1. Se denota por $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ el espacio probabilístico base. Se considera la siguiente definición de medida de probabilidad:

Definición 0.1. $P : \mathcal{A} \to [0,1]$, es una función de probabilidad si satisface los siguientes tres axiomas:

1. $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Para cualquier secuencia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ de sucesos disjuntos

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

Demostrar a partir de la definición, las siguientes propiedades:

a. $P(\emptyset) = 0$

b. Probabilidad del suceso complementario: $P(A^c) = 1 - P(A)$

c. Aditividad finita para procesos disjuntos: $P(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$

d. Probabilidad de la diferencia y la monotonía:
$B \subseteq A \in \mathcal{A}, P(A - B) = P(A) - P(B), P(B) \leq P(A)$

e. $A, B \in \mathcal{A}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

f. Principio de inclusión-exclusión para la unión finita de sucesos no disjuntos.

g. Subaditividad:$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

h. Desigualdad de Boole: $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A^c)$

- Comenzaremos demostrando b. Para ello usaremos los axiomas 2 y 3.Usando que $A \cup A^c = \Omega, \forall A \in \mathcal{A}$, se extrae que:

$$P(A^c) + P(A) \overset{3}{\implies} P(A^c) = P(\Omega) - P(A) \overset{2}{\implies} P(A^c) = 1 - P(A)$$

$\square$

- Ahora estamos en disposición de demostrar a. Para ello usaremos b, el cual, acabamos de demostrar y el axioma 2.

$$P(\Omega^c) = P(\emptyset) \overset{b}{=} 1 - P(\Omega) \overset{2}{=} 0$$

$\square$

- Vamos a demostrar ahora c. Para ello consideramos una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sucesos disjuntos, de forma que de un valor $n_i \in \mathbb{N}$ en adelante, los elementos de la sucesión sean el conjunto vacío, es decir:

$$\begin{cases} X_n = A_i \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq n \leq n_i \\ \\ X_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_i \end{cases}$$

Usando esto, 3 y lo ya demostrado (a), obtenemos:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \overset{3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n) = \sum_{n=1}^{n_i} P(X_n) + \sum_{n_i}^{\infty} P(\emptyset) \overset{a}{=} \sum_{n=1}^{n_i} P(X_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{n_i} X_n\right)$$

Como $n_i \in \mathbb{N}$ no está fijo, esto es válido para cualquier $n_i \in \mathbb{N}$.

$\square$

- Continuamos demostrando d. Para ello tomamos $B \subseteq A \in \mathcal{A} \implies A \cap B = B$, con lo que podemos realizar el siguiente desarrollo:

$$A - B = A - (A \cap B) \implies A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

De donde se extrae que:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) = P(A - B) + P(B) \implies$$

$$\implies P(A-B) = P(A)-P(B) \implies P(B) = P(A)-P(A-B) \overset{1}{\implies} P(B) \leq P(A)$$

$\square$

- Para demostrar e vamos a tomar $A, B \in \mathcal{A}$ y consideramos la unión de dichos conjuntos, la cual, podemos expresar como una partición de la siguiente forma: $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$. De esta forma obtenemos:

$$P(A \cup B) \stackrel{c}{=} P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\square$

- Demostrar f equivale a demostrar que:

$$P(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n) - \sum_{i_1,i_2=1.i_1<i_2}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1,i_2,i_3=1,i_1<i_2<i_3}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{N+1} P(\bigcap_{i=1}^{N} A_i), \qquad A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in 1, \ldots, N$$

lo cual probaremos por inducción:

  - Para N=2 tenemos que se trata de lo demostrado en e.
  - Supongamos cierto para N y demostremos que es cierto para N+1:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) \cup A_{N+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) + P(A_{N+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) \cap A_{N+1}\right)$$

Ahora, aplicando la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección en el último sumando se tiene:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) + P(A_{N+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} (A_i \cap A_{N+1})\right)$$

A continuación, ya que la propiedad se está suponiendo cierta para la unión de N sucesos, se aplica al primer y tercer sumando de la expresión y se tiene que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) =$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{N} P(A_n) - \sum_{i_1,i_2=1.i_!<i_2}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1,i_2,i_3=1,i_1<i_2<i_3}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + ...\right.$$

$$... + (-1)^{N+1} P(\bigcap_{i=1}^{N} A_i) + P(A_{N+1}) -$$

$$- \left[\sum_{i_1=1}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{N*1}) - \sum_{i_1,i_2=1,i_1<i_2}^{N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{N+1}) + ... + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{N+1} A_i\right)\right]$$

Observe que en el segundo corchete aparecen las sumas de las probabilidades de intersecciones dos a dos, tres a tres, etc...,que no aparecen en el primer corchete, esto es, las probabilidades de las intersecciones A_{N+1} con el resto de sucesos, por tanto, redondeando las sumas, se tiene que la propiedad para la unión de N+1 sucesos es:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{N+1} P(A_n) - \sum_{i_1,i_2=1.i_!<i_2}^{N+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1,i_2,i_3=1,i_1<i_2<i_3}^{N+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + ...$$

$$... + (-1)^{N+2} P(\bigcap_{i=1}^{N+1} A_i)$$

$\square$

- Para demostrar g tomamos una colección de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y definimos:

$$\begin{cases} X_1 = A_1 \\ \\ X_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad n = 2, 3... \end{cases}$$

De esta forma, tenemos una colección de eventos disjuntos dos a dos, que verifica:

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$
- $X_n \subseteq A_n$

Por lo tanto:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \stackrel{3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n) \stackrel{X_n \subseteq A_n}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$\square$

- Por último, para probar h, tomamos una colección de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y usando álgebra de Boole llegamos a:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \stackrel{g}{\geq} 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c)$$

$\square$