Forma Bilineal y Cuadrática

Formas cuadráticas

$\Phi: V \to \mathbb{K}$

$\Phi(x) = f(x,x)$

- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi(\lambda x) = \lambda^2 \Phi(x)$

Forma Bilineal

$f: V \times V \to \mathbb{K}$

- $f(au_1+bu_2, v) = af(u_1,v)+bf(u_2,v)$
- $f(u, av_1+bv_2) = af(u,v_1)+bf(u,v_2)$

Simetría

- Formas simétricas:
  $f(y,x) = f(x,y) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow M_B(f)$ es simétrica
- Formas antisimétricas:
  $f(x,y) = -f(y,x) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow M_B(f)$ es antisimétrica $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f(x,x) = 0$

Subespacio ortogonal

$U^\perp$ es el espacio ortogonal a U respecto g

$U^\perp = \{ v \in V \mid g(v,u) = 0 \ \forall u \in U \}$

- $V^\perp = \text{Rad}(g)$
- $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$
- $(U^\perp)^\perp = U$ · $\{0\}^\perp = V$
- $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

Radical

$\text{Rad}(g) = \{ u \in V \mid g(u,v) = 0, \ \forall v \in V \}$

Clasificación de métricas

- (V,g) degenerado $\Leftrightarrow \exists u \in V \setminus \{0\} : g(u,v) = 0 \ \forall v \in V$.

En caso contrario no degenerada ($\text{rad}(g) = \{0\} \Leftrightarrow M(g)$ regular)

- (V,g) métrica definida positiva $\Leftrightarrow g(u,u) > 0 \ \forall u \in V$
- (V,g) métrica definida negativa $\Leftrightarrow g(u,u) < 0 \ \forall u \in V$
- (V,g) métrica semidefinida positiva $\Leftrightarrow g(u,u) \geq 0 \ \forall u \in V$
- (V,g) métrica semidefinida negativa $\Leftrightarrow g(u,u) \leq 0 \ \forall u \in V$

Isometrías

$f:(V,g) \to (V',g')$ es isometría si:

- f es isomorfismo
- $g'(f(u), f(v)) = g(u,v), \ \forall u,v \in V$

Se verifica:

$\dim(V) = \dim(V')$, $rg(g) = rg(g')$

índice (g) = índice (g')

Teorema de Sylvester

Sea (V,g) $\exists \beta$ tal que (base ortonormal)

$M_\beta(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{r-s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right)$. Llamaremos:

- Índice(g) = s = nº elementos negativos
- Signatura(g) = $(r-s, s)$ (nº de ± 1)
- Rango $(g) = r+s$ · Nulidad$(g) = n-(r+s)$ (nº de ceros)

- g no degenerada $\Leftrightarrow \dim(V) = rg(g)$
- g semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ Índice$(g) = \{0\}$
- g semidefinida negativa $\Leftrightarrow rg(g) =$ Índice(g)
- g definida positiva $\Leftrightarrow \dim(V) = rg(g)$ y Índice$(g) = \{0\}$
- g definida negativa $\Leftrightarrow \dim(V) = rg(g) =$ Índice(g)
- g indefinida $\Leftrightarrow 0 <$ Índice$(g) < rg(g)$

- g definida positiva $\Leftrightarrow \det(A_k) > 0$
- g semidefinida positiva $\Leftrightarrow \det(A_k) \geq 0$
- g definida negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \det(A_k) < 0$
- g semidefinida negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \det(A_k) \leq 0$