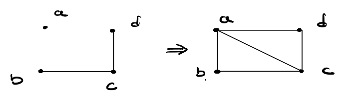
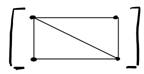
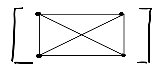
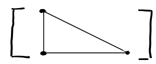
Ejercicio 3.27. Encuentra, si existe, un grafo G de cuatro vértices con grados $\{3, 2, 3, 2\}$. Utiliza el algoritmo de demolición-reconstrucción. Calcula su polinomio cromático $p_G(x)$, su número cromático y de cuántas formas se puede pintar con 6 colores.

a	b	c	d
3	2	3	2
0	1	2	1
0	0	0	0



$P(G,x) =$  $=$  $+$  $= P(K_4, x) + P(K_3, x) =$

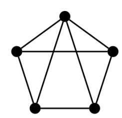
$= x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$

$P(G,1) = 0$

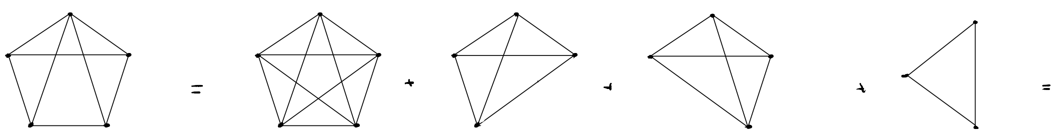
$P(G,2) = 0 \quad \Rightarrow$ nº crómico $= 3 \qquad P(G,6) = 480$

$P(G,3) = 1 \neq 0$

Ejercicio 3.28. Dado el grafo G



calcula su polinomio cromático $P_G(x)$ y su número cromático. ¿De cuántas formas se puede pintar G con 6 colores?

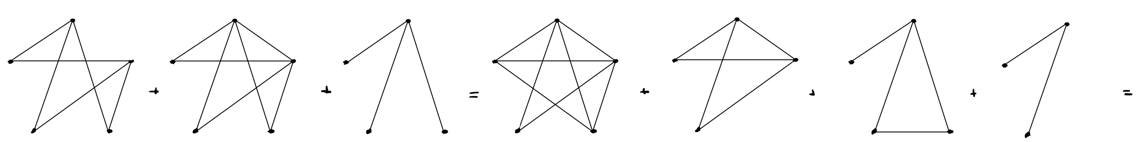


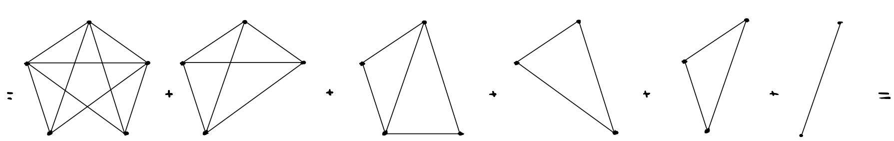
$= P(K_5, x) + P(K_4, x) + P(K_4, x) + P(K_3, x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 3x^2 + 14x$

$P(0) = 0$
$P(1) = 0$
$P(2) = 0$
$P(3) = 6$

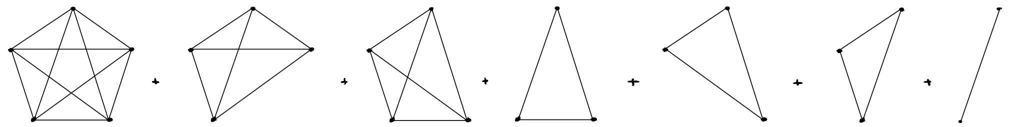
$\Rightarrow$ El número crómico es 3 $\qquad P(G,6) = 1560$

Ejercicio 3.29. Dado el grafo $G = K_{2,3}$ calcula su polinomio cromático $P_G(x)$. Halla el número cromático de G y calcula de cuántas formas se puede colorear G con 6 colores distintos.





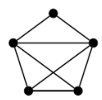
=



$= P(K_5,x) + P(K_4,x) + P(K_4,x) + P(K_3,x) + P(K_3,x) + P(K_2,x) = x^5 - 8x^4 + 26x - 36x^2 + 17x$

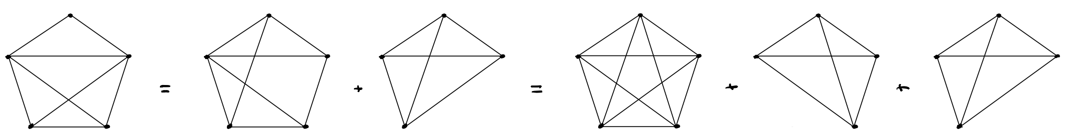
$$\left.\begin{array}{l} P(0) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{n° cromático} = 2 \qquad P(G,6) = 1830$$

Ejercicio 3.30. Dado el grafo:



Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 4 colores.

