Tema 4: Grupos cocientes. Teoremas de isomorfía

Def: Sea G un grupo y N un subgrupo de G. Diremos que N es un subgrupo normal de G si

$$aN = Na \;,\; \forall a \in G$$

Es decir, las clases laterales a izq. coinciden con las clases laterales a dere.

Si N es normal en G, lo indicaremos como $N \trianglelefteq G$.

1) si G es abeliano, todo subgrupo suyo es normal

2) sea $G = D_4$ y $N = \langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3\}$

$$D_4 = \langle r, s \mid r^4 = 1 = s^2,\; sr = r^3 s \rangle$$

$$[D_4 : N] = \frac{|D_4|}{|N|} = \frac{8}{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad D_4/N = \{N, sN\},\; N/D_4 = \{N, Ns\}$$

$$sN = \{s, sr, sr^2, sr^3\} = \{s, r^3 s, r^2 s, rs\} = Ns \quad \Rightarrow \quad N \trianglelefteq G$$

3) sea $H = \langle s \rangle = \{1, s\} \leq D_4$ <u>No</u> es normal en D_4

$$rH = \{r, rs\} \neq Hr = \{r, sr\} = \{r, r^3 s\}$$

Teorema: Sea G un grupo, y $N \leq G$. Son equivalentes los siguientes enunciados:

1) N es un subgrupo normal en G
2) $aNa^{-1} = N, \; \forall a \in G$
3) $aNa^{-1} \leq N, \; \forall a \in G$

Para $N \leq G$ y $a \in G$, el subgrupo $aNa^{-1} = \{axa^{-1} \mid x \in N\}$ se llama el subgrupo conjugado de N por el elemento a.

1) Sea $f: G \to G'$ un homomorfismo de grupos.

$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G : f(x) = 1\}$

Sea $a \in G$ y $x \in \mathrm{Ker}(f)$ $\Rightarrow f(axa^{-1}) = f(a)\overset{1}{\overset{\shortparallel}{f(x)}}f(a^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) = 1 \Rightarrow axa^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$

Luego, $a\,\mathrm{Ker}(f)\,a^{-1} \leq \mathrm{Ker}(f), \; \forall a \in G \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) \trianglelefteq G$

2) Sea $G = S_4$ y $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Sea $\alpha \in S_4$

α biyectiva

$$\alpha(12)(34)\alpha^{-1} = \alpha(12)\alpha^{-1}\alpha(34)\alpha^{-1} = (\alpha(1)\,\alpha(2))(\alpha(3)\,\alpha(4)) \in K$$

Análogamente, $\alpha(13)(24)\alpha^{-1} \in K$, $\alpha(14)(23)\alpha^{-1} \in K$, $\alpha\, id\, \alpha^{-1} = id \in K \Rightarrow \alpha K \alpha^{-1} \leq K, \; \forall \alpha \in S_4 \Rightarrow K \trianglelefteq S_4$

Proposición: Sea G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto de G no vacío. Sea $N = \langle X \rangle$, entonces,

$$N \trianglelefteq G \iff axa^{-1} \in N, \; \forall a \in G, \forall x \in X$$

Def: Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Consideremos $G/N = \{aN \mid a \in G\}$

Definimos en G/N la siguiente operación binaria:

$$G/N \times G/N \longrightarrow G/N$$
$$(aN, bN) \longmapsto (aN)(bN) := abN$$

(Bien definida por ser N normal)

Resulta que G/N con este producto tiene estructura de grupo, con uno dado por $1N = N$, y donde para cada $aN \in G/N$, se tiene que $(aN^{-1}) = a^{-1}N$. Este grupo lo llamaremos el grupo cociente de G por N.

Se tiene un epimorfismo de grupos, que llamaremos proyección canónica.

$$p: G \to G/N$$
$$p(a) := aN$$

Teorema: Sea $f: G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Sea $N \trianglelefteq G$ tal que $N \trianglelefteq \operatorname{Ker}(f)$.

1) $\exists_1\ \bar{f}: G/N \to G'$ homomorfismo tq $\bar{f} \circ \rho = f$
2) $\bar{f}$ es un epimorfismo $\Leftrightarrow$ f es epimorfismo
3) $\bar{f}$ es un monomorfismo $\Leftrightarrow N = \operatorname{Ker}(f)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & G/N \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ se llama homomorfismo inducido por f en el grupo cociente G/N

Corolario: (1º Teorema de Isomorfía)

Sea $f: G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Entonces, f induce un isomorfismo

$$G/_{\operatorname{Ker}(f)} \cong \operatorname{Img}(f) \quad , \quad a\operatorname{Ker}(f) \longmapsto f(a)$$

Corolario: Si $f: G \to G'$ es un homomorfismo y G y G' son finitos, entonces $|G| = |\operatorname{Img}(f)| \cdot |\operatorname{Ker}(f)|$

