GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

Examen cuatrimestral, 1ª parte
(27/01/2017)

1. [**3 puntos**]. Sea $V(K)$ un e.v. finitamente generado.

   a) Demostrar que si $S = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset V$ es un sistema de generadores, entonces existe una base B de V incluida en S.

   b) Demostrar que si $H = \{u_1, \ldots, u_k\} \subset V$ es linealmente independiente, entonces existe una base B de V que incluye a H.

2. [**3 puntos**]. Sean V y V' son dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, y $U \subset V$, $U' \subset V'$ subespacios vectoriales.

   a) Demostrar que $U \times U'$ es un subespacio vectorial del espacio producto $(V \times V')(K)$.

   b) Determinar si es posible o no construir todo subespacio vectorial W de $V \times V'$ de este modo (esto es, como un producto del tipo $U \times U'$).

3. [**4 puntos**]. Se consideran en $M_2(\mathbb{R})$ los siguientes subespacios vectoriales U_λ, V_μ dependientes de los parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$U_\lambda = L\{\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}\}$$

$$W_\mu = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \mu x + y + z = 0,\ x + \mu y + z = 0,\ x + y + \mu z = 0\}$$

   a) Determinar las dimensiones de U_λ y W_μ según el valor de los parámetros λ, μ.

   b) Para cada par de valores de (λ, μ), determinar si es verdadero o falso que se verifica:

      1) $U_\lambda \oplus W_\mu$

      2) $M_2(\mathbb{R}) = U_\lambda + W_\mu$

Duración: 1:30 min. (la segunda parte empieza a las 11:30 h.)

GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

Examen cuatrimestral, 2ª parte
(27/01/2017)

1. **[2,5 puntos]**. Sean $V(K), V'(K)$ dos espacios vectoriales finitamente generados, y $f : V \to V'$ una aplicación lineal.

   a) Demostrar: $\mathrm{an}(\mathrm{Im} f) = \mathrm{Nuc}\ f^t$.

   b) Razonar que los rangos de f y f^t coinciden.

2. **[4 puntos]**. Se considera el espacio vectorial de las matrices antisimétricas $A_3(\mathbb{R})$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to A_3(\mathbb{R})$ que se obtiene extendiendo por linealidad las igualdades:

$$f(1,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(0,1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(0,0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Determinar una base ordenada B de $\mathbb{R}^4$ y otra B' de $A_3(\mathbb{R})$ tales que la matriz de f en estas bases sea del tipo: $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, para ciertos números naturales m, n, r.

3. **[3,5 puntos]**. Se considera el espacio vectorial de polinomios $\mathbb{R}_2[x]$ y los conjuntos ordenados de formas lineales $C = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ y $C' = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ definidos por:

$$\phi^1(p(x)) = p(-1), \qquad \phi^2(p(x)) = p(1), \qquad \phi^3(p(x)) = p(2);$$

$$\psi^1(p(x)) = 3\int_{-1}^{1} p(x)dx, \qquad \psi^2(p(x)) = p'(1), \qquad \psi^3(p(x)) = p''(1).$$

   donde $p'(1)$ y $p''(1)$ denotan, respectivamente, primera y segunda derivada del polinomio $p(x)$ evaluada en 1.

   a) Demostrar que C y C' son bases de $\mathbb{R}_2[x]^*$.

   b) Calcular la matriz de cambio de base (matriz de paso) de C a C'.

   c) Calcular dos bases, B y B', de $\mathbb{R}_2[x]$ tales que $B^* = C$ y $B'^* = C'$.

Duración: 1:30 min.

1^a PARTE

(1) Sea $V(K)$ un e.v. finitamente generado.

a) Demostrar que si $S = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset V$ es un sistema de generadores, entonces existe una base B de V incluida en S.

b) Demostrar que si $H = \{u_1, \ldots, u_k\} \subset V$ es linealmente independiente, entonces existe una base B de V que incluye a H.[1]

a) Razonando por inducción, para $m = 1$ el resultado se sigue porque: (i) si $w_1 \neq 0$ entonces $S = \{w_1\}$ es linealmente independiente y, como se parte de que S es un sistema de generadores, también será una base, y (ii) si $w_1 = 0$ entonces $V = L(S) = \{0\}$, y el espacio vectorial trivial $\{0\}$ admite por base (como un caso límite) el conjunto vacío $\emptyset$ (que también es un subconjunto de V).

