Relación 2

④ En cada caso estudiar si U es o no un subespacio vectorial de V:

Subespacios

- la suma debe ser cerrada
- el producto por escalares debe ser cerrado
- U es un espacio vectorial.

a) $\mathbb{R}^2 = V$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$.

$(1,1) \in U$ $\quad$ $(2,4) \in U$

$(1,1) + (2,4) = (3,5) \notin U$ ya que $3 \neq 5^2$

$\boxed{U \text{ no es un subespacio vectorial}}$

b) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(1,0), (0,0)\}$

$(1,0) + (0,0) = (1,0) \in U$

$a(1,0) = (a,0) \notin U$

$a \neq 1$
$a \neq 0$

$\boxed{U \text{ no es un subespacio vectorial de } V.}$

c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

sea $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in U$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ -\lambda b_1 - \mu b_2 & \lambda c_1 + \mu c_2 \end{pmatrix} \in U$$

$\boxed{\text{sí es un subespacio vectorial de } V}$

c) $V = K[x]$, $\quad U_n = \{ p(x) \in K[x] \,/\, \text{grado}(p(x)) = n \} \cup \{0\} \; (n \in \mathbb{N})$

(x_1, y_1, z_1, t_1) y $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in U_n$

$(x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in U_n$

~~sea a e~~

$2x_1 - y_1 = 3$

$-2x_2 + y_2 = -3$

$2(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1) = 3 - 3 = 0 \neq 3$

$\boxed{U \text{ no es un subespacio vectorial de } V}$

e) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad U = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = 3 \}$

sea $(4, 1, 0, 0) \in U$ y $(5, 7, 0, 0) \in U$

$(4, 1, 0, 0) + (5, 7, 0, 0) = (9, 8, 0, 0) \notin U$, ya que $2 \cdot 9 - 8 = 18 - 8 = 10 \neq 3$

$\boxed{\text{con este contraejemplo queda claro que } U \text{ no es un subespacio vectorial de } V}$

f) $V = \mathbb{R}^n$, $\quad U = \mathbb{Q}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q} \}$

La suma de racionales es claramente cerrada, pero el producto por escalares reales no tiene por qué.

sea $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y $(1, \dots, 1) \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}\,(1, \dots, 1) = (\sqrt{2}, \dots \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}$

$\boxed{U \text{ no es un subespacio vectorial de } V}$

j) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$

Es claramente un espacio vectorial ya que:

Sea $(x_1, y_1, z_1) \in U$ y $(x_2, y_2, z_2) \in U$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \underset{x=y=z}{=} (x_1, x_1, x_1) + (x_2, x_2, x_2) =$$

$$= (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in U$$

El producto por escalares:

$$a(x_1, y_1, z_1) = (ax_1, ax_1, ax_1) \in U$$

$\boxed{\text{U es un subespacio vectorial de V}}$

k) $V = \mathbb{R}^5$, $U = \{(0,0,1,-1,2), (3,2,\sqrt{5},-8,32)\}$

$\boxed{\text{No es un subespacio vectorial}}$

$$(0,0,1,-1,2) + (3,2,\sqrt{5},-8,32) = (3,2,\sqrt{5}+1,-9,34) \notin U$$

Cuidado

l) $V = \mathbb{R}^5$, $U = L\{(0,0,1,-1,2), (3,2,\sqrt{5},-8,32)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{5} \\ -1 & -8 \\ 2 & 32 \end{pmatrix} \sim^{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

m) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$

Sea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U$$

$$5 \neq 3+1 = 4$$

$\boxed{U \text{ no es un subespacio vectorial de } V}$

n) $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $U = \{ f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$

ñ) $V = M_n(K)$, $U = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ diagonal}\}$

Sea $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \\ 0 & b_1 & 0 & \\ 0 & 0 & c_1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$

La suma es claramente cerrada, porque se suma componente a componente, por lo que la suma seguirá siendo una matriz diagonal. Lo mismo con el producto.

$\boxed{U \text{ es un subespacio vectorial de } V.}$

o) $V = M_n(K)$, $U = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ triangular superior}\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Es claramente un subespacio ya que la suma se hace componente a componente, así como el producto por escalares, por lo que A seguirá siendo triangular superior.

