Tema II: Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

1. Métodos directos

Sistemas triangulares:

Sean la matriz $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ triangular superior con elementos diagonales no nulos, el vector de incógnitas $x \in \mathbb{R}^N$ y el vector de términos independientes b, tenemos el siguiente sistema triangular: $Ux = b$. Este sistema se resuelve por el método de sustitución hacia atrás:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{N} u_{ij} x_j \right) \quad \text{con } i = N, \dots, 1$$

Análogo si el sistema es triangular inferior, pero, esta vez, se resuelve por sustitución hacia adelante:

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right), \quad \text{con } i = 1, \dots N$$

Método de Gauss y Gauss-Jordan. Pivotaje:

· Método de Gauss: Si tenemos un sistema $Ax = b$ unisolvente, con este método obtenemos otro sistema $Ux = C$ equivalente, con U triangular superior. Ya hemos visto en el apartado anterior cómo se resuelve una triangular superior.

Sea $A^{(1)} := A$. Supongamos que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ con $k = 1, \dots, N$. Entonces, hemos terminado y no es posible llegar a un sistema triangular equivalente

Ejemplo 1.1. Sean

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0.1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 2.1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces vamos a calcular el sistema triangular superior equivalente. Tenemos que

$$A^{(1)} = A, \quad b^{(1)} = b$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0.9 & 0.7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1.6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0.9 & 0.7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1.6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos por sustitución hacia atrás y tenemos que:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

· Método de Gauss con pivotaje: Este método modifica el paso K, permitiendo intercambiar la posición de dos filas. A continuación, el sistema equivalente se resuelve con sustitución hacia atrás.

· Método de Gauss - Jordan: Consiste en no solo hacer ceros debajo de a_{kk}, si no también por encima.

Métodos de factorización

Se utilizan cuando tenemos sistemas con la misma matriz de coeficientes, para resolverlos más rápido.

Factorización LU: Sea $Ax=b$ un sistema compatible determinado, L una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior, entonces: $A=LU$

Para resolver este sistema se siguen los siguientes pasos:

(i) calculamos las matrices L y U

(ii) sea $y := Ux$, entonces tenemos que resolver y de $Ly=b$ por sustitución hacia delante

(iii) Por último, resolvemos x de $Ux=y$ por sustitución hacia atrás

Ejemplo 1.2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Primero calculamos las matrices L y U. Como $A=LU$, entonces:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que resolver el sistema $Ly=b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por sustitución hacia adelante y obtenemos $y_1 = -1$, $y_2 = 4$, $y_3 = -13$. Ahora, resolvemos el sistema $Ux=y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por sustitución hacia atrás y obtenemos $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = -\frac{3}{5}$, $x_3 = \frac{13}{15}$ (Solución del sistema inicial $Ax=b$)

Nota:
No siempre podemos obtener una factorización LU para una matriz regular. Solo se podrá si $a_{11} = l_{11}u_{11} \neq 0$ y L, U son regulares

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matriz regular, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Para cualquier $b \in \mathbb{R}^N$, el método de Gauss para el correspondiente sistema de ecuaciones lineales puede completarse en el paso N-ésimo.

(ii) A admite una factorización LU.

(iii) Las N submatrices principales de A son regulares.

Teorema

Sea A una matriz regular, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) El método de Gauss con pivotaje es factible, para cualquier sistema de ecuaciones lineales que tenga a A por matriz de coeficientes.

(ii) Salvo la eventual permutación de algunas filas, A admite factorización LU.

- Factorización de Doolittle: En el sistema $LUx=b$, los coeficientes de la diagonal de L son 1, es decir, $l_{11} = \cdots = l_{NN} = 1$

- Factorización de Crout: En el sistema $LUx=b$, los coeficientes de la diagonal de U son 1, es decir, $u_{11} = \cdots = u_{NN} = 1$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & -4 & 3 \\ 5 & -8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

vamos a usar la factorización de Crout:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & -6 \\ -1 & 4 & -4 & 3 \\ 5 & -8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

En la fila 1 obtenemos que:

$$l_{11} = 1, \quad u_{12} = -2, \quad u_{13} = 0, \quad u_{14} = 3$$

De la fila 2 obtenemos que:

$$l_{21} = -2, \quad l_{21}u_{12} + l_{22} = 3 \Leftrightarrow l_{22} = -1$$
$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 1 \Leftrightarrow u_{23} = -1$$
$$l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = -6 \Leftrightarrow u_{24} = 0$$

En la fila 3 de A obtenemos que:

$$l_{31} = -1, \quad l_{31}u_{12} + l_{32} = 4 \Leftrightarrow l_{32} = 2$$
$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = -4 \Leftrightarrow l_{33} = -2$$
$$l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + l_{33}u_{34} = 3 \Leftrightarrow u_{34} = -3$$

