Resumen Interpolación

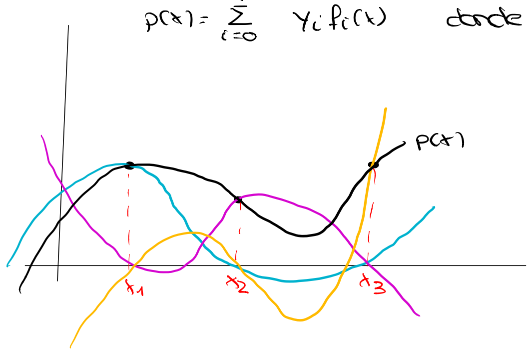
Sean las coordenadas $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2 : x_i \neq x_j$ con $i, j = 0, 1, \dots, N$, entonces existe un único función polinómica de grado menor o igual que N $p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x_i) = y_i$ con $i = 0, 1, \dots, N$.

Interpolación de Lagrange

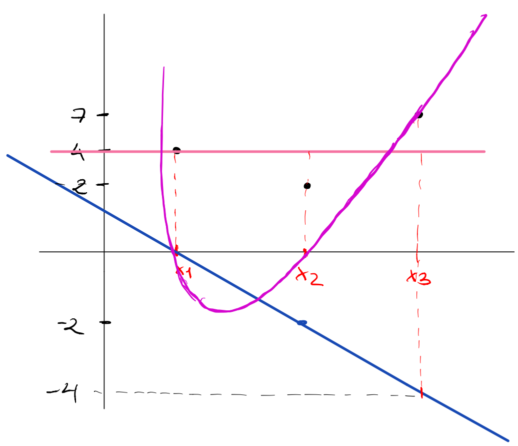
Sea $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, podemos encontrar dicho polinomio como:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i l_i(x) \quad \text{donde} \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$p(x) = f(x_0) l_0(x) + \cdots + f(x_i) l_i(x)$$



Interpolación Newton



Sea $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$ entonces:

- $\omega_0(x) = 1$
- $\omega_1(x) = (x - x_0)$
- $\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

  $\vdots$
- $\omega_i(x) = \omega_{i-1}(x)(x - x_i)$

x_j	y_j		
0	3 α_0	$\square$	$\frac{\bigcirc - \bigcirc}{\bigcirc - \bigcirc}$
2	7	2 α_1	
-2	-9	4	$\boxed{-1}$ $\quad \frac{\bigcirc - \bigcirc}{\bigcirc - \bigcirc} = \square$
-1	$-\frac{1}{2}$		

$$p(x) = \alpha_0 \omega_0 + \alpha_1 \omega_1 \cdots + \alpha_N \omega_N$$

Error de interpolación. Convergencia y estabilidad. Chebyshev

Sean $x_0, \dots, x_N \in [a,b]$, una función $f \in C([a,b])$ y su polinomio de interpolación $I_N^f \in \mathbb{P}_N$. Entonces, definimos el error de interpolación $E_N^f(x)$ como $E_N^f(x) := f(x) - I_N^f(x)$

$I_N : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{P}_N$ se llama unicidad, polinomio interpolación.

$$\| I_N \|_\infty := \sup \left\{ \| I_N^f \|_\infty : f \in C([a,b]) \ , \ \|f\|_\infty = 1 \right\}$$

Definimos la función de Lebesgue como

$$\lambda_N(x) := \sum_{i=0}^{N} |l_i(x)|$$

siendo $l_0, \dots, l_N$ la base de los polinomios de Lagrange.

Llamamos constante de Lebesgue como $\Lambda_N := \| \lambda_N \|_\infty = \| I_N \|_\infty$

Sea $x_0, \dots, x_N$ números reales distintos, sea $x \in \mathbb{R}$ y $a = \min\{x, x_0, \dots, x_N\}$, $b = \max\{x, x_0, \dots, x_N\}$. Supongamos además que $f \in C^{N+1}([a,b])$. Entonces, existe $\epsilon \in]a,b[$ tal que:

$$E_N^{f(x)} = \frac{f^{N+1}(\epsilon)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$$

donde $\omega_{N+1}(x)$ es el polinomio nodal de grado $N+1$. Esta fórmula es análoga a Taylor.

Nodos de Chebyshev

Hacen que el error de la interpolación sea mínimo

Se calculan en $[-1,1]$ N nodos $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{8}\pi\right)$ $i = 0, 1, \dots, N-1$

Para calcularlos en otro intervalo, establecemos un isomorfismo:

$\phi : [-1,1] \to [a,b]$

$\phi(-1) = a$ $\quad \phi(x) = \alpha x + \beta$ $\quad \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \phi(-1) = \alpha x + \beta = a \\ \phi(1) = \alpha x + \beta = b \end{array}\right\} \Rightarrow$ Recalculamos los nodos

$\phi(1) = b$

El Teorema dice $N \geq 1$ y sea $p \in \mathbb{P}_N$ un polinomio con coeficiente líder 1. Entonces

$$\max\{|p(x)| : x \in [-1,1]\} \geq \frac{1}{2^{N-1}}$$

Interpolación mediante funciones splines

Dados un intervalo $[a,b]$ y una partición P del mismo, el espacio de funciones de splines de clase k y grado m viene dado por:

$$S_m^k(P) = \left\{ s \in C^k([a,b]) : i = 0, 1, \dots, N-1 \Rightarrow s_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m \right\}$$

Splines lineales

Sean $a < b$ y sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. La base usual del espacio $S_1^0(P)$ viene dada

$$i = 0, 1, \cdots, N \Rightarrow B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

En este caso el error de interpolación se define como $E_N^{f(x)} := f(x) - S_N^1 f(x)$

_ Splines cúbicos

Funciones splines cúbicos naturales : $i = 0, 1, \ldots, N \Rightarrow S(x_i) = f(x_i)$

2 condiciones adicionales: $S''(a) = 0 = S''(b)$