GEOMETRÍA III
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

Respuestas Primer Control (02/12/2020)

1. *Consideremos dos rectas distintas R_1, R_2 en un espacio afín $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow)$ con $\dim \mathcal{A} = 3$. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:*

   a) *Existen un plano S y una recta R suplementarios afines en $\mathcal{A}$ con $R_2 \subset S$ y $\pi_{S,R}(R_1) = R_2$, donde $\pi_{S,R}$ denota la proyección afín sobre S en la dirección de R.*

   b) *Las rectas R_1, R_2 son coplanarias (están contenidas en un mismo plano de $\mathcal{A}$).*

   Como aplicación, dadas las rectas

$$R_1 = (1,0,0) + L(\{(0,1,1)\}), \quad R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - z + 1 = y - z - 1 = 0\}$$

   y el plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 2 = 0\}$ en $\mathbb{R}^3$ probar que:

   - *R_1, R_2 son coplanarias y $R_2 \subset S$.*
   - *La recta $R = \langle (1,0,0), (-2,1,0) \rangle$ es suplementaria afín de S.*
   - *$\pi_{S,R}\big((1,0,0)\big) = (-2,1,0)$ y $\pi_{S,R}(R_1) = R_2$.*

   Calcular también $M(\pi_{S,R}, \mathcal{R}_0)$, donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$.

Respuesta:

a) $\Longrightarrow$ b)

Escribamos $R_1 = p + \overrightarrow{R}_1$ para un $p \in R_1$ tal que $p \notin R_2 = \pi_{S,R}(R_1)$, y observemos que de la definición de $\pi_{S,R}$ el vector

$$\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{p\pi_{S,R}(p)} \in \overrightarrow{R}.$$

Como $R_2 = \pi_{S,R}(R_1)$ y $\overrightarrow{\pi_{S,R}} = \overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}$, donde $\overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}} \colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$ es la proyección lineal sobre $\overrightarrow{S}$ en la dirección de $\overrightarrow{R}$, se deduce que $\overrightarrow{R}_2 = \overrightarrow{\pi_{S,R}}(\overrightarrow{R}_1) = \overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(\overrightarrow{R}_1)$ y por tanto

$$R_2 = \pi_{S,R}(p) + \overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(\overrightarrow{R}_1).$$

Nuestro objetivo será demostrar que el menor subespacio $R_1 \vee R_2$ que contiene a R_1 y R_2 es un plano. Para ello, observemos que

$$\overrightarrow{R_1 \vee R_2} = L\big(\overrightarrow{p\pi_{S,R}(p)}\big) + \overrightarrow{R}_1 + \overrightarrow{R}_2 = L\big(\overrightarrow{p\pi_{S,R}(p)}\big) + \overrightarrow{R}_1 + \overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(\overrightarrow{R}_1) = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{R}_1 + \overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(\overrightarrow{R}_1),$$

donde hemos tenido en cuenta que $L\big(\overrightarrow{p\pi_{S,R}(p)}\big) = \overrightarrow{R}$ al ser $\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{p\pi_{S,R}(p)} \in \overrightarrow{R}$ y $\dim \overrightarrow{R} = 1$.

De la definición de $\overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}$ sabemos que $v - \overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(v) \in \overrightarrow{R}$ para todo $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$, de donde

$$v = \big(v - \overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(v)\big) + \overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(v) \in \overrightarrow{R} + \overrightarrow{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(\overrightarrow{R}_1)$$

para todo $v \in \overrightarrow{R}_1$ y $\overrightarrow{R}_1 \subseteq \overrightarrow{R} + \vec{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(\overrightarrow{R}_1)$. De aquí se concluye que

$$\overrightarrow{R_1 \vee R_2} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{R}_1 + \vec{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(\overrightarrow{R}_1) = \overrightarrow{R} + \vec{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(\overrightarrow{R}_1) = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{R}_2$$

es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ con $\dim R_1 \vee R_2 = \dim(\overrightarrow{R} + \overrightarrow{R}_2) = 2$ (téngase en cuenta que $R_1 \neq R_2$), lo que prueba a).

