TEMA 3: ESPACIOS EUCLÍDEOS

Métrica euclídeas. Norma, ángulos, perpendicularidad. Bases ortonormales

Definida positiva

Sea V un espacio vectorial real y g una métrica euclídea en V. Diremos entonces que (V, g) es un espacio vectorial métrico euclídeo o simplemente un espacio vectorial euclídeo.

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Entonces:

i) El único vector luminoso es el único vector no nulo.

ii) Si U es un subespacio vectorial de V $\Rightarrow \dim(V) = \dim(U) + \dim(U^{\perp})$

iii) Si U es un subespacio vectorial de V $\Rightarrow (U^{\perp})^{\perp} = U$

iv) Si U, W son subespacios vectoriales de V $\Rightarrow (U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$

v) Si U es un subespacio vectorial de V $\Rightarrow (U, g_U)$ es un espacio vectorial euclídeo y $V = U \oplus U^{\perp}$

vi) Si $\{v_1, \dots, v_k\}$ son no nulos y ortogonales entre sí entonces son linealmente independientes.

vii) Si $U_1, \dots, U_k$ son subespacios vectoriales de V ortogonales $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow U_1 + \dots + U_k = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$

(Norma de un vector): Si (V, g) un espacio vectorial euclídeo siempre tenemos que $g(v, v) \geq 0$ y por tanto podemos dar la siguiente definición:

Se define la norma o módulo de un vector v al número real $\|v\|_g > 0$ dado por:

$$\|v\|_g = \sqrt{g(v,v)} = \sqrt{\omega_g(v)}$$

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Entonces se tiene:

i) $\|u\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ y $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

ii) $\|av\| = |a| \|v\|$

iii) $\left\| \pm \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1 \quad , \forall v \in V, \; v \neq 0$

Dado (V, g) un espacio vectorial euclídeo diremos que $u \in V$ es un vector unitario si $\|v\| = 1$.

(Teorema de Cauchy - Schwarz): Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$, entonces

$$|g(u,v)| \leq \|u\| \|v\|$$

Además, la igualdad se da $\Leftrightarrow u, v$ son linealmente dependientes.

(Desigualdad triangular o de Minkowski) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$, entonces se tiene:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Además se da la igualdad $\Leftrightarrow$ $u = \lambda v$ o $v = \lambda u$, para $\lambda \geq 0$

Ángulo formado por dos vectores

Dados $u, v \in V \setminus \{0\}$ se define el ángulo formado por los vectores u y v como el único $\theta \in [0, \pi]$ que verifica:

$$\cos(\theta) = \frac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|}$$

Denotaremos $\measuredangle(u,v)$

Si $u, v \in V \setminus \{0\}$, $g(u,v) = 0 \Leftrightarrow \measuredangle(u,v) = \frac{\pi}{2}$

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V \setminus \{0\}$. Tenemos entonces que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \measuredangle(u,v) = \frac{\pi}{2}$

Bases ortonormales

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim(V) = n$. Observemos que si $\{u_1, \dots, u_n\}$ son vectores no nulos y ortogonales entre es una base ortogonal de (V, g)

Si tenemos un conjunto de n vectores ortogonales entre sí $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ forman una base ortogonal

(Método de ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Entonces existe una base ortogonal $\beta' = \{u_1, \dots, u_n\}$ de (V, g) tal que:

$$L(\{v_1, \dots, v_k\}) = L(\{u_1, \dots, u_k\}) \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Cada vector se calcula como:

$$u_i = v_i - \frac{g(v_i, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \dots - \frac{g(v_i, u_{i-1})}{\|u_{i-1}\|^2} u_{i-1}$$

Veamos un ejemplo:

Consideremos el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica dada en la base usual por la matriz:

$$M(g, \beta_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si tuviéramos que probar que es euclídea lo hacemos de Sylvester

Partimos de $\beta_u: \{\underset{v_1}{(1,0,0)}, \underset{v_2}{(0,1,0)}, \underset{v_3}{(0,0,1)}\}$ y calculamos $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$

1) $u_1 = v_1 = (1,0,0)$

Aplicamos la fórmula del teorema

2) $u_2 = v_2 - \frac{g(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 = (0,1,0) - \frac{g((0,1,0),(1,0,0))}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) = (1,1,0)$