(6) Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Demostrar los siguientes hechos:

a) si S y S' son subconjuntos no vacíos de V con $S \subseteq S'$ entonces $L(S) \subseteq L(S')$

b) $L(S) = S \Leftrightarrow$ S es un subespacio vectorial de V

c) si $U_i = L(S_i)$, para cada $i = 1 \ldots m$, ¿es cierto que $\cap_{i=1}^{m} U_i = L(\cap_{i=1}^{m} S_i)$?

¿Demostraciones?

(5) En cada uno de los siguientes casos decidir si el vector v del espacio vectorial V pertenece o no al subespacio L(S) y, en caso afirmativo, expresar v como combinación lineal de S:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (0,2,-5)$, $S = \{(1,-3,2),(2,-4,-1),(1,-5,7)\}$

Si pertenece a S, entonces es l.d:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 1$$

$rg(S) = 1 \Rightarrow$ Los vectores son linealmente dependientes $\Rightarrow$ V se podrá expresar como c.l. de S:

$$(0,2,-5) = a(1,-3,2) + b(2,-4,-1) + c(1,-5,7)$$

$$\begin{cases} 0 = a + 2b + c \\ 2 = -3a - 4b - 5c \\ -5 = 2a - b + 7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 0 = -3a \\ 0 = 2a \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

b) $V = \mathbb{R}^4$, $v = (9,-17,10,-5)$, $S = \{(2,-1,0,0),(-1,3,-2,1)\}$

Para que $v \in S$ se podrá expresar como combinación lineal suya, es decir, los 3 vectores serán l.d:

$$rg \begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 \\ -17 & -1 & 3 \\ 10 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 10 & 5 & 3 \\ -8 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow rg = 2 <$ nº vectores $\Rightarrow$ los 3 vectores son l.d:

$$(9,-17,10,-5) = a(2,-1,0,0) + b(-1,3,-2,1)$$

$$\begin{cases} 9 = 2a - b & \to 9 = 2a+5 \to 4 = a \to a = 2 \\ -17 = -a + 3b & \to -17 = -a + 3(-5) \to \boxed{a = 2} \\ 10 = -2b & \to \boxed{b = -5} \\ -5 = b \end{cases}$$

$v \in L(S)$ y se puede expresar como

$(9,-17,10,-5) = 2(2,-1,0,0) - 5(-1,3,-2,1)$

c) $V = \mathbb{R}^4$, $v = (5,7,a,6)$, $S = \{(1,2,3,0),(1,1,1,2)\}$

Para que $v \in S$, se podrá expresar como c.l, es decir, los 3 vectores serán l.d:

$$rg \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ a-5 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a-9 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a - 9 = 0 \Rightarrow a = 9$$

Para que $v \in S \Rightarrow a = 9$, para que $rg = 2 <$ nº vectores y, entonces, sean l.d.

$(5,7,9,6) = a(1,2,3,0) + b(1,1,1,2)$

$$\begin{cases} 5 = a + b & \rightarrow a = 2 \\ 7 = 2a + b & \rightarrow a = 2 \\ 9 = 3a + b & \rightarrow a = 2 \\ 6 = 2b & \rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=2}, \boxed{b=3}$$

d) $V = M_2(\mathbb{C})$, $v = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Si $v \in S$ significa que se puede expresar como combinación lineal suya:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i = bi & \rightarrow b = 1 \\ 0 = a & \rightarrow a = 0 \\ 1 = ai & \rightarrow a = -i \\ -i = 2ai + b & \rightarrow -i = 2 + b \quad \rightarrow b = 2 + i \end{cases}$$

¿Consultar? ¿Sacando ecuaciones cartesianas y viendo si las cumple

c) $V = \mathbb{R}[x]$, $v = x^2 + x + 1$, $S = \{-x, x^2+1, x^3\}$

Consideramos $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$$rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{c}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow rg = 3 <$ nº vectores $\Rightarrow v$ es c.l. de S

$(0,1,1,1) = a(0,0,-1,0) + b(0,1,0,1) + c(1,0,0,0)$

$$\begin{cases} 0 = c \\ \boxed{1 = b} \\ 1 = -a \quad \rightarrow \boxed{a = -1} \\ \boxed{1 = b} \end{cases}$$

