embora existam teorias em que esta escolha não possa ser feita globalmente, sabemos que localmente esta é sempre possível. Por outro lado, em todos os casos que aplicamos o MPS até o momento, como os que serão mostrados adiante, tal escolha foi possível sem ambiguidades. Casos em que esta escolha só é possivel localmente deverão merecer um estudo futuro.

Capítulo 3

Modelos Ilustrativos

Com o objetivo de ilustrar, em sistemas simples e didáticos, o MPS, analisaremos dois exemplos de teorias não-relativísticas que vêm sendo discutidas na literatura.

3.1 Modelo de Christ-Lee

Um modelo mecânico muito simples, não-relativístico, invariante de gauge, foi utilizado originalmente por N.H. Christ e T.D. Lee[15] para ilustrar consequências de diferentes escolhas de gauge em uma teoria. Desde então, este tem sido utilizado por vários autores, com propósito de exemplificar diferentes métodos de quantização ([16],[17],[18]). Em uma destas análises [16] o espaço de fase "físico" foi obtido, embora através de argumentos intuitivos. Mostramos então [10] como o mesmo resultado pode ser obtido de maneira sistemática através do MPS.

A Lagrangeana de partida é

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \left(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1\right) && (3.1)\\
&+ \frac{1}{2}x_3^2\left(x_1^2+x_2^2\right) - V(x_1^2+x_2^2) && (3.2)
\end{aligned}
$$

A Hamiltoniana canônica associada e os respectivos vínculos de segunda-classe (após o gauge-fixing) são:

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + V(x_1^2+x_2^2) \tag{3.3}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= p_3 = 0 && (3.4)\\
\varphi_2 &= p_2 - ep_1 = 0 && (3.5)\\
\varphi_3 &= x_2 - ex_1 = 0 && (3.6)\\
\varphi_4 &= x_3 = 0 && (3.7)
\end{aligned}$$

onde $e = \tan b/c$, e b e c são constantes não-nulas [16]. Observamos que a contagem de graus de liberdade já nos permite esperar que o espaço de fase físico terá $6-4=2$ dimensões, o que deverá ser confirmado pelo MPS.

As variáveis simpléticas podem ser definidas através da correspondência:

$$(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \leftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6) \tag{3.8}$$

O projetor simplético assume, neste caso, a forma simplificada (2.7), onde a métrica local (2.5) pode ser facilmente calculada tendo em conta (3.4-3.7); temos, explicitamente:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -(1+e^2) & 0 \\ 0 & (1+e^2) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \left(1+e^2\right)^{-1} & 0 \\ 0 & -\left(1+e^2\right)^{-1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

e

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \left(1+e^2\right)^{-1} & e\left(1+e^2\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e\left(1+e^2\right)^{-1} & e^2\left(1+e^2\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1+e^2\right)^{-1} & e\left(1+e^2\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e\left(1+e^2\right)^{-1} & e^2\left(1+e^2\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

O traço desta matriz nos dá a primeira confirmação a respeito da contagem dos graus de liberdade do sistema: $Tr\Lambda = 2$.

Com esta matriz em (2.15) obtemos as variáveis projetadas:

$$
\begin{aligned}
\xi_1^* &= \left(1+e^2\right)^{-1}\xi_1 + e\left(1+e^2\right)^{-1}\xi_2 && (3.12)\\
\xi_2^* &= e\xi_1^* && (3.13)\\
\xi_3^* &= 0 && (3.14)\\
\xi_4^* &= \left(1+e^2\right)^{-1}\xi_4 + e\left(1+e^2\right)^{-1}\xi_5 && (3.15)\\
\xi_5^* &= e\xi_4^* && (3.16)\\
\xi_6^* &= 0 && (3.17)
\end{aligned}
$$

Vemos então, explicitamente, que o conjunto de variáveis projetadas possui apenas duas variáveis independentes, ξ_1^* e ξ_4^*, que são as variáveis físicas do problema.

Para completar a descrição deste modelo vamos encontrar as equações do movimento neste espaço reduzido. A Hamiltoniana (3.3) na forma simplética é

$$H = \frac{1}{2}\xi_4^2 + \frac{1}{2}\xi_5^2 + V(\xi_1^2 + \xi_2^2) \tag{3.18}$$

Após projetada, temos a Hamiltoniana física

$$
\begin{aligned}
H^* &= \frac{1}{2}\xi_4^{*2} + \frac{1}{2}\xi_5^{*2} + V(\xi_1^{*2} + \xi_2^{*2}) && (3.19)\\
&= \frac{1}{2}\left(1+e^2\right)\xi_4^{*2} + V(\left(1+e^2\right)\xi_1^{*2})\,. && (3.20)
\end{aligned}
$$

Usando novas variáveis

$$
\begin{aligned}
x_* &= \left(1+e^2\right)^{1/2}\xi_1^* && (3.21)\\
p_* &= \left(1+e^2\right)^{1/2}\xi_4^* && (3.22)
\end{aligned}
$$

a Hamiltoniana física assume a forma mais familiar

$$H^* = \frac{1}{2}p_*^2 + V(x_*^2) \tag{3.23}$$

As equações canônicas do movimento são então obtidas através das equações de Hamilton-Jacobi usuais:

$$\dot{x}_* = \{x_*, H^*\} = p_* \tag{3.24}$$

$$\dot{p}_* = \{p_*, H^*\} = -\frac{\partial V}{\partial x_*} \tag{3.25}$$

Estes resultados concordam com aqueles obtidos em [16] usando um formalismo completamente independente.

3.2 Partícula em um Campo Eletromagnético

No exemplo anterior o MPS foi aplicado em um modelo com simetria de gauge utilizando apenas a abordagem geométrica. A única referência aos métodos usuais de formulação canônica de teorias de gauge encontra-se na maneira de analisar a estrutura dos vínculos presentes no modelo a fim de determinar qual o conjunto mínimo de vínculos de segunda-classe existente. Entretanto, como visto anteriormente (2.18), é possível tratar o problema de forma mais aproximada aos métodos tradicionais, utilizando os parênteses de Dirac fundamentais como ponto de partida na construção dos projetores. Mostraremos agora um exemplo simples em que esta abordagem é utilizada.

O seguinte "toy model" tem sido utilizado recentemente ([19], [39]) em discussões a respeito das propriedades não-comutativas de cordas abertas e D-branas na presença de um campo B [9]. O ponto de partida é a seguinte Lagrangeana

$$L = -\frac{eB}{2c}\dot{x}^i \varepsilon_{ij}\, x^j + e\Phi(x), \tag{3.26}$$

que descreve uma partícula em interação com um campo eletro-magnético com potencial estático $\Phi(x)$ e campo magnético constante e intenso B, no limite onde o termo de energia cinética pode ser desprezado ou $m \to 0$. O espaço de fase do modelo é 4-dimensional e suas coordenadas estão sujeitas a dois vínculos de segunda-classe

$$\varphi_i \equiv p_i + \frac{eB}{2c}\, \varepsilon_{ij}\, x^j \approx 0, \tag{3.27}$$

o que nos leva a uma contagem de $4-2=2$ graus de liberdade.

Os parênteses de Dirac (2.17) das variáveis originais são os seguintes:

$$\{x^i\ ,\ x^j\}_D = \frac{c}{eB}\,\varepsilon^{ij} \tag{3.28}$$

$$\{x^i\ ,\ p_j\}_D = \frac{1}{2}\delta^i_j \tag{3.29}$$

$$\{p_i\ ,\ p_j\}_D = -\frac{eB}{4c}\,\varepsilon_{ij}\ . \tag{3.30}$$

Vamos introduzir o vetor simplético ξ com as seguintes componentes

$$\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4\right) \equiv \left(x^1,x^2,p_1,p_2\right). \tag{3.31}$$

É fácil ver que a matriz D é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c}{eB} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{c}{eB} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{eB}{4c} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{eB}{4c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Usando a relação (2.18) podemos escrever o projetor simplético

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{c}{eB} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{c}{eB} & 0 \\ 0 & -\frac{eB}{4c} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{eB}{4c} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

(Observe-se que o traço desta matriz reproduz a contagem dos graus de liberdade feita acima.)

Com (3.33) encontramos as variáveis projetadas:

$$\xi^{*1} = \frac{1}{2}\,\xi^1 + \frac{c}{eB}\,\xi^4 \tag{3.34}$$

$$\xi^{*2} = \frac{1}{2}\,\xi^2 - \frac{c}{eB}\,\xi^3 \tag{3.35}$$

$$\xi^{*3} = -\frac{eB}{4c}\,\xi^2 + \frac{1}{2}\,\xi^3 = -\frac{eB}{2c}\,\xi^{*2} \tag{3.36}$$

$$\xi^{*4} = \frac{eB}{4c}\,\xi^1 + \frac{1}{2}\,\xi^4 = \frac{eB}{2c}\,\xi^{*1}\ . \tag{3.37}$$

Vemos então que o espaço de fase reduzido é bi-dimensional com as relações canônicas de comutação usuais entre ξ^{*1} e ξ^{*2} . A Hamiltoniana expressa em termos destas duas variáveis físicas pode ser usada como ponto de partida para a quantização do sistema.

