1. Los servicios de estadística de un país han estimado la matriz tecnológica de los tres sectores productivos estudiados, representada en la siguiente tabla:

	sector 1	sector 2	sector 3
sector 1	0,3	0,2	0,2
sector 2	0,1	0,4	0,4
sector 3	0	0	0,1

A partir del conocimiento de dicha matriz, se desea determinar la producción necesaria de cada sector para satisfacer una demanda final de 10, 12 y 8 millones de unidades de cada bien producido por cada sector. Si la demanda final cambiara a 20, 30, 40 millones respectivamente. ¿cuál sería la producción necesaria?

Llamemos a los nuevos valores de producción de la industria 1 como x_1, a la de la industria 2 x_2 y a la de la industria 3, x_3.

Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 + 10\cdot 10^6 \\ x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}4x_3 + 12\cdot 10^6 \\ x_3 = 0{,}1x_3 + 8\cdot 10^6 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{A}{\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underset{D}{\begin{pmatrix} 10\cdot 10^6 \\ 12\cdot 10^6 \\ 8\cdot 10^6 \end{pmatrix}}$$

Calculamos $(I-A)^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 7/10 & -1/5 & -1/5 \\ -1/10 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 9/10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(I-A) = -\frac{9}{25} \neq 0, \text{ luego, es invertible} \Rightarrow (I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 5/9 \\ 1/4 & 7/4 & 5/6 \\ 0 & 0 & 10/9 \end{pmatrix}$$

Luego

$$X = (I-A)^{-1} D = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 5/9 \\ 1/4 & 7/4 & 5/6 \\ 0 & 0 & 10/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10\cdot 10^6 \\ 12\cdot 10^6 \\ 8\cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{229}{9}\cdot 10^6 \\ \frac{181}{6}\cdot 10^6 \\ \frac{80}{9}\cdot 10^6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ El sector 1 debe producir 25,4 millones de unidades, el sector 2 debe producir 30,16 millones de unidades, y el sector 3, 8,8 millones.

2. Supongamos un modelo de insumo - producción para un sistema económico formado por solo dos industrias: una minera y una eléctrica. La industria eléctrica gasta 500 u.m. de su producción en gastos propios, le vende a la minera 350 u.m. y le destina a la demanda final 150 u.m. de su producción. La industria minera vende carbón a la eléctrica por 320 u.m., invierte en consumo propio 120 u.m y destina a la demanda final 120 u.m. ¿Cómo debe variar la producción de ambas industrias para satisfacer una demanda final de 250 u.m. de electricidad y 200 u.m. de carbón?

Comenzamos representando todo en una tabla:

	I. Eléctrica	I. Minera	Demanda Final	Total
I. Eléctrica	500	350	150	1000
I. Minera	320	120	120	560

Luego, podemos reescribir la tabla como:

	I. Eléctrica	I. Minera	Demanda Final (Nueva)
I. Eléctrica	1/2	7/20	250
I. Minera	4/7	3/14	200

Llamemos x_A a la producción de la I. eléctrica y x_B a la de I. Minera, luego:

$$\left.\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{2}x_A + \frac{7}{20}x_B + 250 \\ x_B &= \frac{4}{7}x_A + \frac{3}{14}x_B + 200 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 7/20 \\ 4/7 & 3/14 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \end{pmatrix}}_{D}$$

Luego, $X = (I-A)^{-1} D = \begin{pmatrix} 1/2 & -7/20 \\ -4/7 & 11/14 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110/27 & 49/27 \\ 80/27 & 70/27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37300/27 \\ 34000/27 \end{pmatrix} \Rightarrow$ La I. Eléctrica tiene que producir unos $1381,\overline{481}$ u.m, mientras que la I. Minera tiene que producir $1259,\overline{259}$ u.m.

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 20/21)

Relación de Ejercicios, Modelos de Leslie

1 Para una población estructurada por edades la matriz de Leslie viene dada por

$$L = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix}$ es un vector propio de L.

(a) Calcula el valor propio de la matriz de Leslie asociado al vector dado.

