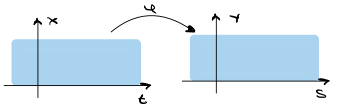
Ejercicios de Exámenes

① Sea $\overset{\frac{dx}{dt}}{x'} = a(t)x^5 + b(t)x$, con $a, b : I \to \mathbb{R}$.

a) $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y se definen $\begin{cases} s = t \\ y = x^{\alpha} \end{cases}$. Encuentra los dominios del plano D y $\hat{D}$ de manera que la transformación $(t,x) \in D \longmapsto (s,y)$ sea un cambio admisible para la ecuación anterior.



Tenemos $\varphi : \begin{cases} s = t \\ y = x^{\alpha} \end{cases}$ tal que $(t,x) \in D \longmapsto (s,y) \in \hat{D}$. Escogemos como $D = \mathbb{R} \times]0, +\infty[\Rightarrow \hat{D} = D$

Las funciones $\begin{cases} \varphi_1(t,x) = t \\ \varphi_2(t,x) = x^{\alpha} \end{cases}$ están en $C^1(D)$. Su inversa $\psi : \begin{cases} \psi(s,y) = t \\ \psi(s,y) = y^{1/\alpha} \end{cases}$, tiene componentes en $C^1(\hat{D})$

Luego, para probar que es admisible:

$$\frac{d\varphi_1}{dt}(t,x) + \frac{d\varphi_1}{dx}(t,x)\overset{x'}{f(t,x)} \neq 0 \quad , \forall (t,x) \in D \Rightarrow 1 + 0 \cdot f(t,x) = 1 \neq 0 \quad ✓$$

Las hipótesis que debe cumplir son:

1) $x' = f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua

2) $\varphi : \Omega \to \hat{\Omega}$ difeomorfismo C^1 con inversa $\psi : \hat{\Omega} \to \Omega$ también C^1

3) $\frac{d\varphi_1}{dt}(t,x) + \frac{d\varphi_1}{dx}(t,x) f(t,x) \neq 0, \forall (t,x) \in \Omega$

b) Transforma la ecuación anterior mediante el cambio del apartado anterior. ¿Para qué valores de α se obtiene una ecuación lineal?

Tenemos $x' = a(t)x^5 + b(t)x$ y tenemos que aplicar el cambio $\varphi : \begin{cases} s = t \\ y = x^{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{ds} = y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} x'}{1} \Rightarrow$

Recuerda que x es una función que depende de t

$\Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}(a(t)x^5 + b(t)x) = \alpha \cdot a(t)x^{\alpha+4} + \alpha \cdot b(t)x^{\alpha}$

Una ecuación lineal es de la forma

$x' = a(t)x + b(t)$

con $a, b : I \to \mathbb{R}$ continuas en I abierto y $D = I \times \mathbb{R}$

Vamos a relacionar y con su derivada. Para ello usamos que $x = y^{1/\alpha}$, luego:

$$y' = \alpha \cdot a(t)\, y^{\frac{\alpha+4}{\alpha}} + \alpha b(t)\, y^{\frac{\alpha}{\alpha}} = \alpha a(t)\, y^{\frac{\alpha+4}{\alpha}} + \alpha b(t) y$$

Para que sea lineal necesitamos que $\frac{\alpha+4}{\alpha} = 0$ ó $\frac{\alpha+4}{\alpha} = 1$. Como la segunda posibilidad es imposible, tomamos la primera $\Rightarrow \boxed{\alpha = -4}$, luego:

$$y' = \underbrace{\alpha a(t)}_{\hat{b}(t)} + \underbrace{\alpha b(t)}_{\hat{a}(t)} y$$

c) Resuelve la ecuación tomando $a(t) = -t/4$, $b(t) = 1/4$, $I = \mathbb{R}$ y sabiendo que $x(2) = 1$. ¿En qué intervalo está definida?

