Technische Universität Berlin WS 2023/24
Institut für Mathematik `https://isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=35688`
Erhard Zorn, NN

LaTeX: Einführung in das mathematisch-wissenschaftliche Textsatzsystem Hausaufgabe 3

Abgabe: Mo 20.11.2023, 23:59 auf ISIS

Allgemeine Hinweise zu den Hausaufgaben

- Bitte ladet die Hausaufgaben als LaTeX-Files auf ISIS hoch. Beachtet dabei die Hinweise zur Bezeichnung von Dateien auf der ISIS-Kursseite. Abgaben, die den obigen Anforderungen nicht entsprechen, können nicht automatisch verarbeitet werden. Sie können daher nicht gewertet werden; eine spätere korrigierte Abgabe ist gegebenenfalls möglich.
- LaTeX-Files müssen fehlerfrei kompilierbar sein. Prüft daher vor der Abgabe, ob das `.log`-File keine Fehler enthält, bzw. vergewissert euch davon in eurer Entwicklungsumgebung oder auf `www.overleaf.com`.
- Alle Hausaufgaben sollen mit Standard-Paketen erstellt werden, wie sie in den Standard-Distributionen oder auf `www.overleaf.com` zur Verfügung stehen.

Hausaufgabe 3.1 (1 Punkt)

- Erstellt ein LaTeX-Dokument mit der `article`-Klasse.
- Die Pakete aus Hausaufgabe 2 sollen wieder verwendet werden. Am einfachsten verwendet ihr eine Kopie der Präambel aus Hausaufgabe 2.
- Der Quellcode soll ab jetzt in allen Hausaufgaben sinnvoll strukturiert werden, wie in der letzten Hausaufgabe behandelt.
- Verwendet zusätzlich die in den Videos empfohlenen Pakete der American Mathematical Society (AMS) für mathematischen Formelsatz.

Hausaufgabe 3.2 (2 Punkte)

Setzt die folgenden Texte mit Formeln. Dabei ist darauf zu achten, dass im 1. Beispiel die Nummerierung ausgeschaltet ist, im 2. ist die (automatische) Nummerierung eingeschaltet. Und im 3. Beispiel soll die angegebene Bezeichnung der Formel statt einer Nummerierung gesetzt werden.

- Für eine Folge (x_n) gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(f\cdot g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)\cdot g(x_n)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n)\\
&= f(x_0)\cdot g(x_0)\\
&= (f\cdot g)(x_0).
\end{aligned}$$

Somit ist $f \cdot g$ stetig.

- Wir berechnen den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^3 - k^2 + k - 1}{k^3 + k^2 + k + 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{k^3} \cdot \frac{1 - \frac{k^2}{k^3} + \frac{k}{k^3} - \frac{1}{k^3}}{1 + \frac{k^2}{k^3} + \frac{k}{k^3} + \frac{1}{k^3}} \tag{1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3}}{1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3}} \tag{2}$$

$$= 1 \tag{3}$$

- Es seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen. Mit Hilfe der Teleskopsumme

$$A^{n+1} - B^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k (A - B) B^{n-k} \tag{TKS}$$

erhalten wir das gesuchte Ergebnis.

Hausaufgabe 3.3 (2 Punkte)

Setzt die folgenden Texte:

(i) Es sei $R := [0, \pi] \times [0, \pi]$ und $f(x, y) := \sin(x + y)$. Wir berechnen das Integral:

$$\begin{aligned}
\int_R f(x, y)\, dV &= \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \sin(x + y)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^\pi -\cos(x + y)\Big|_{y=0}^{y=\pi} dx \\
&= -\int_0^\pi (\cos(x + \pi) - \cos(x))\, dx \\
&= -\int_0^\pi (\cos(x + \pi) - \cos(x))\, dx \\
&= -(\sin(x + \pi) - \sin(x))\Big|_0^\pi \\
&= -(\sin(2\pi) - \sin(\pi) - (\sin(\pi) - 0)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) Der Eulersche Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ führt zu:

$$\begin{aligned}
y''' - y' = 0 &\Leftrightarrow e^{\lambda x}(\lambda^3 - \lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overbrace{\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)}^{=:p(\lambda)} = 0
\end{aligned}$$

(iii) Wenden wir auf diese Gleichung die Norm an, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{l}\frac{A^k}{k!}-\sum_{k=0}^{l}\frac{B^k}{k!}\right\|_2 &= \left\|(A-B)\sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{(k+1)!}(\sum_{j=0}^{k}A^jB^{k-j})\right\|_2 \\
&\leq \|A-B\|_2\cdot\sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k}\|A\|_2^j\cdot\|B\|_2^{k-j} \\
&\leq \dots \\
&= \|A-B\|_2\cdot\sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{k!}\max\{\|A\|_2,\|B\|_2\}^k
\end{aligned}$$

(iv) Das konjugiert-komplexe Paar $\lambda_{3/4}=1\pm 3i$ liefert die Lösungen

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= \mathbf{Re}e^{\lambda_3 x} = \mathbf{Re}e^{1+3i} = \mathbf{Re}e^{x}(\cos(3x)+i\sin(3x) = e^x\cos(3x) \\
y_4(x) &= \mathbf{Im}e^{\lambda_3 x} = \mathbf{Im}e^{1+3i} = \mathbf{Im}e^{x}(\cos(3x)+i\sin(3x) = e^x\sin(3x)
\end{aligned}$$