(b) Justifica por qué el valor propio calculado en el apartado anterior es dominante.

(c) ¿Qué puedes decir sobre el comportamiento de la población considerada a largo plazo?

2 Una determinada especie de simios se estudia a partir del modelo de Leslie, para lo que se distinguen tres grupos de edad (que denominaremos jóvenes, adultos y viejos). Se sabe que las tasas de mortalidad son del 30% y del 20% en jóvenes y adultos respectivamente, mientras que las tasas de fertilidad son del 70%, del 20% y del 0% en cada uno de los grupos de edad. Se pide:

(a) Inicialmente hay 20 individuos jóvenes. ¿Qué pasará a largo plazo con la población total?

(b) Supongamos ahora que inicialmente hay 20 individuos viejos. ¿Qué sucede con la población total a largo plazo? ¿Tiene sentido hablar de la pirámide de edades?

3 Para estudiar la dinámica poblacional a largo plazo de una especie X, que vive en un determinado hábitat, un equipo de biólogos recurre a un modelo de Leslie. Para ello, divide la población en tres grupos de edad (G_1, G_2, G_3) y emplea el modelo

$$\mathbf{P_{n+1}} = L\mathbf{P_n},$$

donde el vector $\mathbf{P_n}$ representa el número de individuos que hay en cada uno de los grupos en el recuento n. Teniendo en cuenta que los estudios realizados indican que

- la probabilidad de pasar del grupo G_1 al G_2 es 0.6 y la de pasar del grupo G_2 al G_3 es 0.4,
- los individuos de G_1 no tienen descendientes, mientras que la tasa de fertilidad de G_3 es el triple de la de G_2,
- $\lambda = 1.2$ es un valor propio de la matriz de Leslie, L, y el vector $(6, 3, 1)^t$ es un vector propio asociado a dicho valor propio.

Responde a las siguientes cuestiones.

(a) Determina la matriz de Leslie L del modelo.

(b) Indica, de forma justificada, cuál es el valor propio dominante, si existe, de L y cuál será la pirámide de edad a largo plazo de esta población.

(c) Interpreta los resultados obtenidos en términos de la dinámica poblacional de la especie estudiada.

4 Se quiere estudiar una población de aves mediante un modelo de Leslie, por lo que se divide en cuatro grupos de edad ($G1, G2, G3$ y $G4$). Haciendo recuentos anuales de la población, se sabe que esta presenta una tendencia de comportamiento, con muy pocas variaciones, donde

- la población de cada grupo disminuye a un ritmo constante igual al 20% por año;
- los individuos de los grupos $G1$ y $G4$ no son fértiles;
- la tasa de fertilidad de los individuos del grupo $G3$ es el cuádruple de la tasa de fertilidad de los individuos del grupo $G2$;
- se han contabilizado $160, 140$ y 105 individuos en $G2, G3$ y $G4$, respectivamente, por cada 400 individuos en $G1$.

Sea L la matriz asociada al modelo considerado.

(a) Justifica la existencia de valor propio dominante y de vector propio dominante para L.

(b) ¿Cuál es el valor propio dominante de L?

(c) ¿Cuál es un vector propio dominante de L?

(d) Plantea el sistema que permite hallar las tasas de fertilidad y las tasas de supervivencia para la población estudiada.

(e) Calcula L. (Sugerencia: resuelve el sistema planteado en el apartado anterior).

5 En cierta reserva africana existe un tipo de gacela que puede alcanzar los 10 años de edad. Se desea modelizar el número de gacelas usando el modelo de Leslie con dos grupos de edad: jóvenes ($0-5$ años) y adultos ($5-10$ años). Para ello se han realizado tres censos durante los últimos 10 años y se han obtenido los siguientes resultados:

	Jóvenes	Adultos
enero de 2009	20	100
enero de 2014	50	10
enero de 2019	53	25

(a) Encuentra el modelo de Leslie asociado a esta población.

(b) ¿Se extinguirá la población a largo plazo? Razona la respuesta.

