Apuntes Geometría II

Doble Grado Informática y Matemáticas

Daniel Alconchel Vázquez

Tema 1: Diagonalización de endomorfismos

Introducción

Sean V, W espacios vectoriales con bases B y B', respectivamente y sea $f: V \to W$ una aplicación lineal. Denotaremos:

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} & \alpha_1 & \\ & \vdots & \\ & \alpha_n & \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} B = \{u_1, \dots, u_n\} \\ B' = \{u_1', \dots, u_n'\} \end{array}$$

Columna i-ésima son las coordenadas de $f(u_i)$ respecto la base B'

$f(u_1) = \alpha_1 u_1' + \dots + \alpha_n u_n'$

Sean B_1 y B_2 bases de V y B_1', B_2' bases de W y $f: V \to W$ aplicación lineal, entonces:

$$M(f, B_1, B_1') = \underbrace{M(B_2', B_1')}_{\text{Cambio de base } B_2' \to B_1'} \; \underbrace{M(f, B_2, B_2')}_{\text{Cambio de base } B_2 \to B_2'} \; \underbrace{M(B_1, B_2)}_{\text{Cambio de base } B_1 \to B_2}$$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = M(f, B, B') \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Coordenadas del vector $f(v)$ respecto B'

Coordenadas de un vector de V respecto la base B

Sea $f \in End_K(V)$, $f: \underset{B_2}{\overset{B_1}{V}} \to \underset{B_2}{\overset{B_1}{V}}$, en este caso:

$$M(f, B_1) = M(B_2, B_1) M(f, B_2) M(B_1, B_2)$$

Son inversas

- Dos matrices $M(f, B_1)$, $M(f, B_2)$ son semejantes $\Leftrightarrow$ Tienen la misma traza, mismo determinante y mismo rango.

Gracias a esta propiedad podemos afirmar:

$$\text{traza}(f) = \text{traza}(M(f, B_1))$$
$$\det(f) = \det(M(f, B_1))$$
$$\text{rango}(f) = \text{rango}(M(f, B_1))$$

Fijada una base $\mathcal{B}$ de V podemos definir:

isomorfismo

$$\phi : End_K(V) \longrightarrow M_n(K) \qquad n = \dim_K(V)$$
$$f \longmapsto M(f, \mathcal{B}) \qquad \text{Consideramos } f_A \in End_K(V) : M(f_A, \mathcal{B}) = A$$
$$f_A \longmapsto M(f, \mathcal{B})$$

Es interesante, ya que podemos trasladar cuestiones de endomorfismos a matrices

Ejemplos de diagonalización

1) Homotecias

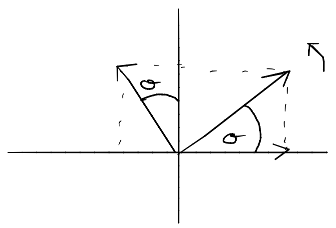
Son las funciones de la forma $f = \lambda Id$, $\lambda \in K$ (Homotecia de razón λ)
este caso es trivial:

$$M(f_\lambda, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Del ejemplo anterior se extrae que si $\mathcal{B}$ es una base de V tal que $M(f, \mathcal{B})$ es diagonal y $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ entonces:

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} f(e_1) = \lambda_1 e_1 \\ \vdots \\ f(e_n) = \lambda_n e_n \end{array}\right\} f(e_i) = \lambda_i e_i \ , \ \lambda_i \in K$$

2) Rotación



$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$M(R_\theta, B_u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$R_\theta(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ $\qquad R_\theta(0,1) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

Tomando $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad M(R_{\frac{\pi}{4}}, B_u) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

En general, no admite diagonalización.

3) Proyecciones y simetrías

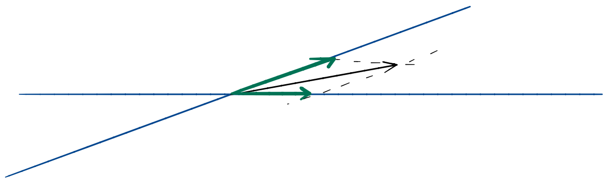
$V = U \oplus W$, U, W subespacios de V

$v = u + w$ $\quad U \cap W = \{0\}$

$\forall v \in V$, v se escribe de forma única como $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$

