Cadenas de Markov

Sean $s_1, \dots, s_k$ un número finito de estados donde una partícula, individuo... puede estar con cierta probabilidad.

Llamemos $u^i = P\{$ Partícula en el estado $i\}$, entonces tenemos un vector:

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^k \end{pmatrix}$$

verificando:

1) $0 \leq u^i \leq 1$
2) $\sum_{i=1}^{k} u^i = 1$

(son probabilidades)

Llamaremos $\Delta = \{ u \in \mathbb{R}^k : \text{verifican } ① \text{ y } ② \}$

Teorema: sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}$, donde cada $a_{ij} = P($individuo de la clase j pase a la clase $i)$, $u = (u^i)_{i=1,\dots,k}$, el vector de estados inicial, y $v = (v^i)_{i=1,\dots,k}$ el vector estado tras el proceso de cambio, entonces:

$$Au = v$$

Planteamiento dinámico: Si tenemos u_n = vectores de estado tras aplicar n-veces el proceso, entonces

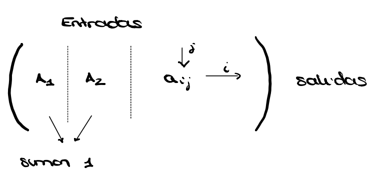
$$u_{n+1} = Au_n, \quad u_n \in \Delta$$

por lo que tenemos un sistema dinámico en Δ.

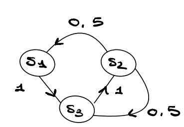
Nota: si $e_1, \dots, e_k$ son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^k$, entonces, $A e_j = A_j$ $\forall j \in \{1,\dots,k\}$, donde A_j es la columna j-ésima de la matriz.

Una matriz se dice de estado o de probabilidad o estocástica si $\forall j \in \{1,\dots,k\}$, $A_j \in \Delta$.

Identificación usual de los elementos de la matriz



P_j:



$$\Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \end{array}$$

Probabilidad $s_1 \longrightarrow s_3$

Sea A una matriz de estado y consideremos $u_{n+1} = Au_n$, $u_n \in \Delta$. Se dice que dicho sistema dinámico está totalmente conectado si $a_{ij} > 0$, $\forall i, j$

El grafo estaría totalmente conectado

Teorema: En una cadena totalmente conectada, el sistema dinámico $u_{n+1} = Au_n$, $u_n \in \Delta$ tiene un único punto fijo, u^*, atractor global, es decir, $\forall u_0 \in \Delta$, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} u^*$. Además, usando el T. punto fijo de Banach, se tiene que es asintóticamente estable.

Repaso: Normas vectoriales

Definimos norma como una aplicación $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

1) $\|u\| \geq 0$ $\quad (\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0)$
2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Toda norma en un espacio vectorial define una distancia $d(u,v) = \|u - v\|$.

Lema: $\exists \alpha \in (0,1) : \|Av\|_1 \leq \alpha \|v\|_1, \ \forall v \in \Sigma_0$ $\quad (\Sigma_m = \{u \in \mathbb{R}^K : u^1 + \cdots + u^K = m\}$ e. vectorial$)$.

Lema: sean $\alpha_1, \dots, \alpha_K \in \mathbb{R}$: $|\alpha_1 + \cdots + \alpha_K| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_K| \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, K\}$, α_i tiene el mismo signo.

Llamaremos distribución estable a una matriz estocástica, A, conectadas al valor u^*. Además, se tiene que

$$u^* \in \overset{\circ}{\Delta} = \{u \in \mathbb{R}^K : 0 < u^i < 1, \ \sum_{i=1}^{K} u^i = 1\}$$

Proposición: u^* es un vector propio asociado al valor $\lambda = 1$ y es el único verificando $u^* \in \Sigma_1$. Además, para todo dato inicial, $x_0 \in \mathbb{R}^K$, la sucesión dada por $x_{n+1} = A x_n$, verifica que $x_n \longrightarrow m u^*$, donde $m = x_0^1 + x_0^2 + \cdots + x_0^K$.

Lema: La aplicación $A : \Sigma_m \longrightarrow \Sigma_m$ es contrativa y tiene un único punto fijo mu^*.

Si A es una matriz diagonalizable:

$A = PDP^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_K \end{pmatrix} \qquad \text{entonces} \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Radio Espectral

El comportamiento asintótico vendrá determinado por el mayor valor en módulo de los vectores propios.

Un valor propio λ se dice principal si $|\lambda| \geq |\mu|$, $\forall \mu \in \nabla$, donde ∇ es el espectro de la matriz (los valores propios).

