Autómatas con pila

Un **autómata con pila no determinista** es una septupla $(Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F)$, donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- A es un alfabeto de entrada.
- B es un alfabeto para la pila.
- δ es la f. transición

$$\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times B \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times B^*)$$

- q_0 estado inicial
- Z_0 es el símbolo inicial de la pila
- F es el conjunto de estados finales

Se llama **descripción instantánea** o **configuración** de un autómata con pila a la tripleta

$$(q, u, \alpha) \in Q \times A^* \times B^*$$

en la que q es el estado en el que se encuentra el autómata, u es la parte de la cadena de entrada que queda por leer y α el contenido de la pila (el primer símbolo es el tope de la pila.

La configuración inicial es (q_0, u, Z_0), donde q_0 es el estado inicial y Z_0 el símbolo inicial de la pila.

Se dice que la configuración $(q, au, Z\alpha)$ se puede llegar mediante un paso de cálculo a la configuración $(p, u, \beta\alpha)$ y se escribe $(q, au, Z\alpha) \vdash (p, u, \beta\alpha) \iff (p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$, donde a puede ser cualquier símbolo de entrada o la cadena vacía.

Si C_1 y C_2 son dos configuraciones, se dice que se puede llegar de C_1 a C_2 mediante una sucesión de pasos de cálculo y se escribe $C_1 \overset{*}{\vdash} C_2 \iff \exists\, T_1, \dots, T_n : C_1 = T_1 \vdash T_2 \vdash \dots \vdash T_n = C_2$

Criterios para ver si un lenguaje es aceptado por un APND

- Lenguaje aceptado por estados finales

$$L(M) = \{ w \in A^* : (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \gamma),\ p \in F,\ \gamma \in B^* \}$$

- Lenguaje aceptado por la pila vacía:

$$N(M) = \{ w \in A^* : (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon),\ p \in Q \}$$

Teorema: Un lenguaje es aceptado por una pila, M, por el criterio de la pila vacía $\iff$ Es aceptado por una pila, M', por el criterio de estados finales.

Pila vacía $\longrightarrow$ Estados finales

$$\delta(\tilde{q}_0, \varepsilon, \tilde{Z}_0) = (q_0, Z_0 \tilde{Z}_0)$$

... Pila vacía ...

$$\delta(q, \varepsilon, \tilde{Z}_0) = (q_f, \tilde{Z}_0)$$

Trasformación determinista

Estados finales $\longrightarrow$ Pila vacía

$$\delta(\tilde{q}_0, \varepsilon, \tilde{Z}_0) = (q_0, Z_0 \tilde{Z})$$

... Estados finales ...

$$\delta(q, \varepsilon, H) = (q_s, H)$$

$$\delta(q_s, \varepsilon, H) = (q_s, \varepsilon)$$

Transformación NO determinista

Un autómata con pila se dice **determinista** si, y solo si, se cumplen las siguientes condiciones:

- $\delta(q, a, X)$ tiene a lo más un elemento, $\forall q \in Q,\ a \in A \cup \{\varepsilon\},\ X \in B$
- $\delta(q, a, X)$ es no vacío para algún $a \in A \Rightarrow \delta(q, \varepsilon, X) = \emptyset$.

Una condición equivalente es que $\forall C_1$, $\exists$ (como máximo) $C_2 : C_1 \vdash C_2$

Un lenguaje independiente de contexto se dice determinista $\iff$ Es aceptado por un $\boxed{\text{ACPD}}$ por el criterio de estados finales.

Autómata con pila determinista

Un lenguaje L tiene la propiedad prefijo $\Leftrightarrow$ Para cada palabra $x \in L$ ningún prefijo de x (distinto de x) está en L.

Teorema: Un lenguaje puede ser aceptado por un ACPD por criterio de pila vacía $\Leftrightarrow$ Aceptado por ACPD por criterio de estados finales y tiene la propiedad prefijo.

Propiedad: Si un lenguaje L es determinista (aceptado por un ACPD por estados finales) y no cumple la propiedad prefijo, una simple transformación lo convertiría en un lenguaje con la propiedad prefijo y, por tanto, aceptado por un ACPD por criterio de pila vacía. Se añade un nuevo símbolo que no esté en el alfabeto y se pone este símbolo al final de todas las palabras.