3) $u_3 = v_3 - \frac{g(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{g(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2}u_2 = (-1,-1,1)$

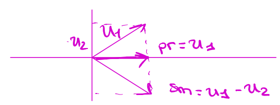
Por tanto, $\beta' = \{(1,0,0),(1,1,0),(-1,-1,0)\}$ es una base ortogonal
Para ortonormalizarla, dividimos cada vector entre el código

Proyecciones y simetrías ortogonales

Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V. Tenemos que $V = U \oplus U^\perp$. Por tanto, podemos considerar π_U la proyección sobre U paralela a $U^\perp$ y σ_U la simetría respecto de U paralela a $U^\perp$

A π_U se le denomina la proyección ortogonal sobre U y a σ_U la simetría ortogonal respecto de U.

Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V. Entonces tenemos:
i) Existen bases ortonormales de (V,g) que diagonalizan π_U y σ_U.
ii) La matriz de π_U en cualquier base ortonormal es simétrica
iii) La matriz σ_U en cualquier base ortonormal es simétrica y ortogonal



Nota: $M(\pi_U, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right)$ y $M(\sigma_U, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right)$

Veamos un ejemplo:
Consideremos el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica dada en la base usual por la matriz:

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-y=0\}$. Vamos a calcular las matrices de la proyección y la simetría ortogonales de U en la base usual de $\mathbb{R}^3$.
Calcular una base de U y su ortogonal:
$U = L(\{(1,1,0),(0,0,1)\})$
$U^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / g((1,1,0),(x,y,z)) = 0,\ g((0,0,1),(x,y,z)) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y+z=0,\ y+3z=0\} =$
$= L(\{(1,0,0)\})$
Consideramos $B = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$, tenemos:

$$M(\pi_U, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(\sigma_U, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

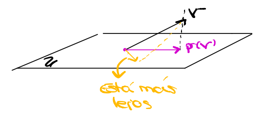
corresponde a U
corresponde $U^\perp$

Para pasarla a la base usual: $M(\pi_U \text{ ó } \sigma_U, B) = M(B, B_u) \cdot M(\sigma_U \text{ ó } \pi_U, B)\, M(B, B_u)^{-1}$
↳ Expresar B en función B_u

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio vectorial de V. Entonces $\forall v \in V$ se tiene:

$$\pi_U(v) = u_0 \iff \|v - u_0\| < \|v - u\| \ \forall u \in U\setminus\{0\}$$

Es decir, geométricamente, u_0 es el vector de U que está más cerca de v.



Isomorfismos musicales

Sea (V, g) un espacio vectorial métrico y V^* el dual de V. Podemos definir:

$$\begin{aligned} \Phi : V &\to V^* \\ v &\mapsto \Phi(v) : V \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad u \mapsto g(u, v) \end{aligned}$$

Sea β una base de V y β^* su dual:

i) Φ es una aplicación lineal
ii) $\Phi(u)(v) = \Phi(v)(u) \ \forall u, v \in V$
iii) $M(\Phi, \beta, \beta^*) = M(g, \beta)$
iv) $\mathrm{Rad}(g) = \ker(\Phi)$
v) Φ es un isomorfismo $\iff$ g no degenerada
vi) Sea g no degenerada y Φ^{-1} la inversa de $\Phi \Rightarrow \Phi^{-1}(\varphi)$, $\varphi \in V^*$ es el único vector que verifica $g(v, \Phi^{-1}(\varphi)) = \varphi(v) \ \forall v \in V$.

forma lineal

Endomorfismo adjunto

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo

$$\begin{aligned} \Phi : V &\to V^* \\ v &\mapsto \Phi(v) : V \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad u \mapsto g(u, v) \end{aligned}$$

Por otra parte, dada $f \in \mathrm{End}(V)$ podemos considerar su aplicación traspuesta (o endomorfismo dual) que se definía como:

$$\begin{aligned} f^t : V^* &\to V^* \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

$f : V \to V'$
$f^t : (V')^* \to V^*$
$\varphi \in V'$ le corresponde $\varphi \circ f$

Recordemos que si β era una base de V y β^* la base dual $M(f^t, \beta^*) = M(f, \beta)^t$

A partir de los homomorfismos anteriores podemos definir un endomorfismo $\hat{f} \in \mathrm{End}(V)$, dado por:

$$\hat{f} = \Phi^{-1} \circ f^t \circ \Phi$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\Phi"'] & V \arrow[d, "\Phi"] \\ V^* \arrow[r, "f^t"] & V^* \end{tikzcd}$$

A $\hat{f}$ se le denomina el endomorfismo adjunto de f respecto de g.

