Seminario: Modelo de Leontief

También es llamado modelo de insumo - producción. Este modelo analiza las interrelaciones de oferta y demanda que existen entre diversos sectores de una economía durante un cierto tiempo.

Se utiliza el nombre de insumo - producción porque las matrices muestran los valores de la producción de cada industria que se vende como insumo a cada una de las industrias de la economía y para uso final de los consumidores.

Podemos considerar que los sectores industriales son: manufacturas, siderurgia (acero), agricultura, ... El factor de otros factores de producción está formado por los costos de cada industria (mano de obra, utilidades, ...). El sector demanda final puede ser consumo en hogares, gobierno ... A cada sector lo llamaremos industria para abreviar.

Consumo (Insumos)

Producción	Industria A	Industria B	Demanda final	Totales
Industria A	240	500	460	1200
Industria B	360	200	940	1500
Otros	600	800	-	
Totales	1200	1500		

Los datos de la tabla están expresados en unidades monetarias (u.m.). Las filas representan las compras que cada sector hace de la producción de cada industria y las compras que hacen los consumidores para su uso final. Cada columna de industria da el valor de lo que la industria adquirió para insumo (consumo) de cada una de las otras y lo que invirtió en otros costos.

El análisis del insumo - producción permite estimar la producción total de cada sector si existe un cambio en la demanda final, siempre y cuando la estructura básica de la economía permanezca igual.

Por ejemplo, la industria A para fabricar productos por valor de 1200 u.m. adquiere 240 u.m. de su propia producción, 360 u.m. de la producción de la industria B, e invierte 600 u.m. en otros costos. Por tanto, para producir por el valor de una unidad monetaria (1 u.m), la industria A necesita gastar $\frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$ u.m. en sí misma, $\frac{360}{1200} = \frac{3}{10}$ u.m. en la B y $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$ u.m. en otros costos.

Haciendo lo mismo con el resto obtendríamos:

	Industria A	Industria B	Industria A	Industria B
Industria A	240 / 1200	500 / 1500	1/5	1/3
Industria B	360 / 1200	200 / 1500	3/10	2/15
Otros	600 / 1200	800 / 1500	1/2	8/15

Los elementos de la matriz se llaman coeficientes de insumo - producción. La suma de cada columna es 1.

Supongamos que hay un cambio en la demanda final. En la demanda final cambia de 460 u.m. a 500 u.m. y la industria B cambia de 940 u.m a 1200 u.m. Queremos saber la cantidad de u.m. que tienen que producir la industria A y la industria B para satisfacer las necesidades de las propias industrias y la demanda final. Por eso llamamos x_A y x_B a los nuevos valores de producción total de la industria A (x_A) es la parte de esa producción consumida por la industria A más la parte consumida por la industria B más la parte destinada a la demanda final. Similar para la industria B:

$$\left.\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{5}x_A + \frac{1}{3}x_B + 500 \\ x_B &= \frac{3}{10}x_A + \frac{2}{15}x_B + 1200 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{X}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}}} = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} + \overset{D}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix}}}$$

Resulta así

$$X = AX + D$$

donde X se le denomina matriz de producción, a A matriz de tecnología y a D matriz de demanda final. Despejando X en la ecuación deducimos $X - AX = D \Rightarrow X = (I - A)^{-1} D$. A la matriz $I - A$ se le llama matriz de Leontief.

$$I - A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{pmatrix}$$

Como $\det(I - A) \neq 0$, entonces:

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de producción X es

$$X = \begin{pmatrix} 1404,49 \\ 1870,79 \end{pmatrix}$$

Luego, la industria A debe producir 1404,49 u.m. y la industria B debe fabricar 1870,79 u.m. Si queremos calcular el valor de otros factores de producción de la industria A, será:

$$P_A = \frac{1}{2} x_A = \frac{1}{2} 1404,49 = 702,245$$

y para B

$$P_B = \frac{8}{15} x_B = \frac{8}{5} 1870,79 \simeq 997,755$$

Matrices positivas. Teorema de Perron

vectores
$$\begin{cases} u \leq v \quad \text{si} \quad u^i \leq v^i \\ u < v \quad \text{si} \quad u \leq v \ \text{y} \ u \neq v \\ u \ll v \quad \text{si} \quad u^i < v^i \longrightarrow \text{Fuertement ordenado} \end{cases}$$

Matrices
$$\begin{cases} M \leq N \quad \text{si} \quad m_{ij} \leq n_{ij} \\ M < N \quad \text{si} \quad M \leq N \ \text{y} \ M \neq N \\ M \ll N \quad \text{si} \quad m_{ij} < n_{ij} \longrightarrow \text{Fuertemente ordenado} \end{cases}$$

Tomar el 0 como vector $(0 = (\overbrace{0,0\dots,0}^{n \text{ veces}}))$

Un vector es positivo si $v \geq 0$ y es fuertemente positivo si $v \gg 0$.

