Modelos Matemáticos: Ecuaciones en Diferencias de Orden Superior

Daniel Alconchel Vázquez

18 de abril de 2021

Índice

1. La ecuación lineal en diferencias de orden superior

Definición 1.1. Una **ecuación en diferencias de orden superior** es una ecuación en diferencias de la forma

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + ... + a_0x_n = b(n), \quad n \geq 0$$

con $a_0 \neq 0$ y $k > 1$.

Observación. Si en 1.1 $b(n) = 0$, se dice que es homogénea. En caso contrario, es completa.

Definición 1.2. Se define **el espacio de soluciones de las ecuaciones en diferencias**, S, como el espacio vectorial

$$S = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}\}$$

que es de dimensión infinita, ya que podemos dar infinitas sucesiones lineales independientes.

Teorema 1.3. *Sea $\sum$ el conjunto de soluciones de la ecuación lineal en diferencias homogénea*

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + ... + a_0x_n = 0, \quad n \geq 0$$

entonces, $\sum$ es un subespacio vectorial de S de dimensión k

Definición 1.4. Dada la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden k

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + ... + a_0x_n = 0, \quad n \geq 0$$

- Se llama **sistema fundamental de soluciones** a toda base de $\sum$
- Llamaremos **polinomio característico** a

  $$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + ... + a_1\lambda + a_0$$

  y a sus raíces las llamaremos **raíces características**

Observación. $\lambda = 0$ no puede ser solución del polinomio.

Teorema 1.5. *La sucesión $X_\lambda = \{\lambda^n\}_{n\geq 0}$ es solución de la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden k si, y sólo si, $p(\lambda) = 0$, esto es, λ es raíz característica.*

1.1. Caso 1: k raíces distintas

Teorema 1.6. *Sea $\lambda_1, ..., \lambda_k$ las raíces características, verificando que $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$. Entonces $\{X_{\lambda_1}, ..., X_{\lambda_k}\}$ es un sistema fundamental de soluciones.*

Corolario 1.7. *En la hipótesis anterior, toda solución $X\{X_n\}_{n\geq 0}$ se escribe de la forma*

$$x_n = c_1\lambda_1^n + ... + c_k\lambda_k^n, \quad c_1, ..., c_k \in \mathbb{K}$$

Veamos un ejemplo. Tomemos la sucesión de Fibonacci dada por
$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad f_0 = f_1 = 1.$
El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 \implies \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Luego, la solución general es $f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ y sustituyendo los valores para f_0 y f_1 obtenemos que la solución específica es $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

1.2. Caso 2: raíces múltiples

En el caso de que exista una raíz múltiple, es decir, con multiplicidad mayor que uno, seguimos los pasos del caso 1 1.7, pero multiplicamos la raíz en cuestión por un polinomio de grado la multiplicidad de la raíz menos uno, es decir, si, por ejemplo, tenemos una raíz de multiplicidad 3, λ, pues sería $\left(c_1n^2 + c_2n + c_3\right)\lambda^n$.

1.3. Caso 3: raíces complejas

Supongamos que obtenemos raíces complejas $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$ como solución del polinomio. Llamemos r al módulo de λ_i y θ al argumento de λ_i, por tanto

$$R = \{r^n cos(n\theta)\}, \quad I = \{r^n sen(n\theta)\}$$

son soluciones reales y linealmente independientes. Por tanto, un sistema fundamental de soluciones (SF) será

$$\{r^n cos(n\theta), r^n sen(n\theta)\}$$

2. Comportamiento Asintótico de las Soluciones

Teorema 2.1. *Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ de las raíces de $p(\lambda)$. Son equivalentes:*

1. *Todas las soluciones de la ecuación lineal en diferencias homogénea verifican*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

2. *Las raíces verifican*

$$max_{i=1,\ldots,s}|\lambda_i| < 1$$

Observación. En el caso de $k = 2$, las raíces λ_1, λ_2 del polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ verifican $|\lambda_i| < 1$ para $i = 1, 2$, si, y sólo sí

$$\begin{cases} p(1) = 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ \\ p(-1) = 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ \\ p(0) = a_0 < 1 \end{cases}$$

3. Soluciones de la Ecuación Lineal en Diferencias Completa

Recordemos que una ecuación lineal en diferencias completas es aquella que

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_0 x_n = b(n), \quad b(n) \neq 0$$

La idea reside en buscar las soluciones de la ecuación lineal en diferencias homogénea asociada y añadirle la solución particular de la completa. Para ello:

- Si $b(n) = cte$ busco soluciones constantes.
- Si $b(n)$ es un polinomio de grado k busco soluciones de grado k.
- Si $b(n) = a^n$ busco soluciones de la forma ka.