Si $\# \notin A \Rightarrow L\{\#\} = \{u\# : u \in L\}$

Teorema: Dada una gramática libre de contexto, G, existe un autómata con pila, M, que acepta el lenguaje generado por G. El recíproco también es cierto (El autómata no tiene por qué ser determinista)

① Determinar una gramática que acepte el lenguaje $N(M)$ donde,

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$$

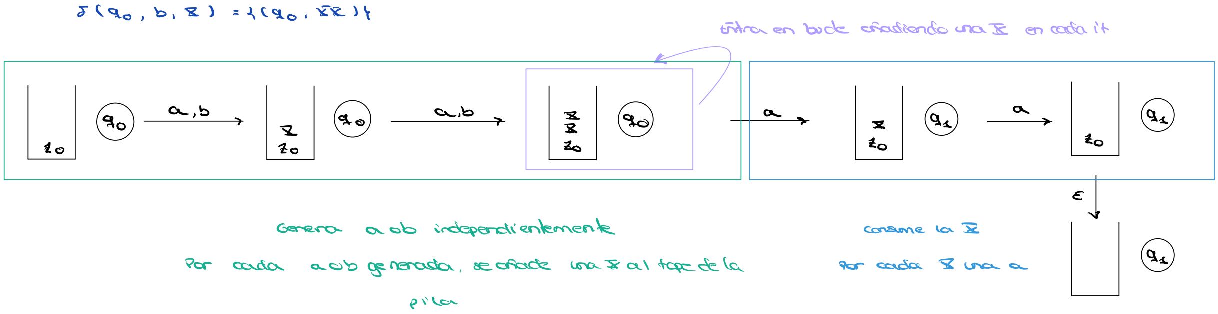
y donde

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, ZZ_0)\}$

$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, ZZ), (q_1, \varepsilon)\}$ $\qquad$ $\delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, ZZ_0)\}$ $\qquad$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_0, b, Z) = \{(q_0, ZZ)\}$



$L(M) = \{u \in \{a,b\}^* : N(a) \geq N(b)\}$ ó $L(M) = \{v \in \{a,b\}^* : v = uw, \; w \in \{a,b\}^+ \text{ y } v = a^n, |u| = n\}$

② Construir un autómata con pila que acepte el lenguaje

$$\{a^i b^i : i \geq 0\} \cup \{a^i : i \geq 0\} \cup \{b^i : i \geq 0\}$$

a) Por el criterio de la pila vacía

Definimos $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{Z_0, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\boxed{\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\}}$ → Generamos la palabra vacía y acabamos

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, ZZ_0)\}$
$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, ZZ), (q_2, \varepsilon)\}$ → Generamos n a

$\delta(q_0, b, Z) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ → Generamos n b

$\delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ → Si solo queremos generar a^i

$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_3, ZZ_0)\}$
$\delta(q_3, b, Z) = \{(q_3, ZZ)\}$
$\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{(q_3, \varepsilon)\}$ → Generamos solo b^i

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $\quad$ $\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ $\quad$ $\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = \{(q_3, \varepsilon)\}$

Para acabar de vaciar la pila

b) Por el criterio de estados finales

Definimos $M_f = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_0^n, q_f\}, \{a, b\}, \{Z_0, Z, Z_0^n\}, \delta, q_0^n, Z_0^n, q_f)$

$\delta(q_0^n, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_0, Z_0 Z_0^n)\}$

- Pila vacía -

$\delta(q, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_f, Z_0^n)\}, \; \forall q \in Q$

Para que sea determinista $\delta(q, a, X)$ tiene a lo más un elemento, $\forall q \in Q$, $a \in A \cup \{\varepsilon\}$, $X \in B$, luego, no lo es, ya que $\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, ZZ), (q_2, \varepsilon)\}$ no sabemos cuando pasa de $q_0 \to q_2$.

Gramática G $\longrightarrow$ Autómata M

Dada la gramática $G = (V, T, P, S)$, los elementos del autómata serán:

- $Q = \{q\}$
- $q_0 = q$
- $A = T$
- $Z_0 = S$
- $B = V \cup T$
- $F = \emptyset$
- δ viene determinado por

$$\delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, \alpha) : B \rightarrow \alpha \in P\}$$
$$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$$

Acepta el mismo lenguaje por el criterio de la pila vacía.

3 Obtener a partir de la gramática $G = (\{S, T\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ con

$$S \rightarrow abS \mid cdT$$
$$T \rightarrow bT \mid b$$

un autómata con pila que acepta por el criterio de estados finales el lenguaje generado por dicha gramática.

Definimos $M = (\{q_0\}, \{a, b\}, \{S, T, a, b\}, q_0, S, \emptyset)$

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, abS), (q, cdT)\}$

$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \varepsilon, T) = \{(q, bT), (q, b)\}$

$\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, c, c) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, d, d) = \{(q, \varepsilon)\}$

Acepta el mismo lenguaje por el criterio de la pila vacía. Ahora basta con hacer una transformación al criterio por estados finales.

Para ello, definimos $M_f = (\{q, q_0^n, q_f\}, \{a, b\}, \{S, T, a, b, S^n\}, q_0^n, S^n, q_f\}$

$\delta(q_0^n, \varepsilon, S^n) = \{(q_0, SS^n)\}$

– Pila anterior –

$\delta(q, \varepsilon, S^n) = \{(q_f, S^n)\}$

4 Demostrar que los siguientes lenguajes son libres de contexto y obtener para cada uno de ellos un autómata con pila no determinista que pueda ser usado como reconocedor.