$v \in L(S)$ y se puede expresar como:

$(0,1,1,1) = -1(0,0,1,0) + 1(0,1,0,1) + 0(1,0,0,0)$

(8) En cada uno de los siguientes casos demostrar que U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V y ver si se cumple que $V = U_1 \oplus U_2$.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$, $U_2 = L(\{(3,0,2)\})$

$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z$

Supongamos $(x_1, y_1, z_1) \in U_1$ y $(x_2, y_2, z_2) \in U_2$

Supongamos $b, a \in \mathbb{R}$

$a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2) = (ax_1, ay_1, az_1) + (bx_2, by_2, bz_2) =$

$\stackrel{\downarrow}{=} (ax_1, ay_1, ax_1) + (bx_2, by_2, bx_2) =$

$x_1 = z_1$
$x_2 = z_2$ por def U_1

$= (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, ax_1 + bx_2) \in U_1$

U_1 es un subespacio vectorial

U_2 por def es un subespacio vectorial. Para ser exactos el mínimo subespacio vectorial que contiene a $(3,0,2)$.

Podemos deducir que unas ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases} \xrightarrow{\text{ecuaciones cartesianas}} \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Podemos calcular $U_1 \cap U_2$ juntando:

$$\begin{cases} x = z \rightarrow x - z = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\dim_{\mathbb{R}}(U) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{dim. espacio total}}}{n} - \overset{\text{nº ecuaciones cartesianas}}{\vphantom{x}}$

De donde se extrae que la $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) + \dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) = \dim_{\mathbb{R}}(U_1) + \dim_{\mathbb{R}}(U_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 + \dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) = 3 - 1 + 3 - 2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow U_1 + U_2 = V \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{U_1 \oplus U_2 = V}$

b) $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $U_1 = \{ f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \}$,

$U_2 = \{ f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \}$

Sea $p(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) + g(-x)\right) \in U_1$

$p(-x) = \frac{1}{2}\left(g(-x) + g(x)\right) = p(x)$

Sea $h(x) = \frac{1}{2}\left(g(-x) - g(x)\right) \in U_2$

$h(-x) = \frac{1}{2}\left(g(-(-x)) - g(-x)\right) = \frac{1}{2}\left(g(x) - g(-x)\right) = -h(-x)$

Por tanto:

$g(x) = p(x) + h(x) \Rightarrow U_1 \oplus U_2 = V$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = L(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\})$, $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$

¿De cuantas formas podemos escribir $v = u_1 + u_2$ con $v \in \mathbb{R}^3$, $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$?

$\boxed{U_1 \text{ por definición es un subespacio vectorial}}$

El mínimo subespacio vectorial que contiene a $(1,0,-1)$ y $(0,1,-1)$.

Dado $(x_1, y_1, 0) \in U_2$ y $(x_2, y_2, 0) \in U_2$ y $a, b \in \mathbb{R}$

$a(x_1, y_1, 0) + b(x_2, y_2, 0) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, 0) \in U_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{U_2 \text{ es un espacio vectorial}}$

Las ecuaciones paramétricas de U_1 son:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda - \mu \end{cases}$$

De aquí se extrae que:

$z = -x - y \Rightarrow x + y + z = 0$ es la ecuación cartesiana de U_1.

Juntándolo con la ecuación cartesiana de U_2:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Ecuaciones cartesianas } (U \cap W)$$

$U_1 + U_2 = L\{(1,0,-1),(0,1,-1),(x,y,0)\}$

(4) Consideramos en $\mathbb{R}^4$ los siguientes subespacios vectoriales:

$$U_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\ z-t=0\}$$

$$U_2 = L((0,1,1,0))$$

$$U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0\}$$

Probar que $U_1+U_2=U_3$ ¿se cumple $U_3 = U_1 \oplus U_2$?