En principio, la ecuación está definida en todo $\mathbb{R}^2$, pero para aplicar el cambio de b) nos restringiremos al dominio D previamente definido. Luego, la ecuación se transforma en $y' = -4a(t) - 4b(t)y = \underbrace{t}_{\hat{b}(t)} - \underbrace{y}_{\hat{a}(t)y} \Rightarrow \begin{matrix} a(t) = -1 \\ b(t) = t \end{matrix}$

Es la nueva $\hat{a}(s)$

•) $A(t) = \int a(s)ds \overset{s=t}{=} -t$

•) $y(t) = Ke^{-t} + e^{-t}\int e^t \cdot t\, dt = \left[\begin{matrix} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{matrix}\right] = Ke^{-t} + e^{-t}\left(te^t - \int e^t dt\right) =$

$= Ke^{-t} + e^{-t}(te^t - e^t) = Ke^{-t} + \cancel{e^{-t}} \cdot \cancel{e^t}(t-1) = Ke^{-t} + t - 1$

La ecuación lineal completa se resuelve como:

$$x(t) = Ke^{A(t)} + e^{A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)ds$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

Usando que $x(2) = 1$, tenemos que:

$y(2) = 1 \Leftrightarrow Ke^{-2} + 2 - 1 = 1 \Leftrightarrow Ke^{-2} = 0 \Leftrightarrow K = 0$

Luego, $y(t) = t - 1 \Rightarrow$ Deshaciendo el cambio $\psi : \begin{cases} s = t \\ x = \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t-1}}$

Restringimos el dominio puesto que $t \neq 1$ y $t - 1 \geq 0$, luego:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t-1}} \quad , x \in \mathbb{R},\ t \in]1, +\infty[}$$

② Tenemos la ecuación $e^y + \cos x + (xe^y + 2y)y' = 0$

a) $y(0) = 1$

$P(x,y) Q(x,y) y' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}[U(x,y)] = 0 \Leftrightarrow U(x,y) = cte \Rightarrow y(x)$. Sean $P, Q \in C^1(D)$ $D \subset \mathbb{R}^2$ funciones tales que $\exists U$ potencial $\in C^1(D)$ verificando $\frac{du}{dx} = P$, $\frac{du}{dy} = Q$, $\forall (x,y) \in D \Rightarrow$ Tiene que ocurrir "La condición de exactitud" $\boxed{\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}}$

condición necesaria para que exista U

Un dominio Ω es estrellado si $\exists x_* \in \Omega$ tal que $\overbrace{[x, x_*]}^{\text{segmento}} \in \Omega$, $\forall x \in \Omega$.

"x_* es un foco que ilumina toda la habitación (Ω)"

Teorema: Sea Ω un dominio estrellado de $\mathbb{R}^2$ y $P, Q \in C^1(\Omega)$ que verifican la condición de exactitud. Entonces,

$$\exists\, u \in C^2(\Omega) : \frac{du}{dx} = P \ \text{y} \ \frac{du}{dy} = Q \ \text{en} \ \Omega$$

La ecuación diferencial exacta

Llamamos ecuación diferencial exacta a $P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0$, con $P, Q \in C^1(\Omega)$. Considerando una condición inicial $y(x_0) = y_0$, pedimos:

1) $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ en Ω

2) $Q(x_0, y_0) \neq 0$

Como $(x_0, y_0) \in \Omega$ (abierto) podemos tomar $B \subset \Omega$.

Bola de centro (x_0, y_0)

Como B es estrellado y se cumple la condición de exactitud $\Rightarrow \exists\, u \in C^2(B) : \frac{du}{dx} = P, \ \frac{du}{dy} = Q$ en B

Por tanto, en B la ecuación se puede describir como $\frac{d}{dx}[u(x,y)] = 0 \Rightarrow u = cte$. Luego, tenemos que hacer que se cumpla la condición inicial

$$c = u(x_0, y_0)$$

La curva que nos interesa es:

$$u(x,y) = u(x_0, y_0)$$

Si queremos la solución $y(x)$, debe cumplirse:

$$\frac{du}{dy}(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) \neq 0$$

y por tanto,

$$y'(x) = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Tenemos la ecuación $\underbrace{e^y + \cos x}_{P} + \underbrace{(xe^y + 2y)}_{Q}\,y' = 0$. Claramente, $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Veamos si cumple la condición de exactitud

·) $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \Rightarrow e^y = e^y \Rightarrow$ cumple la condición de exactitud.

