Resumen tema 3

- Experimentos deterministicos: Aquellos que dan lugar al mismo resultado siempre que se realizan bajo idénticas condiciones.
- Experimentos aleatorios: Su resultado puede variar

(Ω, G, P) → Terna que forma el espacio muestral probabilístico

$\Omega \equiv$ Espacio muestral → Conjunto de los posibles resultados indescomponibles en otros más simples, de forma que no pueden ocurrir dos simultáneamente). A cada resultado se le llama suceso elemental.

Tirar dado $\Omega = \{\cancel{Par, impar}\} \Rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$

Llamaremos suceso aleatorio a cualquier característica, hecho o proposición lógica que pueda formularse en relación a un experimento aleatorio, cuya ocurrencia o no pueda ser observada tras la realización del experimento.

Llamaremos suceso compuesto al que consta de dos o más sucesos elementales

Llamaremos suceso cierto o universal a aquel que ocurre siempre. Se identifica como Ω

Llamaremos suceso imposible a aquel que no ocurre nunca. Se identifica como $\emptyset$.

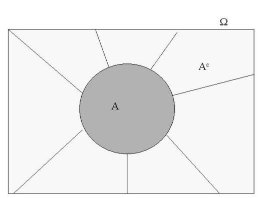
Algebra de sucesos

Operaciones y relaciones entre sucesos

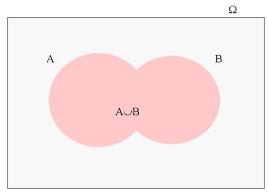
- Suceso contenido en otro: Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, diremos que el suceso A está contenido en B ($A \subset B$) si siempre que ocurre B ocurre A ($B \Rightarrow A$)

- Igualdad de sucesos: Dados dos sucesos A y B, diremos que son iguales si siempre que ocurre A ocurre B ($A = B \Leftrightarrow A \subset B$ y $B \subset A$)

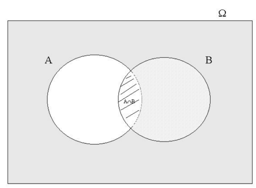
- Suceso complementario o contrario: Dado un suceso A, se define el suceso complementario de A como aquel suceso que ocurre si no ocurre A. Lo notaremos por $\bar{A}$.



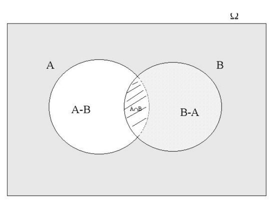
• Unión de sucesos: Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se define la unión de sucesos como aquel que ocurre siempre que ocurra A y/o B



• Intersección de sucesos: Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se define la intersección de ambos sucesos como aquel suceso que ocurre cuando ocurren A y B.



• Diferencia de sucesos: Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se define la diferencia $A - B$ como aquel suceso que ocurre A y no ocurre B.



• Sucesos disjuntos, incompatibles o mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente $(A \cap B = \emptyset)$

• Sistema exhaustivo de sucesos: Si los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ son tales que verifican que la unión de ellos es igual al espacio muestral, es decir, $A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = \Omega$

• Sistema completo de sucesos o partición del espacio muestral: Si un conjunto de sucesos constituyen un sistema exhaustivo de sucesos y, además, son mutuamente excluyente

Estructuras de álgebra y σ-álgebra

• Álgebra de Boole (campo): Una clase no vacía $\mathcal{A}$ de conjuntos de Ω tiene estructura de Álgebra de sucesos o Álgebra de Boole, si es cerrada para uniones finitas y para la operación de complementario, esto es:

1) $\forall A \in \mathcal{A}$ se verifica que su complementario $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
2) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ se verifica que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

De estas propiedades se deduce:

a) El espacio muestral $\Omega \in \mathcal{A}$. En efecto, dado un suceso $A \in \mathcal{A}$ por la condición 1 se verifica que $\bar{A} \in \mathcal{A}$ y por la 2 $A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{A}$.

b) El suceso imposible $\phi \in \mathcal{A}$. En efecto, $\bar{\Omega} = \phi$

• σ - Álgebra (σ-campo): Diremos que una clase de sucesos no vacía $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$ tiene estructura de σ - álgebra si se verifica que es cerrada para complementarios y uniones numerables, esto si, verifica:

1) $\forall A \in \mathcal{A}$ se verifica $\bar{A} \in \mathcal{A}$

2) $\forall A_1, \ldots A_n \in \mathcal{A}$ se verifica $A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

σ-álgebra $\Rightarrow$ Álgebra

Concepción de probabilidad

Concepción clásica

Sea A un suceso arbitrario asociado a un experimento aleatorio, que puede presentar en m de los resultados n posibles resultados igualmente factibles del experimento. Se define la probabilidad del suceso A como:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{número resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$$

(Regla de Laplace)

Concepción frecuentista

Si se realizan N repeticiones de un experimento, y un determinado suceso A se ha presentado en N_A ocasiones, se define la frecuencia relativa de A en las N pruebas como:

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N}$$

Supongamos que el número de realizaciones del experimento crece indefinidamente y consideremos la sucesión de frecuencias relativas de A: $f_N(A), f_{N+1}(A), \ldots, f_{N+K}(A)$

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} f_N(A)$$

Axiomática de Kolmogorov

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible asociado a un experimento aleatorio. Se define una probabilidad como una función de conjunto:

$$P: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$

que verifica:

i) Axioma de no negatividad: $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$

ii) Axioma del suceso seguro: $P(\Omega) = 1$

iii) Axioma de σ-aditividad o aditividad numerable: Si $A_1, A_2, A_3 \dots$ es una sucesión de sucesos ($\in \mathcal{A}$) incompatibles, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ $i, j = 1, 2, \dots$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Consecuencias

1) La probabilidad del suceso imposible es nula: $P(\emptyset) = 0$.

2) Para cualquier suceso $A \in \mathcal{A}$ se verifica que la probabilidad de su complementario $P(\bar{A})$ es $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

3) La probabilidad P es monótona no decreciente, es decir, $\forall A, B \in \mathcal{A}$, con $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ y además $P(B - A) = P(B) - P(A)$

4) Para cualquier suceso $A \in \mathcal{A}$, se verifica $P(A) \leq 1$.

5) Para dos sucesos cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ se verifica que $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

6) Para dos sucesos cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ se verifica que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7) Subaditividad finita:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Y, en general, dados $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ se verifica

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

8) Subaditividad numerable: Dada una colección numerable de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ se verifica

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A)$$

9) Principio de inclusión-exclusión: Sean $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ entonces:
$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(\cap_{i=1}^{n} A_i)$

10) Desigualdad de Bonferroni: Sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

11) Desigualdad de Boole: Dados $A, B \in \mathcal{A}$, entonces

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$$