Ejercicios espacio vectorial

- En $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ se consideran las bases:

$$B = \{(1,-1,2),\ (0,3,-2),\ (1,0,1)\}$$

$$B' = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$$

¿ Matriz de cambio de base de B a B' ?

$$\underbrace{u_1 = \overbrace{(1,-1,2)}^{\text{Vector base } B} = \overbrace{a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)}^{\text{C. Lineal vectores base } B'}}_{\text{Expresamos cada vector como combinación lineal}}$$

Expresamos cada vector como combinación lineal

Construimos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a+b+c \\ -1 = b+c \\ 2 = c \end{array}\right\} \quad u_1 = (a,b,c)_{B'} = \underbrace{(2,-3,2)_{B'}}_{\text{Resolvemos el sistema}}$$

$$u_2 = (0,3,-2) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a+b+c \\ 3 = b+c \\ -2 = c \end{array}\right\} \quad u_2 = (a,b,c)_{B'} = \underline{(-3,5,-2)_{B'}}$$

$$u_3 = (1,0,1) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a+b+c \\ 0 = b+c \\ 1 = c \end{array}\right\} \quad u_3 = (a,b,c)_{B'} = \underline{(1,-1,1)_{B'}}$$

[illegible]os el cambio de base:

$$\boxed{M(I, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Como ecuación;

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}}$$

Cambio de base contrario

Basta con calcular la matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Recuerda, el adjunto tiene signo !!

Adjunto:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \overset{+}{3}$ $\quad A_{12} = \overset{-}{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = +1$ $\quad A_{13} = \overset{+}{\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = -4$

$A_{21} = \overset{-}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = +1$ $\quad A_{22} = \overset{+}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 0$ $\quad A_{23} = \overset{-}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = -2$

$A_{31} = \overset{+}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = -2$ $\quad A_{32} = \overset{-}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}} = -1$ $\quad A_{33} = \overset{+}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = 1$

Por tanto:

$$\boxed{A^{-1} = |A| \, (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = M(I, B \leftarrow B')}$$

(15) En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases.

$$B_1 = \{(1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0)\}$$

y

$$B_2 = \{(2,1,1), (1,1,1), (1,-1,1)\}$$

calcular la matriz de cambio de base B_2 a B_1.

calcular las coordenadas en la base B_1 del vector de coordenadas en B_2 $(3,-2,2)$

> Todos los vectores de B_2 se expresan como c.l. de B_1

$$(2,1,1)_{B_2} = a(1,0,1) + b(-1,1,1) + c(1,-1,0)$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= a - b + c \\ 1 &= 0 + b - c \\ 1 &= a + b + 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -2 \\ c &= -3 \end{aligned} \Rightarrow (3,-2,-3)_{B_1}$$

$1 = a + b \Rightarrow a = -b + 1 \Rightarrow a = 3$

$1 = b - c \Rightarrow c = -1 + b \Rightarrow c = -3$

$2 = a - b + c \Rightarrow 2 = -b \cancel{+1-1+b} - b \Rightarrow b = -2$

$$(+1,1,1)_{B_2} = a(1,0,1) + b(-1,1,1) + c(1,-1,0)$$

$$\left.\begin{aligned} +1 &= a - b + c \\ 1 &= b - c \\ 1 &= a + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \\ c &= -1 \end{aligned} \Rightarrow (2,-1,-2)_{B_1}$$

$a = -b + 1 \Rightarrow a = 2$

$c = -1 + b \Rightarrow c = -2$

$-1 = a - b + c \Rightarrow +1 = -b \cancel{+1-b-1+b} \Rightarrow b = -1$

$$(1,-1,1)_{B_2} = a(1,0,1) + b(-1,1,1) + c(1,-1,0)$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a - b + c \\ -1 &= b - c \\ 1 &= a + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \\ c &= 2 \end{aligned} \Rightarrow (0,1,2)_{B_1}$$

$a = 1 - b \Rightarrow a = 0$

$c = b + 1 \Rightarrow c = 2$

$1 = a - b + c \Rightarrow 1 = 1 - b \cancel{-b+b} + 1 \Rightarrow 1 = 2 - b \Rightarrow b = 1$