Como $\mathbb{R}^2$ es un dominio estrellado (Por ser abierto, podemos tomar $B \subset \mathbb{R}^2$, B bola abierta) $\overset{\text{Teorema)}}{\Rightarrow} \exists\, u \in C^2(\mathbb{R}^2) : \frac{du}{dx} = P$ y $\frac{du}{dy} = Q$

Luego:

·) $\frac{du}{dx} = e^y + \cos(x) \Rightarrow u = \int (e^y + \cos x)\,dx = e^y \cdot x + \operatorname{sen}(x) + \varphi(y)$

·) $$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= xe^y + 2y \\ \frac{du}{dy} &= xe^y + \varphi'(y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2$$

Por lo que tenemos:

$$u(x,y) = xe^y + \operatorname{sen} x + y^2$$

Por otro lado, necesitamos que $Q(x_0, y_0) \neq 0$, $\forall (x_0, y_0)$. Tenemos $(x_0, y_0) = (0, 1) \Rightarrow Q(0,1) = 2 \neq 0$.

Nos interesa

$$u(x,y) = u(x_0, y_0) \Rightarrow u(x,y) = u(x_0, y_0) = 1$$

Por lo que la ecuación

$$xe^y + \operatorname{sen} x + y^2 = 1$$

define a $y = y(x)$ en un entorno de $x = 0$.

b) ¿Existe $y(x) : y(0) = 0$?

Tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} e^{y(x)} + \cos(x) + (xe^{y(x)} + 2y(x))\,y'(x) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow e^0 + \cos(0) = 2 \neq 0 \ !! \ \text{contradicción}$$

No existe porque debería ser una función $y = y(x)$ de clase C^1 en un entorno $x = 0$ que cumpliese lo anterior

③ Encontrar la solución de $\begin{cases} y'(x) = \pi y(x)^2 \\ y(0) = c \end{cases}$

Las ecuaciones de variables separadas son de la forma $\frac{dx}{dt} = x' = p(t)\,g(x)$, con $p: I \to \mathbb{R}$ y $g: J \to \mathbb{R}$ continuas en intervalos abiertos y $D = I \times J$. Se resuelve como $\frac{dx}{dt} = p(t)\,g(x) \Rightarrow \int \frac{dx}{g(x)} = \int p(t)\,dt$ y se despeja $x(t)$

Tenemos $y'(x) = \pi y(x)^2$, por lo que podemos tomar $p(t) = \pi$ y $q(y) = y(x)^2$ y aplicar variables separadas, luego:

$$\frac{dy}{dx} = p(t)q(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{y(x)^2} = \int \pi \, dx \Rightarrow \frac{-1}{y} = \pi x + K \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{\pi x + K}$$

Como $y(0) = C \Rightarrow y(0) = \frac{-1}{K} = C \iff K = -\frac{1}{C} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{-1}{\pi x - \frac{1}{C}} = \frac{-C}{C\pi x - 1}}$

Definimos, por último el dominio:

·) si $C > 0$

$$C\pi x - 1 = 0 \Rightarrow C\pi x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{C\pi} \Rightarrow D = \left]\frac{1}{C\pi}, +\infty\right[\times \mathbb{R}$$

·) si $C < 0$

$$D = \left]-\infty, \frac{-1}{\pi C}\right[\times \mathbb{R}$$

4) Dada la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = x(a - bx)$, $a, b > 0$ y el cambio de variable $\varphi: \begin{cases} s = \alpha t \\ y = \beta x \end{cases}$. Halla α y β para que se cumpla $\frac{dy}{ds} = y(1-y)$

Aplicando el cambio tenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt} = \frac{\beta \cdot (dx/dt)}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} x(a - bx) \overset{\text{Aplicando el cambio}}{=} \frac{y}{\alpha}\left(a - \frac{by}{\beta}\right) = y(1-y) \iff$$

$$\iff \alpha = a \text{ y } b = \beta\alpha \iff \boxed{\alpha = a \text{ y } \beta = \frac{b}{a}}$$

5) Indicando el dominio de la ecuación y el intervalo maximal de la solución obtenida, resuelve $\begin{cases} x' = x + \frac{t}{x^2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$. (Usa $y = x^\alpha$ adecuado para transformarlo en una ecuación lineal)

Nos sugieren usar $y = x^\alpha$, luego:

$$y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1} \cdot x' \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}\left(x + \frac{t}{x^2}\right) \Rightarrow y' = \alpha x^\alpha + \alpha t x^{\alpha-3} \Rightarrow y' = \alpha x^\alpha + \alpha t x^{1-\frac{3}{\alpha}}$$

Para que sea una ecuación lineal necesitamos que sea de la forma $y' = a(t)x + b(t) \Rightarrow 1 - \frac{3}{\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3}$

