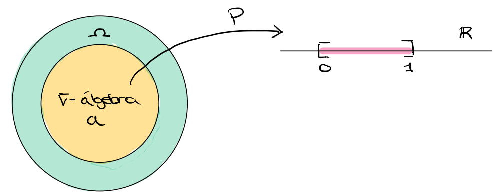
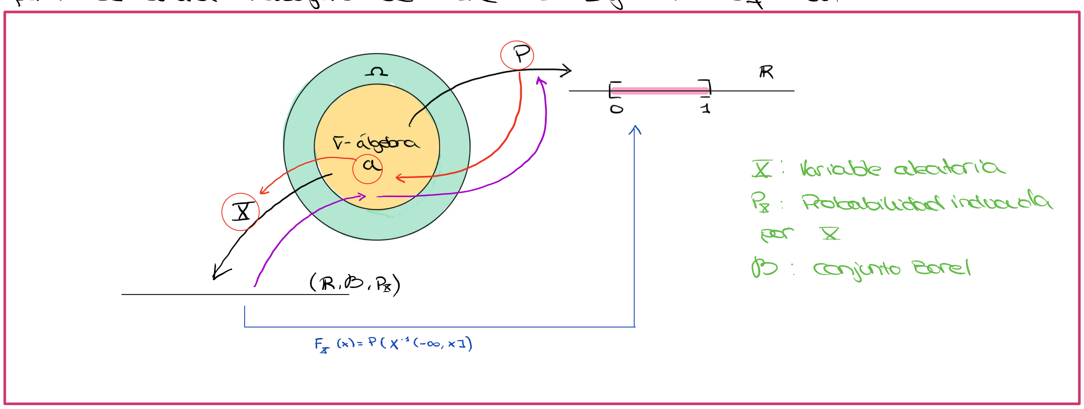
TEMA 5: VARIABLES ALEATORIAS

Hasta ahora nos encontrábamos en la siguiente situación:



A partir de ahora trabajaremos sobre el siguiente esquema:



X es una variable aleatoria si $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, función, tal que la imagen inversa de cualquier conjunto Borel es medible, es decir, pertenece al σ-álgebra a.

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \in B\}, \; \forall B \in \mathcal{B} \} \in a$$

Las variables aleatorias inducen una medida de probabilidad sobre el espacio Borel

$P_X: \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$

$B \longrightarrow P_X(B) = P(\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \in B)$

$\longrightarrow (-\infty, x] \longrightarrow P_X((-\infty, x]) = P(\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \leq x) = F_X(x) \longrightarrow$ Función de distribución

Se define la función de distribución de una variable aleatoria como:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$F_X(x) = P_X[(-\infty, x]] = P(X^{-1}(-\infty, x]) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades de la función de distribución:

- Es no decreciente. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- Es continua por la derecha
- $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$

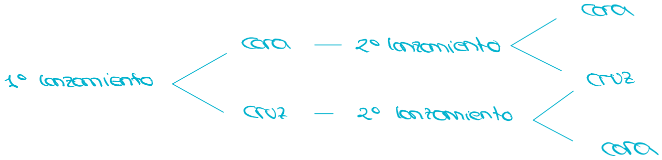
Otras propiedades son:

- El conjunto de puntos de discontinuidad es numerable
- $F_X(x^-) = P[X < x]$
- Solo puede tener discontinuidades de salto y la longitud de salto en un punto de discontinuidad es la probabilidad que toma dicho valor:

$$P[X = x] = P[X \leq x] - P[X < x] = F(x) - F(x^-)$$

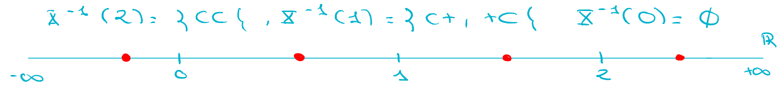
Vamos un ejemplo de variable aleatoria:

Supongamos una moneda y llamamos a X: nº de caras en dos lanzamientos. Sabemos que X es variable aleatoria (a partir de ahora escribiremos v.a) si $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Comenzamos distinguiendo casos:



Luego, los posibles casos son que, salga ninguna cara, 1 cara o 2 caras:

$$X^{-1}(2) = \{cc\}, \quad X^{-1}(1) = \{c+, +c\} \quad X^{-1}(0) = \phi$$



$$X^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \cdot\ x < 0 \quad \{w \in \Omega / X(w) < 0\} = \phi \in \mathcal{A} \\ \cdot\ 0 \leq x \leq 1 \quad \{w \in \Omega / X(w) < x\} = \{++\} \in \mathcal{A} \\ \cdot\ 1 \leq x < 2 \quad \{w \in \Omega / X(w) < x\} = \{c+, +c, ++\} \\ \cdot\ x \geq 2 \quad \{w \in \Omega / 2 \leq X(w)\} = \{cc, ++, c+, +c\} = \Omega \end{cases}$$

