TEMA 6: MODELOS

Un modelo es un conjunto de variable aleatoria con características comunes en el experimento aleatorio, salvo parámetros.

Distribución degenerada

Aproxima un experimento aleatorio que dá lugar siempre al mismo resultado. Por tanto, dicha variable aleatoria tomará un único valor c.

Función masa de probabilidad:

$$P[X = x] = \begin{cases} 1 & x = c \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Función de distribución:

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

$$m_k = E[X^k] = c^k P[X = c] = c^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\mu_k : E[(X-c)^k] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$M(t) = E[e^{tX}] = e^{tc} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$E[X] = c$$

$$Var[X] = 0$$

Distribución uniforme discreta

Se utiliza para modelar variables aleatorias asociadas a experimentos aleatorios que tienen un número finito de posibles resultados equiparables:

$$P[X = x_i] = \begin{cases} \frac{1}{n} & i = 1, \ldots, 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$P[X \leq x_i] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } x_n \leq x_n \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

$$E[X] = \bar{x}$$

$$m_k = E[X^k] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \quad k = 1, 2 \ldots$$

$$\mu_k = E[(X - EX)^k] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k, \quad k = 1, 2 \ldots$$

$$Var[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$M(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}$$

Distribución de Bernoulli

Modela experimentos con solo dos resultados posibles resultados (éxito \ fracaso)

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre } E \text{ (éxito)} \\ 0 & \text{si no ocurre } E \text{ (fracaso)} \end{cases}$$

$$P[X = 1] = p, \quad P[X = 0] = 1 - p$$

$$X \sim B(1, p), \quad E[X] = p, \quad E[X^2] = p, \quad Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = p(1-p)$$

Distribución binomial

Modela un experimento de Bernoulli n veces:

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

$$X \sim B(n, p) \quad E[X] = np, \quad Var[X] = np(1-p)$$

Propiedad de simetría: Si $X \sim B(n, p)$, entonces la variable aleatoria que contabiliza el número de fracasos, $Y = n - X \sim B(n, 1-p)$, y, además, $P[X = x] = P[Y = n - x]$

Distribución binomial negativa

Modela el número de fracasos antes que aparezca el éxito r-ésimo.

$$P[X=x] = \binom{x+r-1}{x}(1-p)^x p^r, \quad x=0,1,2\ldots \quad (r=1,2,\ldots;\ 0<p<1) \qquad X \sim BN(r,p)$$

$$E[X] = \frac{r(1-p)}{p} \ ; \ Var[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Distribución hipergeométrica

Supongamos una población de N individuos divididos en dos categorías N_1 y $N_2 = N - N_1$. Se elige una población de n individuos, sin remplazamiento. La variable aleatoria X que contabiliza el número de individuos de la 1º categoría en la muestra se dice que tiene distribución hipergeométrica de parámetros N, N_1 y n se nota

$$X \sim H(N, N_1, n) \qquad P[X=x] = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad E[X] = np \qquad Var[X] = \frac{n(N-n)N_1(N-N_1)}{N^2(N-1)}$$

Distribución de Poisson

Representa el número de ocurrencias de un suceso en un periodo de tiempo fijo o en una región fija del espacio, cuando el número de ocurrencias sigue una determinadas pautas:

- Nº de ocurrencias de cada intervalo debe ser independiente.
- Si se considera un intervalo muy pequeño, la probabilidad de una ocurrencia es proporcional a la longitud del intervalo y la probabilidad de dos o más ocurrencias es prácticamente nula.

$X_t \rightarrow$ Nº de ocurrencias del suceso en un intervalo de longitud t:

$$P[X_t = k] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \qquad k = 0,1\ldots$$

Si el intervalo es longitud unidad:

$E[X]\ \lambda$

$Var[X] = \lambda \qquad P[X=x] = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$