Capítulo 4

Aplicações em Teorias de Campos de Gauge

Neste capítulo vamos aplicar o método dos projetores simpléticos a teorias de campos. Teorias de gauge em 2, 3 e 4 dimensões são analisadas com o intuito de testar a aplicabilidade do método, assim como ilustrar sua eficácia.

4.1 Eletrodinâmica 4-D

Como primeiro exemplo de aplicação do MPS em teorias de campo vamos analisar o modelo clássico da eletrodinâmica de Maxwell no gauge de radiação, uma vez que a Hamiltoniana em termos dos campos físicos para este modelo é um objeto bastante conhecido [20].

Como ponto de partida tomaremos a Hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H}_c = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}^2 + \mathbf{B}^2) + \pi_\psi \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial} - ie\,\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{A} - im)\psi \right\} \tag{4.1}$$

sujeita ao conjunto de vínculos de segunda classe

$$\varphi_1 = \pi_0 \tag{4.2}$$

$$\varphi_2 = \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\pi} + ie\,\pi_\psi \psi \tag{4.3}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_3 &= A_0 && (4.4)\\
\varphi_4 &= \boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{A} && (4.5)
\end{aligned}
$$

Estas são as informações básicas das quais necessitamos para aplicar o MPS: a métrica local $J_{ij}(x,y)$, é dada pela matriz

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \delta^3(x-y) & 0\\
0 & 0 & 0 & \nabla^{-2}\\
-\delta^3(x-y) & 0 & 0 & 0\\
0 & -\nabla^{-2} & 0 & 0
\end{pmatrix}, \tag{4.6}
$$

e com a prescrição

$$
(A_0, A_1, A_2, A_3, \psi, \pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_\psi) \longleftrightarrow (\xi_1, \cdots, \xi_{10}) \tag{4.7}
$$

podemos calcular, através de (2.14), a matriz do projetor simplético. Uma simples álgebra fornece a matriz $\Lambda(x,y)$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \delta^3(x-y)-\frac{\partial_1^x\partial_1^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_1^x\partial_2^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_1^x\partial_3^y}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\frac{\partial_2^x\partial_1^y}{\nabla^2} & \delta^3(x-y)-\frac{\partial_2^x\partial_2^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_2^x\partial_3^y}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\frac{\partial_3^x\partial_1^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_3^x\partial_2^y}{\nabla^2} & \delta^3(x-y)-\frac{\partial_3^x\partial_3^y}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{-ie\,\xi_5(x)\partial_1^y}{\nabla^2} & \frac{-ie\,\xi_5(x)\partial_2^y}{\nabla^2} & \frac{-ie\,\xi_5(x)\partial_3^y}{\nabla^2} & \delta^3(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ie\partial_1^x\xi_{10}(y)}{\nabla^2} & 0 & \delta^3(x-y)-\frac{\partial_1^x\partial_1^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_1^x\partial_2^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_1^x\partial_3^y}{\nabla^2} & \frac{-ie\partial_1^x\xi_5(y)}{\nabla^2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ie\partial_2^x\xi_{10}(y)}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_2^x\partial_1^y}{\nabla^2} & \delta^3(x-y)-\frac{\partial_2^x\partial_2^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_2^x\partial_3^y}{\nabla^2} & \frac{-ie\partial_2^x\xi_5(y)}{\nabla^2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ie\partial_3^x\xi_{10}(y)}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_3^x\partial_1^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_3^x\partial_2^y}{\nabla^2} & \delta^3(x-y)-\frac{\partial_3^x\partial_3^y}{\nabla^2} & \frac{-ie\partial_3^x\xi_5(y)}{\nabla^2}\\
0 & \frac{ie\,\xi_{10}(x)\partial_1^y}{\nabla^2} & \frac{ie\,\xi_{10}(x)\partial_2^y}{\nabla^2} & \frac{ie\,\xi_{10}(x)\partial_3^y}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^3(x-y)
\end{pmatrix} \tag{4.8}
$$

que ao ser aplicada ao vetor simplético produz as coordenadas físicas

$$
\xi^{1*}(x) \;=\; \xi^{6*}(x) = 0 \tag{4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{n*}(x) &= A^{\perp}_{n-1}(x)\,, n=2,3,4 && (4.10)\\
\xi^{5*}(x) &= \psi(x) && (4.11)\\
\xi^{10*}(x) &= \pi_{\psi}(x) && (4.12)\\
\xi^{m*}(x) &= \pi^{\perp}_{m-6}(x) + 2ie\int d^3y\,\partial^x_{m-6}\nabla^{-2}\pi_{\psi}(y)\,\psi(y)\,, m=7,8,9\,. && (4.13)
\end{aligned}
$$

Para encontrar a Hamiltoniana projetada reescrevemos a Hamiltoniana vinculada (4.1) na notação simplética:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \int d^3x\{\frac{1}{2}(\xi_7^2+\xi_8^2+\xi_9^2)+\frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_{\beta}\xi_{\gamma})^2\\
&\quad + \xi_{10}\gamma^0[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\partial} - ie(\gamma_1\xi_2+\gamma_2\xi_3+\gamma_3\xi_4) - im]\xi_5\}, \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

com $\alpha,\beta,\gamma = 2,3,4.$ A Hamiltoniana física é então:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^* &= \int d^3x\{\frac{1}{2}(\xi_7^{*2}+\xi_8^{*2}+\xi_9^{*2})+\frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_{\beta}\xi^*_{\gamma})^2\\
&\quad + \xi^*_{10}\gamma^0[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\partial} - ie(\gamma_1\xi^*_2+\gamma_2\xi^*_3+\gamma_3\xi^*_4) - im]\xi^*_5\}. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Retornando à notação do espaço de fase original, através de (4.9-4.13), temos finalmente:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^* &= \int d^3x\,\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\pi}^{\perp 2}+\boldsymbol{B}^2\right) + \pi_{\psi}\gamma^0\left(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\partial} - ie\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A}^{\perp} - im\right)\psi\\
&\quad + \frac{e^2}{2\pi}\int d^3x\,d^3y\;\pi_{\psi}(x)\,\psi(x)\;\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\pi_{\psi}(y)\,\psi(y)\,. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

que é a forma familiar da Hamiltoniana de Fermi.

É interessante notar que, conforme observamos ao final do capítulo anterior, embora o traço da matriz do projetor forneça a dimensão exata do espaço físico, as variáveis projetadas, neste caso, não são exatamente aquelas que representam este espaço, sendo necessário escolher uma determinada direção de propagação *a posteriori*. Neste contexto, talvez fosse interessante pesquisar os auto-vetores da matriz S, ou, ainda, fazer uma escolha de gauge mais *adequada*. Como nosso intuito aqui é a comparação com resultados já estabelecidos, nos damos por satisfeitos com esta ilustração.

4.2 Modelo Bosonizado de Schwinger 2-D

Como ilustração do MPS no caso de uma teoria de gauge bi-dimensional, analisaremos um modelo, proposto por Schwinger ([21],[22]), dado pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\, \gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - eA_{\mu})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.17}$$

Usando o dicionário de bosonização de Kogut e Susskind [23],

$$i\,\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = \frac{1}{2}\,(\partial_{\mu}\phi)\,(\partial^{\mu}\phi) \tag{4.18}$$

$$\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi, \tag{4.19}$$

obtemos a versão bosonizada deste modelo como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_{\mu}\phi\,\partial^{\mu}\phi + e\,\varepsilon^{\mu\nu}\,\partial_{\mu}\phi A_{\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.20}$$

Aplicaremos o método dos projetores simpléticos nesta teoria bosonizada.

Os momenta canônicos obtidos a partir de (4.20) são:

$$\pi_0 \approx 0 \tag{4.21}$$

$$\pi_1 = F_{10} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 \tag{4.22}$$

$$\pi_{\phi} = \partial_0\phi + eA_1. \tag{4.23}$$

A Hamiltoniana primária é:

$$H = \int dx\left[\frac{1}{2}\left\{\pi_1^2 + \pi_{\phi}^2 + (\partial_1\phi)^2 - e^2A_1^2\right\} + e\pi_{\phi}A_1 + A_0(\partial_1\pi_1 + e\partial_1\phi) + \lambda\pi_0\right] \tag{4.24}$$

onde λ é um campo multiplicador de Lagrange.