Por lo que tenemos la ecuación lineal: $y' = 3x^3 + 3t \Rightarrow y' = \underbrace{3}_{a(t)}y + \underbrace{3t}_{b(t)}$, luego, resolviéndolo:

$$y(t) = Ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int e^{-A(s)} b(s) ds \overset{t=s}{=} Ke^{3t} + e^{3t} \int e^{-3t} \cdot 3t \, dt = \left[\begin{matrix} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-3t}dt \Rightarrow v = \frac{e^{-3t}}{-3} \end{matrix}\right] = Ke^{3t} + e^{3t} \cdot \cancel{3} \cdot t \cdot \frac{e^{-3t}}{-\cancel{3}} - \int \frac{e^{-3t}}{-3} dt =$$

$$A(t) = \int a(t) dt = 3t$$

$$= Ke^{3t} - t\left(-\frac{1}{9}e^{-3t}\right) = Ke^{3t} + \frac{t}{9}e^{-3t}$$

Como $x(0) = 1$:

$$y(0) = K \cdot e^0 + \frac{0}{9}e^0 = 1 \iff K = 1 \qquad D = \mathbb{R} \times \left]0, \infty\right[$$

Luego:

$$y(t) = e^{3t} + \frac{t}{9}e^{-3t}$$

6) Encuentre una ecuación diferencial para las curvas $y(x)$ tal que para todo x de su intervalo de definición, el volumen generado al girar al rededor del eje de abscisas la curva $y(x)$ entre 0 y x sea igual al valor $y(x)$.

El volumen generado al girar alrededor del eje de abscisas viene dado por:
$$\int_a^b \pi f^2(x) dx$$

$$\int_0^x \pi y^2(x) dx = y(x) \iff \boxed{\pi y^2(x) x = y'(x)}$$

Resumen Factor integrante

Decimos que $\mu \in C^1(\Omega)$ es un factor integrante si:

1) $\mu(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$

2) $\frac{d(\mu P)}{dy} = \frac{d(\mu Q)}{dx}$, con $P, Q \in C^1(\Omega)$: $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$

(2) $\iff \mu_y P + \mu P_y = \mu_x P + \mu Q_x \Rightarrow \boxed{\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)}$ Ecuación factor integrante

Existen <u>3 métodos</u> de búsqueda del factor integrante:

1) $\underline{\mu(x,y) = m(x)}$

$\mu_x = m'(x)$, $\mu_y = 0$

sustituyendo en $\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$:

solo depende de x

$$-m'(x)\,Q(x,y) = m(x)\,(Q_x(x,y) - P_y(x,y)) \Longleftrightarrow \frac{m'(x)}{m(x)} = f(x) = \frac{P_x(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

Podemos escoger $m(x) = e^{F(x)}$: $F'(x) = f(x)$

2) $\underline{\mu(x,y) = m(y)}$

Análogo al anterior

3) $\underline{\mu(x,y) = m(x^2+y^2)}$

$\mu_x = 2x\,m'(x^2+y^2)$, $\mu_y = 2y\,m'(x^2+y^2)$

sustituyendo en $\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$:

$$m'(x^2+y^2)\left(2y\,P(x,y) - 2x\,Q(x,y)\right) = m(x^2+y^2)\left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m'(x^2+y^2)}{m(x^2+y^2)} = f(\varepsilon) = \frac{Q_x - P_x}{2yP - 2xQ}$$

solo depende de $\varepsilon = x^2+y^2$

Escogemos $m(x,y) = e^{F(x^2+y^2)}$

7) Dada la ecuación $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 3x$

i) Calcula su factor integrante dependiente de x

Llamemos $\frac{dy}{dx} = y'$, entonces tenemos $\underbrace{xy}_{Q}y' + \underbrace{y^2 - 3x}_{P} = 0$. Como nos piden el factor integrante dependiente de x tenemos $\mu(x,y) = m(x)$, luego:

$$\left.\begin{array}{l}\mu_x = m'(x)\\ \mu_y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{sustituyendo en } P\mu_y - Q\mu_x = \mu(Q_x - P_y) \Rightarrow -m'(x)\,Q(x,y) = m(x)\,(Q_x(x,y) - P_y(x,y)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m'(x)}{m(x)} = f(x) = \frac{Q_x - P_y}{Q}$$

Tomamos $m(x) = e^{F(x)}$, donde $F'(x) = f(x)$ y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\cdot)\ P(x,y) = y^2 - 3x \Rightarrow P_y(x,y) = 2y\\ \cdot)\ Q(x,y) = xy \Rightarrow Q_x(x,y) = y\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x} = f(x) \Rightarrow F(x) = \ln(x) \Rightarrow m(x) = e^{\ln(x)} \Rightarrow \boxed{\mu(x) = x}$$

ii) Calcula la solución explícita tal que $y(1) = 1$, dando su intervalo maximal.

