Resumen tema 1

Sea E un espacio vectorial real, diremos que una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una norma en E si verifica:

i) $\|x\| \geq 0$, $x \in E$ $\quad \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Si E, espacio vectorial, admite una norma, diremos que es un espacio normado

Algunos ejemplos de norma son:

- Norma p:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p} \qquad E = \mathbb{R}^N, \quad p \geq 1$$

Si $p = 2$ se trata de la norma euclídea

- Norma del máximo:

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_j| : j = 1, \dots, N\} \qquad E = \mathbb{R}^N$$

El espacio $C^k([a,b])$ está compuesto por las funciones de clase k, es decir, las funciones derivables hasta orden k y cuyas derivadas son continuas.

- $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : a < x < b\}$
- $\|f\|_k := \max\{\|f^{(j)}\| : j = 0, \dots, k\}$

Sea E un espacio normado, $x \in E$, $x^* \in E$ una aproximación de x entonces, se define el error absoluto como:

$$\|x^* - x\|$$

y el error relativo como:

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|}$$

Se define la distancia entre dos vectores $x, y \in E$ como:

$$dist(x,y) := \|x-y\|$$

Se dice que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en E converge a $x_0 \in E$ si:

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$

es decir,

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x_0 \iff \lim_{x\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

Sea $f: X \to Y$, diremos que f es continua en $x_0 \in X$ si:

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in X \wedge \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

Dos normas se dicen equivalentes si $\exists c_1, c_2 > 0$ tal que:

$\forall x \in E \Rightarrow c_1\|x\| \leq \|x\|_* \leq c_2\|x\|$

Por esta definición, todas las normas de un espacio normado finito son equivalentes.

Se define la norma inducida en $\mathbb{R}^{M\times N}$ como:

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

De aquí se extrae que: Una norma inducida $\Rightarrow \|I\| = 1$

$$\|A\| := \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^N \wedge x \neq 0\right\} \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

Consideraremos $\|\cdot\|_1$ inducida en $\mathbb{R}^{M\times N}$ como el máximo de la suma de los valores absolutos de cada columna, y $\|\cdot\|_\infty$ como el máximo de la suma de los valores absolutos de cada fila.

$$\|A\|_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^{M} |a_{ij}| : j = 1, \dots, N\right\} \qquad \|A\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| : i = 1, \dots, N\right\}$$

Además, se verifica que $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$

Se define el radio espectral de $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ como:

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C} \wedge \det(A - \lambda I) = 0\}$$

De aquí se extrae que $\|\cdot\|_2$ en $\mathbb{R}^{M\times N}$ no induce a la de Frobenius, sino que:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$$

Una forma más sencilla de calcular la norma de una matriz es

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \qquad A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Diremos que $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $x^T A x \geq 0$

Si $A \in M^{M \times N} \Rightarrow A^T A \in S_N$

Una matriz ortogonal es una matriz cuya matriz inversa coincide con su traspuesta y una matriz es regular si es cuadrada y su determinante es distinto de 0.

Una norma en $\mathbb{R}^{N \times N}$ se dice matricial cuando:
$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

Se verifica que $\lim_{n \to \infty} A^n = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{N \times N}$

De aquí se extrae que si A es una matriz triangular entonces $\lim_{n \to \infty} A^n = 0 \Leftrightarrow \max\{|a_{ii}| < 1 : i = 1, \dots, N\}$ y, también se verifica que si $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $\|A\| < 1$ (norma matricial) $\Rightarrow \rho(A) < 1$

Se dice que un problema está bien planteado cuando es unisolvente y estable

Denotaremos a la función g como la resolvente de f si g es la inversa de f y $\forall y \in Y$ es unisolvente.

Sean X, Y subconjuntos no vacíos de sendos espacios normados y $g: Y \to X$ una aplicación $y_0 \in Y$, diremos que g es estable en y_0 cuando:

$$\exists \delta, M > 0 : \sup \left\{ \frac{\|g(y) - g(y_0)\|}{\|y - y_0\|} : y \in Y \wedge 0 < \|y - y_0\| < \delta \right\} < M$$

y que g es estable si lo es en todos los element de Y.