Supongamos ahora el siguiente caso:

$\mathcal{A}' = \{\{cc\}, \{c+, +c, ++\}, \phi, \Omega\}$ σ-álgebra

$(\Omega, \mathcal{A}')$ y supongamos X: nº de caras $X(cc) = 2$, $X(c+) = X(+c) = 1$, $X(++) = 0$

$$X((-\infty, x]) = \begin{cases} \cdot\ x < 0 \quad \{w \in \Omega / X(w) < x\} = \phi \in \mathcal{A}' \\ \cdot\ 0 \leq x < 1 \quad \{w \in \Omega / X(w) < x\} = \boxed{\{++\} \notin \mathcal{A}'} \rightarrow \text{Por lo que } X \text{ no es variable aleatoria} \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Teorema de correspondencia

Si P es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, existe una única función de distribución, F_P en $\mathbb{R}$, que verifica $F_P(x) \in P((-\infty, x]) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

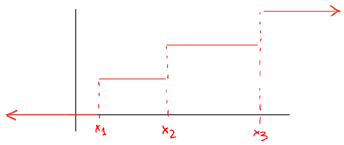
Recíprocamente, si F es una función de distribución en $\mathbb{R}$, existe una única probabilidad P_F sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ que verifica $P_F((-\infty, x]) = F(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Una función de $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, no decreciente, continua a la derecha, con $f(-\infty) = 0$ y $f(+\infty) = 1$ verifica ser función de una variable aleatoria.

Clasificación de variables aleatorias

Variables aleatorias discretas

Por intuición, X v.a. será discreta si $F(x)$ crece a saltos, es decir, existe, a lo más, un conjunto finito numerable de puntos.



Sea X una v.a. discreta, con $E = \{x_i \ / i = 1, 2 \dots\}$.
A la función $P : E \to [0,1]$ se le denomina función masa de probabilidad:

$$x_i \longrightarrow P[X = x_i] = p_i \quad \forall i \in E$$

Esta función verifica $0 \leq P[X = x_i] \leq 1$, $i \in E$ y $\sum_i P[X = x_i] = 1$.

La función de distribución viene dado por $F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p_i$

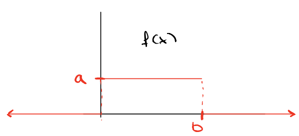
Variables aleatorias continua

Por intuición, X v.a será continua si su función de distribución es absolutamente continua, es decir, existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

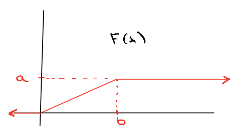
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esta función recibe el nombre de función de densidad y verifica:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- f es integrable Riemann, ya que tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$



$\Rightarrow$



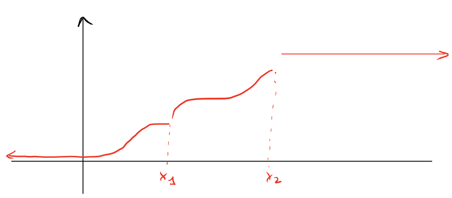
$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= 0 + \int_{0}^{b} a\,dx + 0 = ax\Big]_0^b = ab \text{. Como:}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow ab = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$$

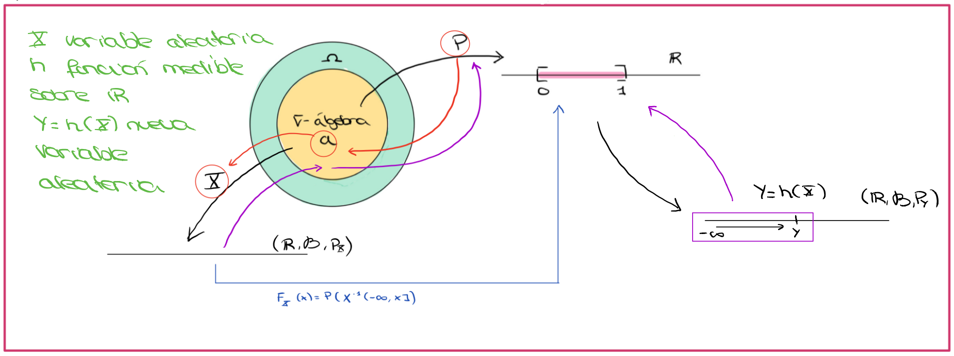
- $x < 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$
- $0 \leq x \leq b \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \frac{x}{b}\Big]_0^x + 0 = \frac{x}{b}$
- $x \geq b \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{b}^{x} f(t)\,dt + \int_{0}^{b} f(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0 + \frac{x}{b}\Big]_0^b + 0 = 1$