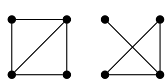
$P(G,x) =$



$= P(K_5,x) + P(K_4,x) + P(K_4,x) = x^5 - 8x^4 + 23x^3 - 28x^2 + 12x$

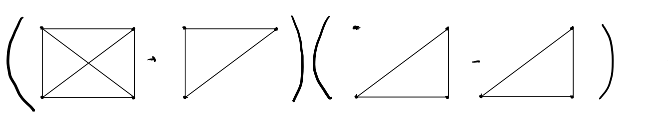
$$\left.\begin{array}{l} P(1) = 0 \\ P(2) = 0 \\ P(3) = 0 \\ P(4) = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{n° cromático} = 4$$

Ejercicio 3.31. Dado el grafo:

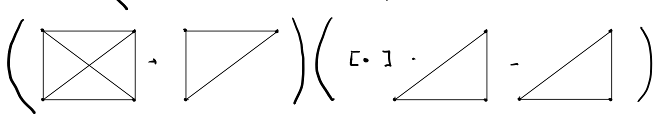


Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.

$P(G,x) =$



=

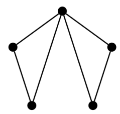


$= (P(K_4,x) + P(K_3,x)) \cdot (P(K_1,x) P(K_3,x) - P(K_3,x)) =$

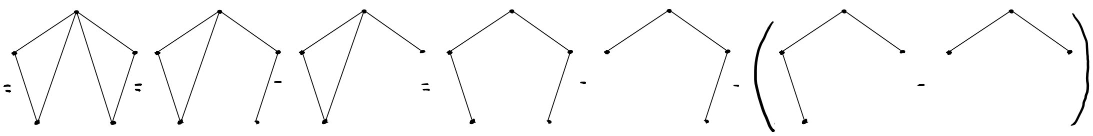
$= x^2 (x-1)^3 (x-2)^2$

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = 0 \\ P(2) = 0 \\ P(3) = 72 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{n° cromático} = 3 \qquad P(G,5) = 43200$$

Ejercicio 3.32. Dado el grafo:



Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.

$P(G,x) =$  $=$

$= P(P_4,x) - P(K_3,x) - P(P_3,x) + P(P_2,x) = x(x-1)^2(x-2)^2$

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=0 \\ P(2)=0 \\ P(3)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow n^{o} \text{ cromático} = 3 \qquad P(G,5) = 720$$

Ejercicio 3.33. Demuestra que en cualquier árbol con dos o más vértices existe, al menos, un vértice de grado uno.

Supongamos G, un árbol, y C, el camino más largo del mismo. Sabemos:

1) C no es un ciclo porque G es un árbol.

2) Si el vértice (v) que queremos con grado 1 no pertenece a C, C sería el camino más largo (contradicción!!)

⇒ Tiene que tener v grado 1.

Ejercicio 3.34. Un árbol tiene 33 vértices de grado uno, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3, y el resto de grado 4. ¿Cuántos vértices tiene en total?

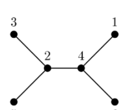
Sea $\sum gr(v) = 2|e|$.

con $e = (n-1)$, por ser árbol $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2e = 33\cdot 1 + 25\cdot 2 + 15\cdot 3 + (n-33-25-15)\cdot 4 \\ e = n-1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} e = 80 \\ n = 81 \end{array}}$

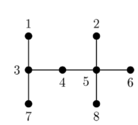
Ejercicio 3.39. Prueba directamente que hay 125 árboles etiquetados con 5 vértices.

Hay n^{n-2} árboles (etiqueta) con n vértices $\Rightarrow 5^{5-2} = 5^3 = 125$

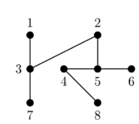
Ejercicio 3.40. Determina los códigos de Prüfer de los árboles:



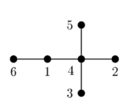
(4, 2, 2, 4)



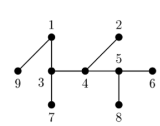
(3, 5, 5, 3, 4, 5)



(3, 5, 3, 2, 5, 4)



(4, 4, 4, 1)



(4, 5, 3, 5, 4, 3, 1)