Un problema es estable en $y_0 \in Y$ si su resolvente $g: Y \to X$ lo es en dicho punto y es estable si lo es en cualquier punto de Y.

Sabemos que g estable en $y_0 \Rightarrow$ g continua en y_0 y que toda función real de C^1 es estable.

Definimos el condicionamiento absoluto de una aplicación de C^1 en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ como:

$$c(f, x_0) := |f'(x_0)|$$

y el condicionamiento relativo como:

$$c(f, x_0) := \left| \frac{f'(x_0) x_0}{f(x_0)} \right|$$

Si tenemos un problema cuya resolvente es de C^1, entonces el condicionamiento de (P) en $y_0 \in Y$ es el de su resolvente.

El condicionamiento relativo con matrices es:

$$c(g, y_0) = \frac{\|A^{-1}\| \, \|y_0\|}{\|x_0\|}$$

Sea $\|\cdot\|$ una norma inducida en $\mathbb{R}^{N \times N}$, entonces definimos el condicionamiento de una matriz $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regular como:

$$c(A) := \|A^{-1}\| \, \|A\|$$

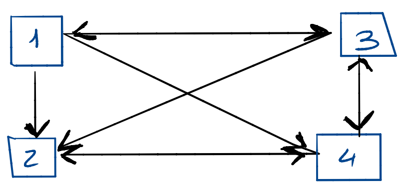
Esto nos lleva a que si tenemos un mal condicionamiento del sistema, el condicionamiento de la matriz de coeficientes es grande y viceversa.

Algoritmos

Un algoritmo es un procedimiento que describe de forma precisa, mediante un número finito de operaciones aritmético-lógicas, la resolución de un problema.

Ahora veremos como funciona el algoritmo PageRank de Google, el cual, mide la relevancia de las páginas web con enlaces comunes.

Consideremos la estructura de enlaces entre cuatro páginas web:



La relevancia de cada página será la suma de los cocientes entre la relevancia de la página que entra y los enlaces que salen de esta.

$$x_1 = \frac{x_3}{3} \qquad x_2 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{2} \qquad x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2} \qquad x_4 = \frac{x_1}{3} + x_2 + \frac{x_3}{3}$$

obtendremos un sistema compatible indeterminado con un parámetro (rango $=3$).

Errores de redondeo

Los ordenadores trabajan con un subconjunto finito de números reales, los números máquina

Sea $b \in \mathbb{N}$ la base, $s \in 0,1$ el signo, $N, M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea x_k la cifra en la posición k tal que $0 \leq x_k < b \ \forall k = -M, \dots, N$, entonces la representación posicional de un número real es:

$$x = (-1)^s \sum_{n=-M}^{N} x_n b^n$$

La clásica de TOC

$$x_b := (-1)^s \cdot (x_N \cdots x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-M})_b$$

Punto binario o decimal

Sea $K \in \mathbb{N}$ fijo, $N-K-1$ dígitos enteros, K dígitos tras el punto a_n tal que $0 \leq a_n \leq b-1$. Entonces las N posiciones de memoria son: $N =$ signo + cifras significativas $= 1 + N - 1$. La representación con punto fijo es la siguiente:

$$(-1)^s b^{-K} \cdot \sum_{n=0}^{N-2} a_n b^n \sim (-1)^s \cdot (a_{N-2} \cdots a_K . a_{K-1} \cdots a_0)_b$$

Sea $t \in \mathbb{N}$ el número máximo de dígitos o cifras significativas a_n tales que $0 \leq a_n \leq b-1$, sea $m = a_1 \cdots a_t$ la mantisa tal que $0 \leq m \leq b^t - 1$, sea $e \in \mathbb{Z}$ el exponente, tal que $L, U \in \mathbb{Z}$. Entonces las N posiciones de memoria son $N =$ signo + cifras significativas + dígitos del exponente $= 1 + t + N - t - 1$, la representación con punto flotante es:

$$(-1)^s b^e \cdot \sum_{n=1}^{t} a_n b^{-n} \sim (-1)^s \cdot (0.a_1 \cdots a_t) \cdot b^e = (-1)^s \cdot m \cdot b^{e-t}$$

