Relación 1

Ejercicio 1.1.

1) Todo número natural es 0 ó es el siguiente de un número natural

Sabemos que el 0 es natural. Supongamos ahora que n es natural, entonces, $\nabla(n)$ es un natural siguiente a otro natural. Queda probado por inducción ∎

2) $m+0=0+m=m$

Por definición de suma, $m+0=m$.

Ahora, sabemos que para $n=0$ tenemos que $0+0=0$. Supongamos que es cierto para n, entonces tenemos que $0+\nabla(n)=\nabla(0+n)=\nabla(n)$

Por último, para $m=0$ tenemos que $0+0=0+0$. Supongamos cierto para m, entonces tenemos que $\nabla(m)+0=\nabla(m+0)\underset{\text{H. Inducción}}{=}\nabla(0+m)=0+\nabla(m)$ ∎

3) $m+1=1+m=\nabla(m)$

Para $m=0$ tenemos $0+1=1+0=1$. Suponemos cierto para m y vemos entonces que $\nabla(m)+1=\nabla(m+1)\underset{\text{H. Inducción}}{=}\nabla(1+m)=1+\nabla(m)$

Por otro lado, para $m=0$ tenemos que $0+1=\nabla(0)=1$. Suponemos cierto para m, entonces tenemos que $\nabla(m)+1=\nabla(m+1)\underset{\text{H. Inducción}}{=}\nabla(\nabla(m))$ ∎

4) $(m+n)+p=m+(n+p)$

Para $p=0$ tenemos que $(m+n)+0=m+(n+0)=m+n$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$. Suponemos cierto para p y obtenemos que $\underset{\mathbb{N}}{\underset{\cap}{(m+n)}}+\nabla(p)=\nabla((m+n)+p)\underset{\text{H. Inducción}}{=}\nabla(m+(n+p))=m+(n+\nabla(p))$ ∎

5) $m+n=n+m$

Para $n=0$ tenemos que $m+0=0+m=m$, $\forall m\in\mathbb{N}$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $m+\nabla(n)=\nabla(m+n)\underset{\text{H. Inducción}}{=}\nabla(n+m)=\nabla(n)+m$, $\forall m\in\mathbb{N}$ ∎

6) Si $m+p=n+p$, entonces $m=n$

Para $p=0$ tenemos que $m+0=n+0\Rightarrow m=n$, $\forall m\in\mathbb{N}$. Supongamos cierto para p, entonces, $m+\nabla(p)=n+\nabla(p)\Rightarrow\nabla(m+p)=\nabla(n+p)$ y, por H. Inducción $\nabla(m+p)=\nabla(n+p)\Rightarrow$
$\Rightarrow\nabla(m)=\nabla(n)$, $\forall m\in\mathbb{N}$.

7) Si $m+n=0$, entonces $m=n=0$

Para $m=0$ tenemos que $0+n=n=0\Rightarrow m=n=0$. Supongamos cierto para m, entonces $\nabla(m)+n=0\Rightarrow\nabla(m+n)=0$, pero 0 no puede ser el siguiente de ningún número natural, luego, para que se verifique la desigualdad, la única opción es que $m=n=0$ ∎

8) $0\cdot m=m\cdot 0=0$

Por definición, $m\cdot 0=0$

Para $m=0$ tenemos que $0\cdot 0=0\cdot 0=0$. Suponemos que es cierto para m, entonces obtenemos que $0\cdot\nabla(m)=0\cdot m+0=0\cdot m\underset{\text{H. Inducción}}{=}m\cdot 0=m\cdot 0+0=$
$=\nabla(m)\cdot 0$ ∎

9) $1\cdot m = m\cdot 1 = 1$

Para $m=1$ tenemos que $1\cdot \overset{1\cdot 0+1}{\overset{\shortparallel}{1}} = 1\cdot 1 = 1$. Suponemos cierto para m, entonces obtenemos que $1\cdot\sigma(m) = \underbrace{1\cdot m + 1 = 1 + m\cdot 1}_{H.\ Inducción} = \sigma(m)\cdot 1$

Para $m=1$ tenemos que $1\cdot 1 = 1$. Suponemos que es cierto para m. Entonces, obtenemos que $1\cdot\sigma(m) = \underbrace{1\cdot m + 1 = m+1}_{H.\ Inducción} = \sigma(m)$ ∎