Proposición: Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Entonces,

1) Si $H \in \operatorname{Sub}(G)$ tal que $N \leq H$, entonces $N \trianglelefteq H$ y $H/_N \in \operatorname{Sub}(G/N)$
2) Si $H_1, H_2 \in \operatorname{Sub}(G)$ tq $N \trianglelefteq H_i$, $i = 1,2$, entonces $H_1/_N = H_2/_N \Leftrightarrow H_1 = H_2$
3) Sea $L \in \operatorname{Sub}(G/N) \Rightarrow \exists_1\ H \in \operatorname{Sub}(G)$ tq $N \trianglelefteq H$ y $L = H/_N$

$\operatorname{Sub}(G/N) = \{ H/_N \mid N \trianglelefteq H \leq G \}$

Teorema: (2º Teorema de Isomorfía ó del Doble cociente)

Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$ y sea $H \in \operatorname{Sub}(G)$ tq $N \leq H$, entonces:

$$H/_N \trianglelefteq G/_N \Leftrightarrow H \trianglelefteq G \quad , \text{además,} \quad G/_H \cong (G/N)/(H/N)$$

Teorema: (3º Teorema de Isomorfía):

Sea G un grupo, y $N, K \in \operatorname{Sub}(G)$, con $N \trianglelefteq G$. Entonces,

1) KN es un subgrupo de G, y $N \trianglelefteq KN$
2) $K \cap N \trianglelefteq K$
3) $\exists\ K/_{K \cap N} \cong KN/_N$

Def: Sea G un grupo. Se define su centro como $Z(G) = \{ a \in G \mid ax = xa,\ \forall x \in G \}$

Def: Sea G un grupo. Un automorfismo de G es un isomorfismo $f: G \to G$

$$\operatorname{Aut}(G) = \{ f: G \to G \mid f \text{ isomorfismo} \}$$

$\operatorname{Aut}(G)$ es un grupo con la composición.

Producto directo de grupos

Def: Sean $G_1, \dots, G_n$ $(n \geq 2)$ grupos. Definimos su producto directo como el grupo cuyos elementos son los del producto cartesiano.

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 \times \cdots \times G_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in G_i, i = 1, \dots, n \}$$

y con operación definida como sigue:

$$(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n) := (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n)$$

Es fácil ver que, en efecto, $\prod_{i=1}^{n} G_i$ es un grupo con uno la n-tupla $(1,1,\dots,1)$, y donde $(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-1} = (x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$

Se tiene para cada $k = 1, \dots, n$ homomorfismo

$$p_k: \prod_{i=1}^{n} G_i \to G_k \qquad p_k(x_1, \dots, x_k) = x_k$$

la proyección k-ésima. También se tiene un homomorfismo

$$j_k: G_k \to \prod_{i=1}^{n} G_i \quad , \quad j_k(x_k) = (1, \dots, x_k, \dots, 1)$$

que se llama la inyección k-ésima.

Es claro que las proyecciones son epimorfismos y las inyecciones son monomorfismos.

Además, se verifica:

- $G_K \cong \mathrm{Img}(j_K)$, $\forall K = 1, \dots, n$
- $\mathrm{Img}(j_K) \trianglelefteq \prod_{i=1}^{n} G_i$, $\forall K = 1, \dots, n$

  Así, G_K es isomorfo a un subgrupo normal del producto directo.
- sea dado $H_K \in \mathrm{Sub}(G_K)$ para cada $K = 1, \dots, n$

  Entonces, $\prod_{K=1}^{n} H_K$ es un subgrupo de $\prod_{K=1}^{n} G_K$.

<u>Proposición</u>: Sean $G_1, \dots, G_n$ grupos finitos. Entonces:

1) $\prod_{i=1}^{n} G_i$ es también finito, y $\left| \prod_{i=1}^{n} G_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |G_i|$
2) Sea $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} G_i$, entonces, $\mathrm{ord}((x_1, \dots, x_n)) = \mathrm{mcm}(\mathrm{ord}(x_1), \dots, \mathrm{ord}(x_n))$

   Supongamos que $\mathrm{mcd}(|G_i|, |G_j|) = 1$, $\forall j$
3) Si cada G_i es cíclico, entonces $\prod_{i=1}^{n} G_i$ es cíclico.
4) Si $L \leq \prod_{i=1}^{n} G_i$ entonces existen $H_1 \leq G_1, \dots, H_n \leq G_n$ tq $L = \prod_{i=1}^{n} H_i$

<u>Corolario</u>: Sean $n, m \geq 1$

$$C_n \times C_m \cong C_{nm} \iff \mathrm{mcd}(n, m) = 1$$

<u>Caso particular</u>:

Supongamos dado un grupo G y dados $H_1, \dots, H_n \in \mathrm{Sub}(G)$. Consideremos $H_1 \times \dots \times H_n$. Tenemos una aplicación:

$$\phi : H_1 \times \dots \times H_n \to G$$

$$\phi((x_1, \dots, x_n)) := x_1 x_2 \cdots x_n$$

Se verifica

<u>Proposición</u>: Mismas hipótesis

$$\phi \text{ es un isomorfismo} \iff \begin{cases} a) & H_i \trianglelefteq G, \ \forall i = 1, \dots, n \\ b) & H_1 H_2 \cdots H_n = G \\ c) & (H_1 \cdots H_{i-1}) \cap H_i = \{1\}, \ \forall i = 2, \dots, n \end{cases}$$