<u>Teorema</u>: Dada una gramática libre de contexto, $\exists M$, un autómata por pila que reconoce el mismo lenguaje y viceversa.

Para demostrar que los siguientes lenguajes son libres de contexto, basta con ver que aceptan un autómata con pila:

a) $L_1 = \{a^p b^q : p, q \geq 1, p > q\}$ (Mínimo 2a y 1b)

Definimos $M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, X, Y\}, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$

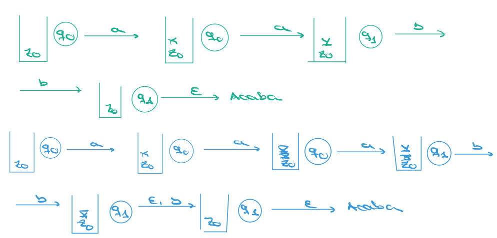
$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, Y)\}$

$\delta(q_1, b, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$



b) $L_2 = \{a^p b^q : p, q \geq 1, p < q\}$

Definimos $M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, q_0, Z_0, \emptyset)$

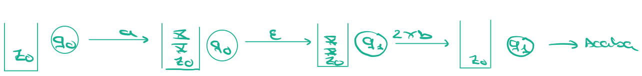
$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XXZ_0)\}$

$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, X) = \{(q_1, X)\}$

$\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon), (q_1, X)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$



c) $L_3 = \{a^p b^q a^r : p + q \geq r \geq 1\}$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$

$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, X) = \{(q_1, Y)\}$

$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_1, YZ_0)\}$

$\delta(q_1, b, Y) = \{(q_1, XY)\}$

$\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, XX)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Y) = \{(q_2, Y)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_2, X)\}$

$\delta(q_2, a, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, a, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

⑱ Dado $L = \{a^i b^j c^k a^i : i \geq 1,\ j \geq K,\ K \geq 1\}$ construir un autómata con pila que acepte dicho lenguaje por el criterio de pila vacía. Trasformar dicho autómata en uno que lo acepte por el criterio de estados finales.

Definimos $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, X, Y, B, V\}, q_0, Z_0, \phi)$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$	Metemos mínimo 1 a ($i \geq 1$)
$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$	Metemos tantas a como queramos
$\delta(q_0, \varepsilon, X) = \{(q_1, YX)\}$ $\delta(q_1, b, Y) = \{(q_1, B)\}$	Metemos mínimo 1 b ($j \geq K \geq 1$)
$\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$	Metemos tantas b como queramos
$\delta(q_1, \varepsilon, B) = \{(q_2, V)\}$ $\delta(q_2, c, V) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ $\delta(q_2, c, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ $\delta(q_2, \varepsilon, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$	Metemos mínimo una c ($K \geq 1$), pero menos que b ($j \geq K$)
$\delta(q_2, a, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ $\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$	Metemos el mismo número de a's que al principio y vaciamos la pila

Para transformarlo a un autómata con pila por el criterio de estados finales consideramos:

$$M_f = (\{q_0, q_1, q_2, q_0^{\sim}, q_f\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, X, Y, B, V, Z_0^{\sim}\}, q_0^{\sim}, Z_0^{\sim}, q_f)$$

$$\delta(q_0^{\sim}, \varepsilon, Z_0^{\sim}) = \{(q_0, Z_0 Z_0^{\sim})\}$$

– Pila vacía –

$$\delta(q, \varepsilon, Z_0^{\sim}) = \{(q_f, Z_0^{\sim})\},\ \forall q \in Q$$

⑲ Construir un autómata con pila determinista que acepten por el criterio de la pila vacía los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:

a) $L = \{0^n 1^n : n \geq 1\} \cup \{0^n 1^{2n} : n \geq 1\}$

Definimos $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{X, Z_0\}, q_0, Z_0, \phi)$

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0), (q_2, XXZ_0)\}$$

$\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$ $\qquad$ $\delta(q_2, 0, X) = \{(q_2, XXX)\}$

$\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $\qquad$ $\delta(q_2, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$$\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

b) $L = \{0^n 1^m 0^m 1^n : n, m \geq 1\}$

Definimos $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X, Y\}, q_0, Z_0, \phi)$

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$

$\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$

$\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, YX)\}$

$\delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\}$

$\delta(q_1, 0, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, 0, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, 1, X) = \{(q_3, \varepsilon)\}$

$\delta(q_3, 1, X) = \{(q_3, \varepsilon)\}$

$\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = \{(q_3, \varepsilon)\}$

Autómata $\longrightarrow$ Gramática

La gramática $G = (V, A, P, S)$ que genera el mismo lenguaje se construye de la siguiente forma:

- Variables (V): $[q, C, p]$, $p, q \in Q$ y $C \in B$, además de la variable inicial S.
- Producciones (P): $S \to [q_0, Z_0, q]$, $\forall q \in Q$

  $[q, C, q_m] \to a[p, D_1, q_1][q_1, D_2, q_2] \cdots [q_{m-1}, D_m, q_m]$ para cada $q_1, \ldots, q_m \in Q$ si $(p, D_1 \ldots D_m) \in \delta(q, a, C)$, donde a puede ser ε.