La matriz de cambio de base es:

$$\boxed{M(I, B_1 \leftarrow B_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Para calcular las coordenadas del vector:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{B_1}$$

Las coordenadas del vector:

$$\boxed{(3,-2,2)_{B_2} = (5,-2,-1)_{B_1}}$$

17 Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$V_1 = \{(x, y, z, t) \mid x+y+z=0\}$

$V_2 = \mathcal{L}\{(1,1,1,1), (1,2,3,4)\}$

$V_3 = \{(\lambda+\mu, \lambda+\gamma, \gamma+\delta, \lambda+\delta) \mid \lambda, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$

Vector contenido en subespacio

¿Pertenece el vector $(1,0,1,-2)$ a dichos subespacios? En caso afirmativo calcular las coordenadas del vector respecto a alguna base de dichos subespacios (la elección de la base es arbitraria).

En el caso de V_1 nos dan la ecuación implícita, por tanto, para que el vector pertenezca debe cumplir la:

$$(1,0,1,-2) = (x,y,z,t)$$

$$x+y+z=0 \Rightarrow 1+0+1=0 \Rightarrow 2\neq 0$$

No cumple la condición, por tanto $(1,0,1,-2) \notin V_1$

En el caso de V_2 nos dan el subespacio generado por dos vectores, por tanto, para que el vector pertenezca a V_2 debe poder expresarse como combinación lineal de los dos vectores.

$$(1,0,1,-2) = a(1,1,1,1) + b(1,2,3,4)$$

$$\begin{cases} 1 = a+b \\ 0 = a+2b \\ 1 = a+3b \\ -2 = a+4b \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = A$$

$$rg(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{f}{\sim}$$

$$\overset{f}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow 3 = n^o \text{ vectores} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Los 3 vectores son l. independientes $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(1,0,1,2) \notin V_2}$

En V_3 nos dan las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} \lambda+\mu = 1 = x \\ \lambda + \gamma = 0 = y \\ \gamma + \delta = 1 = z \\ \lambda + \delta = -2 = t \end{cases}$$

Veamos si el sistema es compatible

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$rg(A^*) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 - f_1 \\ f_4 - f_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{desarrollo} \\ \text{por recurrencia} \\ c_1}}{=}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{los 4 vectores}$$

son l.i., por tanto forman un sistema de generadores de $\mathbb{R}^4$. Como el número de vectores es 4 y estamos en $\mathbb{R}^4$, entonces forman una base, y por tanto el vector pertenece a V_3 y se podrá expresar como combinación lineal de V_3.

18 En el espacio vectorial real de los polinomios de grado igual o menor a 3 se consideran los subespacios:

$F_0 = \{ p(x) \mid p(0) = 0 \}$

$F_1 = \{ p(x) \mid p(1) = 0 \}$

$F_{-1} = \{ p(x) \mid p(-1) = 0 \}$

Subespacio polinómico

Determinar las ecuaciones cartesianas y una base de cada uno de ellos.

Para calcular las ecuaciones cartesianas consideramos la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ con lo que dado un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ sus coordenadas respecto B son $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$

Un polinomio está en F_0 si $p(0) = 0$, es decir, $\boxed{a_0 = 0 \text{ (que es la ecuación cartesiana)}}$, por lo que una $\boxed{\text{base podría ser } \{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}}$

Un polinomio está en F_1 si $p(1) = 0$, es decir, $\boxed{a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \text{ (ecuación cartesiana)}}$, por lo que una $\boxed{\text{base podría ser } \{(1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1)\}}$

Un polinomio está en F_{-1} si $p(-1) = 0$, es decir $\boxed{-a_3 - a_2 - a_1 + a_0 = 0}$, por lo que $\boxed{\text{una base podría ser } \{(1,1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,-1,1)\}}$

(14) En $M_2(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d=0, \quad 2a-c-d=0 \right\}$$

Demostrar que ambos son subespacios vectoriales y calcular bases de $V_1 \cap V_2$ y V_1+V_2.

Para que V_1 y V_2 sean subespacios vectoriales deben cumplir que la suma y el producto de escalares sean cerrados.

