27 Dado $K \in \mathbb{R}$, consideramos en $\mathbb{R}^4$ el subespacio

$$U_K = L\{(0,-1,K,3), (0,K,-2-K,3), (K-2,-1,-2,3)\}$$

a) Calcular $\dim_{\mathbb{R}}(U_K)$ en función de K. Determinar una base y unas ecuaciones cartesianas de U_K para cada $K \in \mathbb{R}$

b) Para K con $\dim_{\mathbb{R}}(U_K)=2$, encontrar W de $\mathbb{R}^4$ / $\mathbb{R}^4 = U_K \oplus W$ y determinar las ecuaciones cartesianas de W.

Nos dan un sistema de generadores de U_K, estudiando el rango:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & K-2 \\ -1 & K & -1 \\ K & -2-K & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{f}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & K & -1 \\ K & -2-K & -2 \\ 0 & 0 & K-2 \end{pmatrix} \underset{f}{\sim}$$

$$\underset{f}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & K+1 & 0 \\ 0 & -2-2K & -2-K \\ 0 & 0 & K-2 \end{pmatrix}$$

$K+1=0$

$-2-K=0 \rightarrow K=-2$

$K-2=0 \rightarrow K=2$

$$\begin{cases} K+1=0 \rightarrow K=-1 \\ K-2=0 \rightarrow K=2 \\ -2(1-K)=0 \rightarrow K=1 \\ -2-K=0 \rightarrow K=-2 \end{cases} \Big| \text{ No se anula}$$

Para $\forall K$, $K \neq -1$, 2, $\dim_{\mathbb{R}}(U_K)=4$

Para cada $K=-1$, 2, $\dim_{\mathbb{R}}(U_K)=3$

(45) en el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la ley de composición interna

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

y la ley de composición externa de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\lambda (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$$

Estudiar si es un espacio vectorial.

La suma debe ser
- Asociativa ✓
- ∃. neutro ✓
- ∃. opuesto ✓
- conmutativa ✓

El producto por escalares
- Asociativo ✓
- ∃ neutro
- Distributiva ✓

No es un espacio vectorial ya que no existe neutro para el producto por escalares.

Sea $\lambda = 1$

$$1 \cdot (x_1, x_2) = (1 \cdot x_1, 0) = (x_1, 0) \neq (x_1, x_2)$$

(46) Estudiar si los siguientes conjuntos son o no espacios vectoriales:

1) El conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ con la suma y el producto por escalares usuales.

Suma
- Asociativa ✓
- ∃. neutro ✗
- ∃. opuesto
- conmutativo

Producto escalares
- Asociativo
- conmutativo
- ∃. neutro

No es un espacio vectorial, ya que no existe opuesto para la suma, ya que sea $A = \{ M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \}$ la matriz opuesta sería $\begin{pmatrix} -1 & -a \\ -b & -1 \end{pmatrix} \notin A$. Además, no existe neutro $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$.

3) El conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ con la suma y el producto por escalares usuales.

Suma $\begin{cases} \text{Asociativa} ✓ \\ \text{∃ neutro} ✓ \\ \text{∃ opuesto} ✓ \end{cases}$
Conmutativo ✓

Producto escalares $\begin{cases} \text{Distributiva} ✓ \\ \text{Asociativa} ✓ \\ \text{∃ neutro} ✓ \end{cases}$

neutro:

$$1\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

distributiva

$$2\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 & 2a \\ 2b & 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} 2$$

$\boxed{\text{Si es un espacio vectorial}}$

51) Los vectores $e_1, e_2, \cdots, e_n$ y x vienen dados por sus coordenadas en cierta base. Comprobar en cada caso que $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es una base y hallar las coordenadas del vector en dicha base:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (2, 1, -3) \\ e_2 = (3, 2, -5) \\ e_3 = (1, -1, 1) \end{array}\right\} x = (6, 2, -7)$$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1, 2, -1, -2) \\ e_2 = (2, 3, 0, -1) \\ e_3 = (1, 3, -1, 0) \\ e_4 = (0, 0, 0, 1) \end{array}\right\} x = (7, 14, -1, 2)$$

Dar, también, la matriz de cambio de base.

