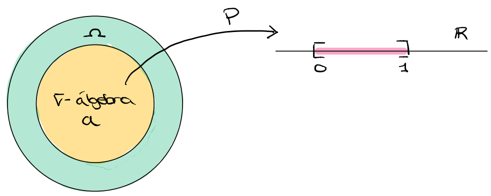
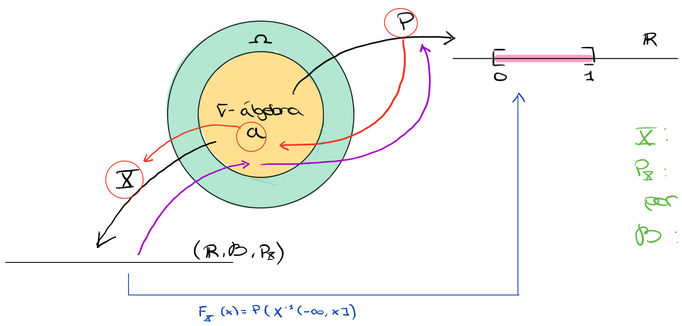
TEMA 5: VARIABLES ALEATORIAS

Hasta ahora nos encontrabamos en la siguiente situación:



A partir de ahora trabajaremos sobre el siguiente esquema:



X: Variable aleatoria

P_X: Probabilidad inducida por X

$\mathcal{B}$: conjunto Borel

X es una variable aleatoria si $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, función, tal que la imagen inversa de cualquier conjunto Borel es medible, es decir, pertenece al σ-álgebra a.

$$X^{-1}(\mathcal{B}) = \{\omega \in \Omega \, / \, X(\omega) \in \mathcal{B}\} \quad , \forall B \in \mathcal{B} \} \in a$$

Las variables aleatorias inducen una medida de probabilidad sobre el espacio Borel

$P_X : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$

$B \longrightarrow P_X(B) = P(\omega \in \Omega \, / \, X(\omega) \in B)$

$\longrightarrow (-\infty, x] \longrightarrow P_X((-\infty, x]) = P(\omega \in \Omega \, / \, X(\omega) \leq x) = F_X(x) \longrightarrow$ Función de distribución

Se define la función de distribución de una variable aleatoria como:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$F_X(x) = P_X[(-\infty, x]] = P(X^{-1}(-\infty, x]) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades de la función de distribución:

- Es no decreciente. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- Es continua por la derecha
- $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$

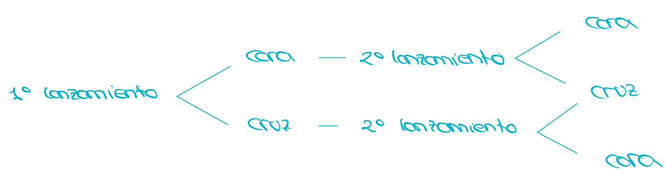
Otras propiedades son:

- El conjunto de puntos de discontinuidad es numerable
- $F_X(x^-) = P[X < x]$
- Solo puede tener discontinuidades de salto y la longitud de salto en un punto de discontinuidad es la probabilidad que toma dicho valor:

$$P[X = x] = P[X \le x] - P[X < x] = F(x) - F(x^-)$$

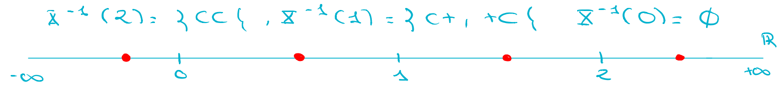
Veamos un ejemplo de variable aleatoria:

Supongamos una moneda y llamamos a X: nº de caras en dos lanzamientos.
Sabemos que X es variable aleatoria (a partir de ahora escribiremos v.a) si $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Comenzamos distinguiendo casos:



Luego, los posibles casos son que, salga ninguna cara, 1 cara o 2 caras:

$$X^{-1}(2) = \{CC\}, \quad X^{-1}(1) = \{C+, +C\} \quad X^{-1}(0) = \emptyset$$



$$X^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \cdot\ x < 0 & \{w \in \Omega \,/\, X(w) < 0\} = \emptyset \in \mathcal{A} \\ \cdot\ 0 \le x \le 1 & \{w \in \Omega \,/\, X(w) < x\} = \{++\} \in \mathcal{A} \\ \cdot\ 1 \le x < 2 & \{w \in \Omega \,/\, X(w) < x\} = \{C+, +C, ++\} \\ \cdot\ x \ge 2 & \{w \in \Omega \,/\, 2 \le X(w)\} = \{CC, ++, C+, +C\} = \Omega \end{cases}$$