Impondo condições de consistência sobre o vínculo primário (4.21), obtemos apenas o vínculo secundário

$$\partial_1\pi_1 + e\partial_1\phi \approx 0. \tag{4.25}$$

A estes vínculos de primeira-classe adicionamos as condições de “Gauge de Coulomb”, de forma a termos o seguinte conjunto de vínculos de segunda-classe na teoria:

$$\varphi_1 = \pi_0 = 0 \tag{4.26}$$

$$\varphi_2 = \partial_1 \pi_1 + e\partial_1 \phi = 0 \tag{4.27}$$

$$\varphi_3 = A_0 = 0 \tag{4.28}$$

$$\varphi_4 = \partial_1 A_1 = 0. \tag{4.29}$$

Com este conjunto construimos a matriz $g_{ij}\,(x,y) = \{\varphi_i(x), \varphi_j(y)\}$:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1^2\delta(x-y) \\ \delta(x-y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1^2\delta(x-y) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

tendo como inversa

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\partial_1^2} \\ -\delta(x-y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\partial_1^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Os elementos de matriz do projetor, $\Lambda_\nu^\mu\,(x,y)$, podem então ser calculados a partir da definição geral (2.14). Usando a prescrição

$$(A_0, A_1, \phi, \pi_0, \pi_1, \pi_\phi) \longleftrightarrow (\xi_1, ..., \xi_6)\,, \tag{4.32}$$

encontramos a matriz Λ na seguinte forma:

$$\Lambda\,(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta(x-y) + \frac{\partial_1^x \partial_2^y}{\partial_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta(x-y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e\frac{\partial_1^x \partial_2^y}{\partial_1^2} & 0 & \delta(x-y) + \frac{\partial_1^x \partial_2^y}{\partial_1^2} & 0 \\ 0 & e\frac{\partial_1^x \partial_2^y}{\partial_1^2} & 0 & 0 & 0 & \delta(x-y) \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

Assim, as coordenadas projetadas são:

$$\xi_1^*\,(x) \;\; = \;\; 0 \tag{4.34}$$

$$\xi_2^*(x) = 0 \tag{4.35}$$

$$\xi_3^*(x) = \phi(x) \tag{4.36}$$

$$\xi_4^*(x) = 0 \tag{4.37}$$

$$\xi_5^*(x) = -e\phi(x) \tag{4.38}$$

$$\xi_6^*(x) = -eA_1(x) + \pi_\phi(x) \tag{4.39}$$

Vemos daí que o espaço físico em questão possui apenas duas coordenadas, ξ_3^* e ξ_6^*, uma vez que $\xi_5^* = -e\xi_3^*$.

A Hamiltoniana vinculada, escrita na notação simplética, é:

$$H = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left[\xi_5^2 + \xi_6^2 + (\partial_1 \xi_3)^2 - e^2 \xi_2^2 \right] + e\xi_6 \xi_2 + \xi_1 (\partial_1 \xi_5 + e\partial_1 \xi_3) + \lambda \xi_4 \right\}. \tag{4.40}$$

A Hamiltoniana projetada é então:

$$H^* = \int dx \frac{1}{2} \left[\xi_5^{*2} + \xi_6^{*2} + (\partial_1 \xi_3^*)^2 \right]. \tag{4.41}$$

Das relações (4.34-4.39) notamos que

$$\xi_5^* = -e\xi_3^*, \tag{4.42}$$

o que significa que esta não é uma variavel independente. Desta forma, a expressão (4.41) se torna:

$$H^* = \int dx \frac{1}{2} [e^2 q^2 + p^2 + (\partial_1 q)^2], \tag{4.43}$$

onde escrevemos (q, p) no lugar de (ξ_3^*, ξ_6^*). Notamos que $p \equiv \pi_\phi(x) - eA_1(x)$. Este corresponde ao novo campo introduzido *ad hoc* em [24]. Desta Hamiltoniana podemos ver que:

$$\dot{q} = \{q, H^*\} = p$$

e

$$\ddot{q} = \dot{p} = e^2 q + \partial\partial_1^2 q,$$

ou seja,

$$\left(\Box + e^2\right)\phi = 0. \tag{4.44}$$

Portanto, ϕ é um campo massivo livre com massa igual a e.

4.3 Chern-Simons-Maxwell sem Matéria

Neste exemplo iremos derivar a Hamiltoniana física e as equações de movimento para o modelo 3D de Chern-Simons-Maxell sem a presença de campos de matéria. Usaremos as condições de gauge de Coulomb a fim de construir um conjunto de vínculos de segunda-classe. A expressão da Hamiltoniana física está muito próxima de uma outra obtida em um trabalho recente[25] onde o procedimento de quantisação via parênteses de Dirac (DBQP) foi aplicado.

Tomaremos como ponto de partida a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha}\partial_{\beta}A_{\gamma}, \tag{4.45}$$

onde a métrica $(-1,1,1)$ é adotada.

A Hamiltoniana generalizada tem a seguinte forma canônica:

$$\mathcal{H} = \int d^2x \left[\frac{1}{2}\pi^i\pi^i + \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{ij}\partial^i A^j\right)^2 + \frac{1}{2}m^2 A^k A^k + m\varepsilon^{ij}A^i\pi^j\right], \tag{4.46}$$

com as relações de vínculos de segunda-classe:

$$\phi^1 = \pi^0 = 0, \tag{4.47}$$

$$\phi^2 = \partial^i\pi^i + m\,\varepsilon^{ij}\partial^j A^i = 0, \tag{4.48}$$

$$\phi^3 = A^0 = 0, \tag{4.49}$$

$$\phi^4 = \partial^i A^i = 0. \tag{4.50}$$

Para estabelecer uma estrutura simplética, vamos renomear as variáveis de campo de acordo com a seguinte correspondência:

$$\left(A^0,\, A^1,\, A^2,\, \pi^0,\, \pi^1,\, \pi^2\right) \Leftrightarrow \left(\xi^1,\, \xi^2,\, \xi^3,\, \xi^4,\, \xi^5,\, \xi^6\right). \tag{4.51}$$

Os vínculos ϕ^i definem a métrica local, J_{ij}, que é a inversa de $J^{ij}(x,y) =$

$\{\phi^i(x), \phi^j(y)\}$, e formalmente se escreve como abaixo:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta^2(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla^{-2} \\ -\delta^2(x-y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.52}$$

Após aplicar (2.14), encontramos para a matriz do projetor:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2(x-y) - \frac{\partial_1^x \partial_1^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_1^x \partial_2^y}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial_2^x \partial_1^y}{\nabla^2} & \delta^2(x-y) - \frac{\partial_2^x \partial_2^y}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m\,\delta^2(x-y) & 0 & \delta^2(x-y) - \frac{\partial_1^x \partial_1^y}{\nabla^2} & -\frac{\partial_1^x \partial_2^y}{\nabla^2} \\ 0 & m\,\delta^2(x-y) & 0 & 0 & -\frac{\partial_2^x \partial_1^y}{\nabla^2} & \delta^2(x-y) - \frac{\partial_2^x \partial_2^y}{\nabla^2} \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

Obter as variáveis físicas, $\xi_\mu^*(x)$, é uma questão de aplicar a prescrição (2.15); obtemos assim:

$$\xi^{1*}(x) = 0, \tag{4.54}$$

$$\xi^{2*}(x) = A_1^\perp(x), \tag{4.55}$$

$$\xi^{3*}(x) = A_2^\perp(x), \tag{4.56}$$

$$\xi^{4*}(x) = 0, \tag{4.57}$$

$$\xi^{5*}(x) = \pi_1^\perp(x) - m\,A_2^\perp(x), \tag{4.58}$$

$$\xi^{6*}\,(x) = \pi_2^{\perp}\,(x) + m\,A_1^{\perp}\,(x)\,. \tag{4.59}$$

Por um lado, nossa Hamiltoniana vinculada original, escrita em coordenadas simpléticas, toma a forma

$$\mathcal{H} = \int d^2\,x\,\left[\frac{1}{2}\,\left(\xi_5^{\,2} + \xi_6^{\,2}\right) + \frac{1}{2}\,\left(\partial_1\,\xi_3 - \partial_2\,\xi_2\right)^2 + \frac{1}{2} m^2\,\left(\xi_2^{\,2} + \xi_3^{\,2}\right) + m\left(\xi_{\,2}\,\xi_{\,6} - \xi_{\,3}\,\xi_{\,5}\right)\right]; \tag{4.60}$$

por outro lado,a Hamiltoniana projetada fica::

$$\mathcal{H}^* = \int d^2x\left[\frac{1}{2}\left(\xi_5^{*2} + \xi_6^{*2}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_3^* - \partial_2\xi_2^*\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\left(\xi_2^{*2} + \xi_3^{*2}\right) + m\left(\xi_2^*\xi_6^* - \xi_3^*\xi_5^*\right)\right]. \tag{4.61}$$

Voltando à notação original do espaço de fase, com ajuda das equações (4.54-4.59), finalmente concluimos que a Hamiltoniana projetada toma a forma mais familiar abaixo:

$$\mathcal{H}^* = \int d^2\,x\,\left[\frac{1}{2}\,\left(\pi_i^{\perp}\,\pi_i^{\perp} + 4\,m^2 A_i^{\perp}\,A_i^{\perp}\right) + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{ij}\,\partial_i\,A_j^{\perp}\right)^2 + 2\,m\,\left(A_1^{\perp}\,\pi_2^{\perp} - A_2^{\perp}\,\pi_1^{\perp}\right)\right]. \tag{4.62}$$

Esta é a Hamiltoniana de Chern-Simons-Maxwell escrita em termos das assim chamadas expressões transversas, que concorda com os resultados encontrados em [25] , embora a partir de uma linha diferente de argumentos.