Supuesto válido por hipótesis de inducción el resultado para $m \in \mathbb{N}$, sea ahora $S = \{w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}\}$. En el caso de que S sea linealmente independiente, será también una base y se sigue el resultado. En caso contrario, si todos los elementos w_j fueran 0, de nuevo el vacío sería una base y, si no, se sabe por las caracterizaciones de la dependencia lineal que alguno de los elementos de S se podrá escribir como combinación lineal del resto. Reordenando los elementos de S si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que este elemento es el último, esto es, que existen escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$:

$$w_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i. \tag{1}$$

En consecuencia, el conjunto S' que se obtiene suprimiendo w_{m+1} de S (esto es, $S' := S - \{w_{m+1}\}$), sigue siendo un sistema de generadores. En efecto, cualquier $v \in V$ se podrá escribir como combinación lineal de los elementos de S' ya que, al ser S un sistema de generadores, existen $b_1, \ldots, b_m, b_{m+1} \in K$ tales que:

$$v = \left(\sum_{i=1}^{m} b_i w_i\right) + b_{m+1} w_{m+1} = \left(\sum_{i=1}^{m} b_i w_i\right) + b_{m+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} (b_i + b_{m+1} a_i)\, w_i \in L(S')$$

(la segunda igualdad sin más que usar (1)).

Puesto que S' es entonces un sistema de generadores y tiene m elementos, se le puede aplicar la hipótesis de inducción, y un subconjunto de S' (y, por tanto, de S) será una base, como se quería.

b) Puesto que V es finitamente generado, podemos tomar un sistema de generadores finito $G = \{v_1, \ldots, v_l\}$. La base B se obtiene ampliando H con elementos de G en l pasos como sigue.

Como primer paso, si $v_1 \notin L(H)$ se define $B_1 := H \cup \{v_1\}$; en caso contrario, se toma $B_1 := H$. Análogamente, supuesto definido B_j para $j = 1, \ldots, l-1$, se define B_{j+1} según el caso: si $v_{j+1} \notin L(B_j)$ se toma $B_{j+1} = B_j \cup \{v_{j+1}\}$, en caso contrario, se toma $B_{j+1} := B_j$. Comprobemos entonces que B_l es la base B requerida.

B_l es un sistema de generadores porque en cada paso j-ésimo $v_j \in L(B_j)$ (simplemente, por cómo se define B_j). Puesto que $B_j \subset B_l$ se sigue entonces $v_j \in L(B_l)$ para todo $j = 1, \ldots, l$, esto es, $G \subset L(B_l)$ y, por tanto $V (= L(G)) \subset L(B_l)$, como se quería.

Para comprobar que B_l es linealmente independiente, obsérvese primero que B_1 lo es porque, o bien B_1 es igual a H (que era linealmente independiente por hipótesis) o bien B_1 se obtiene añadiendo al conjunto linealmente independiente H un vector que no depende linealmente de los de[2] H. Análogamente, supuesto que B_j es linealmente independiente el conjunto B_{j+1} se obtiene por el mismo proceso, por lo que todos los B_j son linealmente independientes, como se quería.

[1] Aunque ambos apartados están resueltos en teoría, proporcionamos ahora demostraciones autocontenidas en un lenguaje un tanto más formal (con el que el alumno no debiera de sentirse ya incómodo).

[2] Se sabe que esta forma de ampliar un conjunto linealmente independiente preserva la independencia lineal (¡compruébese!).