Supongamos ahora el siguiente caso:

$\mathcal{A}' = \{\{CC\}, \{C+, +C, ++\}, \emptyset, \Omega\}$ σ-álgebra

$(\Omega, \mathcal{A}')$ y supongamos X: nº de caras $\quad X(CC) = 2,\ X(C+) = X(+C) = 1,\ X(++) = 0$

$$X((-\infty, x]) = \begin{cases} \cdot\ x < 0 & \{w \in \Omega \,/\, X(w) < x\} = \emptyset \in \mathcal{A}' \\ \cdot\ 0 \le x < 1 & \{w \in \Omega \,/\, X(w) < x\} = \boxed{\{++\} \notin \mathcal{A}'} \\ \vdots & \end{cases}$$

$\rightarrow$ Por lo que X no es variable aleatoria

Teorema de correspondencia

Si P es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, existe una única función de distribución, F_P en $\mathbb{R}$, que verifica $F_P(x) \in P((-\infty, x]) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

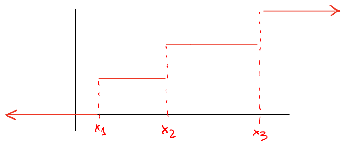
Recíprocamente, si F es una función de distribución en $\mathbb{R}$, existe una única probabilidad P_F sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ que verifica $P_F((-\infty, x]) = F(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Una función de $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, no decreciente, continua a la derecha, con $f(-\infty) = 0$ y $f(+\infty) = 1$ verifica ser función de una variable aleatoria.

Clasificación de variables aleatorias

Variables aleatorias discretas

Por intuición, X v.a. será discreta si $F(x)$ crece a saltos, es decir, existe, a lo más, un conjunto finito numerable de puntos.



Sea X una v.a. discreta, con $E = \{x_i \ / \ i=1,2\dots\}$. A la función $P: E \to [0,1]$ se le denomina función masa de probabilidad:

$$x_i \longrightarrow P[X = x_i] = p_i \quad \forall i \in E$$

Esta función verifica $0 \leq P[X = x_i] \leq 1$, $i \in E$ y $\sum_i P[X = x_i] = 1$.

La función de distribución viene dado por $F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p_i$

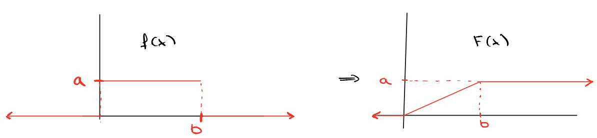
Variables aleatorias continua

Por intuición, X v.a será continua si su función de distribución es absolutamente continua, es decir, existe $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esta función recibe el nombre de función de densidad y verifica:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- f es integrable Riemann, ya que tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$



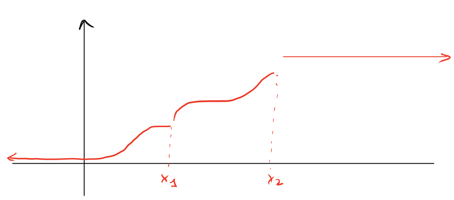
$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx =$

$= 0 + \int_0^b a\,dx + 0 = ax\Big]_0^b = ab$. Como:

$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow ab = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$