10) $(m+n)\cdot p = m\cdot p + n\cdot p$

Para $p=0$ tenemos que $\overset{\in\mathbb{N}}{(m+n)}\cdot 0 = 0 = m\cdot \overset{0}{\overset{\shortparallel}{0}} + p\cdot\overset{0}{\overset{\shortparallel}{0}}$, $\forall m,p\in\mathbb{N}$. Suponemos que es cierto para p, entonces obtenemos que $(m+n)\cdot\sigma(p) = \underbrace{(m+n)\cdot p + (m+n) = m\cdot p + n\cdot p}_{H.\ Inducción} + (m+n) = m\cdot p + m + n\cdot p + n =$
$= m\cdot\sigma(p) + n\sigma(p)$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ∎

11) $m\cdot n = n\cdot m$

Para $m=0$ tenemos que $0\cdot n = 0 = n\cdot 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Suponemos que es cierto para m, luego, tenemos que $n\cdot\sigma(m) = \underbrace{n\cdot m + n = n + m\cdot n}_{H.\ Inducción} = \sigma(m)\cdot n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ∎

12) $(m\cdot n)\cdot p = m\cdot(n\cdot p)$

Para $p=0$ tenemos que $\overset{\in\mathbb{N}}{(m\cdot n)}\cdot 0 = 0 = m\cdot 0 = m\cdot(n\cdot 0)$. Suponemos cierto para p y obtenemos que $(m\cdot n)\cdot\sigma(p) = (m\cdot n)\cdot p + (m\cdot n) = (m\cdot n) + m\cdot(n\cdot p) = m\cdot(n\cdot\sigma(p))$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ∎

13) Si $m\cdot n = 0$, entonces $m=0$ o $n=0$

Para $n=0$ tenemos que $m\cdot 0 = 0$ $\forall m\in\mathbb{N}$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $m\cdot\sigma(n) = 0 \Rightarrow m\cdot n + m = 0$, que vale $0 \Leftrightarrow m=0$ y $\forall n\in\mathbb{N}$. Si inducimos sobre m, obtendremos que se cumple solo si $n=0 \Rightarrow$ Para que la igualdad sea cierta, o $m=0$ o $n=0$ ∎

14) $0^0 = 1$

Por definición, $m^0 = 1$, $\forall m\in\mathbb{N}$ y como $0\in\mathbb{N} \Rightarrow 0^0 = 1$ ∎

15) $0^n = 0$ para $1\leq n$

Para $n=1$ tenemos que $0^1 = 0^{\sigma(0)} = 0^0\cdot 0 = 0$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $0^{\sigma(n)} = \underbrace{0^n\cdot 0 = 0\cdot 0}_{H.\ Inducción} = 0$ ∎

16) $1^n = 1$

Para $n=0$ tenemos que $1^0 = 1$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $1^{\sigma(n)} = 1^n\cdot 1 = \underbrace{1^n = 1}_{H.\ Inducción}$ ∎

17) $m^{n+p} = m^n\cdot m^p$

Para $p=0$ tenemos que $m^{n+0} = m^n = m^n\cdot 1 = m^n\cdot m^0$. Suponemos cierto para p y obtenemos que $m^{n+\sigma(p)} = m^{\sigma(n+p)} = \underbrace{m^{n+p}\cdot m = m^n\cdot m^p\cdot m}_{H.\ Inducción} = m^n\cdot m^{\sigma(p)}$ ∎

18) $m^{n\cdot p} = (m^n)^p$

Para $p=0$ tenemos que $m^{n\cdot 0} = m^0 = 1 = \overset{\mathbb{N}}{\overset{\Downarrow}{(m^n)}}{}^0$. Suponemos cierto para p y obtenemos que $(m^n)^{\sigma(p)} = \underbrace{(m^n)^p\cdot m^n = m^{n\cdot p}}_{H.\ Inducción}\cdot m^n = m^{n\cdot p+n} = m^{n\cdot\sigma(p)}$ ∎

Ejercicio 1.2.