(2) Sean V y V' son dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, y $U \subset V$, $U' \subset V'$ subespacios vectoriales.

a) Demostrar que $U \times U'$ es un subespacio vectorial del espacio producto $(V \times V')(K)$.

b) Determinar si es posible o no construir todo subespacio vectorial W de $V \times V'$ de este modo (esto es, como un producto del tipo $U \times U'$).

a) Recordemos que las operaciones de $V \times V'$ se definen componente a componente, esto es:

$$\begin{aligned} (v, v') + (w, w') :=& \quad (v + w, v' + w') && \forall (v, v'), (w, w') \in V \times V' \\ a \cdot (v, v') :=& \quad (a \cdot v, a \cdot v') && \forall (v, v') \in V \times V', \quad \forall a \in K, \end{aligned}$$

donde, en cada miembro derecho de estas igualdades, las operaciones que aparecen para la primera componente se llevan a cabo en $V(K)$, y para la segunda componente en $V'(K)$.

Para demostrar que $U \times U'$ es un subespacio vectorial de $V \times V'$, debemos comprobar primero que no es vacío, lo cual resulta obvio porque, por ser U y U' subespacios, el neutro 0 de V debe pertenecer a U y el neutro $0'$ de V debe pertenecer a U', con lo que $(0, 0') \in U \times U'$ (y así $U \times U' \neq \emptyset$). A continuación, debemos comprobar que las operaciones $+$ y $\cdot K$ de $V \times V'$ se restringen a $U \times U'$, lo cual se resume en demostrar:

$$a \cdot (v, v') + b \cdot (w, w') \quad \in V \times V', \qquad \forall (v, v'), (w, w') \in V \times V', \quad \forall a, b \in K. \tag{2}$$

Ahora bien, por la definición de las operaciones en $V \times V'$:

$$a \cdot (v, v') + b \cdot (w, w') = (a \cdot v, a \cdot v') + (b \cdot w, b \cdot w') = (a \cdot v + b \cdot w, a \cdot v' + b \cdot w').$$

Por ser U un subespacio vectorial, $a \cdot v + b \cdot w \in U$ y por serlo U', se tiene $a \cdot v' + b \cdot w' \in U'$. Así,

$$(a \cdot v + b \cdot w, a \cdot v' + b \cdot w') \in U \times U'$$

y se obtiene la inclusión requerida en (2).

b) No es posible. Como contrajemplo, tómese $V(K) = V'(K) = \mathbb{R}(\mathbb{R})$ y el subespacio $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definido por:

$$W = L\{(1, 1)\}.$$

Los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ son los impropios, $\{0\}$ y $\mathbb{R}$, por lo que los únicos subespacios del tipo producto $U \times U'$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son los siguientes cuatro:

$$\{0\} \times \{0\}, \quad \{0\} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \times \{0\}, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Claramente ninguno de ellos coincide con W, de donde se deduce el resultado.

(3) Se consideran en $M_2(\mathbb{R})$ los siguientes subespacios vectoriales U_λ, V_μ dependientes de los parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$U_\lambda = L\{\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}\}$$

$$W_\mu = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \mu x + y + z = 0,\ x + \mu y + z = 0,\ x + y + \mu z = 0\}$$

a) Determinar las dimensiones de U_λ y W_μ según el valor de los parámetros λ, μ.

b) Para cada par de valores de (λ, μ), determinar si es verdadero o falso que se verifica:

1) $U_\lambda \oplus W_\mu$

2) $M_2(\mathbb{R}) = U_\lambda + W_\mu$

a) Puesto que U_λ está generado por dos vectores no nulos, su dimensión será 1 ó 2. Para distinguir entre estos dos casos, basta con calcular, según el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz A formada por las coordenadas de estos vectores respecto a la base usual de $M_2(\mathbb{R})$, esto es, de

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -4 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Para ello podemos suprimir la tercera fila, ya que está compuesta de ceros, y calcular cuándo se anulan simultáneamente los dos menores que se obtienen al orlar el elemento 2. Así, debemos resolver simultáneamente en λ el sistema no lineal de ecuaciones:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 + 4 = \lambda + 3, \qquad 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 + 8 = 9 - \lambda^2.$$

Puesto que sólo $\lambda = -3$ es solución de ambas ecuaciones, se tiene entonces:

$$\dim \mathbf{U}_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = -3 \\ 2 & \text{si } \lambda \neq -3 \end{cases}$$

