TEMA 3: ESPACIOS DE PROBABILIDAD

Conjuntos. Operaciones

- Un conjunto es una colección un conjunto de objetos bien definido y que poseen una o varias propiedades. Cada uno de los objetos del conjunto se llama elemento.
Podemos definir un conjunto de dos formas:
  - Extensión: se especifica cada uno de los elementos que pertenece al conjunto.
  - Descripción: se da una o varias propiedades que deben cumplir todos los elementos del conjunto.

$$A = \overbrace{\{x \,/\, x \geq 0 \,,\, x^2 - x - 2 = 0\}}^{\text{Descripción}} = \overbrace{\{2\}}^{\text{Extensión}}$$

Dos conjuntos son iguales cuando están formado por los mismos elementos.

- B es un subconjunto de A, ó bien A contiene a B, si todo elemento de B es elemento de A.

- Unión: La unión de conjuntos es otro conjunto que está formado por todos los elementos de ambos conjuntos.

- Conjunto vacío: Aquel conjunto que no tiene ningún elemento. Se denota por $\emptyset$. Este conjunto se considera como subconjunto de cualquier otro conjunto.

- Conjunto universal: Es aquel formado por la totalidad de los elementos del mismo tipo. Todo conjunto se puede considerar como subconjunto de él. Se denota por Ω.

- Conjuntos disjuntos: Si dos conjuntos A y B no poseen elementos comunes se dicen que son disjuntos, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

- Partición: se dice que los conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forman una partición o un sistema completo de sucesos, si son disjuntos dos a dos y la unión de todos ellos es el conjunto universal, es decir:
  - $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
  - $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

- Conjunto complementario: El conjunto complementario de un conjunto A, es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no están en A. Se denota por $\bar{A}$.

Propiedades:

1) La unión y la intersección son conmutativas y asociativas.
2) La unión y la intersección verifican la propiedad distributiva de cada operación respecto de la otra.
3) Verifican las leyes de Morgan:
   - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
   - $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
4) $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \emptyset$, $\bar{\emptyset} = \Omega$, $\bar{\bar{A}} = A$

Álgebra de sucesos

- Experimentos determinísticos: Bajo mismas condiciones dan siempre lugar al mismo resultado.
- Experimentos aleatorios: Su resultado puede variar incluso bajo mismas condiciones.

Indescomponibles en otros más simples

- Se llama espacio muestral al conjunto de todos los resultados posibles resultados de un experimento aleatorio. Se denota por Ω.

- Se denomina suceso a todo subconjunto del espacio muestral, es decir, A es un suceso si $A \subseteq \Omega$. Los sucesos elementales son aquellos que constan de un único elemento.

Relaciones entre sucesos

- Implicación: Un suceso A verifica otro suceso B cuando siempre que se verifique A se verifique B ($B \subseteq A$)

- Suceso complementario o contrario: Dado un suceso A, se define como aquel que se verifica sí y solo sí no se da A. Se denota por $\bar{A}$.

- Unión de sucesos: se verifica $A \cup B \Leftrightarrow$ se verifica A, B o ambas.

- Suceso seguro: Se denota por Ω y se verifica siempre.

- Intersección de sucesos: Se verifica $A \cap B \Leftrightarrow$ se verifica A y B

- Suceso imposible: Aquel que no se verifica nunca. Se denota por $\emptyset$.

- Suceso incompatible: Cuando la intersección de dos sucesos es un suceso imposible

Álgebra de Boole

Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω tiene estructura de Álgebra o Álgebra de Boole sobre Ω:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
3) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
4) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Concepciones de probabilidad

- Concepción clásica (Regla de Laplace): $P(A) = \dfrac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$

  Inconvenientes:
  - No es válida cuando los sucesos no son equiprobables
  - A veces no es posible contar.

- Concepción frecuentista (Bernoulli): $P(A) = \lim_{N \to \infty} f_N(A)$

El límite cuando un suceso es el valor límite de su frecuencia relativa al repetir indefinidamente el experimento

Inconvenientes:

$f_N(A) = \frac{N_A}{N}$

- En algunas ocasiones es imposible realizar el experimento un número indefinido de veces.
- Las condiciones bajo las cuales se realiza el experimento pueden variar.

Definición axiomática de probabilidad de Kolmogorov

Dado $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible asociado a un experimento aleatorio. Se define una probabilidad como una función:

$$P: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$

que verifica:

i) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de sus probabilidades: $\forall A, B \in \mathcal{A} \ / \ A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Consecuencias

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

4) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

5) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

6) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

7) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

8) Desigualdad de Bonferroni: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=j}^{n} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

9) Desigualdad de Bode: $P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$