Hausaufgabe 2 - Einführung in Latex

Bading, Daniel
daniel.bading@campus.tu-berlin.de
Matrikelnummer: 405020

November 17, 2023

Contents

1 Hausaufgabe 3.2

- Für eine Folge (x_n) gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f\cdot g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n))\\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n)\\ &= f(x_0)\cdot g(x_0)\\ &= (f\cdot g)(x_0).\end{aligned}$$

  Somit ist $f \cdot g$ stetig.

- Wir berechnen den folgenden Grenzwert:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{k^3-k^2+k-1}{k^3+k^2+k+1} &= \lim_{k\to\infty}\frac{k^3}{k^3}\cdot\frac{1-\frac{k^2}{k^3}+\frac{k}{k^3}-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{k^2}{k^3}+\frac{k}{k^3}+\frac{1}{k^3}} \quad (1)\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1-\frac{k^2}{k^3}+\frac{k}{k^3}-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{k^2}{k^3}+\frac{k}{k^3}+\frac{1}{k^3}} \quad (2)\\ &= 1 \quad (3)\end{aligned}$$

- Es seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen. Mit Hilfe der Teleskopsumme

$$A^{n+1}-B^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}A^k(A-B)B^{n-k} \tag{TKS}$$

2 Hausaufgabe 3.3

(i) Es sei $R := [0.\pi] \times [0.\pi]$ und $f(x,y) := sin(x+y)$. Wir berechnen das Integral:

$$\begin{aligned}
\int\limits_R f(x,y)dV &= \int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^\pi \sin(x+y)dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^\pi -\cos(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\pi} dx \\
&= -\int\limits_0^\pi (\cos(x+\pi) - \cos(x))dx \\
&= -\int\limits_0^\pi (\cos(x+\pi) - \cos(x))dx \\
&= -(\sin(x+\pi) - \sin(x)\Big|_0^\pi \\
&= -(\sin(2\pi) - \sin(\pi)(-\sin(\pi) - 0)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) Der Eulersche Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ führt zu :

$$\begin{aligned}
y''' - y' = 0 &\Leftrightarrow y(x) = e^{\lambda x}(\lambda^3 - \lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overbrace{\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)}^{=:p(\lambda)} = 0
\end{aligned}$$

(iii) Wenden wir auf diese Gleichung die Norm an, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^{l} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{l} \frac{B^k}{k!} \right\|_2 &= \left\| (A-B) \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{(k+1)!} (\sum_{j=0}^{k} A^j B^{k-j}) \right\|_2 \\
&\leq \|A-B\|_2 \cdot \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{(k+1)!} \sum_{k=0}^{l-1} \|A\|_2^j \cdot \|B\|_2^{k-j} \\
&\leq \cdots \\
&= \|A-B\|_2 \cdot \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} \max\{\|A\|_2, \|B\|_2\}^k
\end{aligned}$$

(iv) Das konjugiert-komplexe Paar $\lambda_{3/4} = 1 \pm 3i$ liefert die Lösungen

$$y_3(x) = \mathbf{Re} e^{\lambda_3 x} = \mathbf{Re} e^{1+3i} = \mathbf{Re} e^{x}(\cos(3x) + i\sin(3x)) = e^{x}\cos(3x)$$
$$y_4(x) = \mathbf{Im} e^{\lambda_3 x} = \mathbf{Im} e^{1+3i} = \mathbf{Im} e^{x}(\cos(3x) + i\sin(3x)) = e^{x}\sin(3x)$$