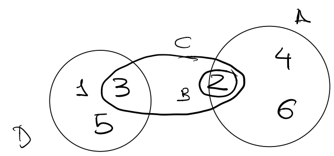
Anotaciones tema 4

Probabilidad condicionada

$(\Omega, \mathcal{G}, P)$

$A \in \mathcal{a}$ (sigma álgebra) y sabemos que A ha ocurrido

Imaginemos el lanzamiento de un dado



$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{$ salir par $\{$

$P\left(B/A\right) = \frac{1}{3} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

$P(D/A) = \emptyset$
suceso imposible

Son funciones diferentes

$P(\cdot/A) = P_A : \square \longrightarrow [0,1]$

$C \longmapsto P_A(C)$

Ya no estamos en el sigma álgebra $\mathcal{a}$, por lo que necesitaremos una nueva estructura

$\downarrow$

$\{B \in \mathcal{a} : B\cap A\{$ definimos $\mathcal{a}_A = \{A \cap B, \forall B \in \mathcal{a}\{$

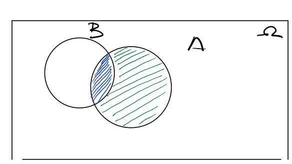
$\mathcal{a}_A = \{A \cap B = C, \forall B \in A\{$ $(A, \mathcal{a}_A, P_A)$

Vamos a ver si $\mathcal{a}_A$ es σ- álgebra:

1) $\underset{(A\cap B)}{C} \in \mathcal{a}_A \Rightarrow C^{*} = (A \cap B)^{*} = A \cap \bar{B}$ Complementario sobre A

2) $\{C_i\{_{i=1,2,\dots} \in \mathcal{a}_A \Rightarrow \bigcup_i C_i \in \mathcal{a}_A$

$\bigcup_i C_i = \bigcup_i (A\cap B_i) = \underset{\hat{a}}{A} \cap \underset{\hat{a}}{(\bigcup_i B_i)} \in \mathcal{a}_A$



3) $\emptyset$ Cualquier suceso sin intersección con A

4) Unión cerrada

Definimos $P_A : \mathcal{a}_A \to \mathbb{R}$; $P_A(C) = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P_A(B/A)$

$C \longmapsto P_A(C)$
$\shortparallel$
$A \cap B$ para algún B

I) $P_A(C) \geq 0$
II) $P_A(A) = 1$
III) $\{a\} / \{C_i \cap C_j\} \neq \emptyset$ $\quad P_A(\bigcup_i C_i) = \sum_i P_A(C_i)$

I) $P_A(C) = \frac{P(C) \geq 0}{P(A) \geq 0} \geq 0$

II) $P_A(A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

III) $P_A(\bigcup_i C_i) = \frac{P_A(\bigcup C_i)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_i (A\cap B_i))}{P(A)} = \frac{\sum_i P(A\cap B_i)}{P(A)} = \sum_i \frac{P(C)}{P(A)} =$
$= \sum_i P_A(C_i)$

Entonces:

$(\Omega, \mathcal{a}, P)$
$A / P(A) > 0$ $\quad$ A ha ocurrido
$(A, \underbrace{\mathcal{a}_A}, P_A)$ $\quad$ Espacio probabilístico condicionado

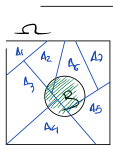
$C = A\cap B \in \mathcal{a}$ $\quad P(A) = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P_r(B/A)$

$P(A\cap B) = P(A)\, P_r(B/A)$

Teorema de la probabilidad compuesta

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1\cap A_2)\cdots P_r\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

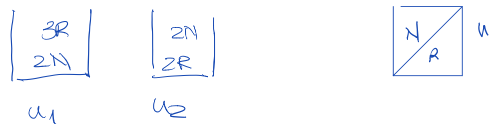
Teorema de la probabilidad total



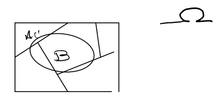
$\{A_i\}$ partición Ω
$\bigcup_i A_i = \Omega \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ $\Big\} \Rightarrow P(B) = \sum_i P(A_i)\, P_r(B/A_i)$

Demostración

$P(B) = P(B\cap\Omega) = P(B\cap(\bigcup_i A_i)) = P(\bigcup_i (B\cap A_i)) = P(\bigcup_i (A_i\cap B)) =$
$= \sum_i P(A_i \cap B) = \sum_i P(A_i)\, P_r(B/A_i)$



$P(R_1 \cap R_2) =$



TPT $\quad P(B) = \sum_i P(A_i) Pr(B/A_i)$

Regla de Bayes

$$Pr\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i) Pr(B/A_i)}{\sum_i P(A_i) Pr(B/A_i)}$$

$$Pr\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) Pr(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) Pr(B/A_i)}{\sum_i P(A_i) Pr(B/A_i)}$$

Independencia de sucesos

A independiente de B sii $Pr(A/B) = P(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow)$ $Pr(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$\Leftarrow)$

A independiente de B $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

"

$Pr(A/B)$

A independiente de B $\Leftrightarrow$ B independiente de A.

$$Pr(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$\Rightarrow)$ $Pr(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(A)}P(B)}{\cancel{P(A)}}$

$\Leftarrow)$ $Pr(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}$

A y B son independientes $\left\{ \begin{array}{l} Pr(A/B) = P(A) \\ Pr(B/A) = P(B) \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{array} \right.$

Siempre que no sea nula. No puedes hacer las probabilidades de algo que no haya ocurrido.

i) A y B independientes $\Rightarrow$ A y $\bar{B}$ son independientes

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A\cap\bar{B}) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B) =$$
$$= P(A)(1-P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

$$P_r(\Omega/A) = P(\Omega)$$

$$P(A\cap\Omega) = P(A)\cdot P(\Omega) = P(A)$$
$$P(A) = P(A)$$

$$P_r(A/\Omega) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(\Omega)} = P(A)$$

$\Rightarrow$ Luego para Ω todo suceso es independiente con él

ii) $\bar{A}$ y B son independientes

$$P(B\cap\bar{A}) = P(B) - P(A\cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1-P(A)) = P(B)P(\bar{A}) =$$

iii) $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\bar{A})P_r(\bar{B}/\bar{A}) = P(\bar{A})(1-P_r(B/\bar{A})) = P(\bar{A})-(1-P(B)) =$$
$$= P(A)P(B)$$

Independencia mutua:

$\{A_i\}$ $i=1,\dots,n$ son mutuamente independientes si:

i) lo son dos a dos $\quad P(A_i\cap A_j) = P(A_i)P(A_j)\ \forall i\neq j$

ii) lo son 3 a 3 $\quad P(A_i\cap A_j\cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$

⋮

lo son n a n $\quad P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$