Como W_μ viene dado como la solución de un sistema lineal de 3 ecuaciones y 4 incógnitas, su dimensión será 4 menos el rango de la matriz del sistema M_μ (pues este rango coincide con el número de ecuaciones independientes), siendo:

$$M_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Para ello resolvemos en μ, aplicando propiedades elementales de los determinantes[3] la ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-\mu & \mu-1 & 1 \\ 1-\mu^2 & 1-\mu & \mu \end{vmatrix} = (1-\mu)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+\mu & 1 \end{vmatrix} = (1-\mu)^2(\mu+2)$$

Las soluciones son $1, -2$, por lo que $\mathrm{r}(M_\mu) = 3$ para $\mu \neq 1, -2$, y fácilmente se obtiene $\mathrm{r}(M_{\mu=1}) = 1$ (las tres filas coinciden) y $\mathrm{r}(M_{\mu=-2}) = 2$ (hay menores de orden 2 distintos de 0).

[3] Por supuesto, también se puede desarrollar usando la regla de Sarrus, y calcular las raíces del polinomio de grado 3 en μ usando la regla de Ruffini.

De hecho, podemos calcular una base en cada caso, concluyéndose:

$$\dim(\mathbf{W}_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu \neq 1,-2 \qquad \text{Base: } \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \\ 2 & \text{si } \mu = -2 \qquad \text{Base: } \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\} \\ 3 & \text{si } \mu = 1 \qquad \text{Base: } \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\} \end{cases}$$

b) Obsérvese que $U_\lambda \oplus W_\mu$ equivale a decir $U_\lambda \cap W_\mu = \{0\}$, esto es $\dim(U_\lambda \cap W_\mu) = 0$, y que $M_2(\mathbb{R}) = U_\lambda + W_\mu$ equivale a $\dim(U_\lambda + W_\mu) = 4$. Puesto que para cada par (λ, μ) conocemos las dimensiones de U_λ y W_μ, el problema de determinar si ocurre $M_2(\mathbb{R}) = U_\lambda + W_\mu$ equivale al de $U_\lambda \oplus W_\mu$ gracias a la fórmula de Grassmann:

$$\dim(U_\lambda + W_\mu) = \dim U_\lambda + \dim W_\mu - \dim(U_\lambda \cap W_\mu).$$

Caso $\lambda = -3$. Como dim $U_{\lambda=-3} = 1$, podemos escoger como base de U_λ la primera de las dos matrices que definen su sistema de generadores en el enunciado, y se tiene:

$$U_\lambda \cap W_\mu \neq \{0\} \iff U_\lambda \subset W_\mu \iff \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \in W_\mu.$$

Esta última relación no se da para ningún valor de μ. Por tanto $\mathbf{U}_\lambda \oplus \mathbf{V}_\mu$, y aplicando Grassmann:

- Si $\mu \neq 1, -2$, $\dim(U_\lambda + W_\mu) = 1 + 1 - 0 = 2$, por lo que $\mathbf{M_2}(\mathbb{R}) \neq \mathbf{U}_\lambda + \mathbf{V}_\mu$.
- Si $\mu = -2$, $\dim(U_\lambda + W_\mu) = 1 + 2 - 0 = 3$, por lo que $\mathbf{M_2}(\mathbb{R}) \neq \mathbf{U}_\lambda + \mathbf{V}_\mu$.
- Si $\mu = 1$, $\dim(U_\lambda + W_\mu) = 1 + 3 - 0 = 4$, por lo que $\mathbf{M_2}(\mathbb{R}) = \mathbf{U}_\lambda + \mathbf{V}_\mu$.

Caso $\lambda \neq -3$. Como ahora dim $U_\lambda = 2$, el enunciado provee directamente una base de U_λ (cuyas coordenadas se escribieron en la matriz A). Para calcular $\dim(U_\lambda + V_\mu)$ basta con tomar para cada valor de μ la base de W_μ anteriormente calculada, ampliar la matriz A a una matriz A_μ añadiendo sus correspondientes coordenadas, y calcular el rango de esta matriz. Concretamente:

- Si $\mu \neq 1, -2$ (calculando el menor de A_μ suprimiendo su tercera fila):

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda+1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \Longrightarrow \dim(U_\lambda + W_\mu)(= r(A_\mu)) = 3.$$

  Por tanto, $\dim(U_\lambda \cap W_\mu) = 2 + 1 - 3 = 0$ y **se da** $U_\lambda \oplus W_\mu$ **pero** $M_2(\mathbb{R}) \neq U_\lambda + V_\mu$.

