1. Dado $\alpha > 0$, se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = 1 - \alpha \mid x_n \mid$$

a) Para $\alpha = 0{,}7$, estudia gráficamente el comportamientos de las soluciones en función de su dato inicial $x_0 \in \Re$.
b) Para $\alpha > 0$ determina el número de puntos de equilibrio de la ecuación.
c) Estudia la estabilidad de los puntos para $\alpha = 1{,}8$.
d) Si $\alpha = 2$, comprueba que {-0.2,0.6} es un 2-ciclo y estudia su estabilidad.

Comenzamos considerando la función $f : \Re \to \Re$ como $f(x) := 1 - \alpha \mid x \mid$, la cual, podemos reescribir como una función a trozos, de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \alpha x & si \quad x \geq 0 \\ 1 + \alpha x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Esta función es la que define la recurrencia dada en el enunciado.

Procedemos a calcular su derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -\alpha & si \quad x \geq 0 \\ \alpha & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Apartado 1

Sea $\alpha = 0{,}7$, entonces la función f queda determinada de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 0{,}7x & si \quad x \geq 0 \\ 1 + 0{,}7x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Procedemos a calcular los puntos de equilibrio de la función, para lo que resolvemos la ecuación $f(x) = x$. Como tenemos una función a trozos, tenemos que distinguir dos casos:

1. Si $x \geq 0$ tenemos que resolver la ecuación $x = 1 - 0{,}7x$. Luego, tenemos:

$$x = 1 - 0{,}7x \implies 1{,}7x = 1 \implies x = \frac{10}{17}$$

Como estamos en la región $x \geq 0$, el resultado es válido

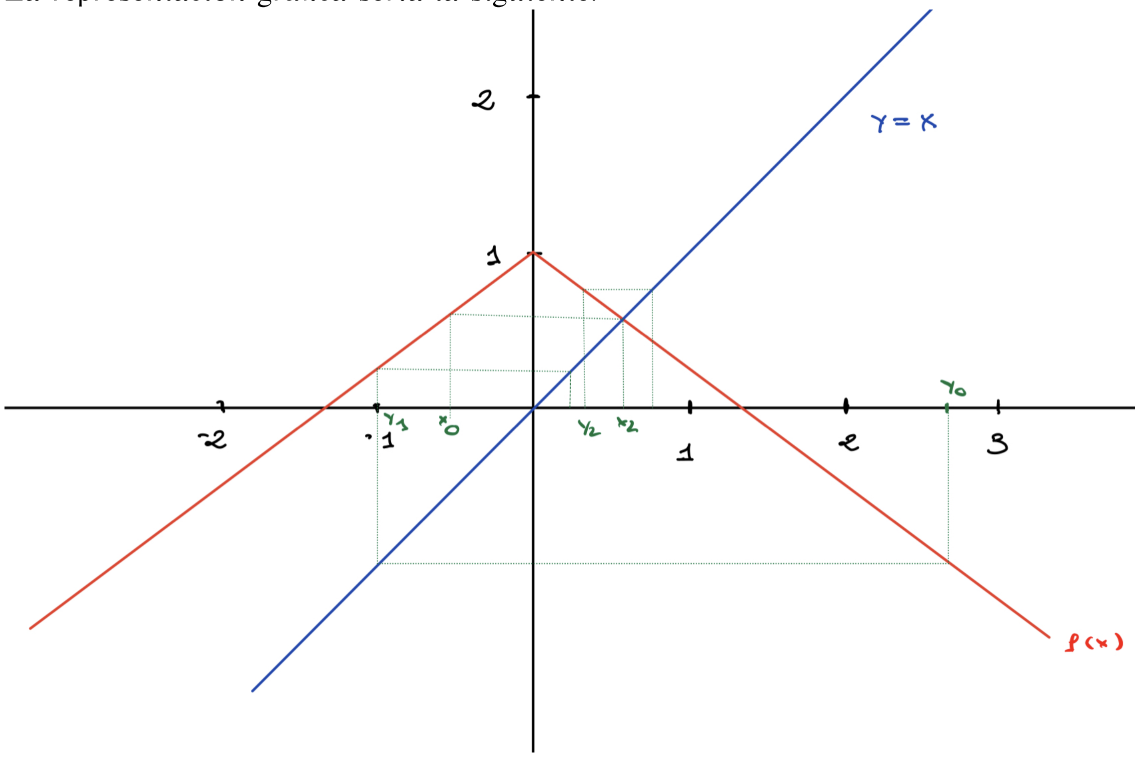
2. Si $x < 0$ tenemos que resolver la ecuación $x = 1{+}0{,}0{,}7x$. Luego, tenemos:

$$x = 1 + 0{,}7x \implies 0{,}3x = 1 \implies x = \frac{10}{3}$$

Como estamos en la región $x < 0$, la solución no es válida.

Como el punto $x = \frac{10}{17}$ es un punto de equilibrio de la función f y como $\mid f'(\frac{10}{17}) \mid = \mid -0{,}7 \mid < 1$, el punto es asintóticamente estable, y, por tanto, si escogemos un valor inicial de x_0 que se encuentre dentro de un entorno de $p = \frac{10}{17}$, el sistema convergerá a dicho punto de equilibrio.

La representación gráfica sería la siguiente:



Apartado 2

Tenemos $\alpha > 0$. Recordemos que los puntos de equilibrio se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = x$. Luego, nuevamente, tenemos que distinguir dos casos:

1. Si $x \geq 0$ tenemos que resolver la ecuación $x = 1 - 0{,}7x$. Luego, tenemos:

$$x = 1 - \alpha x \implies (1 + \alpha)x = 1 \implies x = \frac{1}{1 + \alpha}$$

Como estamos en la región $x \geq 0$, el resultado es válido, ya que $\alpha > 0$.

2. Si $x < 0$ tenemos que resolver la ecuación $x = 1 + \alpha x$. Luego, tenemos:

$$x = 1 + \alpha x \implies (1-\alpha)x = 1 \implies x = \frac{1}{1-\alpha}$$

Como estamos en la región $x < 0$, la solución solo será valida si $x = \frac{1}{1-\alpha} < 0 \implies 1-\alpha < 0 \implies \alpha > 1$.

Luego, tenemos que $\forall \alpha > 0$ el punto $x = \frac{1}{1+\alpha}$ es un punto de equilibrio, y que si $\alpha > 1$, también tendríamos el punto $x = \frac{1}{1-\alpha}$.

Apartado 3

Tenemos $\alpha = 1{,}8$, luego, estamos en el caso $\alpha > 1$, por lo que ,usando el apartado anterior, tenemos que existen dos puntos de equilibrio, que son $x = \frac{1}{1+1{,}8} = \frac{5}{14}$ y $x = \frac{1}{1-1{,}8} = \frac{-5}{4}$.

Recordemos que tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} -\alpha & si \quad x \geq 0 \\ \\ \alpha & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Luego:

$$f'(x) = \begin{cases} -1{,}8 & si \quad x \geq 0 \\ \\ 1{,}8 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Por lo que tenemos que $\mid f'(\frac{5}{14}) \mid = \mid f'(\frac{-5}{4}) \mid = \mid 1{,}8 \mid > 1$. Luego, ambos puntos de equilibrio son inestables.

Apartado 4

Para $\alpha = 2$ tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & si \quad x \geq 0 \\ \\ 1 + 2x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Luego, observamos que $f(-0{,}2) = 0{,}6$ y $f(0{,}6) = -0{,}2$, luego, efectivamente existe el 2-ciclo.

Ahora, para calcular su estabilidad observemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x \geq 0 \\ \\ 2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Luego, tenemos que $\mid f'(0{,}2) \cdot f'(0{,}6) \mid = \mid -2 \cdot 2 \mid = \mid -4 \mid = 4 > 1$. Luego, concluimos con que el 2-ciclo no es estable.