Variables aleatorias mixta



Cambio de variable

Actualicemos nuestro esquema original



Teorema general de cambio de variable

Podemos expresar Y en función de X si $P_Y(B) = P_X(h^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}$

$\hookrightarrow \{X^{-1}(h^{-1}(B))\} = P(\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in h^{-1}(B)\}$

Función de una variable aleatoria discreta

Sea X r.a. discreta

$E = \{x_i,\ 1,2\dots\} \subset \mathbb{R}$

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ medible

$Y = h(x)$ r.a. discreta

$$\Rightarrow P[Y=y] = \begin{cases} \sum_{h(x)=y} P[X=x] & y \in h(E) \\ 0 & y \notin h(E) \end{cases}$$

Veamos un pequeño ejemplo:

x_i	p_i
-1	1/3
0	1/3
1	1/3

E

$Y = 2X + 3 = h(X)$

y_i	p_i
1	1/3
3	1/3
5	1/3

h(E)

$Y = x^2 = h(X)$

y_i	p_i
0	1/3
1	2/3

h(E)

Función de una variable aleatoria continua

En este caso, una función de una variable aleatoria continua puede dar lugar a una variable discreta, continua o mixta.

Continua $\longrightarrow$ Discreta

X r.a. continua

función de densidad f

$A \subset \mathbb{R}$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible

$Y = h(x)$ r.a. discreta

$$\Rightarrow P[Y=y] = \begin{cases} \int_{x \in \mathbb{R} / h(x)=y} f(x)\,dx & y \in h(A) \\ 0 & y \notin h(A) \end{cases}$$

Supongamos $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. Calcular la probabilidad $P(Y=0)$, $P(Y=1)$

$$P(Y=0) = \sum_{h(x)=y} P(X < x) = P(X < \tfrac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1/2} 1\,dx = \frac{1}{2}$$

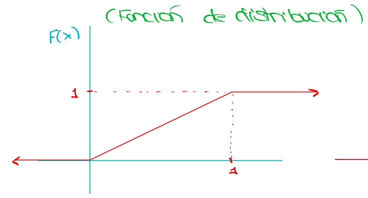
$$P(Y=1) = \sum_{h(x)=y} P(X > x) = P(X \geq \tfrac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = \frac{1}{2}$$

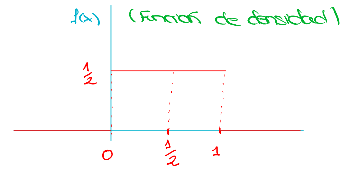
Suman 1

Luego tenemos:

y_i	p_i
0	1/2
1	1/2

(Función masa de probabilidad)





Continua ⟶ Continua

X v.a. continua
f, función de densidad
$f > 0 \quad \forall x \in [a,b]$
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona
y derivable en $[a,b]$.
$Y = h(x)$ r.a. continua

$$\Rightarrow \quad g(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y))\,|(h^{-1})'(y)| & y \in h([a,b]) \\ 0 & y \notin h([a,b]) \end{cases}$$

Generalización

$$h(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(h_k^{-1}(y)) \left| \frac{d h_k^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Esperanza matemática

Sea X una variable aleatoria discreta con valores $E = \{1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$, se define la esperanza matemática, media o valor esperado de X, y se denota $E[X]$, como

$$E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i]$$

siempre que dicha serie sea absolutamente convergente.

Si la variable aleatoria X es continua con función de densidad f se define su esperanza matemática, media o valor esperado como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

siempre que dicha integral sea absolutamente convergente.

En caso de no convergencia absoluta de la serie o de la integral se dice que no existe la esperanza de dicha variable aleatoria.