Achamos interessante enfatizar, neste estágio, qual foi nossa verdadeira motivação ao realizar este trabalho: aplicar e checar o MPS, uma vez em que este é aplicado em um modelo massivo invariante de gauge em 3D. A concordância com os resultados em [25] confirmava a plausibilidade do método, que já havia sido checado de forma positiva para modelos em 4 e 2 dimensões.

Gostaríamos ainda de fazer uma importante observação a respeito deste resultado: a Hamiltoniana física é aquela dada por (4.61), uma vez que as variáveis físicas, aquelas respeitando parênteses de Poisson canônicos, são as ξ^*'s, e não as familiares variáveis de campos transversos. A única razão para escrever H^* como em (4.62) foi a de estabelecer uma ponte entre nossa abordagem e a terminologia usual.

Voltando às equações de movimento e utilizando a Hamiltoniana física no contexto das equações de Hamilton-Jacob, encontramos:

$$\ddot{\xi}_2^* = -2\,m^2\,\xi_2^* + \partial_2\,\partial_2\,\xi_2^* - \partial_1\,\partial_2\,\xi_3^* - 2\,m\,\xi_6^*, \tag{4.63}$$

$$\ddot{\xi}_3^* = -2\,m^2\,\xi_3^* + \partial_1\,\partial_1\,\xi_3^* - \partial_1\,\partial_2\,\xi_2^* - 2\,m\,\xi_5^*, \tag{4.64}$$

$$\ddot{\xi}_5^* = -2\,m^2\,\xi_5^* + \partial_2\partial_2\,\xi_5^* - \partial_1\,\partial_2\,\xi_6^* + m\,\left[2\,m^2 - \nabla^2\right]\,\xi_3^*, \tag{4.65}$$

$$\ddot{\xi}_6^* = -2\,m^2\,\xi_6^* + \partial_1\,\partial_1\,\xi_6^* - \partial_1\,\partial_2\,\xi_5^* - m\,\left[2m^2 - \nabla^2\right]\,\xi_2^*. \tag{4.66}$$

Aparentemente, estas equações podem parecer bastante estranhas; mas, se voltamos á notação familiar, por meio da correspondência entre os A's, π's e ξ's (4.54-4.59) podemos colocá-las na forma:

$$\left(\Box + 4\,m^2\right)\,A_1^\perp = -2\,m\,\pi_2^\perp, \tag{4.67}$$

$$\left(\Box + 4\,m^2\right)\,A_2^\perp = 2\,m\,\pi_1^\perp, \tag{4.68}$$

$$\Box\,\pi_1^\perp = 0, \tag{4.69}$$

$$\Box\,\pi_2^\perp = 0, \tag{4.70}$$

que resultam em assegurar que

$$\Box\,\left(\Box + 4\,m^2\right)\,A_i^\perp = 0, \qquad (i = 1, 2)\,. \tag{4.71}$$

Esta equação garante que a excitação física é um vetor transverso massivo $\left(p^2 = 4\,m^2\right)$. O quantum sem massa ($p^2 = 0$) é espúrio: não possui papel na dinâmica e não corresponde a nenhum modo físico. Realmente, ao acoplar o propagador do campo A_μ a uma corrente externa conservada, a amplitude corrente-corrente é tal que a parte imaginária de seu resíduo, tomada no polo $p^2 = 0$, se anula, o que confirma que o último não corresponde a nenhuma excitação física. Por outro lado, o polo não-trivial $p^2 = 4m^2$ produz um resíduo positivo-definido, que reforça seu carácter físico como o único grau de liberdade carregado pelo campo A_μ.

Esta análise pode ainda ser feita, de forma mais transparente, se escolhermos, sem perda de generalidade, uma determinada direção de propagação (p. ex. , $\vec{k} = (k, 0)$): neste caso, as equações (4.54-4.59) revelam explicitamente a existência de apenas duas variáveis independentes (uma vez que $\xi^{2*} = 0$ e $\xi^{5*} = -m\xi^{3*}$), como já se esperaria a partir da contagem de graus de liberdade, ou mesmo, do traço da matriz do projetor. O único campo sobrevivente teria como equação de movimento, simplesmente,

$$\left(\Box + 4\,m^2\right)\,A_2^\perp = 0. \tag{4.72}$$

4.4 Modelo Abeliano de Chern-Simons Estendido

Dando continuidade às investigações em teorias 3D, analisaremos agora o modelo 4D de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond ([26],[27]) quando submetido ao processo de redução dimensional. Obtém-se assim um modelo extendido de gauge, Abeliano, com um termo de Chern-Simons acoplando um par de potenciais de gauge ([28],[29]). A existência de um campo com simetria de gauge não-usual nos leva, como veremos, a um particular conjunto de gauge-fixing, revelando, por fim, a ausência de conteúdo físico para este campo[14].

Nosso ponto de partida é a densidade Lagrangeana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \frac{1}{2}\partial^\mu Z_\mu\partial^\nu Z_\nu - m\left(\partial^\mu Z_\mu\right)\varphi \\ & + m\varepsilon^{\mu\nu\rho}B_\mu\partial_\nu A_\rho, \end{aligned} \tag{4.73}$$

com

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{4.74}$$

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu, \tag{4.75}$$

e a métrica $\eta^{\mu\nu} = (+,-,-)$. Calculando os momenta canonicamente conjugados, temos

$$\pi^\mu \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 A_\mu\right)} = -F^{0\mu} + m\varepsilon^{\nu 0\mu}B_n\;, \tag{4.76}$$

que implicam em

$$\pi^0 = 0 \tag{4.77}$$

$$\pi^i = -F^{0i} + m\varepsilon^{0ik}B_k. \tag{4.78}$$

Também,

$$P^\mu \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 B_\mu\right)} = -G^{0\mu}, \tag{4.79}$$

ou

$$P^0 = 0\,, \tag{4.80}$$

$$P^i = -G^{0i}. \tag{4.81}$$

Para o campo escalar,

$$\pi_\varphi \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0\varphi\right)} = \partial_0\varphi. \tag{4.82}$$

Finalmente,

$$\pi'^\mu \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 Z_m\right)} = \left(-m\varphi + \partial^\beta Z_\beta\right)\eta^{\mu 0} \tag{4.83}$$

ou

$$\pi'^0 = \left(+\partial^\beta Z_\beta - m\varphi\right) \tag{4.84}$$

$$\pi'^i = 0. \tag{4.85}$$

Podemos então escrever a Hamiltoniana canônica da teoria:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c &= \pi^\mu\partial_0 A_\mu + P^\mu\partial_0 B_\mu + \pi'^\mu\partial_0 Z_\mu + \pi_\varphi\partial_0\varphi - \mathcal{L}\\ &= \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{2}P_i^2 + \frac{1}{2}\pi_\varphi^2 + \frac{1}{2}\pi_0'^2 + A_0\left(\partial_i\pi_i\right) + B_0\left(\partial_i P_i - m\varepsilon_{0ij}\partial_i A_j\right) +\\ &\quad + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + m\varepsilon_{0ik}\pi_i B_k + \frac{1}{2}m^2 B_k B_k + \frac{1}{4}G_{ij}G_{ij} + \frac{1}{2}\left(\partial_i\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2\\ &\quad + \pi_0'\left(m\varphi + \partial_i Z_i\right)\ .\end{aligned} \tag{4.86}$$

A Hamiltoniana primária é então

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + v_i\phi_i, \tag{4.87}$$

onde os vínculos primários são

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \pi_0 \approx 0 \\
\phi_2 &= P_0 \approx 0 \\
\phi_3 &= \pi_1' \approx 0 \\
\phi_4 &= \pi_2' \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Como se pode notar imediatamente, ϕ_3 e ϕ_4 são a primeira evidência do caracter não usual dos Z_μ's a ser posto à tona no conjunto de vínculos.As condições de consistência impostas sobre este conjunto fornecem os vínculos secundários:

$$\begin{aligned}
\phi_5 &= \partial_i \pi_i \approx 0 \\
\phi_6 &= \partial_i P_i - m\varepsilon_{0ij}\partial_i A_j \approx 0 \\
\phi_7 &= \pi_0' - f(t) \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.89}$$

para uma função arbitrária $f(t)$. Estes são todos vínculos de primeira-classe; as condições de gauge-fixing são escolhidas de modo que

$$\begin{aligned}
\phi_8 &= A_0 \approx 0 \\
\phi_9 &= B_0 \approx 0 \\
\phi_{10} &= Z_1 \approx 0 \\
\phi_{11} &= Z_2 \approx 0 \\
\phi_{12} &= \partial_i A_i \approx 0 \\
\phi_{13} &= \partial_i B_i \approx 0 \\
\phi_{14} &= Z_0 \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.90}$$

onde impomos o gauge-fixing de "Coulomb" sobre Z_μ em estreita analogia com o procedimento usual como aplicado sobre A_μ (e B_μ). Como resultado líquido, a coleção de vínculos relacionada a Z_μ já indicam que suas variáveis de espaço de fase devam ser excluídas do subconjunto dinâmico.