Sea $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ y $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1-b_1 & a_1+b_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2-b_2 & a_2+b_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\mu \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1-b_1 & a_1+b_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2-b_2 & a_2+b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu a_1 + \lambda a_2 & \mu b_1 + \lambda b_2 \\ \mu(a_1-b_1) + \lambda(a_2-b_2) & \mu(a_1+b_1) + \lambda(a_2+b_2) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

V_1 es un subespacio vectorial.
Análogamente para V_2

Para calcular la intersección hay que reunir las características de ambos. Y para la suma del sistema de generadores que se obtiene al reunir ambas bases

(CONSULTAR EN EL LIBRO)

(20) Sea $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado mayor o igual que 3 con coeficientes reales y consideremos la base $B=\{x^3, x^2, x, 1\}$. Dados los subespacios:

$$U = L\,(x^2+2x,\ -x^2+x,\ x^2+x)$$

$$W = \begin{cases} x_2+x_3=0 \\ 2x_2-x_3=0 \end{cases}$$

$$V: \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\beta \\ x_3=0 \\ x_4=\alpha+\beta \end{cases}$$

Importante:
- Intersección
- Suma
- Suplementario
- S. Generadores → base
- E. paramétricas y cartesianas

Calcular:

1. $U \cap W$
2. $U + W$
3. ¿Son U y W suplementos?
4. Una base $W \cap V$
5. Ecuaciones cartesianas $U+V$.

Necesitamos las ecuaciones paramétricas de U, que las calculamos a partir del sistema de generadores que nos dan.

Escribiendo los polinomios en función de la base B:

$$U=(L\{(0,1,2,0),\ (0,-1,1,0),\ (0,1,1,0)\})$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ con lo que:

$\{(0,1,0,0),\ (0,0,1,0)\}$, $\cancel{(0,1,1,0)}$, por lo que las ecuaciones paramétricas son

Ecuaciones paramétricas:

$$U \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones cartesianas

$$U = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ahora, las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$ son:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U \cap W = \{0\}}$$

$\boxed{\text{La suma será, por tanto directa}}$

$$\cancel{\dim_{\mathbb{R}} U \cap W}^{\,0} + \dim_{\mathbb{R}} U + W = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} W = 2 + 2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} U + W = 4 = \dim_{\mathbb{R}} P_3(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{U \oplus W = P_3(\mathbb{R})}$$

Son suplementarios

Las ecuaciones cartesianas de V son:

$$V \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

por lo que $W \cap V$ será:

$$W \cap V \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$, por lo que

una $\boxed{\text{base de } W \cap V \text{ será } (0,0,0,1)}$

una base de V es $\{(0,0,0,1),(0,-1,0,1)\}$ entonces un sistema de generadores de $U+V$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene como base de $U+V$ $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

Por lo que las ecuaciones parametricas:

$$\begin{cases} \boxed{x_1=0} \longrightarrow \text{ecuación cartesiana} \\ x_2=\lambda \\ x_3=\gamma \\ x_4=\mu \end{cases}$$

21 Demostrar que el subespacio vectorial de las ecuaciones pares y el de las impares son suplementarios del espacio vectorial de las funciones reales

Una función es par si $f(x)=f(-x)$

una función es impar si $f(x)=-f(x) \Rightarrow -f(-x)=f(x)$

$p(x)=\frac{1}{2}(g(x)+g(-x))$ es par:

$$p(-x)=\frac{1}{2}\left(g(-x)+g(-(-x))\right)=\frac{1}{2}\left(g(-x)+g(x)\right)=p(x)$$

$h(x)=\frac{1}{2}\left(g(x)-g(-x)\right)$ es impar:

$$h(-x)=\frac{1}{2}\left(g(-x)-g(-(-x))\right)=\frac{1}{2}\left(g(-x)-g(x)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(g(x)-g(-x)\right)=-h(+x)$$

$$\boxed{g(x)=p(x)+h(x)}$$

22 Sea $P_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3. Se pide:

1. Demostrar que el polinomio x^3 y sus 3 primeras derivadas forman una base $P_3(\mathbb{R})$.
2. Estudiar los vectores $p_1(x) = 1+3x+5x^2$, $p_2(x) = -1+2x^2$, $p_3(x) = 3+3x+x^2$ son l.d o l.i.
3. Sean $q_1(x) = 1+x^2$, $q_2(x) = 1-x^2$ y U el subespacio generado por ellos. ¿Pertenecen a los polinomios $r(x) = 1+x$ y $p(x) = 1+5x^2$ a U?
4. Sea $W = L(p_1(x), p_2(x), p_3(x))$. Calcular $W+U$ y $W \cap U$.