Dado $f \in End(V)$, el endomorfismo adjunto de f respecto de g es el único endomorfismo que verifica:

$$g(v, f(u)) = g(\hat{f}(v), u) \quad \forall u, v \in V$$

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo, $f, h \in End(V)$ y $\hat{f}, \hat{h}$ sus correspondientes endomorfismos adjuntos respecto de g. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

i) Para cualquier base B de V se tiene
$$M(\hat{f}, B) = M(g, B)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M(g, B)$$

ii) Para cualquier base ortonormal B' de (V, g) se tiene:
$$M(\hat{f}, B') = M(f, B)^t$$

iii) $\hat{\hat{f}} = f$

iv) $\widehat{Id} = Id$ y $\widehat{f_0} = f_0$, donde f_0 denota la aplicación idénticamente nula.

v) $\widehat{h \circ f} = \hat{h} \circ \hat{f}$

vi) $f \in Aut(V) \Leftrightarrow \hat{f} \in Aut(V)$. Además $\widehat{f^{-1}} = \hat{f}^{-1}$

vii) $Ker(\hat{f}) = Im(f)^{\perp}$ y $Im(\hat{f}) = Ker(f)^{\perp}$.

viii) Sea U un subespacio vectorial de V. Si $f(U) \subset U$ entonces $\hat{f}(\quad) \subset U^{\perp}$.

ix) Los polinomios c cterísticos de f y $\hat{f}$ coinciden

x) Si λ es un valor propio de f con multiplicidad geométrica K si y solo si λ es un valor propio de $\hat{f}$ con multiplicidad geométrica K.

xi) f es diagonalizable $\Leftrightarrow$ $\hat{f}$ diagonalizable

xii) Sea $f \in Aut(V)$. Entonces se tiene f es un isometría de (V, g) $\Leftrightarrow$ $\hat{f} = f^{-1}$

Diremos que $f \in End(V)$ es un endomorfismo autoadjunto respecto de g si $\hat{f} = f$, es decir, es:

$$g(v, f(u)) = g(f(v), u) \quad \forall u, v \in V$$

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in End(V)$. Las siguientes afirmaciones equivalen:

Pero que g es métrica luego $M(g,B)^t = M(g,B)$

i) f es un endomorfismo adjunto

ii) Para toda base B de V se tiene que:
$$M(g, B) \cdot M(f, g) = M(f, B)^t \cdot M(g, B)$$

Equivalentemente, $M(g, B) \cdot M(f, B)$ es una matriz simétrica

iii) Existe una base B de V tal que se verifica la ecuación

iv) Para toda base ortonormal B' de (V, g) se tiene que $M(f, B')$ es simétrica.

v) Existe una base ortonormal B' de (V, g) tal que $M(f, B')$ es simétrica

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in End(V)$ un endomorfismo autoadjunto respecto g. Entonces tenemos:

i) Si U es un subespacio de V tal que $f(U) \subset U$ entonces $f(U^{\perp}) \subset U^{\perp}$. Además $f_{|U}$ es un endomorfismo autoadjunto de (U, g_U).

restringida a U

ii) Dos subespacios propios de f asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Puede no haber, pero si hay se verifica

También se verifica para $f_{|U^{\perp}}$

Recordemos que si $f \in End(V)$ tenemos las siguientes caracterizaciones para las proyecciones y simetría generales:

f es una proyección $\Leftrightarrow f \circ f = f$ $\qquad$ f es una simetría $\Leftrightarrow f \circ f = Id$

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in End(V)$, entonces se tiene:

i) f es una ortogonal sí y solo si $f \circ f = f$ es un endomorfismo autoadjunto respecto g.

ii) f es un simetría ortogonal $\Leftrightarrow f \circ f = Id$ y f es un endomorfismo autoadjunto respecto g.