- Si $\mu = -2$ (calculando detA_μ mediante los adjuntos de su tercera columna):

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & \lambda+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \Longrightarrow \dim(U_\lambda + W_\mu)(= r(A_\mu)) = 4.$$

  Por tanto, $\dim(U_\lambda \cap W_\mu) = 2 + 2 - 4 = 0$ y **se dan** $U_\lambda \oplus W_\mu$ **y** $M_2(\mathbb{R}) = U_\lambda + V_\mu$**.**

- Si $\mu = 1$ (calculando como antes obviando la última columna):

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & \lambda+1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \Longrightarrow \dim(U_\lambda + W_\mu)(= r(A_\mu)) = 4.$$

  Por tanto, $\dim(U_\lambda \cap W_\mu) = 3 + 2 - 4 = 1$ y **se da** $M_2(\mathbb{R}) = U_\lambda + V_\mu$ **pero no** $U_\lambda \oplus W_\mu$.

TABLA RESUMEN DE CASOS

		¿Suma directa?	¿Suma todo $M_2(\mathbf{R})$?
$\lambda = -3$	$\mu \neq 1, -2$	SÍ	NO
	$\mu = -2$	SÍ	NO
	$\mu = 1$	SÍ	SÍ
$\lambda \neq -3$	$\mu \neq 1, -2$	SÍ	NO
	$\mu = -2$	SÍ	SÍ
	$\mu = 1$	NO	SÍ

2^a PARTE

(1) Sean $V(K), V'(K)$ dos espacios vectoriales finitamente generados, y $f : V \to V'$ una aplicación lineal.

a) Demostrar: $\text{an}(\text{Im}f) = \text{Nuc } f^t$.

b) Razonar que los rangos de f y f^t coinciden.

a) Obsérvese en primer lugar que como $\text{Im}f \subset V'$ se tiene $\text{an}(\text{Im}f) \subset V'^*$ y, como $f^t : V'^* \to V^*$, $\text{Nuc}f^t \subset V'^*$, esto es, tanto an(Im$f$) como Nuc f^t son subespacios del mismo espacio vectorial, V'^*.

Sea entonces $\phi' \in V'^*$. Teniendo en cuenta la definición de anulador, y que los elementos de Imf son los que se escriben como $f(v)$ para algún $v \in V$, se sigue:

$$\phi' \in \text{an}(\text{Im}f) \quad \iff \quad \phi'(f(v)) = 0, \quad \forall v \in V \quad \iff \quad \phi' \circ f = 0.$$

Como $\phi' \circ f : V \to K$, la igualdad $\phi' \circ f = 0$ quiere decir que $\phi' \circ f \in V^*$ es la forma lineal nula sobre V. Ahora bien, como por la definición de la aplicación traspuesta se tiene $f^t(\phi') = \phi' \circ f$, podemos decir entonces:

$$\phi' \circ f = 0 \quad \iff \quad f^t(\phi') = 0 \quad \iff \quad \phi' \in \text{Nuc}f^t,$$

por lo que la igualdad requerida es inmediata de las dos líneas de equivalencias anteriores.

b) Sea n' la dimensión de V'. Calculando dimensiones en los subespacios del apartado anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \dim\ (\text{an}(\text{Im}f)) &= \dim V' - \dim(\text{Im}f) &&= n' - r(f) \\ \dim\ (\text{Nuc}f^t) &= \dim V'^* - \dim(\text{Im}f^t) &&= n' - r(f^t). \end{aligned}$$

Como se ha probado que ambos subespacios coinciden, sus dimensiones también serán iguales, de donde se sigue inmediatamente $r(f) = r(f^t)$. [4]