$P: V \to V$ proyección sobre U paralelo a W

$v = u + w \rightsquigarrow u$



$S: V \to V$ simetría respecto de U paralelo a W

$v = u + w \mapsto u - w$

$B_1 = \{u_1, \dots u_k\}$ base U $\qquad n = \dim(V)$

$B_2 = \{u_{k+1}, \dots u_n\}$ base W

$B = \{u_1, \dots u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ base de V

$$M(P, B) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$M(S, B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{(n-k)} \end{array}\right)$$

Sea $f \in End(V)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $f \circ f = f$
2) $V = \ker(f) \oplus Im(f)$
3) f es la proyección sobre $U = Im(f)$ a $W = \ker(f)$
4) f admite diagonalización

Recordemos que dos matrices son semejantes si existe una matriz regular P de la forma $B = P^{-1}AP$. El problema que nos planteamos es si podemos encontrar una matriz D semejante a A y que sea diagonal.

1. Valores y vectores propios. Subespacios propios

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f: V \to V$ un endomorfismo, se dice que el escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor o valor propio si existe un vector no nulo $u \in V$ de la forma $f(u) = \lambda u$. Al vector u lo llamaremos autovector o vector propio

Observación: Un vector propio sólo puede estar asociado a un único valor propio

Supongamos $v \in V$ $\left.\begin{array}{l} f(v) = \lambda_1 v \\ f(v) = \lambda_2 v \end{array}\right\}$ $\lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2$ $\quad$ $v \neq 0$ por def.

Proposición

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, f un endomorfismo de V y sea A una matriz asociada a f respecto de una base V. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ se verifica:

1) $V_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda I)$, donde V_λ es el subespacio propio de f asociado a λ

$$V_\lambda = \{ v \in V : f(v) = \lambda v \}$$

"Conjunto de todos los autovectores asociados al valor λ"

Denotaremos $g_1 = \dim(V_\lambda)$ y le llamaremos multiplicidad geométrica de λ.

2) V_λ es un subespacio vectorial de V.
3) $\dim(V_\lambda) = n - rg(A - \lambda I) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im}(f - \lambda I))$
4) λ es un autovalor de $f \iff \det(A - \lambda I) = 0$

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $f \in \operatorname{End}(V)$ y sean $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ valores propios distintos de f, si v_i es un autovector asociado al valor propio λ_i, $i = 1 \dots m$, entonces el conjunto $\{v_1, \dots v_m\}$ es linealmente independiente.

Veamos la demostración:

- $m=1$ tenemos que $\{v_1\}$ vector propio y como, por definición, $v_1 \neq 0 \Rightarrow \{v_1\}$ es linealmente independiente.

- Supongamos cierto para $m-1$ y veamos que ocurre para m:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad i = 1 \ldots m$

$f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m) = f(0) = 0$ por la definición de aplicación lineal

Como sabemos que f es una aplicación lineal, entonces:

$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_m f(v_m) = 0$

Como v_i es un vector propio asociado al valor propio λ_i:

(I) $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$

por λ_m

(II) $\alpha_1 \lambda_m v_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$

(I)-(II)$= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} + 0$

Aplicamos la hipótesis de inducción, de donde sacamos que:

$\{v_1 \cdots v_{m-1}\}$ es l.i $\Rightarrow \alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m-1$

Y, como:

$\alpha_m v_m = 0$ y, por def. $v_m \neq 0 \Rightarrow \alpha_m = 0$

<u>Corolario</u>

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $f \in End(V)$ entonces f tiene como máximo n valores propios distintos y, además, si f tiene n valores propios distintos, entonces f es diagonalizable.

f diagonalizable $\Leftrightarrow$ Existe una base de vectores propios

2 Polinomio característico

Como hemos visto, para un endomorfismo f de matriz asociada A, un escalar λ es un autovalor de $f \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

Consideremos dicho determinante:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

es un polinomio en λ de grado $n = \dim(V)$ llamado polinomio característico de f.

Si nos fijamos, los autovalores de f serán, precisamente, las raíces del polinomio

Observación: Hay que fijarse en el cuerpo donde se considera el espacio vectorial, ya que no es lo mismo calcular las raíces en $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ que en $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

③ Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica

Sea $V(\mathbb{K})$ espacio vectorial de dimensión n y sea $f: V \to V$ un endomorfismo de V de matriz asociada A y consideremos los autovalores de f distintos $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

Para cada i, llamaremos multiplicidad algebraica del autovalor λ_i a la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio característico, es decir, el mayor exponente α_i para el cual $(\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$ aparece en la descomposición de $p(\lambda)$.