Para que los vectores formen una base deben ser linealmente independientes. Estudiando el rango de los vectores:

$$rg\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 4 \end{pmatrix} \sim_f$$

Más fácil:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 5 + 9 + 6 - 3 - 10 = 19 - 18 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow$ Los tres vectores son linealmente independientes, por tanto, $\boxed{\text{forman una base}}$

$$(6, 2, -7) = a(2, 1, -3) + b(3, 2, -5) + c(1, -1, 1)$$

$$\begin{cases} 6 = 2a + 3b + c \\ 2 = a + 2b - c \\ -7 = -3a - 5b + c \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 6 = 2a + 3b + c \\ + \ (2 = a + 2b - c)(-2) \\ \hline 2 = 0 - b + 3c \end{array}$$

$2 = -2c + 1 + 3c$

$\boxed{1 = c}$

$$\begin{array}{l} -7 = -3a - 5b + c \\ (2 = a + 2b - c)(+3) \\ \hline -1 = 0 + b - 2c \end{array}$$

$b = 2c - 1$

$\boxed{b = 1}$

$6 = 2a + 3 + 1$

$2 = 2a \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$$\boxed{M(I, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Repetimos el proceso con los otros vectores:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_c$$

$$\sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Los vectores son linealmente independientes, por tanto, $\boxed{\text{forman una base}}$:

$$(7,14,-1,2) = a(1,2,-1,-2) + b(2,3,0,-1) + c(1,3,-1,0) + $$
$$+ d(0,0,0,1)$$

$$\begin{cases} 7 = a + 2b + c \\ 14 = 2a + 3b + 3c \\ -1 = -a - c \\ 2 = -2a - b + d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(7 = a + 2b + c)(-2) \\ + &(14 = 2a + 3b + 3c) \\ \hline &0 = 0 - b + c \end{aligned}$$

$b = c$

$\boxed{c = 3}$

$$\begin{aligned} &7 = a + 2b + c \\ &-1 = -a \quad -c \\ \hline &6 = 2b \end{aligned}$$

$\boxed{b = 3}$

$2 = -2(-2) - 3 + d$

$\boxed{1 = d}$

$7 = a + 2\cdot 3 + 3$

$\boxed{a = -2}$

$$M(I, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cambio de base:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

(57) Dado los subespacios W y W' de $\mathbb{R}^4$

$W = \{(a,b,c,d) \mid b+c+d=0\}$

y

$W' = \{(a,b,c,d) \mid a+b=0,\ c=2d\}$

calcular las dimensiones y dar bases de W, W', $W \cap W'$ y $W+W'$.

Como nos dan las ecuaciones cartesianas:

$$\dim_{\mathbb{R}}(W) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - \text{nº ecuaciones} = 4-1 = \underline{3}$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(W') = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - \text{nº ecuaciones} = 4-2 = \underline{2}$$

una base de W estará formado por 3 vectores, l.i, que cumplan la ecuación cartesiana

$$\boxed{\{(1,0,0,0),\ (0,1,0,-1),\ (0,1,-1,0)\}}$$

una base de W' estará formada por 2 vectores l.i, que cumplan las dos ecuaciones cartesianas:

$$\boxed{\{(1,-1,0,0),\ (0,0,2,1)\}}$$

Para calcular la intersección juntamos las ecuaciones cartesianas de W y W' y eliminamos aquellas que sean combinación lineal del resto:

$$\begin{cases} b+c+d=0 \\ c-2d=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Las 3 ecuaciones son independientes

$$\dim_{\mathbb{R}}(W \cap W') = 4-3 = \underline{1}$$

Para la suma formamos un sistema de generadores juntando ambas bases y eliminamos los vectores que son l.d hasta formar una base de $U+W'$:

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,1,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,2,1)\}$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_c$$

$$\sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A)=4$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\{(1,0,0,0),(0,0,0,-1),(0,0,-1,0),(0,-1,0,0)\} \\ \text{es una base de } U+W \qquad \dim_{\mathbb{R}}(U+W)=4=\mathbb{R}^4, \\ \text{pero no es directa ya que } U\cap W \neq \{0\}\end{array}}$$

(58) Sean U y W subespacios de $\mathbb{R}^3$. Demostrar en cada caso que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$:

1) $U=\{(a,b,c) \mid a=b=c\}$ y $W=\{(0,b,c) \mid b,c \in \mathbb{R}\}$

De U se extrae

60 Consideramos los subespacios U y W de $\mathbb{R}^3$ tales que las ecuaciones paramétricas de U son:

$$U = \begin{cases} x = \lambda + \gamma \\ y = \mu + \gamma \\ z = \lambda + \mu + 2\gamma \end{cases}$$

y la ecuación implícita de W es $x - y + 2z = 0$

1. Bases de $U, W, U+W$ y $U \cap W$ y ecuaciones implícitas

De U nos dan unas ecuaciones paramétricas

$$\begin{array}{l} x = \lambda + \gamma \\ + \ (y = \mu + \gamma)(-1) \\ \hline x - y = \lambda - \mu \end{array} \qquad \begin{array}{l} (x = \lambda + \gamma)(-2) \\ z = \lambda + \mu + 2\gamma \\ \hline z - 2x = -\lambda + \mu \\ 2x - z = \lambda - \mu \end{array}$$

$$x - y = 2x - z$$

$$\boxed{-x - y + z = 0}$$ ec. implícita de U

$\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$

Una base de U constará de 2 vectores que cumplan la ecuación implícita:

$$\boxed{\{(1,0,1), (0,-1,-1)\}}$$

$\dim_{\mathbb{R}}(W) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$

Una base de W constará de 2 vectores que cumplan la ecuación implícita:

$$\boxed{\{(1,1,0), (1,-1,-1)\}}$$

Para calcular la intersección juntamos las ecuaciones cartesianas de ambos espacios y eliminamos las que sean linealmente dependientes:

$$\begin{cases} -x-y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$$

$$rg \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A)=2$$

$\dim_{\mathbb{R}} (U \cap W) = 3-2 = \underline{1}$

una base de $U \cap W$ constará de un vector que cumpla ambas ecuaciones cartesianas:

$$\boxed{\{(-1, 3, 2)\}}$$

$$\begin{array}{r} -x-y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ \hline -2y+3z=0 \\ -2y=-3z \\ 2y=3z \end{array}$$

Para hallar la suma formamos un sistema de generadores con una base de U y otra de W y eliminamos los vectores que sean combinación lineal de otros hasta obtener una base de $U+W$:

$\{(1,0,1), (0,-1,-1), (1,1,0), (1,-1,-1)\}$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim_c$$

$$\sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{0} & 0 \\ 0 & -1 & \cancel{0} & 0 \\ 1 & -1 & \cancel{0} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A)=3$$

Por tanto $U+W$ tiene dimensión 3 y una base suya será:

$$\boxed{\{(1,0,1),\ (0,-1,-1),\ (0,0,-1)\}}$$

2. Base de un subespacio complementario de $U+W$

Como $\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow U+W = \mathbb{R}^3$,

pero la suma no es directa ya que $U \cap W \neq \{\emptyset\}$.

Un complementario de $U+W$ entonces sólo puede ser $\{0\}$.

3. Coordenadas de $(2,3,5)$ respecto a la base de $U+W$ obtenida en el primer apartado.

$(2,3,5) = a(1,0,1) + b(0,-1,-1) + c(0,0,-1)$

$$\begin{cases} \boxed{2 = a} \\ 3 = -b \rightarrow \boxed{b=-3} \\ 5 = a-b-c \rightarrow 5-2-3 = -c \rightarrow \boxed{c=0} \end{cases}$$

(64) Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de V. Se pide:

1) Calcular una base de V que contenga $x = e_1 - e_2 + e_3$.

2) Dados los vectores $y_1 = e_1 - e_2$ e $y_2 = e_2 + e_3$ hallar un tercer vector y_3 de manera que $\{y_1, y_2, y_3\}$ formen una base de V y tenga coordenadas $(1,1,1)$ en esa base.

1) Como la dimensión de V es 3, la base contendrá tres vectores l.i.:

$$\boxed{B = \{(1,0,0),\ (0,-1,0),\ (0,0,1)\}}$$

Los 3 son l.i. y $x \in B$, ya que se puede expresar como combinación lineal de ellos.

2) Como x se podrá expresar como combinación lineal de dicha base:

$$(1,1,1)_B = 1(1,-1,0)_B + 1\ (0,1,1) + 1(a,b,c)$$

$$\begin{cases} 1 = 1+a \rightarrow a=0 \\ -1 = -\cancel{1+1}+b \rightarrow b=-1 \\ 1 = 0+1+c \rightarrow c=0 \end{cases}$$

$$\boxed{Y_3 = -e_2}$$

65 Calcular las dimensiones de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.

$W_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3 = 0\}$

$W_2 = L\{(1,1,1),(1,1,0),(-1,-1,1)\}$

$W_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2=0,\ 2x_1+2x_2=0\}$

De W_1 nos dan la ecuación implícita, por lo que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(W_1) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) - \text{nº ecuaciones} = 3-1 = \boxed{2}$$

Para W_2 nos dan un sistema de generadores. Estudiando el rango:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & -1 & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1-1}+\cancel{1-1} = 0$$

Por tanto, una base de W_2 será:

$$\{(1,1,1), (0,0,-1)\}$$

Como está formada por dos vectores, la dimensión será 2.