Otra forma alternativa de probar que a) $\Longrightarrow$ b) sería tomar dos puntos $q_1, q_2 \in R_2$ distintos, y utilizando que $R_2 = \pi_{S,R}(R_1)$ elegir $p_1, p_2 \in R_1$ tales que $\pi_{S,R}(p_j) = q_j$, $j = 1, 2$. Claramente

$$R_1 = \langle p_1, p_2 \rangle \quad \text{y} \quad R_2 = \langle q_1, q_2 \rangle,$$

y por tanto

$$R_1 \vee R_2 = p_1 + L\big(\{\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_1q_2}\}\big) = p_1 + L\big(\{\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_2q_2}\}\big),$$

donde para la última igualdad hemos usado que $\overrightarrow{p_1q_2} = \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2q_2}$. Finalmente, usando que $\overrightarrow{p\pi_{S,R}(p)} \in \overrightarrow{R}$ para todo $p \in \mathcal{A}$ y que $\overrightarrow{R}$ es una recta vectorial, deducimos que

$$\{\overrightarrow{p_1\pi_{S,R}(p_1)} = \overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_2\pi_{S,R}(p_2)} = \overrightarrow{p_2q_2}\}$$

son linealmente dependientes, y por tanto

$$\dim R_1 \vee R_2 = \dim L\big(\{\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_2q_2}\}\big) < 3.$$

Esto prueba que $R_1 \vee R_2$ ha de ser un plano.

b) $\Longrightarrow$ a)

Supongamos ahora que R_1, R_2 son coplanarias y distintas y escribamos

$$R_j = p_j + L(\{v_j\}), \quad j = 1, 2.$$

donde elegiremos $p_1 \in R_1 \setminus R_2$ y $p_2 \in R_2 \setminus R_1$. De nuestras hipótesis

- $\Pi := R_1 \vee R_2 = p_1 + L(\{\overrightarrow{p_1p_2}, v_1, v_2\}) = p_2 + L(\{\overrightarrow{p_1p_2}, v_1, v_2\})$ es un plano, esto es, $\dim L(\{\overrightarrow{p_1p_2}, v_1, v_2\}) = 2$.
- $u = \overrightarrow{p_1p_2} \notin L(\{v_j\})$, $j = 1, 2$ (en particular, $u \neq \overrightarrow{0}$), ya que $R_1 \neq R_2$.

Tomaremos R cualquier recta afín con

$$\overrightarrow{R} = L(\{u\}).$$

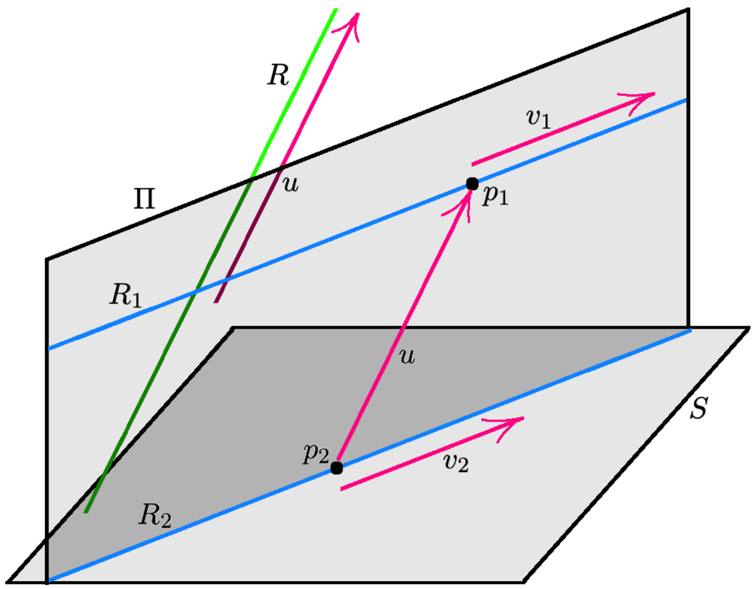
Por otro lado, usando que $\dim \mathcal{A} = 3$ elijamos $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \setminus \overrightarrow{\Pi}$ y consideremos el plano afín