13 Dado el autómata con pila $M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde:

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, AAZ_0)\}$ $\qquad$ $\delta(q_0, \varepsilon, A) = \{(q_0, AAA)\}$

$\delta(q_0, 0, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $\qquad$ $\delta(q_1, \varepsilon, B) = \{(q_0, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, A)\}$ $\qquad$ $\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, BZ_0)\}$

$\delta(q_0, 1, A) = \{(q_0, \varepsilon)\}$ $\qquad$ $\delta(q_0, 1, B) = \{(q_0, BB)\}$

Encontrar una gramática libre de contexto que genere el mismo lenguaje que este autómata acepta por el criterio de la pila vacía.

Pendiente

21 Construir autómatas con pila deterministas que acepten por el criterio de estados finales los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

a) $L = \{0^i 1^j : j \geq i \geq 1\}$

Consideramos $M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$

$\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$

$\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, 1, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

Solo hay un paso de cálculo $C_1 \vdash C_2$

Tenemos un autómata con pila por el criterio de pila vacía $\boxed{\text{determinista}}$ y como la transformación de pila vacía al criterio de estados finales es determinista:

$M(\{q_0, q_1, q_0^\wedge, q_f\}, \{0,1\}, \{X, Z_0, Z_0^\wedge\}, \delta, q_0^\wedge, Z_0^\wedge, \emptyset)$

$\delta(q_0^n, \varepsilon, Z_0^\wedge) = \{(q_0, Z_0 Z_0^\wedge)\}$

... Pila Vacía ...

$\delta(q, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_f, Z_0^\wedge)\} \quad \forall q \in Q$

b) $L = \{0^i 1^j 0^i : i, j \geq 1\} \cup \{1^i 0^j 1^i : i, j \geq 1\}$

$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$	$\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_2, XZ_0)\}$
$\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$	$\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, XX)\}$
$\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, X)\}$	$\delta(q_2, 0, X) = \{(q_3, X)\}$
$\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, X)\}$	$\delta(q_3, 0, X) = \{(q_3, X)\}$
$\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$	$\delta(q_3, 1, X) = \{(q_3, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$	$\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = \{(q_3, \varepsilon)\}$

Solo hay un paso de cálculo $C_1 \vdash C_2$

Tenemos un autómata con pila por el criterio de pila vacía $\boxed{\text{determinista}}$ y como la transformación de pila vacía al criterio de estados finales es determinista:

$M(\{q_0, q_1, q_0^\wedge, q_f\}, \{0,1\}, \{X, Z_0, Z_0^\wedge\}, \delta, q_0^\wedge, Z_0^\wedge, \emptyset)$

$\delta(q_0^n, \varepsilon, Z_0^\wedge) = \{(q_0, Z_0 Z_0^\wedge)\}$

... Pila Vacía ...

$\delta(q, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_f, Z_0^\wedge)\} \quad \forall q \in Q$

(22) construye un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía que reconozca el lenguaje :

$L = \{ u c v : u, v \in \{a, b\}^+$ y nº subcadenas 'ab' de u es igual al de 'ba' de $v \}$

$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

Revisar

$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$

$\delta(q_1, a, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$

$\delta(q_1, b, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$

$\delta(q_0, b, X) = \{(q_0, X)\}$

$\delta(q_0, a, X) = \{(q_1, X)\}$

$\delta(q_1, a, X) = \{(q_0, X)\}$

$\delta(q_1, b, X) = \{(q_0, XX)\}$

$\delta(q_0, c, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$\delta(q_0, c, X) = \{(q_2, X)\}$

$\delta(q_1, c, X) = \{(q_2, X)\}$

$\delta(q_2, a, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$\delta(q_2, a, X) = \{(q_2, X)\}$

$\delta(q_2, b, Z_0) = \{(q_3, Z_0)\}$

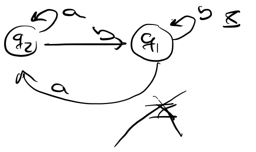
$\delta(q_2, b, X) = \{(q_3, X)\}$

$\delta(q_3, b, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$\delta(q_3, b, X) = \{(q_3, X)\}$

$\delta(q_3, a, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$



(24) Construye un autómata con pila determinista que reconozca por el criterio de pila vacía el lenguaje $L = \{a^m b^n c^m : n \geq m\}$