En la fila 4 de A obtenemos que:

$$l_{41} = 5, \quad l_{41}u_{12} + l_{42} = -8 \Leftrightarrow l_{42} = 2$$
$$l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43} = 4 \Leftrightarrow l_{43} = 6$$
$$l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + l_{44} = 0 \Leftrightarrow l_{44} = 3$$

- Matriz definida positiva: Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, se dice que es definida positiva si $x^T A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

- Factorización tipo Cholesky: Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matriz simétrica y definida positiva. Entonces existe una matriz triangular superior $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ con coeficientes positivos en su diagonal principal y de forma que $A = U^T U$

Una matriz cuadrada A es simétrica y definida $\Leftrightarrow$ Admite una factorización Cholesky

2. Métodos iterativos: métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

Métodos iterativos: convergencia y consistencia

Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regular y un vector $b \in \mathbb{R}^N$, entonces tenemos un sistema de ecuaciones lineales cuadrado y unisolvente $Ax = b$

- Método iterativo: Sean $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$, x_0, $c \in \mathbb{R}^N$, entonces se define al método iterativo como:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = Bx_{n-1} + c \end{cases}$$

- Consistencia: Sea x la solución del sistema, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

$$\Downarrow \quad (u \in \mathbb{R}^N \mapsto Bu + c \in \mathbb{R}^N \text{ continua})$$

$$x = Bx + c$$

Entonces se dice que hay consistencia del método con el sistema

La consistencia del método iterativo con el sistema equivale a:

$$c = (I - B) A^{-1} b$$

Si el método iterativo converge a la solución del sistema, entonces el método es consistente con el sistema.

Ejemplo

Sea $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matriz identidad de orden N y sea $b \in \mathbb{R}^N$. Dados el sistema de ecuaciones lineales y el método iterativo:

$$2Ix = b \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = -x_{n+1} + c \end{cases}$$

Entonces, el método es consistente con el sistema si, y sólo si,

$$A = 2I, \quad B = -I$$

$$c = (I - B) A^{-1} b = (2I)(2I)^{-1} b = b$$

$$c = b$$

y converge a la solución del sistema cuando, y solo cuando,

$$c = 2x_0$$

Proposición

Supongamos que $N \geq 1$, $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ con A regular, $x_0, b, c \in \mathbb{R}^N$ y que el método iterativo

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = Bx_{n-1} + c \end{cases}$$

es consistente con el sistema unisolvente $Ax = b$. Entonces método iterativo converge a la solución del sistema cualquiera sea $x_0 \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \rho(B) < 1$

Generación de métodos iterativos

Sean $A, M, N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ con A y M regulares de forma que $A = M - N$ y sean $b, x_0 \in \mathbb{R}^N$. Consideremos el sistema

$$Ax = b$$

y el método iterativo

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = M^{-1}Nx_{n-1} + M^{-1}b \end{cases}$$

Entonces, el método iterativo converge a la solución del sistema, cualquiera sea $x_0 \in \mathbb{R}^N \iff \rho(M^{-1}N) < 1$

Proposición

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$, con A regular, sean $b, c \in \mathbb{R}^N$ y consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

y el método iterativo

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = Bx_{n-1} + c \end{cases}$$

que supondremos que converge hacia la solución del sistema para cualquier estimación inicial $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Entonces existe una descomposición de la matriz de coeficientes

$$A = M - N$$

con $M, N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y M regular, tales que

$$B = M^{-1}N \qquad c = M^{-1}b$$

> **Nota**
> Como en ocasiones es complejo calcular M^{-1}, trabajaremos con un método iterativo equivalente:
> $$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = M^{-1}x_{n-1} + M^{-1}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow Mx_n = x_{n-1} + b \end{cases}$$

Veamos los métodos iterativos más populares. Para ello, tomamos $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y definimos las matrices diagonales y triangulares:

$$D := \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz A verifica la hipótesis adicional: $a_{11}a_{22}\cdots a_{NN} \neq 0$

$$E := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & -a_{N3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$F := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & -a_{12} & -a_{1N-1} & -a_{1N} \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{N-2\,N-1} & -a_{N-2N} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{N-1N} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Método de Jacobi:

$$A = M - N \quad \text{con } M := D \text{ y } N := E + F$$

por lo que tenemos que:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow Dx_n = (E+F)x_{n-1} + b \end{cases}$$

Expresando en coordenadas:

$$x_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0N})^T$$

$$i = 1, \cdots, N \Rightarrow x_{ni} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1 \wedge j \neq i}^{N} a_{ij} x_{n-1j} \right)$$

- Método de Gauss - Seidel:

$$A = M - N \text{ con } M := D - E \text{ y } N := F$$

por lo que tenemos que

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow (D-E)x_n = Fx_{n-1} + b \end{cases}$$

Expresando en coordenadas:

$$x_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0N})^T$$

$$i = 1, \cdots, N \Rightarrow x_{ni} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_{nj} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_{n-1j} \right)$$

Ejemplo

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Por lo que su solución $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$

Usemos los métodos de Jacobi y Gauss - Seidel para ver si convergen a esta solución. Supongamos una estimación inicial $x_0 = [0,0,0]^T$.