Tenemos $\underbrace{xy}_{Q}y' + \underbrace{y^2 - 3x}_{P} = 0$ ecuación diferencial exacta. Necesitamos que cumpla la condición de exactitud $\left(\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}\right)$, pero tendríamos $\frac{dQ}{dx} = y \neq 2y = \frac{dP}{dy}$. Esto se puede solventar multiplicando cada miembro de la ecuación por x, donde obtenemos:

$$\underbrace{x^2y}_{Q}y' + \underbrace{xy^2 - 3x^2}_{P} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dx} = 2xy = \frac{dP}{dy} \Rightarrow \exists u \in C^2(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ dominio estrellado}: \frac{du}{dx} = P \text{ y } \frac{du}{dy} = Q$$

$\cdot)$ $\frac{du}{dx} = P = xy^2 - 3x^2 \Rightarrow u = \int xy^2\,dx - 3\int x^2\,dx = y^2\frac{x^2}{2} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + \varphi(y) = \frac{y^2x^2}{2} - x^3 + \varphi(y)$

$$\left.\begin{array}{l}\cdot)\ \frac{du}{dy} = Q = x^2y\\ \cdot)\ \frac{du}{dy} = x^2y + \varphi'(y)\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = K \ (K \text{ cte})$$

Por lo que $u(x,y) = \frac{y^2x^2}{2} - x^3 + K$ y como $y(1) = 1 \Rightarrow (x_0, y_0) = 1 \Rightarrow u(x,y) = u(x_0,y_0) = u(1,1) = \frac{1}{2} - 1 + K = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

Luego $u(x,y) = \frac{y^2x^2}{2} - x^3 + \frac{1}{2} = 0$. Despejando y obtenemos: $y = \pm\sqrt{2\frac{x^3 - 1/2}{x^2}}$, $x \neq 0$. Para que esté bien definida necesitamos:

$$\frac{2(x^3 - 1/2)}{x^2} > 0 \Rightarrow x^3 - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x^3 > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \sqrt[3]{1/2}$$

Por lo que, el intervalo maximal es $x \in \left]\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right[$.

8) Resuelve $\left\{\begin{array}{l} y - 4x^3 + (2y + x)y' = 0\\ y(0) = -1\end{array}\right.$

Tenemos $\underbrace{y - 4x^3}_{P} + \underbrace{(2y + x)}_{Q}y' = 0$ es una ecuación diferencial exacta. Veamos que cumple las condiciones:

$\cdot)$ $(x_0, y_0) = (0, -1) \Rightarrow Q(0,-1) = -1 \neq 0$

$\cdot)$ Condición de exactitud: $\frac{dP}{dy} = 1 = \frac{dQ}{dx} \Rightarrow \exists u \in C^2(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio estrellado: $\frac{du}{dx} = P$, $\frac{du}{dy} = Q$, por lo que:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{du}{dx} = P = y - 4x^3 = y\int dx - 4\int x^3\,dx = yx - x^4 + \varphi(y)\\ \left.\begin{array}{l}\frac{du}{dy} = Q = 2y + x\\ \frac{du}{dy} = x + \varphi'(y)\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2\end{array}\right\} \Rightarrow u(x,y) = yx - x^4 + y^2 + K. \text{ Como } u(x,y) = u(x_0,y_0) = u(0,-1) = 1 + K = 0 \Rightarrow K = -1$$

Por lo que $u(x,y) = yx - x^4 + y^2 - 1 = 0$

⑨ Dada la ecuación $x^4 = a^2(x^2-y^2)$: $a>0$

a) Encuentra una ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ que admita como soluciones a las funciones $y=y(x)$ definidas por dicha familia.

Definimos de forma implícita:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} \Rightarrow 4x^3 = a^2(2x-2yy') \\ a^2 = \dfrac{x^4}{x^2-y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^3 = \frac{x^4}{x^2-y^2}(2x-2yy') \Rightarrow y' = \frac{2y}{x} - \frac{x}{y}$$

Notamos que se trata de una homogénea $\Rightarrow y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$ y tomamos el cambio de variable $\varphi \equiv \begin{cases} u = y/x \\ t = x \end{cases}$

Las ecuaciones homogéneas son de la forma

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

y se resuelven usando el cambio $\varphi \equiv \begin{cases} y = x/t \\ s = t \end{cases}$ para transformarla a variables separadas.

