TEMA 2: FORMA BILINEAL Y CUADRÁTICA

1. Formas bilineales

1.1. Definición y propiedades básicas

Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, una forma bilineal en V es un aplicación:

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

verificando:

1) $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$
2) $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$ $\quad \forall a \in \mathbb{K},\ \forall u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$
3) $f(au, v) = a f(u, v)$
4) $f(u, av) = a f(u, v)$

Podemos resumirlo en:

Una aplicación $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma bilineal si, y solamente si,

(1) $f(au_1 + bu_2, v) = af(u_1, v) + bf(u_2, v)$

(2) $f(u, av_1 + bv_2) = af(u, v_1) + bf(u, v_2)$

para cualquier $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$

Propiedades de las formas bilineales:

Sea $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal, entonces se verifica:

1) $f(u, 0) = f(0, v) = 0 \quad \forall u, v \in V$
2) $f(-u, v) = f(u, -v) = -f(u, v) \quad \forall u, v \in V$
3) $f(\sum_i a_i u_i, \sum_j b_j v_j) = \sum_{ij} a_i b_j f(u_i, v_j)$ para cualquier $a_i, b_j \in \mathbb{K}, u_i, v_j \in V$

1.2. Matriz asociada a una forma bilineal

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V. Dada una forma bilineal $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde:

$$a_{ij} = f(e_i, e_j),\ \forall i, j = 1, \dots, n$$

de forma que dados dos vectores V, $x = (x_1, \dots, x_n)_B$ e $y = (y_1, \dots, y_n)_B$ se tiene:

$$f(x, y) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Denotando como es usual,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

se obtiene:

$$\boxed{f(x, y) = X^t A Y}$$

Esta expresión recibe el nombre de ecuación matricial de la forma bilineal f y la matriz A el de matriz asociada a f respecto de la base B.

1.3. Matriz asociada y cambio de base

Sea f una forma bilineal en V y sean B y B' dos bases de V. Sea P la matriz de cambio de base de B a B', entonces la ecuación del cambio de base es:

$$X = PX'$$

Si llamaremos A y C a las matrices asociadas a f respecto de B y B' respectivamente:

$$f(x,y) = X^t A Y = (PX')^t A (PY) = X'^t (P^t A P) Y'$$

$$f(x,y) = X'^t C Y'$$

$$\boxed{C = P^t A P}$$

Proposición

Las matrices asociadas a una misma forma bilineal son matrices convergentes

Observación: Dos matrices del mismo orden, A y B, son congruentes si $\exists P$, matriz cuadrada, con determinante distinto de 0, de modo que $B = PAP^t$

Dos matrices congruentes son, en particular, equivalentes, luego tienen el mismo rango.

1.4. Formas bilineales simétricas y antisimétricas

Una forma bilineal $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ es simétrica si verifica:

$$f(y,x) = f(x,y) \quad \forall x,y \in V \iff M_B(f) \text{ es simétrica } \forall \text{ base } B$$

Análogamente, f es antisimétrica (o alternada) si:

$$f(y,x) = -f(x,y) \quad \forall x,y \in V \iff M_B(f) \text{ es antisimétrica } \forall \text{ base } B$$

Lema

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se verifica:

$$f \text{ es antisimétrica} \iff f(x,x) = 0 \quad \forall x \in V$$

Si f es antisimétrica $\Rightarrow f(x,x) = -f(x,x) \Rightarrow 2f(x,x) = 0 \Rightarrow f(x,x) = 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Recíprocamente, supongamos $f(x,x) = 0 \quad \forall x \in V$. Puesto que:

$$f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y)$$

$$0 = f(y,x) + f(x,y)$$

$$f(y,x) = -f(x,y)$$

f antisimétrica

Proposición

Toda forma bilineal puede descomponerse como suma de una forma bilineal simétrica y una antisimétrica

Dado $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, basta considerar $f_S, f_T: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por:

$$f_S(x,y) = \frac{1}{2}[f(x,y) + f(y,x)]$$

$$f_T(x,y) = \frac{1}{2}[f(x,y) - f(y,x)]$$

$$f_S + f_T = \frac{1}{2}[f(x,y) + \cancel{f(y,x)} + f(x,y) - \cancel{f(y,x)}] = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} f(x,y) = f(x,y)$$

2. Formas cuadráticas

2.1. Definición y propiedades básicas

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal en V. Se llama forma cuadrática asociada a f a la aplicación:

$$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

definida por:

$$\Phi(x) = f(x,x)$$

Observación: La forma cuadrática de una forma bilineal es única. Si te piden una forma bilineal a partir de una cuadrática, existen infinitas formas bilineales.