$$S = p_2 + L(\{v_2, v\}),$$

obviamente conteniendo a $R_2 = p_2 + L(\{v_2\})$. Con esta elección de R y S se tiene que

$$\overrightarrow{R} \cap \overrightarrow{S} = L(\{u\}) \cap L(\{v_2, v\}) = \{\overrightarrow{0}\}$$

ya que $\{v_2, u\}$ son linealmente independientes (recordar que $u \notin L(\{v_2\})$) y $v \notin L(\{v_2, u\}) = \overrightarrow{\Pi}$. De aquí que R y S sean subespacios afines suplementarios en $\mathcal{A}$.



Claramente $S \cap \Pi \neq \varnothing$ ya que $p_2 \in R_2 \subseteq S \cap \Pi$, y de hecho

$$S \cap \Pi = p_2 + (\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{\Pi}) = p_2 + \big(L(\{v_2, v\}) \cap L(\{\overrightarrow{p_1 p_2}, v_1, v_2\})\big) = p_2 + L(\{v_2\}) = R_2;$$

para la igualdad $L(\{v_2, v\}) \cap L(\{\overrightarrow{p_1 p_2}, v_1, v_2\}) = L(\{v_2\})$ usar que $v \notin \overrightarrow{\Pi} = L(\{\overrightarrow{p_1 p_2}, v_1, v_2\})$.
Consideremos la proyección afín $\pi_{S,R} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sobre S en la dirección de R. Es claro que si $p \in R_1 \subset \Pi$ entonces la recta

$$R_p := p + \overrightarrow{R} \subset p + \overrightarrow{\Pi} = \Pi,$$

de donde por definición se tiene que

$$\{\pi_{S,R}(p)\} = S \cap R_p = (S \cap \Pi) \cap R_p = R_2 \cap R_p \subset R_2.$$

Esto prueba que $\pi_{S,R}(R_1) \subseteq R_2$. Para comprobar que $\pi_{S,R}(R_1) = R_2$ basta con ver que $\pi_{S,R}(R_1)$ es una recta afín. Esto se deduce de las identidades

$$\overrightarrow{\pi_{S,R}(R_1)} = \overrightarrow{(\pi_{S,R})}(\overrightarrow{R_1}) = \vec{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(\overrightarrow{R}_1) = \vec{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}\big(L(\{v_1\})\big) = L\big(\{\vec{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(v_1)\}\big),$$

y el hecho de que $L\big(\{\vec{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(v_1)\}\big)$ es una recta vectorial; para la Ãºltima afirmación, usar que $\vec{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}}(v_1) \neq \overrightarrow{0}$ al ser $v_1 \notin L(\{u\}) = \overrightarrow{R} = \mathrm{Ker}(\vec{\pi}_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{R}})$ (recuérdese que $u = \overrightarrow{p_1 p_2} \notin L(\{v_j\})$, $j = 1, 2$).

En relación con la parte práctica del ejercicio, consideremos las rectas en el enunciado

$$R_1 = (1,0,0) + L(\{(0,1,1)\}, \quad R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - z + 1 = y - z - 1 = 0\}$$

y el plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 2 = 0\}$ en $\mathbb{R}^3$.
Claramente $R_2 = (-2,1,0) + L(\{(0,1,1)\})$, por lo que R_1 y R_2 son paralelas y distintas,

$$\overrightarrow{R_1 \vee R_2} = L(\{(-3,1,0)\}) + \overrightarrow{R}_1 + \overrightarrow{R}_2 = L(\{(-3,1,0)\}) + L(\{(0,1,1)\}) = L(\{(-3,1,0),(0,1,1)\}).$$

es un plano vectorial, y R_1, R_2 son coplanarias. Para ver que $R_2 \subset S$ basta con observar que

$$(-2,1,0) \in S \quad \text{y} \quad \overrightarrow{R}_2 = L(\{(0,1,1)\}) \subset \overrightarrow{S} = L(\{(0,1,0),(0,0,1)\}).$$