Para hacer U_1+U_2 necesitamos ~~[illegible]~~ reunir las bases de U_1 y U_2

De U_1 tenemos que:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\mu \\ t=\mu \end{cases}$$

Como $\dim_{\mathbb{R}}(U_1) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) -$ nº e. cartesianas $= 4-2=2$

una base de U_1 será:

$$\{(1,1,0,0),\ (0,0,1,1)\}$$

Juntándola con la base de U_2 obtenemos un sistema de generadores de U_1+U_2:

$$\{(0,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (0,0,1,1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}\, A = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{(0,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (0,0,1,1)\}$ es una base de $U+W$

De ahí obtenemos unas ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda + \gamma \\ t = \gamma \end{cases}$$

$t = \gamma \Rightarrow z - t = \lambda \Rightarrow y + t - z = \mu \Rightarrow \boxed{x - y + z - t = 0}$

Ecuación cartesiana

Como la ecuación cartesiana y la $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) = 3$ coincide con U_3 se verifica que $U_1 + U_2 = U_3$

como $\dim_{\mathbb{R}} U_1 + \dim_{\mathbb{R}} U_2 = \dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + 1 = 3 + \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow$ son una familia independiente, por tanto, la suma es directa $\Rightarrow \boxed{U_1 \oplus U_2 = U_3}$

10 Sea $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Analizar si la familia $S = \{f, g, h\}$ es linealmente independiente, donde $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = e^x$.

Para que sean una familia independiente:

$$U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j\right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$g(x) + h(x) = 2x + e^x$ imagen va de $-\infty, +\infty$

$\boxed{f(x) \cap (g(x) + h(x)) = \{0\}}$

16 En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales dados por:

$$U_1 = L\left((1,1,-\alpha^2,2),\ (1+\alpha,\ 1-\alpha,\ 2)\right)$$

$$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

calcular todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que $U_1 = U_2$.

De U_1 podemos extraer las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu + \alpha \\ y = \lambda + \mu - \alpha \\ z = 2\lambda + 2\mu \end{cases}$$

Para que $U_1 = U_2$ debe cumplir la ecuación cartesiana de U_2:

$$\lambda+\mu+\alpha + \lambda+\mu-\alpha + 2\lambda+2\mu = 0$$

$$4\lambda+4\mu = 0$$

$$\lambda = -\mu$$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 0 \end{cases}}$$

(17) Calcular una base y la dimensión de los subespacios vectoriales que aparecen en los apartados c), g) y ñ) del ejercicio 4.

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base

de U $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$

g) $\dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{R}}(V) -$ nº e. implícitas $= 5 - 1 = \underline{4}$

$B = \{ (0,0,0,0,0), (-1,2,0,0,0), (-1,0,2,0,0), (1,-1,-1,0,0) \}$

ñ) $\dim_K(U) = \dim_K(V) -$ nº ec. implícitas $= n^2 - n = n(n-1)$

¿?

(18) Para cada uno de los subespacios vectoriales U del espacio vectorial V calcular la dimensión, una base y complementario.

a) $U = L\{(1,-2,1,0), (2,3,-2,1), (4,-1,0,1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$

Nos dan un sistema de generadores:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 - 2 - 12 - 2 = -32 \neq 0$$

$\boxed{\text{Los 3 vectores forman una base de } U \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(U) = 3}$

Añadiendo cualquier vector l.i. obtendríamos una base de V, de forma que, si añadimos el vector c, entonces

$W = L(c)$ es un complementario de U.

b) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y+z=0,\ x+y+z+t=0\}$, $V = \mathbb{R}^4$

$\dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) -$ nº ecuaciones cartesianas $=$

$= 4-2 = \boxed{2}$

De las ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x = 2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ t = -x-y-z = -3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ t = -3\lambda \end{cases}$$

De aquí sacamos que una base de U podría ser:

$$\{(1,1,1,-3),(2,-1,0,-3)\}$$

Para el complementario hay que añadir 2 vectores hasta formar una base de V, de forma que si los dos vectores añadidos son u_1 y u_2 el complementario de U será $W = L(u_1,u_2)$

c) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p'(1) = 0\}$, $V = \mathbb{R}_3[x]$

$B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$p'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

¿?

19 Sea K un cuerpo en el que $2 \neq 0$. Calcular una base y la dimensión de los subespacios de matrices $S_n(K)$ y $A_n(K)$. (Estudiar primero los casos particulares $n=2$ y $n=3$)

¿Consultar que significa S y A?