Vamos agora construir a matriz com elementos $g_{ij}(x,y) = \{\Omega_i(x), \Omega_j(y)\}$. Adotando a notação convencional $\delta \equiv \delta^2\,(x-y)$, temos que $g(x,y)$ é dada por

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_i^x \partial_i^y \delta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_i^x \partial_i^y \delta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta \\
\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_i^x \partial_i^y \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_i^x \partial_i^y \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{4.91}$$

cuja inversa, $g^{-1}(x,y)$, é dada por

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\nabla^{-2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\nabla^{-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\
-\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{4.92}$$

Vamos etiquetar os campos e seus correspondentes momenta como segue:

$$\begin{aligned}
&\left(A^0, A^1, A^2, \varphi, B^0, B^1, B^2, Z^0, Z^1, Z^2, \pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_\varphi, P_0, P_1, P_2, \pi'_0, \pi'_1, \pi'_2\right) \equiv \\
&\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15}, \xi_{16}, \xi_{17}, \xi_{18}, \xi_{19}, \xi_{20}\right).
\end{aligned}$$

Temos assim todos os ingredientes para calcular a matriz do projetor simplético (2.14); a fim de evitar o trato de expressões extensas e cansativas... vamos expressar diretamente as coordenadas projetadas obtidas via (2.15) aquelas não-nulas são:

$$\xi^{2*}(x) = A^{1\perp}(x) \tag{4.93}$$

$$\xi^{3*}(x) = A^{2\perp}(x) \tag{4.94}$$

$$\xi^{4*}(x) = \varphi(x) \tag{4.95}$$

$$\xi^{6*}(x) = B^{1\perp}(x) \tag{4.96}$$

$$\xi^{7*}(x) = B^{2\perp}(x) \tag{4.97}$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{12*}(x) &= \pi_1^{\perp}(x) + m\int d^2y\partial_{x_2}\nabla^{-2}(x,y)\left[\partial_{y_1}B_1(y) + \partial_{y_2}B_2(y)\right] \\
&= \overline{\pi}_1^{\perp}(x) \qquad (4.98)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{13*}(x) &= \pi_2^{\perp}(x) - m\int d^2y\partial_{x_1}\nabla^{-2}(x,y)\left[\partial_{y_1}B_1(y) + \partial_{y_2}B_2(y)\right] \\
&= \overline{\pi}_2^{\perp}(x) \qquad (4.99)
\end{aligned}
$$

$$
\xi^{14*}(x) = \pi_{\varphi}(x) \qquad (4.100)
$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{16*}(x) &= P_1^{\perp}(x) + m\partial_{x_1}\int d^2y\nabla^{-2}(x,y)\left[\partial_{y_1}A_2(y) - \partial_{y_2}A_1(y)\right] \\
&= P_1^{\perp}(x) + m\partial_{x_1}\int d^2y\nabla^{-2}(x,y)\left[\nabla\times A^{\perp}\right]_y \qquad (4.101)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{17*}(x) &= P_2^{\perp}(x) + m\partial_{x2}\int d^2y\nabla^{-2}(x,y)\left[\partial_{y_1}A_2(y) - \partial_{y_2}A_1(y)\right] \\
&= P_2^{\perp}(x) + m\partial_{x_2}\int d^2y\nabla^{-2}(x,y)\left[\nabla\times A^{\perp}\right]_y \qquad (4.102)
\end{aligned}
$$

A Hamiltoniana canônica reduzida é obtida da Hamiltoniana primária tomando em conta os vínculos e condições de gauge-fixing, vistos agora como igualdades fortes. Obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_c^r &= \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{2}P_i^2 + \frac{1}{2}\pi_{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\pi_0'^2 + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + m\varepsilon_{0ik}\pi_i B_k + \frac{1}{2}m^2 B_k B_k + \\
&+ \frac{1}{4}G_{ij}G_{ij} + \frac{1}{2}\left(\partial_i\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \pi_0'\left(m\varphi\right), \qquad (4.103)
\end{aligned}
$$

ou, em notação simplética,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_c^r &= \frac{1}{2}\left(\xi_{12}^2 + \xi_{13}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\xi_{16}^2 + \xi_{17}^2\right) + \frac{1}{2}\xi_{14}^2 + \frac{1}{2}\xi_{18}^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_3\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_2\right)^2 + \\
&- \left(\partial_1\xi_3\right)\left(\partial_2\xi_2\right) - m\left(\xi_{12}\xi_7 - \xi_{13}\xi_6\right) + \frac{1}{2}m^2\left(\xi_6^2 + \xi_7^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_7\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_6\right)^2 + \\
&- \left(\partial_1\xi_7\right)\left(\partial_2\xi_6\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_4\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_4\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\xi_4^2 + \xi_{18}\left(m\xi_4\right). \qquad (4.104)
\end{aligned}
$$

A densidade Hamiltoniana física é obtida reescrevendo a expressão acima em termos das variáveis projetadas:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^* &= \frac{1}{2}\left(\xi_{12}^{*2} + \xi_{13}^{*2}\right) + \frac{1}{2}\left(\xi_{16}^{*2} + \xi_{17}^{*2}\right) + \frac{1}{2}\xi_{14}^{*2} + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_3^*\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_2^*\right)^2 + \\
&- \left(\partial_1\xi_3^*\right)\left(\partial_2\xi_2^*\right) - m\left(\xi_{12}^*\xi_7^* - \xi_{13}^*\xi_6^*\right) + \frac{1}{2}m^2\left(\xi_6^{*2} + \xi_7^{*2}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_7^*\right)^2 + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_6^*\right)^2 - \left(\partial_1\xi_7^*\right)\left(\partial_2\xi_6^*\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_4^*\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_4^*\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\xi_4^{*2}. \qquad (4.105)
\end{aligned}
$$

Finalmente, as equações de movimento são obtidas diretamente das equações de Hamilton-Jacobi através dos parênteses de Poisson entre as variáveis projetadas e a Hamiltoniana $\int d^2y\, \mathcal{H}^*(y)$. Assim procedendo obtemos:

$$\dot{\xi}_4^*(x) = \int d^2y\, \{\xi_4^*(x), \mathcal{H}^*(y)\} = \xi_{14}^*(x)\ ; \tag{4.106}$$

esta fornece

$$\ddot{\xi}_4^* = \dot{\xi}_{14}^* = \int d^2y\, \{\xi_{14}^*, \mathcal{H}^*(y)\} = -m^2\xi_4^* + \nabla^2\xi_4^*\ , \tag{4.107}$$

ou

$$(\Box + m^2)\xi_4^* = 0\ . \tag{4.108}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}_2^* &= \partial_2\partial_2\xi_2^* - \partial_1\partial_2\xi_3^* - m\xi_{17}^* \\
\ddot{\xi}_3^* &= \partial_1\partial_1\xi_3^* - \partial_1\partial_2\xi_2^* + m\xi_{16}^* \\
\ddot{\xi}_6^* &= -m^2\xi_6^* + \partial_2\partial_2\xi_6^* - \partial_1\partial_2\xi_7^* - m\xi_{13}^* \\
\ddot{\xi}_7^* &= -m^2\xi_7^* + \partial_1\partial_1\xi_7^* - \partial_1\partial_2\xi_6^* + m\xi_{12}^*.
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Agora, as equações (4.109) podem ser reexpressas numa forma bem mais simples se escolhemos, sem perda de generalidade, o momentum apontando segundo o eixo x ($\vec{k} = (k, 0)$), selecionando as componentes (A_2, B_2) como aquelas transversas. Pode-se notar facilmente que tal escolha acarreta no cancelamento das variáveis ξ_2^*, ξ_6^* e ξ_{12}^*, e converte as variáveis ξ_{16}^* e ξ_{17}^* em:

$$\begin{aligned}
\xi_{16}^* &= -m\xi_3^*, \\
\xi_{17}^* &= P_2^{\perp}.
\end{aligned}$$

O conjunto de variáveis independentes seria especificado, correspondentemente, pelos pares (ξ_3^*, ξ_{13}^*), (ξ_4^*, ξ_{14}^*) e (ξ_7^*, ξ_{17}^*). As equações de movimento resultantes seriam então:

$$\begin{aligned}
\Box\xi_4^* &= -m^2\xi_4^*, \\
\Box\xi_3^* &= -m^2\xi_3^*, \\
\Box\xi_7^* &= -m^2\xi_7^*.
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Temos então a presença de um campo escalar massivo, ξ_4^*,e dois campos vetorias transversos massivos, ξ_3^* e ξ_7^*, de acordo com o que seria esperado da contagem de graus de liberdade tendo em conta a Lagrangeana 3D (4.73) e os vínculos de segunda classe presentes. Tal resultado é também compativel com a alocação natural de graus de liberdade físicos que podem ser inferidos do modelo original 4D. Além disso, o fato de que os dois vetores introduzem no setor físico contribuições transversas massivas equivalentes sugere a possibilidade de se realizar o mapeamento consistente em um novo modelo, procedimento este que pode ser implementado através da identificação de ambos os campos vetoriais (e parceiros, num contexto supersimétrico), como proposto em [28].