La recta $R = \langle (1,0,0), (-2,1,0) \rangle$ tiene $\overrightarrow{R} = L(\{(-3,1,0)\})$ y claramente

$$\overrightarrow{R} + \overrightarrow{S} = L(\{(-3,1,0)\}) \oplus L(\{(0,1,0),(0,0,1)\}) = \mathbb{R}^3,$$

por lo que R y S son suplementarios afines en $\mathbb{R}^3$.

Además, tras pasar a implícitas

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x + 3y - 1 = 0\}$$

Como $(1,0,0) \in R$, por definición de $\pi_{S,R}$ concluimos que

$$\pi_{S,R}((1,0,0)) = R \cap S = (-2,1,0).$$

Para calcular $M(\pi_{S,R}, \mathcal{R}_0)$, donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$, usemos la definición de $\pi_{S,R} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Tomemos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ arbitrario y llamemos $(a,b,c) = \pi_{S,R}(x,y,z)$. Sabemos de la definición de $\pi_{S,R}$ que

- $(a,b,c) \in S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 2 = 0\}$.
- $(x-a, y-b, z-c) = \overrightarrow{(a,b,c)(x,y,z)} \in \overrightarrow{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x + 3y = 0\}$.

Por tanto $a = -2, b = y + x/3 + 2/3, c = z$ y

$$M(\pi_{S,R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. *Clasifica el movimiento rígido del espacio euclidiano* $\mathbb{R}^3$

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

en función de los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ *y describe sus elementos geométricos.*

Respuesta: Denotemos $\mathcal{R}_0 = \{(0,0,0), B_0\}$ el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$, que es rectangular respecto de la métrica euclidiana $\langle\, , \rangle$ estándar. Como

$$M(\overrightarrow{f}_\alpha, B_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(3,\mathbb{R})$$

tiene determinante $1 > 0$, deducimos que f es un movimiento directo para todo α. Al ser $\overrightarrow{f}_\alpha \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, concluimos que f_α es un giro o un movimiento helicoidal.

La ecuación $f_\alpha(x,y,x) = (x,y,z)$ que determina el conjunto de puntos fijos de f_α nos da

$$\mathcal{P}_{f_\alpha} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (\alpha, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)x - \frac{z}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)z + \sqrt{2}) = (0,0,0)\},$$

por lo que $\mathcal{P}_{f_\alpha} \neq \varnothing$ si y sólo si $\alpha = 0$, y en este caso

$$\mathcal{P}_{f_0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)x - \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)z + \sqrt{2} = 0\},$$

esto es,
$$\mathcal{P}_{f_0}=(\frac{1}{\sqrt{2}-2},0,\frac{1}{\sqrt{2}})+L(\{(0,1,0)\}).$$
Concluimos que f_0 es un giro con eje $\mathcal{P}_{f_0}$. Obsérvese que
$$\overrightarrow{\mathcal{P}}_{f_0}^{\perp}=L(\{(1,0,0),(0,0,1)\})$$
y fijemos la orientación que induce la base $B=\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ como positiva en $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{f_0}^{\perp}$.

Para determinar el ángulo orientado $\theta\in]0,2\pi[$ de f_0 respecto de esta orientación fijada en $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{f_0}^{\perp}$, consideremos
$$\overrightarrow{f}_0|_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_{f_0}^{\perp}}\colon \overrightarrow{\mathcal{P}}_{f_0}^{\perp}\to\overrightarrow{\mathcal{P}}_{f_0}^{\perp},$$
y calculemos
$$M(\overrightarrow{f}_0|_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_{f_0}^{\perp}},B)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$
Finalmente queda $\theta=\pi/4$.