(c) ¿Cuál será el porcentaje de individuos en cada grupo de edad dentro de mucho tiempo?

6 Se considera la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha, \beta \in]0,1[$. Encuentra las regiones donde se produce extinción, crecimiento ilimitado o convergencia a equilibrios en el plano de parámetros (α, β).

7 Se considera la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha \\ \dfrac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha > 1.$$

(a) Describa la población que sigue el modelo de Leslie dado por la matriz

(b) Estudie el comportamiento asintótico de la población en términos del parámetro α.

8 Se considera la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \delta & \gamma \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\delta, \gamma \geqslant 0$.

(a) Encuentre las regiones donde se produce extinción, crecimiento ilimitado o convergencia a equilibrio en el plano de parámetros (δ, γ).

(b) Describa la pirámide de edad a largo plazo correspondiente a los valores $\delta = \frac{1}{2}, \gamma = 1$.

9 Una población estructurada en N grupos de edad tiene la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N-1 & N \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Qué grupo de edad es más fértil? ¿Se extinguirá la población?

10 Consideramos un modelo de Leslie con N grupos de edad. Se supone que todos los grupos tienen la misma tasa de natalidad α y la misma tasa de supervivencia β. Construye la matriz asociada y da una condición para que haya crecimiento ilimitado de la población.

11 Una determinada población está estructurada en base a tres grupos diferentes de edad: crías (hasta los 3 años), jóvenes (de 3 a 6 años) y adultos (de 6 a 9 años). Es conocido que cada cría engendra en media una nueva cría, cada joven engendra en media 1,5 crías y cada adulto engendra en media 0,5 crías. Además, las observaciones arrojan el dato de que la mitad de las crías llegan a jóvenes, en tanto que sólo el 20% de los jóvenes sobrevive.

(a) Construya la matriz del modelo.

(b) Si la distribución de tamaños iniciales es $P_0 = (3, 1, 0)^t$ (en las unidades adecuadas), calcule cuál será la distribución de tamaños al cabo de seis años.

(c) Explique el comportamiento a largo plazo de la población (incluyendo su distribución porcentual por grupos de edad).

Cuestiones: Razona las respuestas correctas.

12 Una población estructurada en tres grupos de edad evoluciona siguiendo el modelo de Leslie $P_{n+1} = LP_n$, siendo

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.92 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) El vector $(1000, 100, 92)^t$ es un vector propio de L asociado al valor propio $\lambda = 1$.

(b) L no tiene valor propio dominante.

(c) La probabilidad de que un individuo del grupo primero sobreviva al último es de 0.8.

(d) A largo plazo, el segundo grupo de edad representa aproximadamente un 8.3% de la población total.

13 De una población estructurada en cuatro grupos de edad, que sigue un modelo de Leslie, se sabe que

- las tasas de fertilidad de los grupos de edad tercero y cuarto no son cero;
- si en un recuento hay 40, 15, 5 y 2 individuos, en el siguiente hay 80, 30, 10 y 4 individuos (en ambos casos, el número de individuos hace referencia a los grupos primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente).

(a) La matriz de Leslie asociada no tiene valor propio dominante.

(b) $\lambda = 2$ es el valor propio dominante de la matriz de Leslie asociada.

(c) La población a largo plazo se extinguirá.

(d) La población a largo plazo crecerá ilimitadamente.

14 Una población, agrupada en tres estados, evoluciona de acuerdo con la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) L es una matriz de Leslie.

(b) L tiene un valor propio dominante y vale 1.

(c) $(100, 60, 12)^t$ es un vector propio de L asociado al valor propio $\lambda = 1$.

(d) A largo plazo el primer estado representa aproximadamente el 58% de la población total.

15 Cierta población estructurada en tres grupos sigue un modelo de Leslie con matriz

$$L = \begin{pmatrix} 0.7 & 2 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La pirámide de edad, a largo plazo, es proporcional a $\mathbf{v} = (48,\ 12,\ 5)^t$.

(b) A largo plazo el total de la población tiende a estabilizarse en un valor constante.