Ejemplo

Sea $x = -3.4567$ y $b = 10$:

número de decimales

número cifras + signo

i) Representación con punto fijo, $K=4$ y $N=6$ $\Rightarrow x = (-1) \cdot 10^{-4} \cdot (3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 \dots)$

ii) Representación con punto flotante, $t=6$, $e=2$ $\Rightarrow x = (-1) \cdot 10^2 \, (0 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} \dots)$

Sean $t \in \mathbb{N}$, $L, U \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{F}(b,t,L,U)$. Entonces:

i) $-x \in \mathbb{F}(b,t,L,U)$

ii) $b^{L-1} \leq |x| \leq b^{U}(1-b^{-t})$

iii) $\text{card}(\mathbb{F}(b,t,L,U)) = 2(b-1)b^{t-1}(U-L+1)+1$

Se define como epsilon máquina a la distancia entre el menor número de $\mathbb{F}(b,t,L,U)$ mayor que 1 y la propia unidad

$$\varepsilon_M := b^{1-t}$$

Fijando un sistema de punto flotante concreto $\mathbb{F}(b,t,L,U)$, al que no se hará referencia si no hay lugar a ambiguedad) si $x \in \mathbb{R}$ es el número real

$$x = (-1)^s b^e \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$$

entonces, su truncatura es un número de $\mathbb{F}(b,t,L,U)$

$$tr(x) := (-1)^s \cdot (0.a_1 \ldots a_t) \cdot b^e$$

Un ejemplo sería $\mathbb{F}(2,4,-1,1)$ y $x = 1{,}6875$

Primero lo pasamos a la base indicada:

$$1{,}6875 = (0{,}11011)2$$

Ahora calculamos su truncatura:

$$tr(1.6875) = (0.1101) \cdot 2 = 1{,}625$$

Es decir, hemos quitado la última cifra, ya que en el número había 5 cifras y según el sistema, el número de cifras es cuatro

Para un sistema de punto flotante $\mathbb{F}(b,t,U,L)$, el redondeo del número real

$$x = (-1)^s b^e \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$$

es el número $\mathbb{F}(b,t,L,U)$

$$rd(x) = tr\left(x + (-1)^s \frac{b}{2} \frac{b^e}{b^{t+1}}\right)$$

También se puede calcular como

$$rd(x) = (-1)^s \cdot (0.a_1 \ldots a_{t-1} r_t) b^e$$

donde

$$r_t := \begin{cases} a_t & \text{si } a_{t+1} < \frac{b}{2} \\ a_t + 1 & \text{si } a_{t+1} \geq \frac{b}{2} \end{cases}$$

Ejemplo

Sea el sistema de punto flotante $F(2,4,-1,1)$ y el número real 1.6875, vamos a calcular el redondeo.

Como la base es 2, pasamos el número a dicha base

$x = 1.6875 = (0.11011)2$, para redondearlo podemos hacerlo de dos formas

i) Directamente con 5ª cifras tras el punto $(t=4)$

$$rd(1.6875) = (0.1110)\cdot 2 = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

ii) Con definición

$$rd(1.6875) = tr\left(x + (-1)^0 \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{6^5}\right) = tr((0.11011)\cdot 2 + (0{,}000001)\cdot 2) =$$

$$= tr((0.11100)\cdot 2) = 1.75$$

El redondeo o truncacifra están acotados (Mirar propiedad en los apuntes)

La cota que aparece en el error relativo del redondeo recibe el nombre de precisión máquina (o unidad de redondeo) y se denota por u, es decir:

$$u := \frac{1}{2} b^{1-t} = \frac{1}{2} \varepsilon_M$$

Aunque una única operación genere un error pequeño, una sucesión finita de operaciones pueden propagar el error, llegando a ser este considerable

En general, las operaciones aritméticas como sumar, dividir y multiplicar se portan bien ante la propagación del error, pero la resta de "números de mismo signo" no.