Resumen Tema 2

Sea $b \in \mathbb{R}^N$ el vector de términos independientes:

- Cuando tenemos $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ triangular superior, con elementos no nulos en la diagonal, tenemos un sistema triangular superior $Ux = b$
- Cuando tenemos $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ triangular inferior, con elementos no nulos en la diagonal, tenemos un sistema triangular inferior $Lx = b$.

Método de Gauss

Permite cambiar el sistema $Ax = b$ unisolvente en otro sistema $Ux = c$ equivalente con U triangular superior.

> Para ver si el método de Gauss puede completarse hasta el paso N si todas las submatrices principales de orden $K = 1, \ldots, N$ son regulares

Método de Gauss con pivotaje

Este método es igual que el anterior, pero podemos intercambiar dos filas en caso de que sea necesario.

Método de Gauss - Jordan

Consiste no solo en hacer ceros por abajo, sino también por arriba.

Métodos de factorización

Se denomina factorización LU a transformar el sistema $Ax = b$ sistema compatible determinado, L una matriz triangular inferior y U triangular superior, entonces $A = LU$

solo se podrá usar si L y U son regulares

Se denomina factorización Doolitle a la factorización LU, con los elementos de la diagonal de L igual a 1.

Se denomina factorización Crout a la factorización LU, con los elementos de la diagonal de U igual a 1.

Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, se dice definida positiva si $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

Se denomina factorización Cholesky a la factorización LU donde $L = U^T$ y con coeficientes positivos en la diagonal. Una matriz cuadrada A admite factorización Cholesky $\Leftrightarrow$ A es simétrica y definida positiva.

Métodos iterativos

Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regular y un vector $b \in \mathbb{R}^N$, entonces tenemos un sistema de ecuaciones cuadrado y unisolvente $Ax=b$.

Se define método iterativo como $\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = Bx_{n-1} + C \end{cases}$, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $x_0, C \in \mathbb{R}^N$

Se define consistencia como $c = (I - B) A^{-1} b$

> Supongamos que $N \geq 1$, $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ con A regular, $x_0, b, c \in \mathbb{R}^N$ y que el método iterativo $\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = Bx_{n-1} + C \end{cases}$
>
> es consistente con el sistema unisolvente $Ax=b$. Entonces el método iterativo converge a la solución del sistema para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow$
> $\Leftrightarrow \rho(B) < 1$

Podemos descomponer las matrices como $A = M - N$, $B = M^{-1} \cdot N$, $c = M^{-1} b$

Método de Jacobi

Diagonal Triangular inferior (sin diagonal)

$A = M - N$ con $M := D$, $N := E + F$ → Triangular superior (sin diagonal)

Método de Gauss-Seidel

$A = M - N$ con $M := D - E$, $N := F$

Medida de la velocidad de convergencia

- Cuanto menor sea $\rho(M^{-1}N)$ mejor será la convergencia.
- Cuanto menor sea $\|B\|$ mejor será la convergencia.

Diagonalmente estrictamente dominante

Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, diremos que A es diagonalmente estrictamente dominante si

$$i = 1, \dots, N \Rightarrow \sum_{j=1 \wedge j \neq i}^{N} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Si A es estrictamente dominante $\Rightarrow$ los métodos iterativos convergen hacia su solución independientemente de la estimación inicial