(c) La matriz del modelo admite valor propio dominante.

(d) A largo plazo la población se extinguirá.

16 Se considera el modelo poblacional discreto representado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.2 & 3.6 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix},$$

de la que se sabe que $\lambda = 1.2$ es un valor propio.

(a) La matriz A representa un modelo de Leslie asociado a tres grupos de edad.

(b) $\lambda = 1.2$ es el valor propio dominante de A.

(c) A largo plazo, la población en cuestión tiende a estabilizarse en torno a un cierto número de individuos.

(d) A largo plazo, los grupos de edad se estabilizan en las proporciones 60%, 30% y 10%, respectivamente.

17 Se considera el sistema de ecuaciones en diferencias

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} X_n, \; n = 0, 1, \ldots$$

(a) Este sistema representa un modelo poblacional de Leslie con crecimiento ilimitado.

(b) El vector $X = (4, 2, 1)^t$ define una solución constante.

(c) A largo plazo, la proporción de individuos del primer grupo respecto del segundo es la misma que la del segundo respecto del tercero.

(d) A largo plazo, una población descrita por dicho sistema se extinguirá.

18 En un estudio se ha comprobado que la *dinámica anual* de cierta especie, que se mueve entre tres hábitats (A, B y C), viene dada por la matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que, *al cabo de 2 años*,

(a) si inicialmente solo hay individuos en A, entonces la mitad de ellos estarán en B.

(b) si inicialmente solo hay individuos en B, entonces no habrá individuos en B.

(c) si inicialmente solo hay individuos en C, entonces el 20% de ellos estará en A.

(d) si inicialmente solo hay individuos en A, entonces la quinta parte de ellos estarán en C.

19 Una población de ratones cuya esperanza de vida no supera los 6 meses está distribuída en dos grupos de edad: crías (0-3 meses) y adultos (3-6 meses). En la etapa de crías no hay reproducción; además, la tasa de mortalidad en esta etapa es del 40%. Experimentalmente se ha comprobado que si inicialmente hay 50 crías y 20 adultos cada grupo de la población crece un 50% cada 3 meses.

(a) La tasa de fertilidad en la etapa de adultos es de 4.25.

(b) La tasa de fertilidad en la etapa de adultos es de 3.75.

(c) La matriz de Leslie del sistema tiene un valor propio dominante.

(d) Si inicialmente tenemos sólo 5 crías, a largo plazo, cada grupo de la población crecerá un 50% cada 3 meses.

1. Comenzamos calculando el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 0{,}3-\lambda & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -\lambda \end{pmatrix} = \frac{50\lambda^2 - 15\lambda - 2}{50} = 0 \Leftrightarrow 50\lambda^2 - 15\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{5}, \ \lambda = -\frac{1}{10}.$$ Claramente,

$\lambda = \frac{2}{5}$ es el valor propio dominante asociado al vector $v = (400, 200)$. Es dominante porque $\left|\frac{2}{5}\right| > \left|-\frac{1}{10}\right|$ y es algebraicamente simple.

Sabemos que $L > 0$ $([L]_{ij} \geq 0)$. Tomando $p = 2$ obtenemos que $[L^p]_{ij} > 0 \Rightarrow L$ es ergódica.
Tomando $v = x_0$, sabemos que $x_0 > 0$, L es ergódica y $\lambda_p = \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \{x_n\} \longrightarrow 0 \Rightarrow$ La población inicial reproductiva se extingue.