1) $m \leq m$

Por definición, $m \leq m$ si $\exists x \in \mathbb{N}: m+x=m$. Efectivamente, tomando $x=0$ verificamos la propiedad ■

2) Si $m \leq n$ y $n \leq m$, entonces $m=n$

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \text{ Si } m \leq n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: \quad m+x=n \\ \cdot \text{ Si } n \leq m \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}: \quad n+y=m \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{n}+y+x=\cancel{n} \Rightarrow x+y=0.$$

Como $x, y \in \mathbb{N}$, esta ecuación solo se cumple si $x=y=0$, luego si $m+x=n$ y $x=0 \Rightarrow m=n$ ■

3) Si $m \leq n$ y $n \leq p$, entonces $m \leq p$

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \text{ Si } m \leq n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: m+x=n \\ \cdot \text{ Si } n \leq p \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}: n+y=p \end{array}\right\} \Rightarrow m+\overset{\in \mathbb{N}}{(x+y)}=p \Rightarrow \text{Por definición } m \leq p \text{ ■}$$

4) $m \leq n$ o $n \leq m$

Si $m \leq n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: m+x=n$. Si $x=0 \Rightarrow m=n$. Si $x \geq 1 \Rightarrow m < n$

Si $n \leq m \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}: n+y=m$. Si $y=0 \Rightarrow n=m$. Si $y \geq 1 \Rightarrow n < m$ ■

5) Si $m \leq n$, entonces $\exists_1 p \in \mathbb{N}$ $m+p=n$ y lo llamamos n menos m $(n-m)$

Por definición, $m \leq n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: m+x=n$. Supongamos que $\exists y \in \mathbb{N}: m+y=n$, luego $\cancel{m}+x=\cancel{m}+y \Rightarrow x=y$, luego, si existe, es único ■

6) Si $m \leq n$, entonces $m+p \leq n+p$

Que $m \leq n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: \quad m+x=n \Rightarrow (m+p)+x=n+p \quad (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow m+p \leq n+p$ ■

7) Si $m \leq n$, entonces $m \cdot p \leq n \cdot p$

Que $m \leq n \Rightarrow m+x=n \Rightarrow (m+x)p=n \cdot p \Rightarrow m \cdot p+\overset{\in \mathbb{N}}{x \cdot p}=n \cdot p \Rightarrow m \cdot p \leq n \cdot p$ ■

8) Si $m \cdot p \leq n \cdot p$ y $p \neq 0$, entonces $m \leq n$

Si $m \cdot p \leq n \cdot p \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: \quad m \cdot p+x=n \cdot p$. Si $p=1$, tenemos que $m \cdot 1+x=m+x=n=n \cdot 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \leq p$. Suponemos cierto para p y obtenemos que $m \cdot \sigma(p)+x= m \cdot p+m+x=$ $\underset{\text{H. Inducción}}{=} n \cdot p+m \Rightarrow m \cdot p+x+\cancel{m}=n \cdot p+\cancel{m} \Rightarrow m \cdot p+x=n \cdot p$ ■

9) Si $m \cdot p=n \cdot p$ y $p \neq 0$, entonces $m=n$.

Basta tomar en la demostración anterior $x=0$.

Ejercicio 1.3

1) $\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

Para $n=1$ tenemos que $\sum_{k=1}^{1} k=1=\frac{1(1+1)}{2}$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $\sum_{k=1}^{n+1} k=\sum_{k=1}^{n} k+(n+1) \underset{\text{H. Inducción}}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ■

2) $\forall n \geq 1$, $\sum_{K=1}^{n} K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Para $n=1$ tenemos que $\sum_{K=1}^{1} K^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6}$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $\sum_{K=1}^{n+1} K^2 = \sum_{K=1}^{n} K^2 + (n+1)^2 \underset{\text{H. Inducción}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} =$

$= \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$ $\blacksquare$

3) $\forall n \geq 1$, $\sum_{K=1}^{n} K^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Para $n=1$, tenemos que $\sum_{K=1}^{1} K^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $\sum_{K=1}^{n+1} K^3 = \sum_{K=1}^{n} K^3 + (n+1)^3 \underset{\text{H. Inducción}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4} =$

$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ $\blacksquare$

4) $\forall n \geq 1$, $\sum_{K=1}^{n} K^5 + \sum_{K=1}^{n} K^7 = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$