Una base tendrá forma:
$B = \{1, x, x^2, x^3\}$

x^3, $3x^2$, $6x$, 6

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 \cdot 2 \neq 0 \Rightarrow \text{los 4}$$

vectores son l.i. y forman una base ya que su $\dim_{\mathbb{R}} B = 4$.

$\{(0,5,3,1), (0,2,0,-1), (0,1,3,3)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 12 & 7 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cancel{0} \\ -12 & 7 & \cancel{0} \\ 0 & 3 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Son linealmente dependientes}}$

$U = \mathcal{L}(\{(0,1,0,1), (0,-1,0,1)\})$

Calculamos las ecuaciones paramétricas de U:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \lambda - \mu \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \lambda + \mu \end{cases}$$

Las ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0,0,1,1) \notin U}$$

$$\boxed{(0,5,0,1) \in U}$$

$W = \mathcal{L}(\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}) = \mathcal{L}\{(0,5,3,1), (0,2,0,-1), (0,1,3,3)\}$

Calculamos las ecuaciones paramétricas de W:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \longrightarrow \text{Ecuación cartesiana} \\ a_1 = 5\lambda + 2\mu + 1\gamma \\ a_2 = 3\lambda + 0 + 3\gamma \\ a_3 = \lambda - \mu + 3\gamma \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim^{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cancel{0} \\ -2 & 7 & \cancel{0} \\ 0 & 3 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \{(0,-2,0,1), (0,7,3,0)\}$$

una base de W.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \longrightarrow \text{Ecuación cartesiana} \\ a_1 = -2\lambda + 7\mu \\ a_2 = 3\mu \\ a_3 = \lambda \end{cases}$$

Obtenemos las implícitas:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 - 7\dfrac{a_2}{3} \\ a_0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 3a_1 + 6a_3 - 7a_2 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Juntándolo con las ecuaciones cartesianas de U:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_3 = 0 \end{array}\right. \qquad \text{Ecuaciones cartesianas } U \cap W$$

Para la suma juntamos todos los vectores

$U + W = \{(0,1,0,1), (0,-1,0,1), (0,5,3,1), (0,2,0,-1), (0,1,3,3)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim_C$$

$$\sim_C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = \lambda \\ a_2 = 3\cancel{\mu} \\ a_3 = \lambda + 2\mu \cancel{+\ldots} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_3 = a_1 + \frac{2}{3} a_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 - 3a_1 = 0 \end{array}\right. \qquad \text{Ecuaciones cartesianas } U + W$$

(23) En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales

$$U = L\{(2,0,-1), (1,2,0), (0,4,1)\}$$

y

$$W = \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Calcular bases de los espacios $\mathbb{R}^3/U$, $\mathbb{R}^3/W$, $\mathbb{R}^3/(U \cap W)$, $\mathbb{R}^3(U+W)$. Hallar las coordenadas de $(-1,2,1)+U$ en la base obtenida para $\mathbb{R}^3/U$.

Ecuaciones paramétricas de U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim^{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\cancel{4} & 4 \\ -1 & -\cancel{1} & 1 \end{pmatrix} \sim^{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 4 & \cancel{0} \\ -1 & 1 & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 = 2\lambda \\ a_1 = 4\mu \\ a_2 = -\lambda + \mu \end{cases}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{4} \Rightarrow \boxed{4a_2 + 2a_0 - a_1 = 0}$$

Para W obtenemos que $\{(0,1,-1)\}$ es base de W.

CONSULTAR LIBRO PG 134.

24 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$

una matriz en el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, $M_2(\mathbb{R})$.

1. Demostrar que $F = \{B \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, AB = 0\}$ es un subespacio vectorial.
2. calcular en función de m la dimensión de F y una base.