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(W_2)=2}$$

Se puede hacer también:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda-\mu \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x=y \\ z=x-\mu \end{cases} \rightarrow \boxed{x-y=0}$$

$$3-1=2$$

La $\dim_{\mathbb{R}}(W_3)= 3-1=\boxed{2}$

$\hookrightarrow$ pese a que nos dan 2 ecuaciones, son, en verdad, la misma ecuación.

66 Consideramos el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada con coeficientes reales y grado menor o igual que 3 y en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

1) Escribir las ecuaciones del cambio de base (en alguna de las dos direcciones) entre la anterior y la formada por los polinomios $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$.

2) Calcular la dimensión y dar una base del subespacio generado por $p(x)=x^2-2x$ y sus derivadas.

$B_1 \longrightarrow B_2$

Tenemos que expresar todos los vectores de B_2 como c. l. de B_1.

$1 = a \cdot 1 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 \Rightarrow 1 = a$

$x = a \cdot 1 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 \Rightarrow 1 = a, \ b = 1$

$x^2 = a \cdot 1 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 \rightarrow a = 1, b =$

$x^2 = a + b(x-1) + c(x^2 - 2x + 1)$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1 $\rightarrow (a-b)^3$

Para mayor facilidad consideramos $B \cdot \{1, x, x^2, x^3\}$ y expresamos ambas bases en función suya.

$B - \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

$B' - \{(1,0,0,0), (-1,1,0,0), (1,-2,1,0), (1,-3,3,-1)\}$

Cambio de $B \rightarrow B'$. Expresamos B' como c.l de B

$(1,0,0,0) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)$

$\boxed{a = 1}$ $\boxed{b = 0}$ $\boxed{c = 0}$ $\boxed{d = 0}$

$(-1,1,0,0) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)$

$\boxed{a = -1}$ $\boxed{b = 1}$ $\boxed{c = 0}$ $\boxed{d = 0}$

$(1,-2,1,0) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)$

$\boxed{a = 1}$ $\boxed{b = -2}$ $\boxed{c = 1}$ $\boxed{d = 0}$

$(1,-3,3,1) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)$

$\boxed{a=1}$ $\boxed{b=-3}$ $\boxed{c=3}$ $\boxed{d=1}$

$$\boxed{M(I, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{(1,1,0,0)_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} (1,1,0,0) = \boxed{(1,0,0,0)}$$

$p(x) = x^2 - 2x$

$p'(x) = 2x - 2$

$p''(x) = 2$

$$W = L\left(\{ (x^2 - 2x), (2x - 2), (2) \}\right)$$

Consideramos $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ para mayor comodidad:

$$W = L\left(\{ (0, -2, 1, 0), (-2, 2, 0, 0), (2, 0, 0, 0) \}\right)$$

Tenemos un sistema de generadores de W.
Estudiando el rango:

$$rg \left(\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 3$$

$$\boxed{\text{Los 3 vectores son l.i., por tanto forman una base de } W \qquad \dim_{\mathbb{R}}(W) = 3}$$

68

Dados los subespacios de $M_2(\mathbb{R})$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix} \mid c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

calcular la dimensión y una base de los subespacios V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$.

Para V_1 $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ se extraen las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\mu \\ t = \lambda \end{cases}$$

Y de ahí se extraen las siguientes ecuaciones cartesianas:

$$\boxed{\begin{cases} x - t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}}$$

Por tanto, la dimensión $_{\mathbb{R}}(V_1) = 2$ $(4-2)$

Una base de V_1 será:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

Para V_2 $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ se extraen las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \gamma \\ t = -\lambda \end{cases}$$

De ahí se extrae la siguiente ecuación cartesiana:

$$\boxed{x + t = 0}$$

Por tanto, $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(V_2) = 3}$.

Una base de V_2 es:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Para la intersección dos subespacios juntamos las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ y + z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x - t \\ x + t \\ \hline 2x = 0 \end{array} \Rightarrow x = 0 \qquad t = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La intersección es vacío