Para $n=1$ tenemos que $\sum_{K=1}^{1} K^5 + \sum_{K=1}^{1} K^7 = 1+1=2 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^4$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $\sum_{K=1}^{n+1} K^5 + \sum_{K=1}^{n+1} K^7 = \sum_{K=1}^{n} K^5 + \sum_{K=1}^{n} K^7 + (n+1)^5 + (n+1)^7 \underset{\text{H. Inducción}}{=} 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5 + (n+1)^7 =$

$= 2 \frac{n^4(n+1)^4 + 16(n+1)^5 + 16(n+1)^7}{16} = 2 \frac{(n+1)^4[n^4 + 16(n+1) + 16(n+1)^3]}{16} =$

$= 2 \frac{(n+1)^4[n^4 + 16n + 16 + 16n^3 + 48n^2 + 48n + 16]}{16} = \frac{2(n+1)^4(n+2)^4}{16} = 2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4$ $\blacksquare$

5) $\forall n \geq 0$, $\sum_{K=0}^{n} a^K = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, siendo $a \neq 1$

Para $n=0$ tenemos que $\sum_{K=0}^{0} a^K = a^0 = 1 = \frac{a^{0+1}-1}{a-1}$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $\sum_{K=0}^{n+1} a^K = \sum_{K=0}^{n} a^K + a^{n+1} \underset{\text{H. Inducción}}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+(a-1)a^{n+1}}{a-1} =$

$= \frac{\cancel{a^{n+1}} - 1 + a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ $\blacksquare$

6) $\forall n \geq 1$, $\sum_{K=1}^{n} (K \cdot K!) = (n+1)! - 1$

Para $n=1$ tenemos que $\sum_{K=1}^{1} (K \cdot K!) = 1 = (1+1)! - 1$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $\sum_{K=0}^{n+1} (K \cdot K!) = \sum_{K=0}^{n} (K \cdot K!) + (n+1)(n+1)! \underset{\text{H. Inducción}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)![1+(n+1)] - 1 =$

$= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$ $\blacksquare$

7) $\forall n \geq 2, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$

Para $n=2$ tenemos que $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$. Suponemos cierto para n y obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{H.\ inducción}{>} \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} > \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} \ ■$$

8) $\forall n \geq 4, \ 2^n \geq n^2$

Para $n=4$ tenemos $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $(n+1)^2 = n^2+2n+1 \underset{H.\ inducción}{\leq} 2^n+2n+1 \leq 2^{n+1}$ ■

9) $\forall n \geq 4, \ n! > 2^n$

Para $n=4$ tenemos que $4! = 24 > 16 = 2^4$. Supongamos cierto para n y vemos que $2^{n+1} = 2^n\cdot 2 \underset{H.\ inducción}{<} n!\cdot 2$ y como $n+1>4$ (porque $n \geq 4$), tenemos que $n!\cdot 2 < n!(n+1) = (n+1)!$ ■

Ejercicio 1.4.

a) $3^{2n}-2^n$ es divisible por 7

Para $n=0$ tenemos que $3^0-2^0 = 1-1=0$ y 0 es divisible por 7. Suponemos cierto para n, es decir $3^{2n}-2^n = 7k, k\in\mathbb{N} \Rightarrow 3^{2n} = 7k+2^n$. Ahora, para $n+1$ tenemos que $3^{2(n+1)}-2^{n+1} = 3^{2n}\cdot 3^2 - 2^{n+1} \underset{H.\ inducción}{=} 3^2(7k+2^n)-2^{n+1} = 63k+9\cdot 2^n - 2^{n+1} =$
$= 63k+2^n(9-2) = 63k+7\cdot 2^n$ y como $63k$ es múltiplo de 7 y $7\cdot 2^n$ también, y, como la suma de múltiplos de 7 es múltiplo de 7 $\Rightarrow 3^{2(n+1)}-2^{n+1}$ es divisible por 7 ■

b) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ es divisible por 7

Para $n=0$ tenemos que $3^{0+1}+2^{0+2} = 3+2^2 = 7$, que es divisible por 7. Suponemos cierto para n y obtenemos que $3^{2n+1}+2^{n+2} = 7k, k\in\mathbb{N}$, luego $3^{2n+1} = 7k-2^{n+2}$. Procedemos con $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3}+2^{n+3} =$
$= 3^{2n+1}\cdot 3^2+2^{n+3} \underset{H.\ inducción}{=} (7k-2^{n+2})\cdot 3^2+2^{n+3} = 63k-9\cdot 2^{n+2}+2^{n+3} =$
$= 63k+2^{n+2}(-9+2) = 63k-7\cdot 2^{n+2}$ y como es una suma de múltiplos de 7, obtenemos que $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$ es divisible por 7 ■.

c) $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ es divisible por 11.

