1. Se denota por $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ el espacio probabilístico base. Se considera la siguiente definición de medida de probabilidad:

Definición 0.1. Sea $A \in \mathcal{A}$ con $P(A) > 0$, la aplicación $P(\cdot/A) : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$, tal que $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ es una función de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. El espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot/A))$ se llama espacio de probabilidad condicionada.

Demostrar a partir de la definición:

- Teorema de la probabilidad total: Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una secuencia de sucesos que definen una partición de Ω, siendo $P(A_i) > 0$, para $i \in \mathbb{N}$, entonces:
$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i)$$

- Teorema de Bayes: Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una secuencia de sucesos que definen una partición de Ω, siendo $P(A_i) > 0$, para $i \in \mathbb{N}$, entonces:
$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i)} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

- Vamos a comenzar demostrando el Teorema de la probabilidad total. La idea de la demostración reside en que la sucesión de sucesos $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ definen una partición de Ω. Consideremos

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$$

Esta unión es disjunta, puesto que, como bien hemos mencionado antes, $\{A_n\}$ definen una partición de Ω. Por tanto, se verifica que:

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset \quad i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$$

En consecuencia, tenemos que:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n) \overset{0,1}{\Longrightarrow}$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n) \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Como esto es válido para $n \in \mathbb{N}$, concluimos con que:

$$P(B) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

$\square$

- Continuamos ahora con la demostración del Teorema de Bayes. Para ello, tenemos que:

$$P(A_i/B) \overset{0,1}{=} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Para la demostración, aplicaremos la definición en el numerador y el Teorema de la probabilidad total en el denominador, es decir, sabemos que:

  - $$P(A_i \cap B) \overset{0,1}{=} P(B/A_i)P(A_i)$$
  - $$P(B) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Por lo que sustituyendo nos queda:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=0}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$\square$