20 Sea K un cuerpo. Demostrar que si S es una familia de $K[x]$ que no contiene dos polinomios con el mismo grado, entonces S es linealmente independiente. Deducir que si $B = \{p_0(x), \dots, p_n(x)\}$ es una familia de $K[x]$ de forma que grado $(p_i(x)) = i$, para cada $i = 0, \dots, n$, entonces B es una base de $K_n[x]$.

Es evidente, ya que, representando los polinomios en una base infinita $\{1, x, x^2 \dots x^n\}$ si no hay 2 polinomios del mismo grado, todos tendrán, al menos una componente distinta

$[(1,0,\dots 0), (1,1,0,\dots 0), (1,1,1,0,\dots 0)]$ por lo que serán linealmente independientes.

21 Encontrar bases B y B' del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ en las que el polinomio $p(x) = x+1$ cumpla que $p(x)_B = (1,0,0)^t$ y $p(x)_{B'} = (1,1,0)^t$

Bases de B serían, por ejemplo

22 En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_2[x]$ se consideran las bases $\beta = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ y $\beta' = (1, x, x^2)$ ¿Qué relación existe entre las coordenadas de un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ con respecto a B y B'? Encontrar $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p(x)_B = (1, -2, 4)^t$

Como B y B' son bases de $\mathbb{R}_2[x]$, entonces las coordenadas de $p(x)$ se puede expresar como una combinación lineal de cada base.

23 En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$ se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

¿para qué números $\alpha \in \mathbb{C}$ el subespacio $U = L(A, B, C)$ de $M_2(\mathbb{C})$ tiene dimensión 2? Para tales valores calcular una base de U y las coordenadas de la matriz.

$$V = \begin{pmatrix} 2i-1 & -i \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

con respecto a dicha base.

$U = \mathcal{L}(A, B, C)$ es un sistema de generadores. Para que U tenga dimensión 2 uno de los vectores es combinación lineal de los otros:

$$a\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = ai - b & \rightarrow \alpha = ai \\ 0 = -bi & \rightarrow b = 0 \\ a + b = 1 & \rightarrow a = 1 - b = 1 \\ -ai + 2bi = -i & \rightarrow -ai = -i \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Por tanto, cuando } \alpha = i \text{ la } \dim_{\mathbb{R}}(U) = 2}$$

Una base de U es, por tanto:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\begin{pmatrix} 2i - 1 & -i \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2i - 1 = ai - b & \Rightarrow 2i = ai \Rightarrow \boxed{a = 2} \\ -i = 0 - bi & \Rightarrow \boxed{b = 1} \\ 3 = a + b & \rightarrow a = 3 - b \Rightarrow \boxed{a = 2} \\ 0 = -ai + b2i & \rightarrow 0 = (b-3)i + 2bi = bi + 2bi - 3i = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3bi - 3i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3i(b-1) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2i - 1 & -i \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}}$$

(24) Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$U_1 = L\{(3,6,1,0), (1,0,-1,2), (2,3,0,1)\}$

$U_2 = L\{(2,0,-1,3), (3,3,-2,4)\}$

$U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-z=0\}$

$U_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y+t=0, 3x+y+6z=0\}$

a) calcular una base y la dimensión de cada U

b) calcular una base y dimensión de $U_1 \cap U_2$, $U_2 \cap U_4$, $U_3 \cap U_4$.

c) calcular una base y la dimensión de U_1+U_2, U_2+U_4, U_3+U_4.