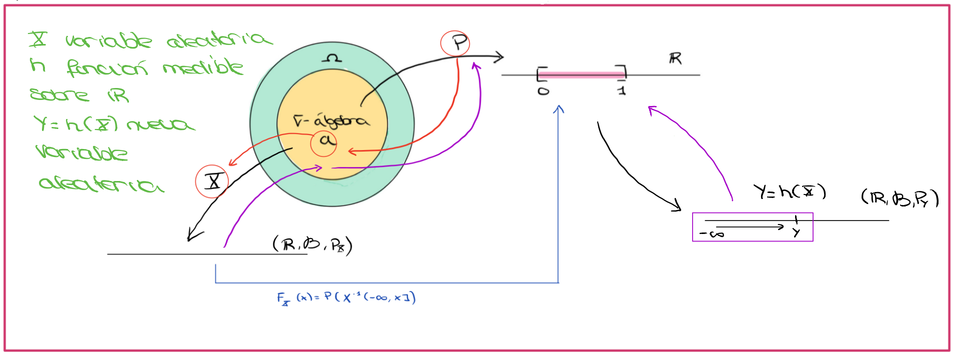
- $x < 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$
- $0 \leq x \leq b \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \frac{x}{b}\Big]_0^x + 0 = \frac{x}{b}$
- $x \geq b \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_b^x f(t)\,dt + \int_0^b f(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0 + \frac{x}{b}\Big]_0^b + 0 = 1$

Variables aleatorias mixta



Cambio de variable

Actualicemos nuestro esquema original



Teorema general de cambio de variable

Podemos expresar Y en función de $\mathbb{X}$ si $P_Y(B) = P_{\mathbb{X}}(h^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}$

$\hookrightarrow \{\mathbb{X}^{-1}(h^{-1}(B))\} = P(\omega \in \Omega \,/\, \mathbb{X}(\omega) \in h^{-1}(B)\}$

Función de una variable aleatoria discreta

Sea X r.a. discreta

$E = \{x_i,\ 1, 2 \dots\} \subset \mathbb{R}$

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ medible

$Y = h(x)$ r.a. discreta

$$\Rightarrow P[Y = y] = \begin{cases} \sum\limits_{h(x)=y} P[X = x] & y \in h(E) \\ 0 & y \notin h(E) \end{cases}$$

Veamos un pequeño ejemplo:

x_i	P_i
-1	1/3
0	1/3
1	1/3

E

$Y = 2\mathbb{X} + 3 = h(\mathbb{X})$

y_i	P_i
1	1/3
3	1/3
5	1/3

h(E)

$Y = x^2 = h(\mathbb{X})$

y_i	P_i
0	1/3
1	2/3

h(E)

Función de una variable aleatoria continua

En este caso, una función de una variable aleatoria continua puede dar lugar a una variable discreta, continua o mixta.

Continua $\longrightarrow$ Discreta

$\mathbb{X}$ r.a. continua

función de densidad f

$A \subset \mathbb{R}$

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible

$Y = h(x)$ r.a. discreta

$$\Rightarrow P[Y = y] = \begin{cases} \int_{x \in \mathbb{R} \,/\, h(x)=y} f(x)\,dx & y \in h(A) \\ 0 & y \notin h(A) \end{cases}$$

Supongamos $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. Calcular la probabilidad $P(Y=0)$, $P(Y=1)$

$$P(Y=0) = \sum_{h(x)=y} P(\mathbb{X} < x) = P(\mathbb{X} < \tfrac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1/2} 1\,dx = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=1) = \sum_{h(x)=y} P(\mathbb{X} > x) = P(\mathbb{X} \geq \tfrac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = \frac{1}{2}$$

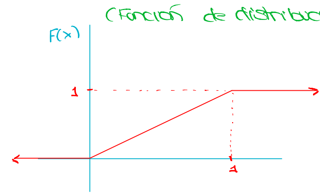
Suman 1

Luego tenemos:

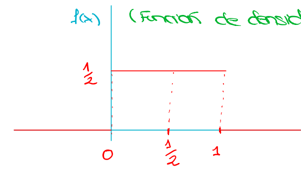
y_i	p_i
0	1/2
1	1/2

(Función masa de probabilidad)

(Función de distribución)



(Función de densidad)



Continua $\longrightarrow$ Continua

- X v.a. continua
- f función de densidad
- $f > 0 \quad \forall x \in [a,b]$
- $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona
- y derivable en $[a,b]$.
- $Y = h(X)$ v.a. continua

$$\Rightarrow \quad g(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y))\,|(h^{-1})'(y)| & y \in h([a,b]) \\ 0 & y \notin h([a,b]) \end{cases}$$

Generalización

$$h(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(h_k^{-1}(y)) \left| \frac{dh_k^{-1}(y)}{dy} \right|$$