2. Comenzamos escribiendo todos los datos en forma de matriz:

$$L = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Jóvenes} & \text{Adultos} & \text{Viejos} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{0{,}7 \quad 0{,}2 \quad 0} \\ 0{,}7 \quad\ \ 0 \quad\ \ 0 \\ 0 \quad \boxed{0{,}8} \quad 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad x_0 = 20 \text{ jóvenes}$$

Tasas de fertilidad

Probabilidad de que un Adulto pase a Viejo. Se calcula como 100% - Probabilidad de Morir

Llamemos:

- J_n = nº de jóvenes en el n-ésimo periodo
- A_n = nº de adultos en el n-ésimo periodo
- V_n = nº de viejos en el n-ésimo periodo

El modelo de Leslie sería pues:

$$\vec{P}_{n+1} = L\,\vec{P}_n \Rightarrow \begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

Calculando el polinomio característico: $p(\lambda) = \det(L - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0{,}7-\lambda & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}7 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}8 & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{-50\lambda^3 + 35\lambda^2 + 7\lambda}{50} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -50\lambda^3 + 35\lambda^2 + 7\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{7+\sqrt{105}}{20}, \ \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{105}}{20}, \ \lambda_3 = 0$

El valor propio dominante es $\lambda = \frac{7+\sqrt{105}}{20}$, ya que es algebraicamente simple y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ y $|\lambda_1| > |\lambda_3|$.

El dato inicial $x_0 = (20, 0, 0)$ es reproductivo, porque contiene individuos de un estado reproductivo (jóvenes).
Recordemos: Un estado se dice reproductivo si $\exists j \geq i$: j es fértil. Un estado j es fértil si $f_j > 0$.
Como $\lambda_p = \frac{7+\sqrt{105}}{20} < 1$ y x_0 reproductivo $\Rightarrow \{x_n\} \longrightarrow 0$, $x_n \gg 0$, es decir, el número de individuos va decreciendo, pero sin llegar a extinguirse (podría llegar a estabilizarse). Para ver a dónde tiende, calculamos el subespacio asociado al valor propio dominante:

$$E_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \frac{7-\sqrt{105}}{20} & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}7 & \frac{-7-\sqrt{105}}{20} & 0 \\ 0 & 0{,}8 & \frac{-7-\sqrt{105}}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mu\left(\frac{\sqrt{105}+11}{16}, \frac{\sqrt{105}+7}{16}, 1\right) : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Tomando $v = \left(\frac{\sqrt{105}+11}{16}, \frac{\sqrt{105}+7}{16}, 1\right)$ y normalizando tenemos $\frac{v}{\|v\|_1} = (0{,}389895, 0{,}316493, 0{,}29361) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Hemos obtenido que el 38,9895% son jóvenes, 31,6493% son adultos y el 29,361% son viejos.

Tomando $x_0 = (0, 0, 20)$, el cual no es un dato inicial reproductivo, usamos que $\lambda_p = \frac{7+\sqrt{105}}{20} < 1 \Rightarrow R < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ La población se extingue.

⑤ Comenzamos sacando la matriz de Leslie:

$$L = \begin{array}{cc} \text{Jóvenes} & \text{Adultos} \end{array}$$
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3/10 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$. Luego, llamando a J_n = nº de jóvenes en el periodo n-ésimo y A_n = nº de adultos en el periodo n-ésimo:

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

Sacando los valores propios de la matriz: $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0{,}3 \\ 0{,}5 & -\lambda \end{pmatrix} = \frac{20\lambda^2 - 20\lambda - 3}{20} \Rightarrow 20\lambda^2 - 20\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{10}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{5+2\sqrt{10}}{10}$ es un valor propio dominante, ya que es algebraicamente simple y $\left|\frac{5+2\sqrt{10}}{10}\right| > \left|\frac{5-2\sqrt{10}}{10}\right|$.

Como $\lambda_p = \frac{5+2\sqrt{10}}{10} > 1 \Rightarrow R_0 = P(1) > 1$, donde P es la ecuación de Euler $\Rightarrow$ La población inicial reproductiva se superpobaciona.

Teniendo esto en cuenta, como partimos de $x_0 = (20, 100)$, que es un dato inicial reproductivo, el número de individuos jóvenes irá aumentando con el paso del tiempo, por lo que la población no se extinguirá.