Capítulo 5

Cordas Bosônicas na Presença de um Campo de Kalb-Ramond

Vamos por fim analisar uma teoria em espaço-tempo d-dimensional, considerando um modelo de cordas bosônicas abertas com extremidades ligadas a D-branas sujeitas a um potencial de gauge $A^i(X)$ com field-strength constante F_{ij}, métrica constante g_{ij} e um campo de Kalb-Ramond constante $B_{ij}(X)$. A análise Hamiltoniana de tais modelos tem sido feita em diversas variantes da abordagem de Dirac ([30]-[40]).Vamos construir o projetor simplético através dos elementos da matriz de Dirac (2.18), encontrar as coordenadas não-vinculadas das cordas abertas e a Hamiltoniana que governa sua dinâmica. Veremos que se escolhermos as variáveis dependentes como aquelas que correspondem às duas extremidades das cordas, então a corda aberta é equivalente a um sistema com coordenadas cíclicas[9].

A ação do sistema é dada pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \left[\partial_a X^i \partial^a X_i + 2\pi\alpha' B_{ij}\varepsilon^{ab}\partial_a X^i \partial_b X^j\right] \\ &\quad + \int d\sigma\delta(\sigma-\pi)A_i\partial_\sigma X^i - \int d\sigma\delta(\sigma)A_i\partial_\sigma X^i, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $\sigma^\alpha = (\tau, \sigma)$ são as coordenadas “folha do mundo” e ϵ^{ab} é o símbolo anti-simétrico em duas dimensões $a, b = 0, 1$. Escolhemos por conveniência trabalhar em um espaço-tempo Euclidiano d-dimensional e os “target-space indices” são $i, j = 1, 2, \ldots, d$, onde d é par e para corda crítica $d = 26$. Uma vez que o campo de gauge é constante, pode-se convenientemente fazê-lo nulo $F_{ij} = 0$. Variando a ação (5.1) com respeito aos campos obtemos as equações de movimento

$$\partial_a \partial^a X^i = 0, \tag{5.2}$$

que valem se, e apenas se, as condições de contorno mixtas de Dirichlet e Neumann valem

$$g_{ij} \partial_\sigma X^j + 2\pi\alpha' B_{ij} \partial_\sigma X^j|_{\sigma=0,\pi} = 0. \tag{5.3}$$

As condições de contorno (5.3) representam relações entre os momenta da corda. No processo de quantização usual, estas condições devem ser impostas no espaço de Hilbert da teoria. Entretanto, existe uma abordagem alternativa para quantizar o sistema, na qual as condições de contorno são tratadas como vínculos algébricos ([32]-[35]).Para isto, deve-se primeiramente discretizar a corda dividindo a extensão do parâmetro σ por $\epsilon > 0$. A coordenada $X^i(\sigma)$ para $i = 1, 2, \ldots, d$ é equivalente ao seguinte conjunto discreto X^i_α onde $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ e $\epsilon = \pi/m$. É fácil ver que a Lagrangeana discretizada tem a seguinte forma

$$L = (4\pi\alpha')^{-1} \sum_\alpha \left[\varepsilon \left(\dot{X}^i_\alpha \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon} \left(X^i_{\alpha+1} - X^i_\alpha \right)^2 + 4\pi\alpha' B_{ij} \dot{X}^i_\alpha \left(X^j_{\alpha+1} - X^j_\alpha \right) \right], \tag{5.4}$$

enquanto que as condições de contorno (5.3) em $\sigma = 0$ se tornam

$$\frac{g_{ij}}{\varepsilon} \left(X^j_2 - X^j_1 \right) + 2\pi\alpha' B_{ij} \dot{X}^j_1 = 0. \tag{5.5}$$

Similarmente, um conjunto idêntico de condições de contorno discretizadas é obtido em $\sigma = \pi$ com $\{1, 2\}$ em (5.3) substituido por $\{m, m-1\}$.

Devido à discretização, as condições de contorno são equivalentes a vínculos algébricos sobre as extremidades da corda e sobre seus primeiros vizinhos, enquanto que as variáveis do centro são desvinculadas ([32] e [39]). Se passamos às variáveis canonicamente conjugadas X^i_α e $P_{i\alpha}$, podemos checar facilmente que os v’nculos, que toma a seguinte forma,

$$w_i = \frac{1}{\varepsilon} \left[(2\pi\alpha')^2 B_{ij} P^j_1 - (2\pi\alpha')^2 B_{ij} B^{jk} \left(X_{2k} - X_{1k} \right) + g_{ij} \left(X^j_2 - X^j_1 \right) \right] \approx 0, \tag{5.6}$$

são de segunda classe. Existe um segundo conjunto de vínculos γ_i na outra extremidade da corda, os quais podem ser obtidos de (5.6) apenas trocando as correspondentes coordenadas e momenta. Na análise subsequente, podemos eliminar o parâmetro ϵ.

De forma a construir o projetor sobre a superfície dos vínculos vamos organizar as variáveis matriciais X_α^i e $P_{i\alpha}$ em um vetor coluna por Z^M. É fácil perceber que a correspondência entre os índices $\{i, \alpha\}$ e $\{M\}$ é dada pela seguinte relação:

$$M = (\mu + \alpha) + (m - 1)(\mu - 1) - 1, \tag{5.7}$$

onde $\mu = i, d + i$ e $i = 1, 2, \ldots, d$. É útil também manter a guarda sobre as coordenadas canônicas e seus momenta conjugados nesta notação. De (5.7) pode-se ver que a correspondência entre os dois conjuntos de variáveis é

$$X_\alpha^i,\ P_{\alpha i} \rightarrow Z^{m(i-1)+\alpha},\ Z_{m(d+i-1)+\alpha} \tag{5.8}$$

Em seguida, vamos explicitar as variáveis canônicas em variáveis de extremos e variáveis de centro, respectivamente, explicitando o índice α como segue: $\alpha = 1, 2, n, m-1, m$, onde $n = 3, 4, \ldots, m-2$. É imediato computar os parênteses de Dirac para o sistema discretizado (veja, por exemplo,[39]). A inversa da matriz dos vínculos é dada pela seguinte relação:

$$\left(C^{-1}\right)^{ij} = \frac{\varepsilon^2}{2\left(2\pi\alpha'\right)^2}\left[\frac{1}{(g + 2\pi\alpha' B)}\frac{1}{B}\frac{1}{(g - 2\pi\alpha' B)}\right]^{ij}. \tag{5.9}$$

Com isto, podemos escrever a matriz Λ usando a fórmula (2.18) com as variáveis (5.8). Para escrever seus elementos não-nulos observamos de (5.7) que o índice M pode ser determinado por i, α e $d{+}i, \alpha$. É também importante observar que a matriz do projetor consiste em quatro blocos de acordo com o tipo de coordenadas Z's sobre as quais ele atua e mapeia , i.e., coordenadas tipo-X e tipo-P, respectivamente. As componentes não-nulas do primeiro bloco da matriz Λ são os seguintes:

$$\begin{aligned} 2\Lambda^{i(1)}_{\ j(1)} &= 2\Lambda^{i(1)}_{\ j(2)} = \Lambda^{i(2)}_{\ j(2)} = \Lambda^{i(m-1)}_{\ j(m-1)} = 2\Lambda^{i(m)}_{\ j(m-1)} = 2\Lambda^{i(m)}_{\ j(m)} = \delta^i_j. \\ \Lambda^{i(n)}_{\ j(n')} &= \delta_{nn'}\delta^i_j \end{aligned} \tag{5.10}$$