Para $n=0$ tenemos que $3^{0+2}+2^{0+1} = 9+2 = 11$, que es divisible de 11. Suponemos cierto para n y obtenemos que $3^{2n+2}+2^{6n+1} = 11k, k\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{2n+2} = 11\cdot k-2^{6n+1}$. Para $n+1$ tenemos que
$3^{2(n+1)+2}+2^{6(n+1)+1} = 3^{2n+4}+2^{6n+7} = 3^{2n+2}\cdot 3^2+2^{6n+7} \underset{H.\ inducción}{=}$
$= (11\cdot k-2^{6n+1})\cdot 3^2+2^{6n+7} = 99k-9\cdot 2^{6n+1}+2^{6n+7} = 99k+2^{6n+1}(-9+2^6) =$
$= 99k+55\cdot 2^{6n+1}$, que, por la misma razón que los apartados anteriores, es divisible por 11 ■

d) $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ es divisible por 17

Para $n=0$ tenemos que $3\cdot 5^{0+1}+2^{0+1} = 17$, que es divisible por 17. Suponemos cierto para n y obtenemos que $3^{2n+1}+2^{3n+1} = 17\cdot k, k\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{2n+1} = 17\cdot k-2^{3n+1}$. Para $n+1$ tenemos que $3^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1} =$
$= 3^{2n+3}+2^{3n+4} = 3^{2n+1}\cdot 3^2+2^{3n+4} \underset{H.\ inducción}{=} 3^2(17\cdot k-2^{3n+1})+2^{3n+4} =$

$= 153\cdot K - 9\cdot 2^{3n+1} + 2^{3n+4} = 153\cdot K + 2^{3n+1}(9+2^3) = 153K + 17\cdot 2^{3n+1}$, que, por la misma razón de los apartados anteriores, es divisible por 17. ∎

e) $n(n^2+2)$ es múltiplo de 3

Para $n=0$ tenemos que $0(0^2+2)=0$, que es múltiplo de 3. Suponemos cierto para n y vemos que para $n+1$ tenemos que $(n+1)((n+1)^2+2) =$

$= (n+1)(n^2+2n+1+2) = (n+1)(n^2+2n+3) = n^3+2n^2+3n+n^2+2n+3 =$

$= n^3+3n^2+5n+3 = (n^3+2n)+3n^2+3n+3 = n(n^2+2)+3n^2+3n+3 \overset{H.\ inducción}{=}$

$= 3K+3n^2+3n+3$ y como la suma de múltiplos de 3 es múltiplo de 3, hemos acabado el ejercicio ∎

f) $5^{n+1}+2\cdot 3^n+1$ es múltiplo de 8.

Para $n=0$ tenemos que $5^{0+1}+2\cdot 3^0+1=8$, que es múltiplo de 8. Suponemos cierto para n y obtenemos que $5^{n+1}+2\cdot 3^n+1=8K, K\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{n+1}=8K-2\cdot 3^n-1$. Para $n+1$ tenemos $5^{(n+1)+1}+2\cdot 3^{n+1}+1=$

$= 5^{n+2}+2\cdot 3^{n+1}+1 = 5^{n+1}\cdot 5+2\cdot 3^{n+1}+1 \overset{H.\ inducción}{=} 5(8K-2\cdot 3^n-1)+2\cdot 3^{n+1}+1=$

$= 40\cdot K-10\cdot 3^n-5+2\cdot 3^{n+1}+1 = 40K+3^n(-10+2\cdot 3)-4 = 40K-4\cdot 3^n-4$,

que, por la misma razón de los ejercicios anteriores, es múltiplo de 8 ∎

g) $7^{2n}+16n-1$ es múltiplo de 64

Para $n=0$ tenemos que $7^{2\cdot 0}+16\cdot 0-1=0$, que es múltiplo de 64. Suponemos cierto para n y obtenemos que $7^n+16n-1=64K, K\in\mathbb{N} \Rightarrow 7^n=64K-16n+1$.