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{p}\underbrace{(h(u)-u)}_{q}$$

$$h\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2y}{x} - \frac{x}{y} \Rightarrow h(u) = 2u - u^{-1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(h(u)-u) = \frac{1}{x}(u-u^{-1})$$

Luego:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(u-u^{-1}) \Rightarrow \int \frac{du}{u-u^{-1}} = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \int \frac{u}{u^2-1}\,du = \ln|x| \Rightarrow \frac{\ln|u^2-1|}{2} = \ln|x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|u^2-1| = \ln|x| + K \Rightarrow e^{\ln(u^2-1)^{1/2}} = e^{\ln(x)+K} \Rightarrow \sqrt{u^2-1} = x + e^K \Rightarrow u = \sqrt{(x+e^K)+1}$$

Deshacemos el cambio $(y = xu)$:

$$\frac{y}{x} = \sqrt{(x+e^K)+1} \Rightarrow y = \sqrt{(x+e^K)+1}\cdot x$$

Por otro lado, tenemos $y' = \frac{2y^2-x^2}{xy}$, cuyo único punto problemático es el $(0,0)$:

$\Omega_1 =]-\infty,0[\times]-\infty,0[$

$\Omega_2 =]-\infty,0[\times]0,+\infty[$

$\Omega_3 =]0,+\infty[\times]-\infty,0[$

$\Omega_4 =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

⑩ Dada la ecuación $x' = a(t)e^{rx} + b(t)$, $a,b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, $r>0$

a) Si $m \neq 0$, demostrar que $\exists$ difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y un dominio $\varphi : (t,x) \longrightarrow (s,y)$, $D = \varphi(\mathbb{R}^2)$.
$\begin{cases} s = t \\ y = e^{mx} \end{cases}$

Nos dan φ, que representa un cambio de variable del plano (t,x) al (s,y). Para ver que es correcto, necesitamos probar que cumple las siguientes hipótesis:

H1) $\overset{=x'}{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua

H2) $\varphi : \Omega \to \hat{\Omega}$ es un difeomorfismo de clase C^1 con inversa $\psi : \hat{\Omega} \to \Omega$ de clase C^1.

H3) $\frac{d\varphi_1}{dt}(x,t) + \frac{d\varphi_1}{dx} f(x,t) \neq 0, \quad \forall (x,t) \in \Omega$

H1) se verifica, ya que tenemos sumas de funciones continuas. Por otro lado, se observa fácilmente que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Además, su inversa $\psi : \begin{cases} t = s \\ x = \frac{\ln(y)}{m} \end{cases}$ que claramente es de C^1 $\Rightarrow \varphi$ define un difeomorfismo, con $\varphi(\mathbb{R}^2) = D = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$

b) Busca valores de m que hagan x' lineal

Sabemos que x' es lineal si es de la forma $x' = a(t)x + b(t)$.

Comenzamos aplicando el cambio de variable $\varphi \Rightarrow \frac{dy}{ds} = y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt} = \frac{e^{mx}\cdot mx'}{1} \Rightarrow y' = me^{mx}(a(t)e^{rx} + b(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = ma(t)e^{(m+r)x} + mb(t)e^{mx} = ma(t)e^{(m+r)\frac{\ln(y)}{m}} + mb(t)e^{\frac{m\ln(y)}{m}} \Rightarrow y' = ma(t)e^{\ln(y)+\frac{r}{m}\ln(y)} + m\,b(t)e^{\ln(y)} \Rightarrow y' = ma(t)e^{\ln(y)}e^{\frac{r}{m}\ln(y)} + mb(t)e^{\ln(y)} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = ma(t)y\cdot y^{r/m} + mb(t)y \Rightarrow y' = ma(t)y^{1+\frac{r}{m}} + mb(t)y$

Como necesitamos que sea lineal, $1 + \frac{r}{m} = 0 \Rightarrow \boxed{m = -r} \Rightarrow y' = \underbrace{mb(t)}_{\hat{a}(t)}y + \underbrace{ma(t)}_{\hat{b}(t)}$ ecuación lineal.