Discutamos ahora el caso $\alpha\neq 0$, en el que f_α es un movimiento helicoidal.

Los puntos del eje R de de f_α son
$$R=\{p=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \overrightarrow{pf(p)}\in\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f}_\alpha-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\}.$$
Como
$$\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f}_\alpha-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}=L(\{(0,1,0)\}),$$
inferimos que
$$R=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon (\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)x-\frac{z}{\sqrt{2}},\alpha,\frac{x}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)z+\sqrt{2})\in L(\{(0,1,0)\})\right\}=$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)x-\frac{z}{\sqrt{2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)z+\sqrt{2}=0\right\}=$$
$$=(\frac{1}{\sqrt{2}-2},0,\frac{1}{\sqrt{2}})+L(\{(0,1,0)\}).$$
Obsérvese que
$$\overrightarrow{R}^{\perp}=L(\{(1,0,0),(0,0,1)\})$$
y fijemos la orientación que induce la base $B=\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ como positiva en $\overrightarrow{R}^{\perp}$. Igual que antes, para determinar el ángulo orientado $\theta\in]0,2\pi[$ de f_α respecto de esta orientación fijada en $R^{\perp}$, consideremos
$$\overrightarrow{f}_\alpha|_{\overrightarrow{R}^{\perp}}\colon \overrightarrow{R}^{\perp}\to\overrightarrow{R}^{\perp},$$
y calculemos
$$M(\overrightarrow{f}_\alpha|_{\overrightarrow{R}^{\perp}},B)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$
Finalmente queda $\theta=\pi/4$.

Por Ãºltimo para determinar el vector de deslizamiento u_α de f_α elijamos un punto arbitrario de R, por ejemplo $p_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}-2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, y calculemos

$$u_\alpha = \overrightarrow{p_0 f_\alpha(p_0)} = (0, \alpha, 0).$$

3. *Sea $T = \{a_1, a_2, a_3\}$ un triángulo en un plano euclidiano $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \vec{\ }, \langle\, , \,\rangle)$, y llamemos B a su baricentro, C a su circuncentro y O a su ortocentro. Probar que si los puntos a_1, B, C no están alineados entonces:*

   a) *La recta afín $\langle\{a_2, a_3\}\rangle := a_2 + L(\{\overrightarrow{a_2 a_3}\})$ está unívocamente determinada por los puntos a_1, B, C, O.*

   b) *El vértice $a_3 \in T$ está unívocamente determinado por por los puntos a_1, a_2, B, C, O.*

   Como aplicación, dado $T = \{a_1, a_2, a_3\}$ triángulo en $\mathbb{R}^2$ con datos

$$a_1 = (1, 0), \quad B = \frac{1}{6}\left(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - \sqrt{3}\right), \quad C = (0, 0), \quad O = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

   - *determinar la recta afín $\langle\{a_2, a_3\}\rangle$,*
   - *y si además $a_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, calcular el vértice a_3.*

Respuesta:

Los puntos a_2, a_3 son desconocidos, pero sabemos quienes son a_1, B, C, O. Recordemos que el punto medio $m_{a_2 a_3}$ del segmento $[a_2, a_3]$ está en la mediana M_{a_1} del vértice a_1 y en la mediatriz R_{a_1} del vértice a_1, esto es

$$m_{a_2 a_3} \in M_{a_1} = a_1 + L(\{\overrightarrow{a_1 B}\}), \quad m_{a_2 a_3} \in R_{a_1}.$$