Note que o índice α não é um índice covariante, e portanto sua posição relativa é irrelevante. Ele apenas marca as diferentes coordenadas discretas de centro ou das extremidades da corda. O bloco (5.10) mapeia coordenadas de posição em coordenadas de posição. Da mesma maneira podemos escrever os elementos não-nulos para os outros blocos:

$$\Lambda^{i(1)\ d+j(1)} = -\Lambda^{i(m)\ d+j(m)} = \frac{1}{2}(2\pi\alpha')^2 \left(\frac{1}{(g+2\pi\alpha' B)} B \frac{1}{(g-2\pi\alpha' B)} \right)^{ij}, \tag{5.11}$$

para o bloco que mapeia P's em X's,

$$\begin{aligned} \Lambda_{d+i(1)\ j(1)} &= -\Lambda_{d+i(1)\ j(2)} = \Lambda_{d+i(2)\ j(1)} = \Lambda_{d+i(2)\ j(2)} = -\Lambda_{d+i(m-1)\ j(m-1)} \\ &= -\Lambda_{d+i(m-1)\ j(m)} = \Lambda_{d+i(m)\ j(m-1)} = -\Lambda_{d+i(m)\ j(m)} \\ &= \frac{1}{2(2\pi\alpha')^2} \left((g+2\pi\alpha' B) \frac{1}{B} (g-2\pi\alpha' B) \right)_{ij}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

para o bloco que mapeia X's em P's e

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{d+i(1)}^{\ d+j(1)} &= 2\Lambda_{d+i(1)}^{\ d+j(2)} = \Lambda_{d+i(2)}^{\ d+j(2)} = \Lambda_{d+i(m-1)}^{\ d+j(m-1)} = 2\Lambda_{d+i(m)}^{\ d+j(m-1)} = 2\Lambda_{d+i(m)}^{\ d+j(m)} = \delta^i_j, \\ \Lambda_{d+i(n)}^{\ d+j(n')} &= \delta_{nn'}\delta^i_j \end{aligned} \tag{5.13}$$

para o bloco que mapeia P's em P's. Os elementos do projetor são matrizes com elementos indexados por i, j. Nós escolhemos trabalhar com a estrutura canônica dos índices, i.e. (X^i, P_j). Então é importante que a matriz Λ mantenha esta estrutura através da projeção. De outra forma teríamos que incluir nela a métrica g_{ij} para abaixar ou levantar índices. Isto mudaria ligeiramente a forma da matriz de Dirac. Estas complicações são evitadas pela construção acima e a matriz Λ dada em (5.10-5.13) é consistente com a covariância do espaço de fase.

Ao atuar com a matriz Λ sobre as coordenadas do espaço de fase chegamos às variáveis projetadas sobre a superfície de vínculos. De (5.10-5.13) obtemos as seguintes coordenadas projetadas:

$$\begin{aligned} Z^{\star m(i-1)+1} &= \frac{1}{2} Z^{m(i-1)+1} + \frac{1}{2} Z^{m(i-1)+2} \\ &\quad + \frac{1}{2} T^{-2} \left(C^{-1} B A^{-1} \right)^{ij} Z_{m(d+j-1)+1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z^{\star m(i-1)+2} &= Z^{m(i-1)+2} \\
Z^{\star m(i-1)+n} &= Z^{m(i-1)+n} \\
Z^{\star m(i-1)+(m-1)} &= Z^{m(i-1)+(m-1)} \\
Z^{\star m(i-1)+m} &= \frac{1}{2}Z^{m(i-1)+m} + \frac{1}{2}Z^{m(i-1)+(m-1)} \\
&\quad - \frac{1}{2}T^{-2}\left(C^{-1}BA^{-1}\right)^{ij} Z_{m(d+j-1)+m} \\
Z^{\star}_{m(d+i-1)+1} &= \frac{1}{2}Z_{m(d+i-1)+1} - \frac{1}{2}T^{2}\left(CB^{-1}A\right)_{ij} Z^{m(j-1)+2} \\
&\quad + \frac{1}{2}T^{2}\left(CB^{-1}A\right)_{ij} Z^{m(j-1)+1} \\
Z^{\star}_{m(d+i-1)+2} &= Z_{m(d+i-1)+2} + \frac{1}{2}T^{2}\left(CB^{-1}A\right)_{ij} Z^{m(j-1)+2} \\
&\quad + \frac{1}{2}T^{2}\left(CB^{-1}A\right)_{ij} Z^{m(j-1)+1} + \frac{1}{2}Z_{m(d+i-1)+1} \\
Z^{\star}_{m(d+i-1)+n} &= Z_{m(d+i-1)+n} \\
Z^{\star}_{m(d+i-1)+m-1} &= Z_{m(d+i-1)+m-1} - \frac{1}{2}T^{2}\left(CB^{-1}A\right)_{ij} Z^{m(j-1)+m-1} \\
&\quad + \frac{1}{2}T^{2}\left(CB^{-1}A\right)_{ij} Z^{m(j-1)+m} + \frac{1}{2}Z_{m(d+i-1)+m} \\
Z^{\star}_{m(d+i-1)+m} &= -\frac{1}{2}Z_{m(d+i-1)+m} - \frac{1}{2}T^{2}\left(CB^{-1}A\right)_{ij} Z^{m(j-1)+m} \\
&\quad + \frac{1}{2}T^{2}\left(CB^{-1}A\right)_{ij} Z^{m(j-1)+m-1},
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

onde usamos as seguintes notações abreviadas

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= (g - 2\pi\alpha' B)_{ij} \\
B_{ij} &= B_{ij} \\
C_{ij} &= (g + 2\pi\alpha' B)_{ij}
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

e $T = (2\pi\alpha')^{-1}$. Note que nem todas as variáveis em (5.14) são independentes. Entretanto, as relações entre elas são lineares. Podemos ver que existem duas variáveis dependentes sobre a superfície de vínculos. Usando a simetria com respeito à troca das extremidades da corda encontra-se facilmente esta relação. Podemos escolher as coordenadas nas extremidades como variáveis dependentes e obtemos as seguintes relações para estas em termodas coordenadas independentes:

$$
Z^{\star m(i-1)+1} = T^{-2}\left(C^{-1}BA^{-1}\right)^{ij} Z^{\star}_{m(d+i-1)+1} + Z^{\star m(i-1)+2} \tag{5.16}
$$

$$Z^{\star m(i-1)+m} = -T^{-2}\left(C^{-1}BA^{-1}\right)^{ij} Z^{\star}_{m(d+i-1)+m} + Z^{\star m(i-1)+m-1}. \tag{5.17}$$

Das relações acima, vemos que o sistema é equivalente a um sistema com $2d(m-1)$ variáveis independentes que parametrizam localmente a superfície de vínculos, o que corresponde ao número correto de graus de liberdade para $2dm$ variáveis totais e $2d$ vínculos de segunda classe originais. Estas variáveis comutam entre sí em concordância com o resultado obtido em [40], mas nesta descrição o sistema é cíclico nas coordenadas das extremidades, o que implica em que os correspondentes momenta são conservados. A Hamiltoniana deste sistema tem a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
H^{\star} &= \frac{1}{4\pi\alpha'\varepsilon}\sum_{n=3}^{m-2}\left[(2\pi\alpha')^{2}\left(Z^{\star}_{m(d+i-1)+n} - B_{ij}\left(Z^{\star m(j-1)+n+1} - Z^{\star m(j-1)+n}\right)\right)^{2} + \right. \\
&\quad \left. + \left(Z^{\star m(j-1)+n+1} - Z^{\star m(j-1)+n}\right)^{2}\right] + \\
&\quad + \frac{4(\pi\alpha')^{3}}{\varepsilon}\left[\left(C^{-1}BA^{-1}\right)^{ij} Z^{\star}_{m(d+j-1)+m}\right]^{2} + \frac{4(\pi\alpha')^{3}}{\varepsilon}\left[\left(C^{-1}BA^{-1}\right)^{ij} Z^{\star}_{m(d+j-1)+1}\right]^{2} + \\
&\quad + \frac{\pi\alpha'}{\varepsilon}\left[Z^{\star}_{m(d+i-1)+1} + \frac{1}{(2\pi\alpha')^{-2}} B_{ij}\left(C^{-1}BA^{-1}\right)^{ij} Z^{\star}_{m(d+j-1)+1}\right]^{2} + \\
&\quad + \frac{\pi\alpha'}{\varepsilon}\left[Z^{\star}_{m(d+i-1)+m-1} + B_{ij}\left((2\pi\alpha')^{2}\left(C^{-1}BA^{-1}\right)^{ij} Z^{\star}_{m(d+j-1)+m}\right)\right]^{2}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Observamos que as coordenadas dos extremos da corda não aparecem em (5.18). Entretanto, os correspondentes momenta aparecem nos últimos quatro termos. Esta Hamiltoniana está escrita em termos das variáveis independentes, e representa, portanto, o funcional natural para a quantização.

Capítulo 6

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

É interessante notar, primeiramente, que todo o progresso obtido nos últimos anos para o problema da formulação canônica de teorias sujeitas a vínculos tenha sido no sentido de aumentar o espaço de fase original, mediante a introdução de variáveis extras e de uma simetria mais poderosa (BRST), ao invés de, ao contrário, reduzir o número de variáveis, eliminando aquelas espúrias através das funções arbitrárias introduzidas pelas simetrias de gauge [1].