c) Resuelve $x' = 2e^x + 1$, con $x(0) = 0$

Tenemos que $\begin{cases} a(t) = 2 \\ r = 1 \Rightarrow m = -1 \\ b(t) = 1 \end{cases}$. Aplicando el cambio anterior tenemos $y' = -y - 2$ ecuación lineal. Resolviéndola:

$\hat{a}(t) = -1,\ \hat{b}(t) = -2$

•) $A(t) = \int \hat{a}(t)\,dt = -t$

•) $y(t) = Ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int e^{-A(s)}\hat{b}(s)\,ds = Ke^{-t} + e^{-t}\int e^{t}(-2)\,dt \Rightarrow Ke^{-t} + \cancel{e^{-t}e^{t}}^{1}(-2) \Rightarrow y = Ke^{-t} - 2$

Como $x(0) = 0 \Rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = Ke^{-0} - 2 = 1 \Leftrightarrow K\cancel{e^{-0}}^{1} = 3 \Leftrightarrow \boxed{K = 3} \Rightarrow y(t) = 3e^{-t} - 2$

Deshacemos el cambio y obtenemos

$e^x = 3e^{-t} + 2 \Rightarrow \ln(e^x) = \ln(3e^{-t} + 2) \Rightarrow \boxed{x = \ln(3e^{-t} + 2)}$ con dominio:

$3e^{-t} - 2 > 0 \Rightarrow 3e^{-t} > 2 \Rightarrow e^{-t} > \frac{2}{3} \Rightarrow -t > \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow t < \ln\left(\frac{2}{3}\right)(-1) \Rightarrow t < \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow t < \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow t \in]-\infty, \ln(3/2)[$

11 Se considera el campo de fuerzas:

$$f(x,y) = \left(\underbrace{\frac{2y}{x^2+y^2}}_{F1}, \underbrace{\frac{-2x}{x^2+y^2}}_{F2} \right)$$

a) ¿Se cumple la condición de exactitud?

Consideramos $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$. Diremos que el campo de fuerzas, F, admite un potencial $u: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla u = F$.

Hablamos, en tal caso, de campo de fuerza conservativo.

$$\frac{du}{dx} = F_1, \quad \frac{du}{dy} = F_2$$

La condición de exactitud consiste en que $\frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_2}{dx} \Rightarrow \frac{dF_1}{dy} = \frac{(x^2+y^2)2 - 2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2)(-2)+2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{dF_2}{dx}$

b) Se calcula el trabajo a lo largo de dos caminos, γ_1 y γ_2, que unen los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ y que están definidas por:

$$\gamma_1(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$$

$$\gamma_2(t) = (\cos(2t), -\operatorname{sen}(2t))$$

¿Se obtiene la misma cantidad?

Sea $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y consideramos la función $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$ (Trayectoria). El trabajo del campo de fuerzas a lo largo de γ se define como:

$$T = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Si el campo es conservativo $T = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))$.

•) $T_1 = \int_0^{\pi/2} \langle F(\gamma_1(s)), \gamma_1'(s) \rangle ds = \int_0^{\pi/2} -4\,dt = -4\frac{\pi}{2} = -2\pi$

$$F(\gamma_1(s)) = \left(\frac{2\operatorname{sen}(2t)}{\underbrace{\cos^2(2t)+\operatorname{sen}^2(t)}_{1}}, \frac{-2\cos(2t)}{\underbrace{\cos^2(2t)+\operatorname{sen}^2(t)}_{1}} \right)$$

$\gamma'(s) = (-2\operatorname{sen}(2t), 2\cos(2t))$

$\langle (2\operatorname{sen}(2t), -2\cos(2t)), (-2\operatorname{sen}(2t), 2\cos(2t)) \rangle = -4(\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(2t)) = -4$

• $T_2) = \int_0^{\pi/2} \langle F(\gamma_2(s)), \gamma_2'(s) \rangle ds = \int_0^{\pi/2} 4 = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi$

$F(\gamma_2(s)) = (-2\operatorname{sen}(2t), -2\cos(2t))$ $\qquad T_1 \neq T_2$

$\gamma_2'(s) = (-\operatorname{sen}(2t), -2\cos(2t))$

12 Dada la ecuación $x' = \sqrt{2\cos x}$

a) Describa los posibles dominios de definición de la ecuación.