Una matriz es positiva si $M \geq 0$ y es fuertemente positiva si $M \gg 0$.

Propiedades

- Si $M \geq 0$, $v \geq 0 \Rightarrow Mv \geq 0$.
- Si $M \gg 0$, y $v > 0 \Rightarrow Mv \gg 0$

Teorema de Perrón-Frobenius: Sea $M \gg 0$, entonces, existe un vector propio, v, tal que $v \gg 0$.

Una matriz cuadrada real con entradas positivas tiene un valor propio real único más grande, y el vector propio correspondiente puede elegirse para tener componentes estrictamente positivas.

Llamamos v_p al vector propio de Perron-Frobenius asociado al valor propio λ_p.

Definición: Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $v > 0$, llamamos por de Perrón-Frobenius a

$$Mv = \lambda v$$

$\Rightarrow \lambda = \lambda_p$, $v = c v_p$, c constante.

Teorema: Sea $M \gg 0$, entonces λ_p es el valor propio dominante.

Lema: Sean M y N dos matrices proporcionales, es decir, $M = \mu N$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$. Entonces,

$$\sigma(M) = \mu\sigma(N) = \{\mu\lambda : \lambda \in \sigma(N)\}$$

además, si λ es un vector propio dominante de N, entonces $\mu\lambda$ es un vector dominante de M.

Def: Llamamos radio espectral a $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Def: Un sistema dinámico $x_{n+1} = Ax_n$ se dice convergente si para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^K$ la solución $x_n \to 0$.

Proposición: Son equivalentes:

1) El sistema es convergente.
2) $A^n \longrightarrow 0$ en $M_{K \times K}$.
3) $\rho(A) < 1$

Reposo: Sea A una matriz, diremos que es tecnológica si:

- $A \geq 0$
- $\|A_j\|_1 < 1$, $A = (A_1 | A_2 | \cdots | A_K)$

Ecuación de Leontief: $x - Ax = d$, donde x: vector de producción y d = vector de demanda.

Lema: $I - A$ es convertible y, además, $(I-A)^{-1} > 0$

El problema ahora es: ¿cuándo podemos asegurar que para cualquier $c > 0$ se puede encontrar $x >> 0$ que resuelve la ecuación?

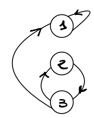
Una matriz que verifique lo anterior se dice productiva y el modelo económico se llama productivo.

Diagramas de Acción y Transitividad

Sea $A \geq 0$ se dice que el elemento j actúa sobre i si $a_{ij} > 0$. Estas acciones se plasman en un grafo llamado de Acción.

Ejemplo:

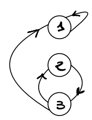
$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



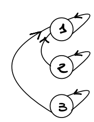
Un elemento j se dice que actúa sobre i tras p-pasos $j \xrightarrow[p]{} i$ si es posible un camino de acciones

$$j \longrightarrow i_1 \longrightarrow i_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow i_p = i$$

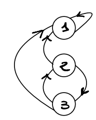
El grafo resultante se llama diagrama de acciones a p pasos:



1- pasos



2- pasos



3- pasos

Proposición: El diagrama de acciones a p-pasos se corresponde con el diagrama de acción a 1 paso de la matriz A^p.

Una matriz se dice transitiva (irreducible) si para cualquier par (i,j), existe un p y un camino de longitud p que conecta j con i.

Teorema: Sea $A \geq 0$, $\varrho(A) < 1$, entonces A es transitiva sí, y solo sí, $(I-A)^{-1} >> 0$.

Conclusión: Una matriz de Leontief es productiva sí, y solo sí, es transitiva.

Modelo de crecimiento de Leslie (Modelo post-breeding)

Estamos considerando una población que vive un total de tres años y para ello hemos observado y separado una muestra de 1000 individuos nacidos este año.

Tras un primer año nos encontramos con sólo 570 individuos de los originales junto con 10 individuos nuevos. Con el fin de simplificar el análisis estos individuos nuevos se retiraron.

Tras pasar otro año, nos vamos a encontrar con 430 individuos de los originales junto con 240 individuos nuevos, que también serán retirados.

Después del tercer año el resto de individuos originales han muerto y solamente se han encontrado 1230 crías de los anteriores.

Pretendemos hacer la siguiente simulación:

Introducimos 2900 individuos distribuidos de la siguiente forma: 300 crías, 600 jóvenes (2° año) y 2000 adultos (3° año) y los dejamos evolucionar libremente.

- Se llama tasa de supervivencia, s_x, a la fracción de individuos de un estadio, x, que sobreviven al siguiente periodo.
- Se llama tasa de fertilidad, f_x, al número medio de individuos nuevos por progenitor del periodo x, que sobreviven al siguiente periodo.