Diagonalización de endomorfismos autoadjuntos

- Si $z \in \mathbb{C}$ denotamos por $|z|$ al módulo de z.
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, donde $\bar{z}$ denota el conjugado de z
- Dado $M \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ tal que $M = (m_{ij})$ denotaremos $\bar{M}$ a la matriz cuyas entradas son los números complejos conjugados de m_{ij}, es decir, $\bar{M} = (\bar{m}_{ij})$.

$$\overline{M \cdot N} = \bar{M} \cdot \bar{N}$$

i) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Entonces A tiene al menos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$.

ii) Sea $A \in S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$. Entonces todo valor propio de A es real. En particular, A admite algún valor propio real.

Corolario: Sea (V, g) es un espacio vectorial euclídeo y $f \in End(V)$ con f un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Entonces f tiene un valor propio real.

(Teorema): Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in End(V)$ un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Entonces f admite una base ortonormal de vectores propios y por tanto f es diagonalizable

Toda matriz simétrica real es simultáneamente diagonalizable por semejanza y por congruencia.

Además la matriz $P = M(\beta, \beta_u)$ es una matriz ortogonal

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{t} \cdot A \cdot P$$

Y, así, A es diagonalizable simultáneamente por semejanza y por congruencia.

Aplicaciones del Teorema de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $\tilde{g}$ otra métrica cualquiera en V. Entonces se tiene:

i) Existe un único endomorfismo $f_{\tilde{g}} \in \mathrm{End}(V)$ que verifica

$$\tilde{g}(u, v) = g(u, f_{\tilde{g}}(v)) \quad \forall u, v \in V$$

Además, $f_{\tilde{g}}$ es un endomorfismo autoadjunto respecto de g.

ii) Si β es una base ortonormal para g, entonces:

$$M(f_{\tilde{g}}, \beta) = M(\tilde{g}, \beta)$$

iii) Existe $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V, g) formada por vectores propios de $f_{\tilde{g}}$ asociados a los valores propios $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Además

$$\beta' = \left\{ \frac{u_1}{a_1}, \dots, \frac{u_n}{a_n} \right\}$$

donde $a_i = \sqrt{|\lambda_i|}$ si $\lambda_i \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $\lambda_i = 0$ es, salvo reordenación, una base ortonormal (o de Sylvester) para $\tilde{g}$.

iv) El número de $1, -1$ y 0 de la matriz de Sylvester de $\tilde{g}$ coinciden con el número de valores propios positivos, negativos y nulos de $M(\tilde{g}, \beta)$ para β cualquier base ortonormal de (V, g). En particular, el índice el índice de $\tilde{g}$ coincide con el número de valores propios negativos de $M(\tilde{g}, \beta)$

El Teorema anterior nos proporciona otra manera para icar las métricas. Podemos considerar como espacio euclídeo de partida $(V, g) = (\mathbb{R}^n, g_0)$ y la métrica $\tilde{g}$, que es la métrica que queremos clasificar. β_u es una base ortonormal para $(\mathbb{R}^n, g_0)$. El apartado iv) del teorema anterior nos dice que el número de $1, -1, 0$ de la matriz de Sylvester de la métrica $\tilde{g}$ coincide con el número de valores propios positivos, negativos y nulos de la matriz $M(\tilde{g}, \beta_u)$. Además, hay una manera de calcular el número de valores propios positivos sin necesidad de calcular explícitamente las raíces del polinomio característico. Es lo que se conoce como **Regla de los signos de Descartes:**

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_0 \neq 0$ entonces el número de raíces positivas del polinomio coincide con el número de cambios de signo entre los coeficientes del polinomio módulo 2

$+a_2x^2 - a_1x + a_0$

Si todas las raíces del polinomio son reales, entonces, el número de cambios de signo coincide con el número de raíces positivas del polinomio

Si $a_0 = 0$ en el polinomio anterior, entonces $p(x) = x^K g(x)$ con $g(0) \neq 0$. El número K me dice la multiplicidad de la raíz 0 y aplicando la regla de los signos Descartes al polinomio $g(x)$ obtendríamos el número de raíces positivas de $p(x)$

Veamos un par de ejemplos:

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$, cuya forma cuadrática asociada es:

$$\omega_a(x,y,z) = ax^2+ay^2+(a-1)z+2xy$$

Comenzamos calculando la matriz de la métrica en la base usual:

$$M(g_a, \mathcal{B}u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su polinomio característico:

$$p_{M_a}(\lambda) = (a-\lambda)^2(a-1-\lambda)-(a-1-\lambda) = -(\lambda-(a-1))^2(\lambda-(a+1))$$

Multiplicidad algebraica

$$\lambda_1 = a-1, \quad \lambda_2 = a+1$$

a	λ_1 ($\alpha_1 = 2$)	λ_2	rango	índice	g_a
$(-\infty,-1)$	$-$	$-$	$\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$ 3	3	definida negativa
$(-1,1)$	$-$ cuenta doble	$+$	3	2	indefinida
$(1,+\infty)$	$+$	$+$	3	0	euclídea
-1	$-$	0	$\lambda_2 = 0$ 2	2	semidefinida negativa
1	0	$+$	$\lambda_1 = 0$ y cuenta doble 1	0	semidefinida positiva

Sea $\tilde{g}$ métrica de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$M(\tilde{g}, \mathcal{B}u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula el rango y el índice. Clasifica la métrica

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{-\lambda^3 + 3\lambda^2}\underbrace{+3\lambda -3}$$

2 cambios

Como $a_0 \neq 0$, entonces sabemos que la multiplicidad del 0 es 0

No hace falta calcularlas, al ser $\tilde{g}$ métrica sabemos que todas las raíces son reales

Aplicando la Regla de los Signos de Descartes

Si todas las raíces del polinomio son reales, entonces, el número de cambios de signo coincide con el número de raíces positivas del polinomio

Como hay dos cambios de signo $\Rightarrow$ hay dos 1 en la matriz de Sylvester y un -1

$\Rightarrow$ $Rg(\tilde{g}) = 3$, índice$(\tilde{g}) = 1$, métrica indefinida y no degenerada

Sean ω_1 y ω_2 las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$ dadas por:

$$\omega_1(x,y,z) = 2(xy+xz+yz), \quad \omega_2(x,y,z) = 2(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$$

Encuentra β base de $\mathbb{R}^3$ tal que si (a,b,c) son las coordenadas de un vector en dicha base

$$\omega_1(x,y,z) = \alpha_1 a^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 c^2, \quad \omega_2(x,y,z) = a^2+b^2+c^2$$

Comenzamos escribiendo la matriz de las métricas:

$$M(g_1, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \quad , \quad M(g_2, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(C_1) = 2 > 0 \ , \ \det(C_2) = 3 > 0 \ , \ \det(C) = 2 > 0$$

g_2 métrica euclídea

Como $(\mathbb{R}^3, g_2)$ es un espacio vectorial métrico euclídeo $\Rightarrow \exists \left\{ \frac{u_1}{a_1} + \dots + \frac{u_n}{a_n} \right\}$, base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_2)$ formada por vectores propios:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

Calculamos los subespacios asociados a los valores propios:

$$V_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \} = L(\{(1,-1,0), (1,0,-1)\})$$

$$V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=y=z \} = L(\{(1,1,1)\})$$

Sabemos que para toda matriz simétrica los subespacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales entre sí, pero no sabemos si lo son los vectores de un mismo subespacio

Usando el método de Gram-Schmidt:

$u_1 = (1,-1,0)$

$$u_2 = (1,0,-1) - \frac{g_2((1,0,-1),(1,-1,0))}{\|(1,-1,0)\|^2_{g_2}} (1,-1,0) = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

Dividimos cada vector entre su módulo para ortonormalizar la base:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \ \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1) \right\}$$

$$\omega_1(v) = (a\ b\ c)\, M(g_1, B) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a\ b\ c) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -a^2 - b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

$$\omega_2(v) = a^2 + b^2 + c^2$$

Isometrías

A partir de ahora tendremos (V, g) y (V', g') espacios vectoriales euclídeos.