Propiedades de las formas cuadráticas

Sea $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ la forma cuadrática asociada a una forma bilineal f. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ se verifica:

1) $\Phi(0) = 0$
2) $\Phi(\lambda x) = \lambda^2 \Phi(x)$
3) $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) + f(x,y) + f(y,x)$

2.2. Forma polar de una forma cuadrática

Ya sabemos que distintas formas bilineales pueden dar lugar a una misma forma cuadrática. De hecho, si f es una forma bilineal simétrica y Φ es la forma cuadrática asociada a f, entonces para cada forma bilineal antisimétrica g se tiene:

$$\Phi = f(x,x) = f(x,x) + g(x,x)$$

ya que si g antisimétrica $g(x,x) = 0$. Así pues Φ es también la forma asociada a $f+g$. Esto es, la forma cuadrática asociada a una forma bilineal solo depende de la parte simétrica de esta.

Proposición

Dada una forma cuadrática Φ en V, existe una única forma bilineal simétrica f_p cuya forma cuadrática asociada es Φ.

Esta forma bilineal simétrica recibe el nombre de forma polar de la forma cuadrática Φ.

Corolario

Sea Φ una forma cuadrática en V asociada en la forma bilineal g. La forma polar f_p de Φ puede obtenerse como:

1. $f_p(x,y) = \frac{1}{2}[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)]$
2. $f_p(x,y) = \frac{1}{4}[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)]$
3. $f_p(x,y) = \frac{1}{2}[g(x,y) + g(x,y)]$

2.3. Matriz asociada a una forma cuadrática

Dada una forma cuadrática Φ en V y dada una base $\mathcal{B}$ de V, llamaremos matriz asociada a Φ respecto de la base $\mathcal{B}$ a la matriz asociada a una forma cuadrática es siempre una matriz simétrica. Llamaremos rango de Φ al $rg(\Phi)$ de su matriz asociada (que coincide con el de su forma polar)

2.4. Conjugación respecto de una forma cuadrática

La conjugación respecto a una forma cuadrática es un concepto análogo al de la ortogonalidad para un producto escalar. Sea $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática y sea $f_p: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ su forma polar. Dos vectores $x, y \in V$ se dice que son conjugados respecto de Φ si $f_p(x,y) = 0$.

Se dice que el vector x es autoconjugado si es conjugado consigo mismo, esto es, si $\Phi(x)=0$. Dado un conjugado $S \subseteq V$, consideremos el conjunto de los vectores de V conjugados con todos los vectores de S:

$$S^c = \{x \in V \,/\, f_p(x,y)=0,\ \forall y \in S\}$$

Proposición

Para cada subconjunto no vacío S de V, el conjunto S^c es un subespacio vectorial de V. Además, $S^c = (L(S))^c$.

Se llama núcleo o radical de la forma cuadrática Φ al subespacio de V:

$$N(\Phi) = V^c = \{x \in V \,/\, f_p(x,y)=0,\ \forall y \in V\}$$

3. Clasificación de métricas y formulas cuadráticas reales

A lo largo de todo este apartado, V denotará un espacio vectorial real y g una métrica en V, es decir, una forma bilineal simétrica de V.

3.1. Tipos de métricas:

- (V,g) espacio vectorial métrico degenerado $\Rightarrow \exists\, u \in V \setminus \{0\}$ tal que $g(u,v)=0 \ \forall v \in V$.

  En caso contrario diremos que g es no degenerado.

  Observemos que si g es una métrica no degenerada y existe $u \in V$ que verifica $g(u,v)=0$, $\forall v \in V$ entonces $u=0$.

- g es una métrica semidefinida positiva si y sólo si $g(u,u) \geq 0$, $\forall u \in V$. Asimismo, diremos que g es semidefinida negativa si y sólo si $g(u,u) \leq 0$ $\forall u \in V$. Si una métrica no es semidefinida positiva ni semidefinida negativa diremos que es indefinida. En este caso $\exists\, u_1, u_2 \in V$ tal que $g(u_1,u_2) < 0$.

- g es definida positiva o euclídea si y sólo si $g(u,u) > 0$ $\forall u \in V$. Asimismo, diremos que g es definida negativa si y sólo si $g(u,u) < 0$, $\forall u \in V$.

Proposición

Sea (V,g) un espacio vectorial métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) g es definida positiva.

ii) g es semidefinida positiva y no degenerada.

iii) g es semidefinida positiva y si $g(u,u)=0$ entonces $u=0$.