El valor propio se dice dominante si es algebraicamente simple y, además, $|\lambda| > |\mu|$, $\forall \mu \in \nabla \setminus \{\lambda\}$.

Ej: $\lambda = 1$ es principal en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma = -4$ es dominante en $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Sea A una matriz real y consideramos

$$x_{n+1} = A x_n, \quad x_n \in \mathbb{R}^K$$

entonces la presencia de un valor propio dominante tiene consecuencias sobre el s.d. anterior.

Teorema: sea $\lambda_1 \in \nabla(A) \cap \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1) λ_1 es valor propio dominante

2) λ_1 es geométricamente simple y para cada $x_0 \in \mathbb{R}^K$, $\exists v \in \mathbb{R}^K$, vector propio asociado a λ tal que $\frac{1}{\lambda^n} x_n \longrightarrow v$

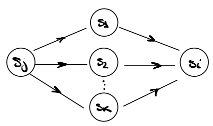
Si A es una matriz estocástica totalmente conectada, entonces u^*, la distribución estable, es un vector propio asociado a $\lambda = 1$.

Proposición: Sea A una matriz estocástica, entonces $\lambda = 1$ es un valor propio.

Proposición: En una matriz estocástica totalmente conectada, $\lambda = 1$ es un valor propio dominante.

La matriz iterada

Sea A matriz de estados, $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = P\{i \rightarrow j\}$. Si pensamos ir de j a i en dos pasos



$$\begin{array}{r} a_{j1} a_{1i} + \\ a_{j2} a_{2i} + \\ \hline (a_{1i} \ a_{2i} \ \cdots) \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

luego $P\{j \xrightarrow[\text{2 pasos}]{} i\} = [A^2]_{ij}$

En general, $P\{j \xrightarrow[\text{n pasos}]{} i\} = [A^n]_{ij}$.

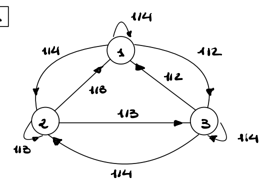
Lema: Si A es una matriz de estados, entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n es una matriz de estados.

Def: Sea una matriz A de entradas positivas, es decir, $[A]_{ij} \geq 0$, $\forall i,j$, se dice ergódica si $\exists\, p \in \mathbb{N}$ tal que $[A^p]_{ij} > 0$.
El índice p tiene que ser fijo independientemente de i, j.

Si una matriz es de estados y ergódica, entonces la iterada A^p es de estados completamente conectados.
Teorema: Sea A una matriz de estados ergódica, entonces $\lambda = 1$ es un valor propio dominante y el correspondiente vector propio puede tomarse en $u_k \in \mathring{\Delta}$.

Ejercicios de ejemplo

$\boxed{1}$



$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1/4-\lambda & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{5}{6}\lambda^2 + \frac{3}{16}\lambda - \frac{1}{48}$$

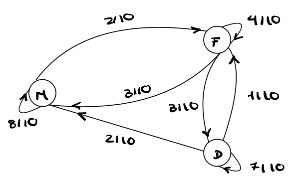
$\Rightarrow \lambda = 1,\ \lambda = -\frac{1}{4},\ \lambda = \frac{1}{12} \Rightarrow \lambda = 1$ es el valor propio dominante.

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -3/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & -2/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ \mu (1, \tfrac{3}{4}, 1) : \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$v = \frac{(1, \frac{3}{4}, 1)}{\|(1, \frac{3}{4}, 1)\|} = \left(\frac{4}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11} \right) \Rightarrow \forall u_0 \in \Delta,\ \{u_n\} \longrightarrow v$$

$$\{88 v_n\} \longrightarrow 88 v = (32, 24, 32)$$

$\boxed{3}$



$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \begin{cases} \lambda = 1 \longleftarrow \text{v.p. dominante} \\ \lambda = \frac{9+\sqrt{13}}{20} \\ \lambda = \frac{9-\sqrt{13}}{20} \end{cases}$$

Claramente, es una matriz ergódica:

$M \longrightarrow M+F \longrightarrow M+D+F$

$D \longrightarrow M+D+F$ $\Rightarrow A^2 >> 0 \Rightarrow \lambda = 1$ v.p. dominante.

$F \longrightarrow M+D+F$

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & -0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ \lambda (5/2, 1, 1) : \lambda \in \mathbb{R} \} = L(\{ (\tfrac{5}{9}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{2}{9}) \})$$

$$\begin{pmatrix} M_n \\ D_n \\ F_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$