$f: (V,g) \to (V',g')$ es una isometría si verifica:

i) f es un isomorfismo de espacios vectoriales

ii) $g'(f(u), f(v)) = g(u,v)$, $\forall u, v \in V$ $\longrightarrow$ Equivale a decir que conserva las métricas

---

Sean (V,g) y (V',g') espacios vectoriales euclídeos y $f: (V,g) \to (V',g')$ una aplicación lineal. Entonces equivalen:

i) $g'(f(u), f(v)) = g(u,v)$ $\forall u, v \in V$

ii) $\|f(v)\|_{g'} = \|v\|_g$ $\forall v \in V$

iii) Para β y β' bases cualesquiera de V y V' se tiene:

$$M(f, \beta, \beta')^t \cdot M(g', \beta') \cdot M(f, \beta, \beta') = M(g, \beta)$$

iv) Existen β y β' bases de V y V' que verifican la igualdad anterior

v) Si $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V,g) entonces $\beta' = \{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ es una base ortonormal de (V',g')

Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales euclídeos y $f: (V,g) \to (V', g')$ una isometría, entonces:

$$\cos(\measuredangle(f(u), f(v))) = \cos(\measuredangle(u,v)) \ \forall u, v \in V \setminus \{0\}$$

Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in Iso(V,g)$. Entonces tenemos:

i) Si β es una base ortonormal de (V,g) sabemos que $M(f,\beta) \in O(n)$, es decir, $M(f,\beta) \cdot M(f,\beta)^t = I_n$. De aquí se tiene:

$$1 = \det((M(f,\beta) \cdot M(f,\beta)^t) = \det(M(f,\beta))^2 \Rightarrow \det(f) = \pm 1$$

grupo especial ortogonal

- $O^+(n) = SO(n) = \{M \in O(n) \ / \ \det(M) = 1\}$
- $O^-(n) = \{M \in O(n) \ / \ \det(M) = -1\}$
- $Iso^+(V,g) = \{f \in Iso(V,g) \ / \det(f) = 1\}$
- $Iso^-(V,g) = \{f \in Iso(V,g) \ / \det(f) = -1\}$

ii) Si λ es un valor propio de $f \Rightarrow \lambda = \pm 1$

iii) Los subespacios propios de f (si tiene) son ortogonales entre sí

iv) Si U es un subespacio vectorial de V tal que $f(U) \subset U \Rightarrow f(U^\perp) \subset U^\perp$.
Si f es isomorfismo $\Rightarrow f(U) = U$ y $f(U^\perp) = U^\perp$

Clasificación de las isometrías en un plano vectorial euclídeo

Sea (V,g) un plano vectorial euclídeo. Como hemos visto que existe un isomorfismo entre $Iso(V,g)$ y $O(2)$ tenemos que comenzar estudiando $O(2)$.

Dado $\theta \in \mathbb{R}$ vamos a denotar:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(Clasificación de las matrices ortogonales de orden 2) Sea $M \in O(2)$, entonces existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que:

i) Si $\det(M) = 1$ entonces $M = R(\theta)$

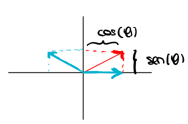
ii) Si $\det(M) = -1$ entonces $M = \tilde{R}(\theta)$

Sea (V,g) plano vectorial euclídeo, β una base ortonormal de (V,g) y $f \in Iso(V,g)$:

i) Si $f \in Iso^+(V,g)$ entonces existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M(f,\beta) = R(\theta)$. Además, si β' es otra base ortonormal se tiene $M(f,\beta') = R(\theta)$ ó $M(f,\beta') = R(2\pi - \theta)$

ii) Si $f \in Iso^-(V,g)$ entonces existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M(f,\beta) = \tilde{R}(\theta)$. Además, existe β' base ortonormal tal que:

$$M(f,\beta') = \tilde{R}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Podemos definir una orientación en $\dim(V) = 2$, pero en dimensiones mayores es muy difícil

$f \in Iso(V,g)$

- $f \in Iso^+(V,g)$ ($\det(f) = 1$) $\to$ f es una rotación de ángulo $\cos(\theta) = \frac{1}{2} tr(f)$
  - $f = Id \to$ identidad
  - $f = -Id \to$ simetría central
  - f es una rotación de ángulo $\theta \in (0, \pi)$
- $f \in Iso^-(V,g)$ ($\det(f) = -1$) $\to$ Reflexión o simetría axial de $U = V_1$ paralela a $U^\perp = V_{-1}$