Se define el radical de g como el subconjunto dado por:

$$\mathrm{Rad}(g) = \{u \in V \,/\, g(u,v)=0 \ \forall v \in V\}$$

Observemos que si $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ es una base de V el $\mathrm{rad}(g)$ viene dado por:

$$\mathrm{Rad}(g) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \ \Big/\ g\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j\right) = 0,\ i=1,\dots,n \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \ \Big/\ M(g,B)\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

De lo anterior observamos que las coordenadas de los vectores de $\mathrm{Rad}(g)$ verifican un sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $M(g,B)$. Por tanto, $\mathrm{Rad}(g)$ es un subespacio vectorial de V de dimensión $n - \mathrm{rang}(g)$

Proposición

Sea (V, g) un espacio vectorial métrico y B una base de V. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) g es no degenerada

ii) $Rad(g) = \{0\}$

iii) $M(g, B)$ es regular

iv) $\det(M(g,B)) \neq 0$

Sea U un subespacio vectorial de V. Recordemos que, entonces, $(U, g|_U)$ es también un espacio vectorial métrico. A partir de ahora denotaremos a $g_U = g|_U$.

Observación: g métrica euclídea $\Rightarrow$ g_U métrica euclídea.

(V, g) métrica no degenerada $\not\Rightarrow$ $(U, g|_U)$ métrica degenerada

3.2. Subespacio ortogonal

Dado (V, g) un espacio vectorial métrico y U un subespacio vectorial de V consideramos el subconjunto:

$U^\perp = \{ v \in V / g(v, u) = 0 \ \forall u \in U \}$ u, v son ortogonales / congruentes

el cual, es un subespacio vectorial de V y, además, es el subespacio perpendicular a U.

$U^\perp$ se denomina el subespacio ortogonal de U respecto de g.

Propiedades

Sea (V, g) espacio vectorial métrico y U, W, subespacios de V. Entonces se tiene:

i) $V^\perp = Rad(g)$ y $\{0\}^\perp = V$

ii) Si $W \subset U$ entonces $U^\perp \subset W^\perp$

iii) Si $W \subset U$ entonces $W^{\perp g_U} = W^{\perp g} \cap U$. En particular $Rad(g_U) = U^{\perp g} \cap U$

iv) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

v) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$

vi) $(U^\perp)^\perp = U$

vii) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

viii) (U, g_U) es un espacio vectorial métrico no degenerado sí y solo sí $V = U \oplus U^\perp$, es decir, $U^\perp$ es el suplementario ortogonal de U.

4. Bases ortogonales y ortonormales. Ley de inercia de Sylvester. Criterio de Sylvester

4.1. Bases ortogonales

Dado (V, g) un espacio vectorial métrico diremos que $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortogonal de (V, g) si verifica $g(u_i, u_j) = 0$, $i \neq j$, es decir, una base formada por vectores ortogonales dos a dos.

Proposición

Sea (V, g) un espacio vectorial métrico, entonces existe una base ortogonal de (V, g), es decir, existe $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de V tal que $g(u_i, u_j) = 0$, $i \neq j$

La matriz de una métrica en una base ortogonal siempre es una matriz diagonal.

4.2. Teorema de Sylvester

De la sección anterior, ya sabemos que dado (V, g) un espacio vectorial métrico existe una base ortogonal, es decir, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ tal que $M(g, B)$ es de la forma

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} g(u_1,u_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(u_2,u_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(u_n,u_n) \end{pmatrix}$$

pero podemos simplificar más dicha matriz

Teorema de Sylvester o Ley de inercia de Sylvester

Sea (V, g) un espacio vectorial métrico, $\exists\, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y una base ordenada $B = \{\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{r-s}, \underbrace{v_{r+1} \cdots v_{r+s}}_{s}, \underbrace{v_{r+s+1} \cdots v_n}_{n-r}\}$ tal que la matriz de la métrica:

$$M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{r-s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right)$$

A la base B se le denomina base ortonormal o base de Sylvester

Llamaremos índice de g al número s, es decir, al número de elementos negativos.

Se denomina signatura de g al par $(r-s, s)$, es decir, al número de ± 1 que aparecen en $M(g, B)$ para B una base ortonormal.

