Ejercicios de capital

Se resuelven usando una de las siguientes fórmulas:

- $C_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{100}\right) C_n$
- $C_n = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n C_0$

interés — año n — capital inicial — capital año n

Modelo Malthus

Modeliza la evolución de la población de una determinada especie en un hábitat sin límite de alimentos:

$$x_{n+1} = (1 + \alpha_N - \alpha_M)\, x_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

individuos en el periodo n+1 — Tasa de natalidad — Tasa de mortalidad

- La razón de crecimiento: $1 + \alpha_N - \alpha_M$
- Tasa de crecimiento: $\alpha = \alpha_N - \alpha_M$
- Podemos reescribir la ecuación como: $x_{n+1} = (1+\alpha) x_n = R x_n$ ó $x_n = x_0 (1+\alpha)^n$

  - $\alpha > 0$ $(R > 1)$ $\Rightarrow$ La población crece sin límites
  - $-1 \leq \alpha < 0$ $(R < 1)$ $\Rightarrow$ La población decrece hasta la extinción
  - $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ La población se mantiene constante

¿Cómo resolver una ecuación en diferencias lineal de primer orden?

Para resolver la ecuación $x_{n+1} = a x_n + b$ observamos que si $a \neq 1$, la ecuación tiene una única solución constante. Para encontrar dicha solución basta con sustituir:

$$x_* = a x_* + b \Rightarrow x_* = \frac{b}{1-a}$$

La solución general será $x_n = C a^n + x_*$, donde $C \in \mathbb{R}$

En el caso $a = 1$ puede ocurrir:

- $b \neq 0$ $\Rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones constantes y diverge a $\pm\infty$, dependiendo de si $b > 0$ o $b < 0$.
- $b = 0$ $\Rightarrow$ Todas las soluciones de la ecuación son constantes

Comportamiento asintótico de las soluciones:

- Si $|a| < 1 \Rightarrow \{x_n\} \longrightarrow x_*$
- Si $|a| > 1 \Rightarrow \{x_n\}$ no converge
- Si $a = -1 \Rightarrow \{x_n\}$ oscila alrededor de x_* (sin convergencia)

El modelo de Verhulst

Ecuación logística: $x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k)$, $\mu > 0$

El **tiempo medio de recuperación** se define como $\frac{1(x_0 - x_1) + 2(x_1 - x_2) + 3(x_2 - x_3) + \dots}{x_0} = \frac{1}{x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} n(x_{n-1} - x_n) =$

$= \boxed{\frac{1}{1-r}}$ (serie geométrica)

- $\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = \frac{a}{1-r}$
- $\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1-r}$

Tema 2

Si preguntan el comportamiento:

1) Calculamos puntos fijos
2) Vemos si es asintóticamente estable ⇒ Atractor local y estable.
3) Atractor local ⇒ cualquier x_0 cercano a p converge a p

Para ver si es asintóticamente estable:

- $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$ asintóticamente estable
- $|f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow$ inestable
- $|f'(\alpha)| = 0$:

  Miramos $f''(\alpha)$:

  - $f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ Inestable
  - $f''(\alpha) = 0$ y miramos $f'''(\alpha)$:
    - $f'''(\alpha) < 0 \Rightarrow$ Asintóticamente estable
    - $f'''(\alpha) > 0 \Rightarrow$ Inestable

Si te preguntan que describas la solución de un sistema dinámico discreto tipo $x_{n+1} = F(x_n)$ dado x_0 es sustituir recursivamente

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2+x} \\ x_0 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x_0) = x_1 = \frac{1}{2+\frac{1}{2}} \Rightarrow x_2 = F(x_1) = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

Teorema: Si $I \subset \mathbb{R}$ intervalo y α punto equilibrio y atractor $\Rightarrow \alpha$ estable

Para ciclos es igual pero multiplicando derivadas.

Tema 3

Si preguntan convergencia renta nacional debe cumplirse: $\begin{cases} p(1) > 0 \\ p(-1) > 0 \\ p(0) < 1 \end{cases}$ (vale para el comportamiento asintótico de cualquier grado 2).