Clasificación de las isometrías en un espacio vectorial euclídeo tridimensional

Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y $f \in Iso(V,g)$:

i) Si $\det(f) = 1 \Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base ortonormal de (V,g) y $\theta \in [0,\pi]$ tal que:

$$M(f,\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

ii) Si $\det(f) = -1 \Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base ortonormal de (V,g) y $\theta \in [0,\pi]$ tal que:

$$M(f,\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

$f \in \mathrm{Iso}(V,g)$

- ⋆ $f \in \mathrm{Iso}^+(V,g)$ $(\det(f) = 1)$
  - $f = Id \rightarrow$ Identidad
  - Reflexión o simetría axial respecto de $U = V_1$
  - f es una rotación de ángulo $\theta = \arccos(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(f) - 1)) \in (0,\pi)$ y eje $U = V_1$
- ⋆ $f \in \mathrm{Iso}^-(V,g)$ $(\det(f) = -1)$
  - $f = -Id \rightarrow$ Simetría central
  - Simetría especular respecto de $U = V_1$
  - f es la composición de una rotación de ángulo $\theta = \arccos(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(f) + 1)) \in (0,\pi)$ y eje $U = V_{-1}$ con una simetría especular respecto del plano $U^\perp$

1) $\det(f) = 1 \Rightarrow$ calculamos V_1:
   - 1.1) $\dim(V_1) = 3 \Rightarrow f = Id$
   - 1.2) $\dim(V_1) = 1 \Rightarrow$ calculamos V_{-1}:
     - 1.2.1) $\dim(V_{-1}) = 2 \Rightarrow f$ simetría axial respecto V_1
     - 1.2.2) $\dim(V_{-1}) = 0 \Rightarrow f$ rotación de ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(f) - 1)\right)$

2) $\det(f) = -1 \Rightarrow$ calculamos V_{-1}:
   - 2.1) $\dim(V_{-1}) = 3 \Rightarrow f = -Id$
   - 2.2) $\dim(V_{-1}) = 1 \Rightarrow$ calculamos V_1:
     - 2.2.1) $\dim(V_1) = 2 \Rightarrow$ simetría especular respecto V_1
     - 2.2.2) $\dim(V_1) = 0 \Rightarrow f$ rotación con eje $U = V_{-1}$ y ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(f) + 1)\right)$

También podemos hacerlo:

1) $\det(f) = 1 \Rightarrow$ calculamos $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(f) - 1)\right)$
   - 1.1) $\theta = 0 \Rightarrow f = Id$
   - 1.2) $\theta = \pi \Rightarrow f$ simetría axial respecto V_1
   - 1.3) $\theta \in (0,\pi) \Rightarrow f$ rotación $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(f) - 1)\right)$

2) $\det(f) = -1 \Rightarrow$ calculamos $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(f) + 1)\right)$
   - 2.1) $\theta = \pi \Rightarrow f = -Id$
   - 2.2) $\theta = 0 \Rightarrow f$ simetría especular respecto V_1
   - 2.3) $\theta \in (0,\pi) \Rightarrow f$ rotación con eje $U = V_{-1}$ y $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(f) + 1)\right)$

Clasificación de las isometrías en un espacio vectorial euclídeo dimensional

Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim(V)=n \geq 1$. Primero necesitamos unos resultados previos:

> Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in Iso(V)$, entonces:
>
> i) El endomorfismo $h = f + f^{-1}$ es un endomorfismo autoadjunto de (V,g)
>
> ii) Si $v \in V \setminus \{0\}$ es un vector propio de h pero no de f, entonces $\pi = L(\{v, f(v)\})$ es un plano que verifica $f(\pi) = \pi \Rightarrow f_{|\pi} \in Iso(\pi, g_\pi)$
>
> iii) Si la isometría $f_{|\pi}$ no tiene valores propios, existe B de π tal que:
> $$M(f_{|\pi}, B) = R(\theta) \text{ para } \theta \in [0,\pi]$$

Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo, $\dim(V)=n \geq 1$ y $f \in Iso(V,g)$. Entonces existe una base ortonormal de (V,g) tal que:

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

donde p, q, s son enteros no negativos tal que $p+q+2s=n$, $\theta_i \in (0,\pi)$ $i=1,\dots,s$ y no dependen de la base elegida