Llamamos multiplicidad geométrica de λ_i a la dimensión d_i del subespacio propio V_{λ_i}, es decir, $d_i = \dim(V_{\lambda_i}) = n - rg(A - \lambda I)$

Denotaremos la multiplicidad algebraica como a_M y la geométrica como g_M.

Proposición

Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n y sean $f: V \to V$ un endomorfismo de V y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sus distintos autovalores. Entonces se verifica que:

$$1 \leq g_M \leq a_M$$

④ Endomorfismos y matrices diagonalizables

Se dice que una matriz cuadrada A es diagonalizable si existe una matriz diagonal D semejante de A. Diremos que el endomorfismo $f: V \to V$ es diagonalizable si existe una base V con respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

Proposición

Un endomorfismo $f: V \to V$ es diagonalizable $\iff$ Existe una base formada por vectores propios de f.

Teorema

Sea $f: V \to V$ un endomorfismo y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sus distintos autovalores. Entonces f es diagonalizable, si y solo si, verifica:

1) $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n = a_i \qquad i = 1, \dots, r$

2) $g_i = a_i \qquad i = 1, \dots, r$

Lema

1) Vectores propios no nulos asociados a autovalores distintos son linealmente independientes

2) Los subespacios propios asociados a autovalores distintos son independientes.

Corolario

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces, si A tiene n autovalores distintos en $\mathbb{K}$, entonces es diagonalizable.

Teorema fundamental de la diagonalización

Sea V, espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $f \in End(V)$ entonces, los siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) f es diagonalizable

ii) Existe una base de V formada por autovectores de f

iii) Si $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ son los distintos valores propios de f, entonces $P_f(x)$ tiene n raíces $= a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$

iv) $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, donde $\{\lambda_1, \dots \lambda_k\}$ son autovalores de f.

Corolario

Sean $A, C \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalizables. Entonces A y C son semejantes si y solo si A y C tienen el mismo polinomio característico

Como estructurar un problema tipo de diagonalización

1) Se calcula el polinomio característico $p(x)$

2) Se calculan las raíces del polinomio. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$, pero puede que lo sea en $\mathbb{C}$. De esta forma tenemos los valores propios y la multiplicidad algebraica.

3) Se calcula la multiplicidad geométrica

4) Se aplica el criterio de diagonalización. Si para algún i se tiene $g_i \neq a_i$, entonces la matriz no es diagonalizable. En caso contrario, la matriz es diagonalizable y su forma

diagonal es la matriz diagonal cuya diagonal está formada por los valores propios, cada uno repetido según su multiplicidad.

5) obtenemos bases de los subespacios propios $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I)$

6) Uniendo estas bases obtenemos una base de V para la cual, la matriz asociada es D. Así pues, la matriz de cambio de base, cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores propios, es la matriz de paso P, tal que $D = P^{-1}AP$

5 Teorema de Cayley - Hamilton. Aplicaciones

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Sea $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (-1)^n \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + C_1\lambda + C_0 \quad , C_i \in K$

Teorema de Cayley - Hamilton

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $P_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + C_1\lambda + C_0$ con $c_i \in K$, $i = 0, \ldots, n-1$. Entonces:

$P_A(A) = (-1)^n + A^n + C_{n-1}A^{n-1} + \cdots + C_1A + C_0 I_n = O_n$

Donde O_n es la matriz nula de orden n, es decir, cada matriz cuadrada A es solución de su ecuación característica.

Aplicaciones

Sea $A \in M_n(K)$. Si A es diagonalizable, sabemos que existe P matriz regular tal que:

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde D es una matriz diagonal

$$(P^{-1}AP)^n = D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \qquad \Bigg\} \; A^n = PD^nP^{-1}$$

$$P^{-1}A \cdot P \cdot P^{-1}A \cdot P \cdot P^{-1}A \cdot P \cdots = P^{-1}A^n \cdot P$$

Si A es regular:

$$(P^{-1} A P)^{-1} = D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$P^{-1} A^{-1} P = D^{-1}$

$P^{-1} A^{-n} \cdot P = D^{-n} \rightarrow A^{-n} = P \cdot D^{-n} \cdot P^{-1}$

Los argumentos anteriores pueden emplearse para endomorfismos.

$f \in End(V)$, f diagonalizable, ¿f^n?

Es decir, nos preguntamos si existe B base de V tal que:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

de forma que:

$$M(f^n, B) = M(f, B)^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$