En U_1 nos dan un sistema de generadores. Estudiando el rango:

$$rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} \cancel{0} & 1 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 3 \\ \cancel{0} & -1 & 2 \\ \cancel{0} & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow$ Podemos convertir U_1 en una base eliminando un vector, de forma que:

$$\boxed{B = \{(1,0,-1,2), (0,3,2,-3)\}}$$

como la base está formada por dos vectores la $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(U_1) = 2.}$

En U_2 nuevamente nos dan un sistema de generadores. Estudiando el rango:

$$rg \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow$ Los dos vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de U_2

$$\boxed{B = \{(2,0,-1,3), (3,3,-2,4)\}}$$

Como la base de U_2 está formada por dos vectores, la $\boxed{dim_{\mathbb{R}}(U_1) = 2}$

En U_3 nos dan una ecuación cartesiana. Sabiendo que:

$$dim_{\mathbb{R}}(U_3) = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - \text{nº ecuaciones implícitas}$$

$$\Rightarrow \boxed{dim_{\mathbb{R}}(U_3) = 4 - 1 = 3}$$

Por tanto, una base de U_3 estará formada por tres vectores que cumplan la ecuación cartesiana:

$$\boxed{B = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,1,1,0)\}}$$

En U_4 nos vienen a dar las ecuaciones cartesianas. Sabiendo que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_4) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - \text{nº ecuaciones cartesianas}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim_{\mathbb{R}}(U_4) = 4 - 2 = 2}$$

Como la $\dim_{\mathbb{R}}(U_4) = 2$, cualquier base de U_4 estará formado por 2 vectores l.i. que cumplan dichas ecuaciones:

$$\boxed{B = \{(1,1,-\tfrac{2}{3},1),\ (0,1,-\tfrac{1}{6},2)\}}$$

$$\begin{cases} x - 2y \cancel{+t} = 0 \\ 3x + y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \mu \\ z = \dfrac{-3\alpha - \mu}{6} \\ t = -\alpha + 2\mu \end{cases}$$

Para calcular $U_1 \cap U_2$ necesitamos unas ecuaciones cartesianas de cada uno:

De la base de U_1 $\{(1,0,-1,2),\ (0,3,-2,-3)\}$ se obtiene:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\mu \\ z = -\lambda - 2\mu \rightarrow z = -x - 2\dfrac{y}{3} \rightarrow 3z + 3x + 2y = 0 \\ t = 2\lambda - 3\mu \rightarrow t = 2x - 3\dfrac{y}{3} \rightarrow t - 2x + y = 0 \end{cases}$$

Unas ecuaciones cartesianas de U_1 serían:

$$\begin{cases} 3z + 3x + 2y = 0 \\ t - 2x + y = 0 \end{cases}$$

Repitiendo el proceso con U_2:

$$\{(2,0,-1,3),\ (3,3,-2,4)\}$$

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \rightarrow x = 2\lambda + y \rightarrow \frac{x-y}{2} = \lambda \\ y = 3\mu \rightarrow \mu = \frac{y}{3} \\ z = -\lambda - 2\mu \\ t = 3\lambda + 4\mu \end{cases}$$

$$\longrightarrow z = \frac{x-y}{2} - \frac{2}{3}y \rightarrow 6z = 3(x-y) - 4y$$

$$\rightarrow t = \frac{3(x-y)}{2} + 4\frac{y}{3} \rightarrow 6t = 9(x-y) + 8y$$

Unas ecuaciones cartesianas de U_2:

$$\begin{cases} 6z - 3x + 7y = 0 \\ 6t - 9x + y = 0 \end{cases}$$

Juntando las ecuaciones:

$$\begin{cases} 3z + 3x + 2y = 0 \\ t - 2x + y = 0 \\ 6t - 9x + y = 0 \\ 6z - 3x + 7y = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(25) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz en $M_n(\mathbb{R})$. Se define la traza de A como:

$$(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = \{A \in M(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$ se pide:

a) Demostrar que U_n es un espacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Calcular una base y la dimensión de U_n cuando $n = 2, 3$.

c) Calcular $U_2 \cap S_2(\mathbb{R})$ y $U_2 + S_2(\mathbb{R})$ ¿Es cierto $M_2(\mathbb{R}) = U_2 \oplus S_2(\mathbb{R})$?

Para que sea un subespacio vectorial la suma y el producto por escalares debe ser cerrado. Sabiendo que las matrices que pertenecen a U_n tienen forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Repetir

La traza es nula pero no todo es 0. Repetir

Resulta evidente que la suma es cerrada, ya que esta se realiza componente a componente, por lo que los a_{ii} $i = \{1, \ldots, n\}$ seguirán siendo nulos, por tanto, la matriz resultante pertenece a U_n.

Analogamente con el producto por escalares.