

Hausaufgabe 2 - Einführung in Latex

Bading, Daniel

`daniel.bading@campus.tu-berlin.de`

Matrikelnummer: 405020

November 27, 2023

Contents

1	Hausaufgabe 4.1	3
2	Hausaufgabe 4.2	4
3	Hausaufgabe 4.3	5

1 Hausaufgabe 4.1

- Wir wissen, dass man den Vektorraum der komplexen Zahlen \mathbb{C} als reellen Vektorraum \mathbb{R} auffassen kann. Das Problem bei den natürlichen- und ganzen Zahlen ist, dass sowohl \mathbb{N} als auch \mathbb{Z} kein Vektorraum ist.
- Wir definieren uns einen Befehl, der es uns ermöglicht, Abbildungen wie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ schneller und leichter zu definieren. Zusätzlich ist es sinnvoll sich auch einige Befehle zu definieren, um sich Schreibarbeit zu sparen - gerade wenn man zum Beispiel mit Dualräumen zutun hat. Dabei lässt sich dann nicht nur für jeden Raum separat der Dualraum definieren, sondern man fügt einfach einen Parameter ein. Anstatt zu schreiben: V^* können wir einfach $\text{dual } V$ schreiben und erhalten: V^* als den Dualraum von V .

2 Hausaufgabe 4.2

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\} \\ \overset{\circ}{M}_1 &= \emptyset \\ \partial M_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\} = M_1 \end{aligned}$$

(ii) Mit Hilfe der Rechenregeln für Summen (Linearität) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \nabla(f+g)(x) &= \begin{pmatrix} \partial_{x_1}(f(x) + g(x)) \\ \vdots \\ \partial_{x_n}(f(x) + g(x)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{x_1}f(x) + \partial_{x_1}g(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n}f(x) + \partial_{x_n}g(x) \end{pmatrix} \\ &= \nabla f(x) + \nabla g(x) \end{aligned}$$

(iii) Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir lösen es mit Hilfe des Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & 1 & & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & & -1 & \rightsquigarrow 2 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & & 0 & 0 & 0 & -3 & -8 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & & & & \rightsquigarrow 2 & -2 & -1 & -1 \\ & & & & & 0 & 0 & -3 & -8 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & & & & \rightsquigarrow 0 & -4 & -3 & -5 \\ & & & & & 0 & 0 & -3 & -8 \end{array}$$

3 Hausaufgabe 4.3

- Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{y}) + y \cos(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

ist stetig auf \mathbb{R}^2 außer auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$.

- Mit Hilfe des `\cfrac`-Befehls setzen wir einen schönen Kettenbruch:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \frac{5^2}{\ddots}}}}}$$

- Tipp: `split`-Umgebungen:

Die folgende Rechnung bestätigt unsere Formel für den Laplace-Operator in Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned} \partial_r^2 g + \frac{1}{r} \cdot \partial_r g + \frac{1}{r^2} \cdot \partial_\varphi^2 g &= \cos(\varphi)^2 \partial_x^2 f + 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \partial_x \partial_y f \\ &\quad + \sin(\varphi)^2 \partial_y^2 f + \frac{1}{r} (\cos(\varphi) \partial_x f + \sin(\varphi) \partial_y f) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} (-r (\cos(\varphi) \partial_x f + \sin(\varphi) \partial_y f) \\ &\quad + r^2 (\sin(\varphi)^2 \partial_x^2 f + \cos(\varphi)^2 \partial_y^2 f) \\ &\quad - 2r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \partial_x \partial_y f) \\ &= \partial_x^2 f (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \\ &\quad + \partial_y^2 f (\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2) \\ &\quad + \partial_x \partial_y f (2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)) \\ &\quad + \partial_x f \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi) - \frac{1}{r} \cos(\varphi) \right) \\ &\quad + \partial_y f \left(\frac{1}{r} \sin(\varphi) - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \right) \\ &= \partial_x^2 f + \partial_y^2 f \end{aligned} \tag{1}$$

- Wir betrachten die Maxwell'schen Gleichungen, wobei wir ***B***, ***E***, ***j*** *fett* setzen, statt sie mit Vektorpfeilen zu versehen, wie es in der Literatur auch vorkommt. Die Gleichungen sollen zentriert gesetzt werden, also nicht nach dem Gleichheitszeichen

ausgerichtet werden.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$