Denominamos rango de g $= r+s$

Denominamos nulidad de g $= n-(r+s)$ (nº ceros)

Corolario (Teorema de Sylvester para formas cuadráticas)

Sea V un espacio vectorial real con $\dim(V) = n$ y ω una forma cuadrática sobre V. Entonces existe $r \in \{0, 1, \dots, n\}$, $s \in \{0, 1, \dots, r\}$ y B una base de V tal que:

$$\omega(v) = \sum_{i=1}^{r-s} x_i^2 - \sum_{i=r-s+1}^{r} x_i^2$$

Corolario

Toda matriz simétrica real es congruente a una única matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_{r-s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right)$$

Corolario

Sea (V, g) un espacio vectorial métrico con $n = \dim(V)$, $r = \operatorname{rang}(g)$ e $s =$ índice (g), entonces:

i) g no es degenerada $\Leftrightarrow n = r$
ii) g semidefinida positiva si $s = 0$
iii) g semidefinida negativa si $s = r$
iv) g definida positiva si $n = r$ y $s = 0$
v) g es definida si $n = r = s$
vi) g es indefinida si $0 < s < r$

Proposición (Criterio de Sylvester)

Sea (V, g) espacio vectorial métrico, $\dim(V) = n$, B base de V y $A = M(g, B)$. Entonces tenemos:

i) g es definida positiva $\Leftrightarrow$ si el signo de los determinantes de las submatrices cuadradas A_K obtenidas tomando las primeras K filas y columnas de A es positivo para todo $K \in \{1, \dots, n\}$

ii) g es definida negativa $\Leftrightarrow$ el signo de los determinantes de las submatrices cuadradas A_K obtenidas tomando las primeras K filas y columnas de A es $(-1)^K$ $\forall K \in \{1, \dots, n\}$.

iii) Si g no es degenerada y los determinantes de las submatrices cuadradas A_K no verifican i) ni ii) $\Rightarrow$ g es indefinida

Proposición

Sea (V, g) espacio vectorial métrico, $\dim(V) = n$, B base de V y $A = M(g, B)$. Entonces tenemos:

i) g es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ los determinantes de cualquier submatriz cuadrada que tenga su diagonal principal sobre la diagonal principal de A son mayores o iguales que 0

ii) g es semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ los determinantes de cualquier submatriz cuadrada que tenga su diagonal principal sobre la diagonal de A son mayores o iguales que 0 si el orden es par y menores o iguales que 0 si el orden es impar.

5. Isometrías

Un isomorfismo es una aplicación que conservan estructuras entre conjuntos. Sean (V, g) y (V, g') espacios vectoriales métricos. Diremos que $f: (V, g) \longrightarrow (V', g')$ es una isometría si verifica:

1) f es un isomorfismo de espacios vectoriales
2) $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$, $\forall u, v \in V$

Si f es isometría, diremos que los espacios vectoriales (V, g) y (V, g') son isométricos. Además, denotaremos $Iso(V, g)$ al conjunto de isometrías del espacio vectorial métrico (V, g) en sí mismo.

Propiedades

i) $Id_V \in Iso(V, g)$
ii) La composición de isometrías es una isometría
iii) La inversa de una isometría es una isometría.
iv) $Iso(V, g)$ con la composición de aplicaciones es un grupo cuyo elemento neutro es Id_V

Proposición

Sean (V, g) y (V, g') espacios vectoriales no degenerados. Si $f: (V, g) \to (V', g')$ es una aplicación sobreyectiva que verifica el apartado 2) de la definición, entonces f es un isomorfismo y por tanto una isometría.

Proposición

Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales métricos y $f: (V, g) \to (V', g')$ una aplicación lineal. Entonces equivalen:

i) $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$ $\forall u, v \in V$
ii) $\omega_g(f(v)) = \omega_g(v)$ $\forall v \in V$

(iii) Para B y B' bases cualesquiera de V y V', respectivamente, se tiene:

$$\boxed{M(f, B, B')^t \cdot M(g', B') \cdot M(f, B, B') = M(g, B)} \quad (*)$$

(iv) Existen B y B' bases de V y V', respectivamente, tal que verifican $(*)$

Corolario

Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales métricos. Entonces equivalen:

i) (V, g) y (V', g') son isométricos

ii) $\dim(V) = \dim(V')$, $rg(V) = rg(V')$ e índice $(V) =$ índice (V')

Corolario

Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales euclídeos y $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces equivalen:

i) $f: (V, g) \longrightarrow (V', g')$ es una isometría

ii) Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V, g) entonces $B' = \{f(u_1) \dots f(u_n)\}$ es una base ortonormal de (V', g')

Diremos que una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal si:

$$A \cdot A^t = I_n$$

Diremos que $O(n)$ se le denomina el grupo ortogonal de orden n.