Llamando a los estadios c (= crías), j (= jóvenes) y a (= adultos) queda:

$s_c = \frac{570}{1000} = 0{,}57$	$s_j = \frac{430}{570} = 0{,}754$	$s_a = \frac{0}{430} = 0$
$f_c = \frac{10}{1000} = 0{,}01$	$f_j = \frac{240}{570} = 0{,}421$	$f_a = \frac{1230}{430} = 2{,}86$

Partimos de 300 crías, 600 jóvenes y 2000 adultos:

- 300 crías $\longrightarrow$ 171 jóvenes y 3 crías
- 600 jóvenes $\longrightarrow$ 452,6 adultos y 252,6 crías
- 2000 adultos $\longrightarrow$ 5720,9 crías

Total después de un periodo:

- Crías $\longrightarrow$ 3 + 252,6 + 5720,9 = 5976,6
- Jovenes $\longrightarrow$ 171
- Adultos $\longrightarrow$ 452,6

$\Rightarrow$ Total $\longrightarrow$ 5976,6 + 171 + 452,6 = 6600,2 $\Rightarrow$ Razón de crecimiento = 2,28

Sea

- c_n = nº de individuos del primer estadio en el n-ésimo periodo
- j_n = nº de individuos del segundo estadio en el n-ésimo periodo
- a_n = nº de individuos del tercer estadio en el n-ésimo periodo

Entonces

$$\left.\begin{aligned} c_{n+1} &= 0{,}01\,c_n + 0{,}421\,j_n + 2{,}86\,a_n \\ j_{n+1} &= 0{,}57\,c_n \\ a_{n+1} &= 0{,}754\,j_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}421 & 2{,}86 \\ 0{,}57 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}754 & 0 \end{pmatrix}}_{= L} \underbrace{\begin{pmatrix} c_n \\ j_n \\ a_n \end{pmatrix}}_{= \vec{P_n}}$$

Modelo general: son sistemas de la forma $\vec{P}_{n+1} = L\vec{P_n}$ donde L es una matriz cuadrada que tiene entradas

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

donde $f_i \geq 0$ es el número medio de crías hembras que tiene cada hembra del grupo i (llamado tasa de fertilidad), y $0 < s_i \leq 1$ es la probabilidad de que un individuo del grupo i sobreviva al siguiente (la tasa de supervivencia del grupo).

Nota: En principio, $\vec{P_n} = L^n \vec{P_0}$, donde la potencia está desarrollada usando el producto matricial.

Ecuación Euler - Lotka:

l_i: supervivencia acumulada

$l_1 = 1$

$l_2 = s_2$

$\vdots$

$l_k = s_1 \cdots s_{k-1}$

$$\Rightarrow \frac{l_1 f_1}{\lambda} + \frac{l_2 f_2}{\lambda^2} + \cdots + \frac{l_k f_k}{\lambda^k} = 1,$$ donde λ_p = única raíz en $(0, +\infty)$ = valor propio de Perron = $\rho(L)$

Teorema: Si L es ergódica y $x_0 > 0$, entonces:

- Si $\lambda_p > 1 \Rightarrow x_n \longrightarrow +\infty$
- Si $\lambda_p < 1 \Rightarrow x_n \longrightarrow 0$

- Un estado i se dice fertil si $f_i > 0$.
- Un estado i se dice reproductivo si puede llegar a ser fértil ($\exists j \geq i$: j es fertil)
- Un dato inicial se dice reproductivo si contiene individuos de un estado reproductivo.

Teorema:

- Si $\lambda_p < 1$ y x_0 reproductivo $\Rightarrow x_n \longrightarrow 0$ y $x_n >> 0$
- Si $\lambda_p > 1$ y x_0 reproductivo $\Rightarrow x_n \longrightarrow +\infty$

Sea $N(x) = x^1 + x^2 + \dots + x^K$ (Número total de individuos)

Teorema: Supongamos que λ_p es un valor propio dominante y x_0 un valor inicial reproductivo, entonces:

1) $\dfrac{N(x_{n+1})}{N(x_n)} \longrightarrow \lambda_p$

2) $\dfrac{1}{N(x_n)} x_n \longrightarrow v_p$

Nota: Si $x_0 \geq 0$ no es reproductivo, entonces $x_n = 0$ para n avanzado.

Tasa neta de reproducción:

Si partimos de L matriz de Leslie y usamos la ecuación de Euler, que tiene una única raíz λ_p

$$\frac{\ell_1 f_1}{\lambda} + \frac{\ell_2 f_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{\ell_k f_k}{\lambda^k} = 1$$

Si llamo $R_0 = P(1) = \ell_1 f_1 + \dots + \ell_k f_k$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema: $R_0 \;\overset{>}{\underset{=}{<}}\; 1 \iff \lambda_p \;\overset{>}{\underset{=}{<}}\; 1$

Como consecuencia:

- $R > 1 \Rightarrow$ Toda la población inicial reproductiva se superpoblaciona
- $R < 1 \Rightarrow$ Toda la población inicial reproductiva se extingue