Una manera alternativa de razonar la igualdad entre los rangos es la siguiente. Se sabe que, escogidas bases B, B' de V y V', respectivamente, el rango de f coincide con el rango de la matriz $M(f, B' \leftarrow B)$ y el de f^t con el de la matriz $M(f^t, B^* \leftarrow B'^*)$, donde los rangos de esas matrices se calculan como el número máximo de columnas linealmente independientes. Puesto que también se sabe que la matriz $M(f^t, B^* \leftarrow B'^*)$ es la traspuesta de $M(f, B' \leftarrow B)$, basta entonces con demostrar que el rango de una matriz coincide con el de su traspuesta, esto es, que el número máximo de columnas linealmente independientes de una matriz cualquiera A coincide con su número máximo de filas linealmente independientes. Este resultado también es conocido por una demostración directa hecha al final de la primera parte del curso.

[4] En los apuntes se hace un demuestra primero, a partir del apartado a), la igualdad an(Nuc$f$)=Imf^t; calculando entonces las dimensiones de los subespacios vectoriales en esta última igualdad se deduce que los rangos de f y f^t coinciden.

(3) Se considera el espacio vectorial de las matrices antisimétricas $A_3(\mathbb{R})$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to A_3(\mathbb{R})$ que se obtiene extendiendo por linealidad las igualdades:

$$f(1,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(0,1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(0,0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinar una base ordenada B de $\mathbb{R}^4$ y otra B' de $A_3(\mathbb{R})$ tales que la matriz de f en estas bases sea del tipo: $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, para ciertos números naturales m, n, r.

Sea B_u la base usual de $\mathbb{R}^4$ y B'_u la base usual de las matrices antisimétricas, esto es,

$$B'_u = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Por como se define f, es inmediato que su matriz en esas bases es:

$$M(f, B'_u \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

(de hecho, en cada columna aparecen, convenientemente ordenados, los escalares de la parte triangular superior de las imágenes de cada elemento de B_u).

Siguiendo el procedimiento que se conoce por la teoría, construiremos B tomando una base de Nuc$f$ y ampliándola a una de $\mathbb{R}^4$ (teniendo la precaución de situar los vectores de la ampliación en primer lugar). El rango de f es 2 porque en la matriz $M(f, B'_u \leftarrow B_u)$ se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

(esto es, existe un menor de orden 2 distinto de 0, y los de orden 3 que se obtienen orlándolo son iguales a 0). Por tanto, el núcleo de f tiene dimensión $n - r(f) = 4 - 2 = 2$. Puesto que la tercera fila de $M(f, B'_u \leftarrow B_u)$ tiene que ser combinación lineal de las dos primeras, el núcleo se obtiene solucionando el correspondiente sistema de ecuaciones principales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{esto es,} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x + y & = & -3z - t \\ 2x + y & = & -5z - 3t \end{array}\right\}.$$

En la última expresión el sistema se ha escrito en función de las incógnitas principales x, y (con parámetros z, t), de modo que se puede solucionar mediante la regla de Cramer. De hecho, como el determinante de la matriz del sistema (calculado en (3)) es -1, se tiene:

$$x = -\begin{vmatrix} -3z - t & 1 \\ -5z - 3t & 1 \end{vmatrix} = -2z - 2t \qquad y = -\begin{vmatrix} 1 & -3z - t \\ 2 & -5z - 3t \end{vmatrix} = -z + t$$

y una base del núcleo es[5] $B_N = \{(-2,-1,1,0),(-2,1,0,1)\}$. Esta base se puede ampliar hasta una de $\mathbb{R}^4$ usando elementos de B_u. De hecho, como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

la base B requerida puede escogerse como:

$$\mathbf{B} = ((\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}),(-\mathbf{2},-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0}),(-\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1}))\,.$$

Para construir la base B', basta con tomar como primeros dos vectores[6] $f(1,0,0,0)$ y $f(0,1,0,0)$ (los cuales ya se conocen del enunciado del problema) y ampliarlos hasta cualquier base de $A_3(\mathbb{R})$ usando un vector de B'_u. De hecho, podemos ampliar con el primer vector de B'_u puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Esto es, la base B' requerida puede escogerse como:

$$\mathbf{B'} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Por construcción, se sigue:

$$\mathbf{M}(\mathbf{f},\mathbf{B'} \leftarrow \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[5] tomando las elecciones canónicas independientes $(z=1,t=0)$, $(z=0,t=1)$.