Para $n+1$ obtenemos que $7^{2(n+1)}+16(n+1)-1 = 7^{2n+2}+16n+16-1 = 7^{2n}\cdot 7^2+16n+15 =$

$\overset{H.\ Ind.}{=} 7^2(64K-16n+1)+16n+15 = 3136K-784n+49+16n+15 = 3136K-768n+64$ y, como se trata de una suma de múltiplos de 64, conseguimos demostrar lo que queríamos ∎

h) $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)$ es múltiplo de 2^n

Para $n=1$ tenemos que $1+1=2$, que es múltiplo de $2^1=2$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $(n+1+1)(n+1+2)\ldots(n+1+n+1) = (n+2)(n+3)\ldots(2n+2) =$

$= (n+2)(n+3)\ldots 2(n+1)$, que, por hipótesis de inducción es múltiplo de 2^n.

i) $4^{2n}-2^n$ es divisible por 7

Para $n=0$ tenemos que $4^{2\cdot 0}-2^0=0$, que es divisible de 7. Suponemos cierto para n y obtenemos que $4^{2n}-2^n=7\cdot K, K\in\mathbb{N} \Rightarrow 4^{2n}=7\cdot K+2^n$.

Para $n+1$ tenemos que $4^{2(n+1)}-2^{n+1} = 4^{2n+2}-2^{n+1} = 4^{2n}\cdot 4^2-2^{n+1} \overset{H.\ inducción}{=}$

$= 4^2(7\cdot K+2^n)-2^{n+1} = 112\cdot K+16\cdot 2^n-2^{n+1} = 112\cdot K+2^n(16-2) = 112\cdot K+14\cdot 2^n$

y, como se trata de una suma de divisibles de 7, es divisible por 7.

j) $2^{3n}-14^n$ es divisible por 6.

Para $n=0$ tenemos que $2^0-14^0=0$, que es múltiplo de 6. Suponemos cierto para n y obtenemos que $2^{3n}-14^n=6\cdot K$, $K\in\mathbb{N}$. Para $n+1$ tenemos que $2^{3(n+1)}-14^{n+1} = 2^{3n+3}-14^{n+1} = 2^{3n}\cdot 2^3-14^{n+1} \overset{H.\ inducción}{=}$

$= 2^3(6K+14^n)-14^{n+1} = 48K+8\cdot 14^n-14^{n+1} = 48\cdot K+14^n(8-14) = 48K-6\cdot 14^n$,

que, como es suma de números divisibles por 6, es divisible por 6 ∎

Ejercicio 1.5.

1) Demuestra que la suma de los n primeros números naturales impares es igual a n^2

Para $n=1$ tenemos que $\sum_{n=1}^{1}(2n-1)=1=1^2$. Suponemos cierto para n y obtenemos que $\sum_{n=1}^{n+1}(2n-1)=\sum_{n=1}^{n}(2n-1)+(2(n+1)-1) \overset{\text{H. inducción}}{=} n^2+2n+1=(n+1)^2$ ☒

2) Demuestra por inducción que para todo número par K, el resto de dividir 2^K entre 3 es 1.

Para $K=2$ tenemos que $2^2=4$ y $4|3$ da como resto 1. Suponemos cierto para K y vemos que $2^{K+2}=2^K\cdot 2^2=4\cdot 2^K \Rightarrow \frac{4\cdot 2^K}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2^K}{3}$. Por H. inducción $\frac{2^K}{3}$ tiene resto 1 y $\frac{4}{3}$ también tiene resto 1 $\Rightarrow$ El producto tiene resto 1 ☒

3) Demuestra por inducción que para todo número impar K, el resto de dividir 2^K entre 3 es 2.

Para $K=3$ tenemos que $2^3=8$ y $8|3$ tiene resto 2. Suponemos cierto para K y vemos que $2^{K+3}=2^K\cdot 2^3 \Rightarrow \frac{2^K\cdot 2^3}{3}=\frac{2^K}{3}\cdot\frac{8}{3} \Rightarrow$ Por H. inducción $\frac{2^K}{3}$ tiene resto 1 y $\frac{8}{3}$ tiene resto 1, luego, el producto tiene resto 1 ☒.