Propiedades

- La esperanza de una constante $E[c] = c$
- Si una variable aleatoria está acotada, esto es, si $\exists M$ tal que $P[|X| \leq M] = 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow E[X] \leq M$
- Si $X \geq 0$ y existe su esperanza matemática $\Rightarrow E[X] \geq 0$
- Si X es una variable aleatoria con distribución simétrica respecto del valor c, entonces si $\exists E[X]$, su valor será igual a c
- Sea $Y = h(X)$ v.a. discreta, $\Rightarrow \exists E[Y] = \sum_i h(x_i) P[X = x_i] \Leftrightarrow \sum_i |h(x_i)| P[X = x_i] < \infty$
- Sea $Y = h(x)$ r.a. continua $\Rightarrow \exists E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| f(x)\,dx < \infty$

- Linealidad: Si $\exists E[X_i]$, $i=1,2,\dots,n$, entonces:

$$\exists E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[x_i]$$

- Dada X una variable aleatoria y sean $g(x)$ y $h(x)$ dos funciones de X, variables aleatorias cuyas esperanzas existen, entonces:

$$\exists\ E[ag(x)+bh(x)] = aE[g(x)] + bE[h(x)] \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

- Dada X una aleatoria y sean $g(x)$ y $h(x)$ dos funciones de X, variables aleatorias cuyas esperanzas existen, si $g(x) \leq h(x)$, entonces:

$$E[g(x)] \leq E[h(x)]$$

- La esperanza matemática minimiza el error cuadrático medio:

$$\min_d E[(x-d)^2] = E[(x-E[x])^2]$$

Momentos de una variable aleatoria

Se define el momento no centrado, o centrado en el origen, de orden K de la variable aleatoria X, y lo denotaremos como m_K como:

$$m_K = E[X^K] \quad , \quad K=1,2,\dots$$

Se define el momento no centrado de orden K de una variable aleatoria X como:

$$\mu_K = E[(X-E[X])^K] \quad , K=1,2,\dots$$

$$\mu_K = \sum_{i=0}^{K} \binom{K}{i} (-1)^i m_{K-i}\, m_1^{\,i} \qquad m_K = \sum_{i=0}^{K} \binom{K}{i} \mu_{K-i}\, m_1^{\,i}$$

Varianza. Momentos de una variable aleatoria

$$\sigma_X^2 = Var[X] = \mu_2(X) = E(X-E[X])^2$$

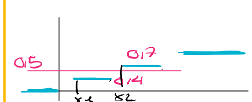
Propiedades

- $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
- Sea X una variable aleatoria cuya varianza existe, entonces
  $\exists\ Var[aX+b] = a^2\ Var[X] \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
- Sea X e Y variables aleatorias independientes cuyas varianzas existen, entonces:
  $\exists\ Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y]$
- Si $x_1,\dots,x_n$ son variables aleatorias independientes cuyas varianzas existen, entonces:
  $\exists\ Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ Var[x_i]$
- La varianza de una variable aleatoria X es cero $\Leftrightarrow$ la variable aleatoria es degenerada o constante.

Medidas de una variable aleatoria

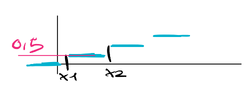
- Media aritmética: Discreta: $\sum_i x_i p_i$ Continua: $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$
- Mediana: $P[X \leq x] = 0{,}5 \Rightarrow$ Discreta: $\sum_i p_i = 0{,}5$, continua: $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 0{,}5$
- Moda: x_i con mayor probabilidad. Discreta: $\max\{p_i\}$, Continua: $\max\{f(x)\}$
- Percentil: $P[X \leq x] = n \Rightarrow$ Discreta: $\sum_i p_i = n$, continua: $\int_{-\infty}^{x} f(x) = n$
- Recorrido / rango: $x_k - x_1$
- Recorrido intercuartílico: $P_{75} - P_{25} = Q_3 - Q_1$
- Desviación absoluta respecto la media: Discreta: $\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| p_i$, continua: $|x - \bar{x}| \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$
- Desviación absoluta respecto mediana: Discreta: $\sum_{i=1}^{k} |x_i - Me| p_i$, continua: $|x - Me| \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$
- Varianza $\sigma_x^2 = m_2 - m_1^2$, Discreta: $m_2 = \sum_i x_i p_i^2$, $m_1 = \sum_i x_i p_i$
  Continua: $m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)^2\,dx$, $m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$
- Desviación típica: $+\sqrt{\sigma_x^2}$
- Coeficiente de apertura: $\frac{\max(x_i)}{\min(x_i)}$
- Recorrido relativo: $\frac{\max(x_i) - \min(x_i)}{E[x]}$
- Recorrido semi-intercuartílico: $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
- Coeficiente de variación de Pearson: $\frac{\sigma_x}{E[x]}$
- Índice de dispersión respecto Me: $\frac{D_{Me}}{Me}$
- Momento central: $m_k = E[x^k]$
- Momento no central: $\mu_k = E[(x - E[x])^k]$
- Coeficiente de asimetría de Fisher: $\frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$
- Coeficiente de asimetría de Pearson: $\frac{E[x] - Mo}{\sigma_x}$, $\frac{3(E[x] - Me)}{\sigma_x}$
- Coeficiente de curtosis de Fisher: $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$
- Coeficiente de curtosis de Kelly: $K = \frac{1}{2} \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} - 0{,}263$