Para que F sea un subespacio vectorial, la suma y el producto por escalares debe ser cerrado:

Sea B_1 y $B_2 \in F$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(B_1 + B_2)A = 0 \Rightarrow B_1 A + B_2 A = 0$$

$B_1 + B_2 \in F$

$$A(\lambda B) = \lambda(AB) = \lambda 0 = 0$$

Se verifica que F es un subespacio vectorial

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m - 6 = 0 \Rightarrow m = 6$$

$\forall m \in \mathbb{R},\ m \neq 6,\ \det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(F) = 2$

$m = 6 \Rightarrow rg(A) = 1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(F) = 1$

13 En $\mathbb{R}^3$ se consideran $u=(1,2,1)$, $v=(1,3,2)$, $x=(1,1,0)$, $y=(3,8,6)$. Probar que $L(u,v)=L(x,y)$.

Doble inclusión:

Para demostrar que $L(u,v) \subseteq L(x,y)$ basta probar que $u, v \in L(x,y)$. Si escribimos:

$$u = \lambda x + \mu y$$

La matriz ampliada será:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$rg(A) = rg(A^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible, es decir, $u, v \in L(x,y)$

Lo mismo con la implicación contraria

14 Los vectores e_1, e_2, e_3 y x vienen dados por sus coordenadas en cierta base. Comprobar que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base y hallar sus coordenadas del vector x en dicha base.

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1,1,1) \\ e_2 = (1,1,2) \\ e_3 = (1,2,3) \end{array}\right| \quad x = (6,9,14)$$

Por la matriz del cambio de base

La matriz formada por $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{El rg es, al menos, 2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cancel{3+2+2-1-3-4} = -1 \neq 0$$

Los 3 vectores son linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión 3 y forman una base

Ahora realizamos el cambio de base

$$x_1 = 6 = a\cdot 1 + 1\cdot b + 1c = x_1'$$

$$x_1 = 6 = a+b+c = x_1'$$

$$x_2 = 9 = a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 2 = x_2'$$

$$x_3 = 14 = a\cdot 1 + b\cdot 2 + c\cdot 3 = x_3'$$

$$\begin{cases} 6 = a+b+c \\ 9 = a+b+2c \\ 14 = a+2b+3c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 6 & a & b & c \\ 9 & a & b & 2c \\ 14 & a & 2b & 3c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 6 & a & b & c \\ 3 & 0 & 0 & c \\ 8 & 0 & b & 2c \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 8 = b+2c \\ 6 = a+b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{c=3} \\ 8 = b+2\cdot 3 \Rightarrow \boxed{b=2} \\ 6 = a+2+3 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{array}$$

Luego, la matriz del cambio de base es:

$$A(I, \beta' \leftarrow \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Los coordenadas del ~~nuevo~~ vector x respecto a la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ seran $x' = (1,2,3)$

(16) Determinar si los siguientes conjuntos $M_2(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:

1. $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
2. $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a \in \mathbb{R} \right.$
3. $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a, b \in \mathbb{R} \right\}$
4. $H_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Para que sean un subespacio vectorial:

- Suma cerrada
- Producto por escalares cerrados

H_1

- Consideramos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -b_1-b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

ya que las suma de escalares se queda en $\mathbb{R}$ y la matriz sigue perteneciendo $M_2(\mathbb{R})$

- Consideramos ahora $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\mu \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a_1 & \mu b_1 \\ -\mu b_1 & \mu c_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Por tanto, H_1 es un subespacio vectorial.

H_2

$\begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (a \quad 1+a) \notin M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow H_2$ no es un subespacio vectorial.

H3

Consideramos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -b_1-b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La suma $\in M_2(\mathbb{R})$

- $\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a_1 & \mu b_1 \\ -\mu b_1 & \mu a_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

H3 es un subespacio vectorial.

H4

$\mu \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu b_1 + \lambda b_2 \\ \mu a_1 + \lambda b_2 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

H4 es un espacio vectorial.

---

(17) Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$V_1 = \{(x,y,z,t) \mid x+y+z=0\}$

$V_2 = \mathcal{L}(\{(1,1,1,1), (1,2,3,4)\})$

$V_3 = \{(\lambda+\mu, \lambda+\gamma, \gamma+\delta, \lambda+\delta) \mid \lambda, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$

¿Pertenece el vector $(1,0,1,-2)$ a dichos subespacios? En caso afirmativo calcular las coordenadas de este vector respecto a alguna base de dichos subespacios (la elección de la base es arbitraria).