Nuestra estrategia pasa por demostrar que $m_{a_2 a_3}$ está determinado por los puntos a_1, B, C, O. En efecto, llamemos H_{a_1} a la altura del vértice a_1 y recordemos que por definición de altura, mediatriz y ortocentro tenemos que

$$\overrightarrow{H}_{a_1} = \overrightarrow{R}_{a_1} = L(\{\overrightarrow{a_2 a_3}\})^\perp = L(\{\overrightarrow{a_1 O}\}),$$

y como $C \in R_{a_1}$, también que

$$R_{a_1} = C + L(\{\overrightarrow{a_1 O}\}).$$

La no alineación de los puntos a_1, B, C implica que M_{a_1}, R_{a_1} no pueden ser coincidentes, y por tanto han de ser secantes en el punto $m_{a_2 a_3} \in M_{a_1} \cap R_{a_1}$. Resumiendo, el punto

$$\{m_{a_2 a_3}\} = M_{a_1} \cap R_{a_1} = \left(C + L(\{\overrightarrow{a_1 O}\})\right) \cap \left(a_1 + L(\{\overrightarrow{a_1 B}\})\right)$$

está determinado por los puntos a_1, B, C, O. De aquí que la recta

$$\langle\{a_2, a_3\}\rangle = m_{a_2 a_3} + L(\{\overrightarrow{a_2 a_3}\}) = m_{a_2 a_3} + L(\{\overrightarrow{a_1 O}\})^\perp$$

esté también determina por los puntos a_1, B, C, O como queríamos demostrar.

Si además conocemos a_2, la fórmula $a_3 = a_2 + 2\overrightarrow{a_2 m_{a_2 a_3}}$ determina a_3 en función de a_1, B, C, O, a_2.

Nota: *Es interesante observar que es suficiente con conocer los puntos a_1, B, O para determinar la recta $\langle\{a_2, a_3\}\rangle$ (el circuncentro C es pues redundante), y sin necesidad de ninguna suposición sobre la alineación de a_1, B, C.*

En efecto, recordemos que

$$B = o + \frac{1}{3}(\overrightarrow{oa_1} + \overrightarrow{oa_2} + \overrightarrow{oa_3}), \quad m_{a_2a_3} = o + \frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_2} + \overrightarrow{oa_3})$$

para cualquier punto $o \in \mathcal{A}$. Eligiendo como punto auxiliar para el cálculo $o = a_1$, observamos que $\overrightarrow{a_1m_{a2a3}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{a_1a_3}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{a_1B}$, por lo que el punto

$$m_{a_2a_3} = a_1 + \frac{3}{2}\overrightarrow{a_1B}$$

está determinado por a_1 y B. Como

$$\langle\{a_2, a_3\}\rangle = m_{a_2a_3} + L(\{\overrightarrow{a_1O}\})^{\perp},$$

la recta $\langle\{a_2, a_3\}\rangle$ está determinada por a_1, B, O como habíamos afirmado. Razonando como arriba, el vértice a_3 está igualmente determinado por a_1, a_2, B, O.

Para la parte práctica del ejercicio, consideremos $T = \{a_1, a_2, a_3\}$ un triángulo en $\mathbb{R}^2$ con datos

$$a_1 = (1, 0), \quad B = \frac{1}{6}\big(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - \sqrt{3}\big), \quad C = (0, 0), \quad O = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\big),$$

La mediatriz de vértice a_1 es la recta

$$M_{a_1} = (1, 0) + L\{\frac{1}{6}\left(-5 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\}.$$

Como

$$\overrightarrow{a_1O} = \big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\big)$$

entonces

$$R_{a_1} = C + L(\{\overrightarrow{a_1O}\}) = \big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\big)$$

Por tanto

$$m_{a2a3} = M_{a_1} \cap R_{a_1} = \frac{1}{4}\big(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - \sqrt{3}\big).$$

A la misma conclusión hubiésemos llegado usando directamente la fórmula $m_{a_2a_3} = a_1 + \frac{3}{2}\overrightarrow{a_1B}$ que explicamos en la Nota anterior.

Por tanto,

$$\langle\{a_2, a_3\}\rangle = m_{a_2a_3} + L(\{\overrightarrow{a_1O}\})^{\perp} = \frac{1}{4}\big(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - \sqrt{3}\big) + L\{\big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\big)\}.$$

Si $a_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ entonces $a_3 = a_3 = a_2 + 2\overrightarrow{a_2m_{a_2a_3}} = \big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$.