Despejamos x_i, de la ecuación i-ésima $(i = 1,2,3)$ y obtenemos que:

$$\begin{cases} x_1 = 4.5 - 0.5x_2 - 1.5x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 = \frac{11}{6} - \frac{1}{6}x_1 - \frac{3}{2}x_2 \end{cases}$$

Esto se hace en ambos métodos. Ahora:

- Jacobi:

el algoritmo parte de x_0 y para cada $n \geq 1$

$$\begin{cases} x_{n1} = 4.5 - 0.5x_{n-12} - 1.5x_{n-13} \\ x_{n2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_{n-11} - \frac{2}{3}x_{n-13} \\ x_{n3} = \frac{11}{6} - \frac{1}{6}x_{n-11} - \frac{3}{2}x_{n-12} \end{cases}$$

obteniendo (truncado):

$$\begin{cases} x_{01} = 0 \quad x_{02} = 0 \quad x_{03} = 0 \\ x_{11} = 4.5 \quad x_{12} = -0.33 \quad x_{13} = 1.83 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{201} = 1.208 \quad x_{202} = -1.67 \quad x_{203} = 2.702 \end{cases}$$

- Gauss - Seidel:

con la estimación inicial x_0, para todo $n \geq 1$ tenemos que:

$$\begin{cases} x_{n1} = 4.5 - 0.5x_{n-12} - 1.5x_{n-13} \\ x_{n2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_{n1} - \frac{2}{3}x_{n-13} \\ x_{n3} = \frac{11}{6} - \frac{1}{6}x_{n1} - \frac{3}{2}x_{n2} \end{cases}$$

con lo que se generan (truncando) los datos numéricos:

$$\begin{cases} x_{n1} = 4.5 - 0.5x_{n-1\,2} - 1.5x_{n-1\,3} \\ x_{n2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_{n1} - \frac{2}{3}x_{n-1\,3} \\ x_{n3} = \frac{11}{6} - \frac{1}{6}x_{n1} - \frac{3}{2}x_{n2} \end{cases}$$

Por lo que en este sistema Gauss-Seidel es más eficiente, pero no en general.

Proposición (Medida de la velocidad de convergencia)

Sea el sistema consistente:

$$Ax = b$$

Método iterativo convergente a la solución del sistema para cualquier estimación inicial (no necesariamente Jacobi o Gauss-Seidel). Dado x_0:

$$n \geq 1 \Rightarrow x_n = Bx_{n-1} + c$$

$\rho(B) < 1$ consistencia

$$(I - B)x = c$$

compatible determinado y con la misma solución que $Ax = b$.

Demostración de la última proposición: norma y su matricial inducida, $\|B\| < 1$

$n \geq 1$ $\qquad \|x_n - x\| \leq \|B\|^n \|x_0 - x\|$

Cuanto menor sea $\|B\|$ mejor será la convergencia de la sucesión de iteradores hacia la solución del sistema. Puede probarse que si $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, entonces:

$$\rho(A) = \inf \{ \|A\| \;/\; \|\cdot\| \}$$

Aunque A es real, el resultado es complejo. Es esperable que cuanto menor sea $\rho(B)$, mejor será la convergencia de la sucesión de iteradores hacia la solución del sistema.

Sistemas en los que la relación de orden entre los radios espectrales de la matriz $M^{-1}N$ y para el método de Jacobi y Gauss-Seidel van en distintos sentidos.

Cuanto menor sea $\rho(M^{-1}N)$, mejor será la convergencia de la sucesión de iteradores hacia la solución del sistema.

- Diagonalmente estrictamente dominante: Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, diremos que A es diagonalmente estrictamente dominante si:

$$i = 1, \dots, N \Rightarrow \sum_{j=1 \wedge j \neq i}^{N} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matriz diagonalmente estrictamente dominante. Entonces los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel, para todo sistema de ecuaciones lineales que tenga como matriz de coeficientes A, convergen hacia su solución, independiente de la estimación inicial que se fije.

(El recíproco es falso, basta con considerar cualquier sistema en el que la matriz de coeficientes sea la matriz A_1 (o A_2) del penúltimo ejemplo)