[6] obsérvese que está garantizado, por la construcción de B, tanto que las imágenes de estos dos vectores tienen que ser independientes como que las imágenes de los otros dos vectores de la base B deben ser 0.

(4) Se considera el espacio vectorial de polinomios $\mathbb{R}_2[x]$ y los conjuntos ordenados de formas lineales $C = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ y $C' = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ definidos por:

$$\phi^1(p(x)) = p(-1), \qquad \phi^2(p(x)) = p(1), \qquad \phi^3(p(x)) = p(2);$$

$$\psi^1(p(x)) = 3\int_{-1}^{1} p(x)dx, \qquad \psi^2(p(x)) = p'(1), \qquad \psi^3(p(x)) = p''(1).$$

donde $p'(1)$ y $p''(1)$ denotan, respectivamente, primera y segunda derivada del polinomio $p(x)$ evaluada en 1.

a) Demostrar que C y C' son bases de $\mathbb{R}_2[x]^*$.

b) Calcular la matriz de cambio de base (matriz de paso) de C a C'.

c) Calcular dos bases, B y B', de $\mathbb{R}_2[x]$ tales que $B^* = C$ y $B'^* = C'$.

Sea $B_u = (1, x, x^2)$ la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$. Dada cualquier forma lineal $\Psi \in \mathbb{R}^2[x]$ sus coordenadas en B_u^* se obtienen simplemente como $(\Psi(1), \Psi(x), \Psi(x^2))$. Calculando estas coordenadas para cada uno de los elementos de C y C', y escribiéndolas ordenadamente por columnas, se obtienen entonces sendas matrices:

$$M(I, B_u^* \leftarrow C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M(I, B_u^* \leftarrow C') = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Al ser dim $(\mathbb{R}_2[x]^*) = 3$ y estar formado cada uno de los conjuntos C y C' por tres vectores, basta con demostrar que las correspondientes coordenadas en B_u^* son independientes, esto es, que los determinantes de las matrices anteriores son distintos de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \ (\neq 0), \qquad \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \ (\neq 0).$$

b) Al ser C, C', B^* bases del mismo espacio vectorial, basta con aplicar fórmulas de cambio de base:

$$\begin{aligned} M(I, C' \leftarrow C) = &\ M(I, C' \leftarrow B_u^*) \cdot M(I, B_u^* \leftarrow C) \\ = &\ \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ = &\ \tfrac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ -2 & -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\tfrac{1}{12}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -12 & 12 & 24 \\ 16 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde la matriz inversa se calcula por cualquier algoritmo conocido (p. ej., $(A^{-1})_{ij} = \Delta_{ji}/\ \det A$).

c) Usando $B^* = C$, la base pedida B verifica:

$$M(I, B_u \leftarrow B) = M(I, B^* \leftarrow B_u^*)^t = (M(I, B_u^* \leftarrow C)^{-1})^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \right)^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

esto es,
$$\mathbf{B} = ((\mathbf{2} - \mathbf{3x} + \mathbf{x^2})/\mathbf{6}, (\mathbf{2} + \mathbf{x} - \mathbf{x^2})/\mathbf{2}, (-\mathbf{1} + \mathbf{x^2})/\mathbf{3}).$$
Análogamente para B', usando $B'^* = C'$ (y aprovechando que $M(I, C' \leftarrow B_u^*)$ se había calculado):
$$M(I, B_u \leftarrow B') = M(I, C' \leftarrow B_u^*)^t = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ -2 & -12 & 6 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
esto es,
$$\mathbf{B'} = (\mathbf{1}/\mathbf{6}, \mathbf{x}, (-\mathbf{1} - \mathbf{6x} + \mathbf{3x^2})/\mathbf{6}).$$