1. Para cualesquiera $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, calcular detalladamente, indicando las fórmulas aplicadas, la expresión de la varianza:

$$\exists E[X_i^2], i = 1, ..., n \implies \exists Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i \neq j}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Para demostrarlo, recordemos primero la fórmula de la varianza de una variable aleatoria. Sea X una variable aleatoria arbitraria, su varianza se calcula como:

$$Var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2] - E[X]^2$$

Aplicando esta fórmula a nuestra combinación lineal de variables aleatorias tendríamos:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^2\right] - \left(E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]\right)^2$$

Desarrollando el primer sumando, obtendríamos:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j X_i X_j\right] - \left(E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]\right)^2$$

Ahora podemos aplicar la propiedad de linealidad de la esperanza:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E\left[X_i X_j\right] - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]\right)^2$$

Desarrollamos ahora el segundo sumando, y obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E\left[X_i X_j\right] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E\left[X_i\right] E[X_j]$$

Como las sumatorias tienen mismos índices, podemos combinarlas en una sola, obteniendo de esta forma:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \left(E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]\right)$$

Recordemos que la covarianza de dos variables aleatorias, X, Y viene definida como:

$$Cov(X, Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Luego, podemos sustituir en el desarrollo de nuestra ecuación de la siguiente forma (Aplicando definición de covarianza):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \left(E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Por último, recordemos que la covarianza verifica la siguiente propiedad:

$$Cov(X, X) = Var(X)$$

Por lo que podemos reescribir la sumatoria de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Notemos que en todo este proceso, hemos necesitado la hipótesis de que $\exists E[X_i^2], i = 1, ..., n$ para que exista la varianza de cada una de las variables.

Luego, hemos demostrado que si $\exists E[X_i^2], i = 1, ..., n$, entonces existe la varianza de la combinación lineal de dichas variables, independientemente del valor de $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ y su valor es:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

$\square$

Como curiosidad, notemos que si las variables son independientes, entonces su covarianza es 0, por lo que obtendríamos la expresión esperada para la varianza de una combinación lineal de variables aleatorias independientes que es:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$