Veamos un ejemplo. Sea la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 8$$

Comenzamos buscando las soluciones de la ecuación homogénea, como habíamos visto anteriormente:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5 \implies x_n = c_1 2^n + c_2 5^n$$

Buscamos ahora la solución particular de la completa, siguiendo el esquema que acabamos de detallar:

$$Como\ es\ b(n) = cte \implies k - 7k + 10k = 8 \implies k = 2$$

Luego, la solución general de la completa será:

$$x_n = c_1 2^n + c_2 5^n + 2$$

Ahora, puede ocurrir que nos encontremos con un fenómeno llamado resonancia. Para ver como tratarlo, pongamos el siguiente ejemplo:

Sea la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 7 \cdot 2^n$$

Ya sabemos la solución de la homogénea por el ejemplo anterior, veamos la solución particular de la completa

Como tenemos $b(n) = 7 \cdot 2^n \implies x_n = k \cdot 2^n$, luego:

$$k2^{n+2} - 7k2^{n+1} + 10k2^n = 72^n \implies 2^n(4k - 14k + 10k) = 72^n \implies 0 = 7!!$$

Para evitar esto, se multiplica el tipo de solución buscada por n. Si vuelve a fallar, se multiplica por n^2, después n^3, y así sucesivamente, hasta dar con una solución válida.

Tomemos ahora $x_n = kn \cdot 2^n$, entonces tenemos:

$$k(n+2)2^{n+2} - 7k(n+1)2^{n+1} + 10kn2^n = 72^n \implies resolviendo\ obtenemos\ k = \frac{-7}{6}$$

Luego, la solución particular de la completa será $x_n = \frac{-7}{6}n2^n$, luego:

$$x_n = c_1 2^n + c_2 5^n - \frac{7}{6}n2^n$$

4. La Renta Nacional

Definición 4.1. En un país con economía de mercado, la renta nacional Y_n en un período determinado n (que suele medirse en años) puede describirse como

$$Y_n = C_n + I_n + G_n$$

donde

- C_n es el gasto de los consumidores para la compra de bienes de consumo
- I_n es la inversión privada inducida por la compra de bienes
- G_n es el gasto público

4.1. Modelo de Samuelson

Ahora haremos algunas suposiciones que son ampliamente aceptadas por la mayoría de economistas.

- El consumo C_n es proporcional a la renta nacional en el año anterior Y_n, es decir
$$C_n = bY_{n-1}$$
donde $b > 0$ se le conoce como tendencia marginal del consumo.
- La inversión privada inducida I_n es proporcional al incremento del consumo $C_n - C_{n-1}$, esto es
$$I_n = k\left[C_n - C_{n-1}\right]$$
donde $k > 0$ se le denomina coeficiente acelerador.
- Finalmente, el gato público G_n se supone constantemente a lo largo de los años
$$G_n = G$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación en diferencias de segundo orden completa
$$Y_{n+2} - b(1+k)Y_{n+1} + bkY_n = G, \quad n \geq 0$$
El estado de equilibrio se obtiene haciendo $Y_n = Y_* \implies Y_* = \frac{G}{1-b}$, luego la solución de la ecuación será $Y_n = Y_* + y_n$, donde $\{y_n\}$ es la solución de la homogénea.

- La renta nacional Y_n converge al estado de equilibrio Y_* si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:
$$p(-1) = 1 + b(1+k) + bk > 0$$
$$p(1) = 1 - b(1+k) + bk = 1 - b > 0$$
$$p(0) = bk < 1$$
- La renta nacional Y_n fluctúa alrededor del estado de equilibrio Y_* si, y sólo si, las raíces del polinomio característico son ambas complejas.