O método dos projetores simpléticos tem como objetivo central a identificação do espaço de fase reduzido, ou físico. A geometria simplética determina que o conjunto de vínculos que possibilita tal identificação seja um conjunto mínimo de vínculos independentes de segunda-classe. Tal restrição torna necessária a solução do problema do gauge-fixing naquelas teorias em que existe a simetria de gauge. Sempre que tal questão pode ser contornada (como nos exemplos aqui tratados), a construção do projetor simplético é formalmente assegurada. O vetor simplético, ξ, uma vez projetado, tem algumas de suas componentes identicamente nulas, enquanto que outras são linearmente dependentes de um número mínimo de coordenadas independentes, que é o número de graus de liberdade presentes. Esta identificação das coordenadas linearmente independentes depende fortemente da escolha das condições de gauge-fixing. Como discutido ao final do Capítulo 2, em algumas situações é possível que seja necessária a investigação dos auto-vetores da matriz $\mathbb{S}$ associada ao projetor Λ, no lugar do projetor propriamente dito. Não encontramos, até o momento, uma situação em que tal fato ocorresse, tendo sendo sempre possível identificar quais as coordenadas independentes de forma trivial. Entretanto, consideramos que este deva ser um ponto a ser melhor explorado em uma análise futura;talvez, mesmo sem princípios gerais ou considerações formais, fosse oportuno encontrar exemplos de sistemas peculiares onde a simetria de gauge pedisse que fossem explicitamente calculados os auto-vetores de que se falou acima. Este pode ser o caso de teorias que descrevam spins mais altos em interação, como nos modelos de supersimetria local estendida (N=2,4,8.).

A relação (2.18), conectando o projetor simplético à matriz dos parênteses de Dirac, também deve merecer, a nosso ver, uma investigação que forneça mais clareza a respeito desta conexão.

Por fim, entre alguns problemas aos quais desejamos aplicar o método dos projetores, podemos citar uma extensão daquele tratado no Capítulo 5, em que uma corda aberta com extremidades ligadas a D-branas foi tratada [9]: pretendemos considerar agora a situação mais interessante em que uma membrana aberta tem extremidades ligadas a outras D-branas. Além de servir como mais um teste da aplicabilidade do método a objetos extensos, o tratamento de problemas como este pode também contribuir para o esclarecimento de questões de interesse bastante atuais. Felizmente, é bastante rico o universo de problemas em que o método presente pode ser utilizado com chances de trazer informações úteis em suas investigações.

Referências Bibliográficas

[1] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization Of Gauge Systems*, Princeton University Press, 1992

[2] C. Marcio do Amaral, *Nuovo Cim.* ***B 25***(1975) 817;

[3] C. Marcio do Amaral e P. Pitanga, *Rev. Bras. Física* **3**(1982)473.

[4] P. Pitanga, *Nuovo Cim.* **A 103**(1990)1529.

[5] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, New York: Yeshiva University 1964.

[6] E.C.G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective,* Wiley, New York, 1974.

[7] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics,* (Lect. Notes Phys. vol.169) Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1982.

[8] M. A. Santos, J. C. de Mello and P. Pitanga, *Physical Variables in Gauge Theories, Z. Phys.* C **55** (1992)271.

[9] M. A. De Andrade, M. A. Santos and I. V. Vancea, *Unconstrained Variables of Non-Commutative Open Strings, JHEP* **0106** 026 (2001) [hep-th/0104154].

[10] M.A. Santos, J.C. de Mello and P. Pitanga, *The Christ-Lee Model in the Approach of the Symplectic Projector Method, Braz. J. Phys.* **23** (1993) 214.

[11] M. A. De Andrade, M. A. Santos and I. V. Vancea, *Local Physical Coordinates from Symplectic Projector Method, Mod.Phys.Lett.* **A**16 (2001) 1907 [*hep-th*/0108197].

[12] M. A. Santos and J. A. Helayel-Neto, *Physical Variables for the Chern-Simons-Maxwell Theory without Matter, hep-th*/9905065.

[13] M. A. Santos, J. A. Helayel-Neto and P. I. Trajtenberg, *Probing the Symplectic Projector Method of Quantization in Planar Gauge Models*, painel apresentado no XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, São Lourenço - MG, 2001; submetido para publicação.

[14] L. R. Manssur, A. L. Nogueira and M. A. Santos, *An Extended Abelian Chern-Simons Model and the Symplectic Projector Method, hep-th*/0005214.

[15] N. H. Christ and T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 939.

[16] M. E .V. Costa and H. O. Girotti, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 3323.

[17] L. V. Phokhorov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **35** (1982) 129.

[18] A. Bouzas, L. N. Epele, H. Fanchiotti and C. A. Garcia Canal, *Phys. Rev.* **A42** (1990) 90.

[19] D. Bigatti and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D62** (2000)[*hep-th/*9908056].

[20] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics,* Addison-Wesley, 1967.

[21] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **D**128 (1962) 2425.

[22] J. Löwenstein and J. A. Swieca, *Ann. Phys. (*N.Y.) 68 (1971) 172.

[23] J. B. Kogut and L. Süsskind, *Phys. Rev.* **D**13 (1975) 2187.

[24] C. Wotzasek, *Acta Phys. Pol.* **B**21 (1990) 463.

[25] F. P. Devecchi, M. Fleck, H. O. Girotti, M. Gomes and A. J. da Silva, *Ann. Phys.* **242** (1995) 275.

[26] M. Kalb and P. Ramond, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 2273.

[27] E. Cremmer and J. Sherk, *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 117.

[28] H. R. Christiansen, M. S. Cunha, J. A. Helaÿel-Neto, L. R. U. Mansur and A. L. M. A. Nogueira, *I. J. Mod. Phys.* **A14** (1999) 147 (hep-th/9802096).

[29] H. R. Christiansen, M. S. Cunha, J. A. Helaÿel-Neto, L. R. U. Mansur and A. L. M. A. Nogueira, *I. J. Mod. Phys.* **A14** (1999) 1721 (hep-th/9805128).

[30] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 335, hep-th/9510135.

[31] N. Seiberg and E. Witten, *JHEP* **09** (1999) 032, hep-th/9908142.

[32] F. Ardalan, H. Arfaei and M. M. Sheikh-Jabbari, *JHEP* **02**(1999) 016, hep-th/9810072.

[33] F. Ardalan, H. Arfaei and M. M. Sheikh-Jabbari, *Nucl. Phys.* **B576** (2000) 578, hep-th/9906161.

[34] M. M. Sheikh-Jabbari and A. Shirzad, *Eur. Phys. J.* **C19** (2001) 383, hep-th/9907055.

[35] C.-S. Chu and P.-M. Ho, *Nucl. Phys.* **B550** (1999) 151, hep-th/9812219.

[36] C.-S. Chu and P.-M. Ho, *Nucl. Phys.* **B568** (2000) 447, hep-th/9906192.

[37] T. Lee, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 024022, hep-th/9911140.

[38] M. Zabzine, *JHEP* **10** (2000) 042, hep-th/0005142.

[39] W. T. Kim and J. J. Oh, *Mod. Phys. Lett.* **A15** (2000) 1597, hep-th/9911085.

[40] I. Rudychev, *JHEP* **04** (2001) 015, hep-th/0101039.

Contribuições Científicas do Autor

- "On the Construction of U Matrix for QCD from Dirac Brackets", J. C. de Mello, M. A. Santos and F. R. A. Simão, *J. Phys.* **A21**, 493 (1987);

- "Physical Variables in Gauge Theories", J. C. de Mello, P. Pitanga and M. A. Santos, *Z. Phys.* **C55** 271 (1992);

- " The Christ-Lee Model in the Approach of the Symplectic Projector Method", J. C. de Mello, P. Pitanga and M. A. Santos, *Braz. J. Phys.* **23** 214 (1993);

- "Sobre o Efeito Aharonov-Bohm", J. C. de Mello and M. A. Santos, *Rev. Bras. Ens. Fís.*, **4** 19 (1997);

- "Physical Variables for the Chern-Simons-Maxwell Theory without Matter", J. A. Helayël-Neto and M. A. Santos, hep-th/9905065.

- "An Extended Abelian Chern-Simons Model and the Symplectic Projector Method", L. R. Manssur, A. L. Nogueira and M. A. Santos", hep-th/0005214.

- "Unconstrained Variables of Non-Commutative Open Strings", M. A. De Andrade, M. A. Santos and I. V. Vancea, *JHEP* **0106** 026 (2001), hep-th/0104154

- "Local Physical Coordinates from Symplectic Projector Method", M. A. De Andrade, M. A. Santos and I. V. Vancea, *Mod. Phys. Lett.* **A16** 1907 (2001), hep-th/0108197.

- "Sobre o Efeito Aharonov-Bohm", 37ª Reunião Anual da SBPC - Brasília - (1985)

- "Obtenção da Matriz U na QCD Através dos Parênteses de Dirac", VIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos - São Lourenço - MG - (1987)

- "Probing the Symplectic Projector Method of Quantization in Planar Gauge Models", XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos - São Lourenço - MG - (2001)

- "Free Variables on Constraint Surface for Non-Commutative Open Strings", XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos - São Lourenço - MG - (2001)
- "Método dos Projetores Simpléticos em Teorias de Campos de Gauge", XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos - São Lourenço - MG - (2001)