Para percentiles en X v.a. discreta. Supongamos $P_{50} = Me$:



Si no cae en un intervalo cogemos el superior $Me = x_2$

Si cae en un intervalo o tomamos un punto medio o todo el intervalo



Función generatriz de momentos

Dada una variable aleatoria X, si $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall t \in (-t_0, t_0)$ existe la $E[e^{tX}]$ se dice que existe la función generatriz de momentos y se define como $M_X(t) = E[e^{tX}]$ $\forall t \in (-t_0, t)$

(No tiene porque existir, pero si la variable está acotada se verifica que existe)

Para variable discreta : $M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} P[X = x_i]$ (Existe si la serie converge)

Para variable compleja : $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$ ($M_X(t) < +\infty$)

Teorema de unicidad

Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria, se verifica que es única y determina de forma única la distribución de la variable.

(una variable aleatoria no puede tener dos funciones generatrices de momentos ni dos variables con distinta distribución a la misma función generatriz de momentos)

Relación con los momentos

Si $\exists M_X(t)$:

1) $\exists$ todos los momentos
2) $\forall t \in (-t_0, t_0)$, $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n E[X^n]}{n!}$
3) Existe todas las derivadas de $M_X(t)$ en un entorno del cero y se verifica:

$$M_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = E[X^k] \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Otras propiedades

- $M_X(0) = 1$
- Sea X una variable aleatoria, con f.g.m, $M_X(t)$ $\forall t \in (-t_0, t_0)$, y sea $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\exists M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$

Teorema de Markov

Sea X v.a. no negativa y $\exists E[X]$ $\Rightarrow$ $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$ $\forall \varepsilon > 0$

Discreta: $E[X] = \sum_{x \in E / x < \varepsilon} x P[X = x] + \sum_{x \in E / x \geq \varepsilon} x P[X = x] \geq \sum_{x \in E / x \geq \varepsilon} x P[X = x]$

$$\| $$

$$\sum_{x \in E} x P[X = x]$$

$$E[X] \geq \sum_{x \in E / x \geq \varepsilon} x P[x = X] \geq P(X \geq \varepsilon) = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{E[X]}{\varepsilon} \geq P[X \geq \varepsilon]$$

Continua: $E[X] = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\varepsilon} x f(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx$

$X \geq 0$ $\qquad$ $\varepsilon P[X \geq \varepsilon]$

$$\Rightarrow E[X] \geq \varepsilon P[X \geq \varepsilon] \Rightarrow \frac{E[X]}{\varepsilon} \geq P[X \geq \varepsilon]$$

Desigualdad de chebychev

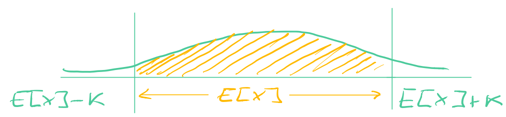
Si X v.a. / $\exists\, E[X^2]$ entonces $P(|X - E[X]| \geq K) \leq \dfrac{Var(X)}{K^2}$

$$P(E[X] - K \leq X \leq E[X] + K) \geq 1 - \frac{Var(X)}{K^2}$$

$(X - E[X])^2 \geq 0$, $\varepsilon = K^2$

De la desigualdad básica o de Markov

$$P(|X - E[X]| \geq K) = P(\underbrace{(X - E[X])^2}_{Y} \geq K^2) \leq \frac{E((X - E[X])^2)}{K^2}$$



$$P(E[X] - K\sigma_X \leq X \leq E[X] + K\sigma_X) \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{K^2 \cancel{\sigma_X^2}} = 1 - \frac{1}{K^2}$$

Expresiones alternativas:

- $P(|X - E[X]| < K) \geq 1 - \dfrac{\sigma_X^2}{K^2}$ $\forall K > 0$
- $P(|X - E[X]| \geq K\sigma_X) \leq \dfrac{1}{K^2}$ $\forall K > 0$
- $P(|X - E[X]| < K\sigma_X) \geq 1 - \dfrac{1}{K^2}$ $\forall K > 0$