Para ver el porcentaje de individuos de cada grupo dentro de mucho tiempo comenzamos calculando el subespacio propio asociado a $\lambda_p = \frac{5+2\sqrt{10}}{10}$:

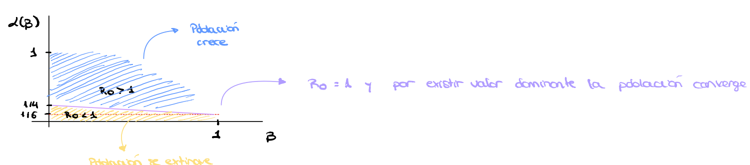
$$E_{\lambda_p} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} \frac{5-2\sqrt{10}}{10} & 0{,}3 \\ 0{,}5 & -\frac{5-2\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mu \left(\frac{2\sqrt{10}+5}{5}, 1 \right) : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Tomando $v = \left(\frac{2\sqrt{10}+5}{5}, 1 \right)$ y ortonormalizando $\Rightarrow \frac{v}{\|v\|_1} = (0{,}7 \ , \ 0{,}3) \Rightarrow$ Habrá, aproximadamente, un 70 % de jóvenes y 30 % de adultos.

⑥ Tenemos la siguiente matriz de Leslie:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ell_1 = 1,\ \ell_2 = \alpha,\ \ell_3 = \alpha\beta \Rightarrow \text{Calculamos } R_0 = P(1) = \frac{1}{2} + 2\alpha + \alpha\beta \Rightarrow R_0 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha + \alpha\beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2(2+\beta)}$$

$$R_0 > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2(2+\beta)}$$



⑦ Tenemos la siguiente matriz de Leslie:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Tenemos dos estadios, ambos fértiles, ya que $\alpha > 1$ y la probabilidad de $1 \to 2$ es de $\frac{1}{\alpha} > 0$.

Para estudiar el comportamiento asintótico usamos la ecuación de Euler-Lotka $\Rightarrow R_0 = P(1) = f_1 \ell_1 + f_2 \ell_2 \Rightarrow$

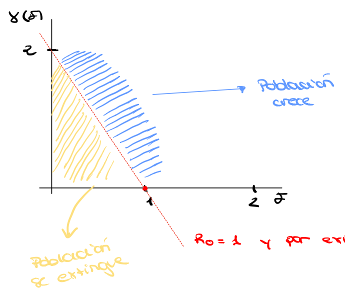
$\Rightarrow R_0 = \alpha - 1 + 1 = \alpha > 1$ (por def) $\Rightarrow$ La población inicial reproductiva se superpobaciona.

⑧ Tenemos la siguiente matriz de Leslie:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \delta & \gamma \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ell_1 = 1,\ \ell_2 = \frac{1}{2},\ \ell_3 = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Usando la ecuación de Euler-Lotka tenemos que } R_0 = P(1) = f_1\ell_1 + f_2\ell_2 + f_3\ell_3 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\gamma \Rightarrow R_0 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\gamma = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\gamma = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta + \frac{1}{2}\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 2(1-\delta)$$

$$R_0 > 1 \Leftrightarrow \gamma > 2(1-\delta)$$



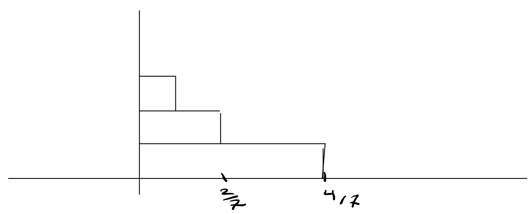
$R_0 = 1$ y por existir valor dominante la población converge al equilibrio

Para la segunda parte del ejercicio tenemos la matriz $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \dfrac{-4\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4}$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1$ es un valor propio dominante, ya que es algebraicamente simple y $\|1\| > \left\| \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4} \right\|$. Calculamos ahora el subespacio propio asociado:

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ \mu (4,2,1) : \mu \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \text{Tomando } v = (4,2,1) \text{ y}$$

ortonormalizando tenemos $\dfrac{v}{\|v\|_1} = \left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7} \right) \Rightarrow$ Grupo 1 = 57,14 %, Grupo 2 = 28,57 %, Grupo 3 = 14,28 %



(11) Comenzamos distribuyendo los datos en una matriz:

$$L = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Crías} & \text{Jóvenes} & \text{Adultos} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

. Ahora, dado como dato inicial $x_0 = (3,1,0)$. Nos piden calcular la distribución de tamaños al cabo de 6 años, es decir, dos periodos:

$$\begin{pmatrix} C_{n+2} \\ J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & 8/5 & 1/2 \\ 1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 1/10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 137/20 \\ 9/4 \\ 3/10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Habrá 6-7 crías, 2-3 jóvenes, 0-1 adultos.

Para explicar el comportamiento a largo plazo de la distribución calculamos el valor propio dominante:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -\lambda \end{pmatrix} = \frac{-20\lambda^3 + 20\lambda^2 + 15\lambda + 1}{20} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1{,}5163, \lambda_2 = -0{,}07465, \lambda_3 = -0{,}4417 \Rightarrow \lambda_1 = 1{,}5163 \text{ es}$$

un valor propio dominante, ya que es algebraicamente simple y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $|\lambda_1| > |\lambda_3|$

12 a) Para ver si es verdadero o falso, calculamos el subespacio propio asociado a $\lambda = 1$:

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 0{,}8 & 10 \\ 0{,}1 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}92 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mu \left(\frac{250}{23}, \frac{25}{23}, 1 \right) : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mu\left(\frac{250}{23}, \frac{25}{23}, 1\right) = (1000, 100, 92) \iff \begin{cases} \mu \frac{250}{23} = 1000 \\ \mu \frac{25}{23} = 100 \\ \mu = 92 \end{cases} \iff \mu = 92 \text{ (S.C.D)} \Rightarrow \text{Luego, a) es verdadera}$$

b) Falso, porque $A_{12} A_{13} > 0 \Rightarrow L$ tiene valor propio dominante.

c) Falso, al ser sucesos independientes sería $P(1 \to 3) = P(1 \to 2) P(2 \to 3) = 0{,}092$

d) Como el valor propio dominante es 1 y tomando $v = \left(\frac{250}{23}, \frac{25}{23}, 1\right) \in E_1$, ortonormalizando tenemos que $\frac{v}{\|v\|_1} = (0{,}8289, 0{,}08289, 0{,}077) \Rightarrow$ Efectivamente, el segundo grupo representa aproximadamente el 8,3%.

14 a) Las matrices de Leslie son de la forma $L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & s_{k-1} & 0 \end{pmatrix}$, con $f_i \geq 0$ y $0 < s_i \leq 1$, luego, L efectivamente es una matriz de Leslie.

b) Para demostrar que L tiene un valor propio dominante basta con ver que $A_{11} A_{12} > 0$. Calculamos ahora el valor propio dominante:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0{,}4-\lambda & 0{,}8 & 1 \\ 0{,}6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -\lambda \end{pmatrix} = \frac{-25\lambda^3 + 10\lambda^2 + 12\lambda + 3}{25} \Rightarrow -25\lambda^3 + 10\lambda^2 + 12\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ \lambda = \frac{-3+\sqrt{3}i}{10},\ \lambda = \frac{-3-\sqrt{3}i}{10} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|1\| > \|\lambda_i\|$ y es algebraicamente simple $\Rightarrow \lambda = 1$ es un valor propio dominante.

c) Para verlo, calculemos el subespacio propio asociado a $\lambda = 1$:

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 1 \\ 0{,}6 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mu\left(\frac{25}{3}, 5, 1\right) : \mu \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \mu\left(\frac{25}{3}, 5, 1\right) = (100, 60, 12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \mu 25 = 300 \\ \mu 5 = 60 \\ \mu = 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mu = 12 \text{ (S.C.D)} \Rightarrow (100, 60, 12) \in E_1$$

d) Tomando $v = (100, 60, 12) \in E_1$ y ortonormalizando tenemos $\frac{v}{\|v\|_1} = (0{,}5814, 0{,}3488, 0{,}0697) \Rightarrow$ Efectivamente, el grupo uno representa aproximadamente el 58% de la población.

15