La única restricción es que $2\cos(x) > 0 \Rightarrow \cos(x) > 0 \Rightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2\pi K, \frac{\pi}{2} + 2\pi K\right[, K \in \mathbb{Z}$

b) Discute si $x(t) = \frac{\pi}{2}$ puede considerarse solución

No, porque $\frac{\pi}{2} \notin D$.

c) Demuestra que si $x(t)$ es solución $\Rightarrow$ También es solución de la ecuación de segundo orden $x'' + \operatorname{sen}(x) = 0$. Discute si el recíproco es cierto.

$x' = \sqrt{2\cos(x)}$ (1) con $x(t)$ solución. Derivando ambas partes obtenemos:

$$x'' = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\cos(x)}}} \cdot \cancel{2}(-\operatorname{sen}(x))\cancel{x'} \Rightarrow x'' = -\operatorname{sen}(x) \qquad (2)$$

$\Leftarrow$ Contraejemplo:

$x(t) = 0$ es sol de (2), pero no de (1)

$x'(t) = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{2\cos 0} \Rightarrow 0 \neq 2$!!

13) Sea la ecuación $y'(x) = \frac{1}{x\,y(x)}$.

a) Haga un sketch de las curvas oscilantes (curvas de igual pendiente) del campo de direcciones.

b) Resuelve la ecuación para $y(1) = -2$

Podemos expresar $y'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y(x)} = p(x)\,g(y)$, luego podemos aplicar el método de resolución para ecuaciones de variables separadas:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y(x)} \Rightarrow \int y(x)\,dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln|x| + C \Rightarrow y = \sqrt{2\ln|x|} + C. \quad \text{Como } y(1) = -2 \Rightarrow y(1) = \sqrt{\cancel{2\ln(1)}}^{\,0} + C = -2$$

Luego, la solución es $y(x) = \sqrt{2\ln(x)} - 2$.

14) Sea la ecuación $x' = a(t)x + b(t)$ con $a, b \in C(\mathbb{R})$. Sean dos soluciones particulares u, v de esta ecuación. Se pide:

a) Si $\alpha u + \beta v$ es una nueva solución con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, encontre la relación que deben cumplir α, β.

Para que $\alpha u + \beta v$ sea solución tiene que cumplir:

$$(\alpha u + \beta v)' = a(t)(\alpha u + \beta v) + b(t) \Rightarrow \alpha u' + \beta v' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Por ser soluciones } u, v}}{=} \alpha(a(t)\cdot u + b(t)) + \beta(a(t)v + b(t)) = a(t)(\alpha u + \beta v) + (\alpha + \beta)b(t)$$

Luego, tenemos que: $\begin{cases} (\alpha u + \beta v)' = a(t)(\alpha u + \beta v) + b(t) \\ (\alpha u + \beta v)' = a(t)(\alpha u + \beta v) + (\alpha + \beta)b(t) \end{cases} \Rightarrow b(t) = (\alpha + \beta)b(t) \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 1}$ si $b(t) \neq 0$. En caso de $b(t) = 0$, cualquier relación es válida.

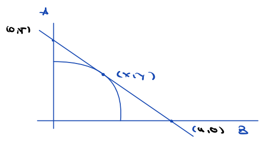
b) Si u, v, w son soluciones distintas, demuestre que la función $\frac{v-u}{w-u}$ es constante.

Tenemos $f(t) = \frac{v(t) - u(t)}{w(t) - u(t)}$. Como queremos probar que es constante $\Rightarrow f'(t) = 0$, por lo que:

$$f'(t) = \frac{(v' - u')(w - u) - (v - u)(w' - u')}{(w - u)^2} \underset{\text{como son soluciones}}{=} \frac{1}{(w-u)^2}\left[(a(t)v + \cancel{b(t)} - a(t)u - \cancel{b(t)})(w - u) - (a(t)w + \cancel{b(t)} - a(t)u - \cancel{b(t)})(v - u)\right] =$$

$$= \frac{1}{(w-u)^2}\left[\cancel{a(t)(v-u)(w-u) - a(t)(w-u)(v-u)}^{\,0}\right] = 0$$

15) Calcula la ecuación diferencial de las curvas con la siguiente propiedad: En todo punto (x,y) en el segmento de la tangente tiene como punto medio el (x,y).



$\frac{[A,B]}{2} = (x,y)$

Hallamos la recta tangente:

$v - y = y'(u - x)$

$\cdot)\ (u = 0) \longrightarrow A$

$v = -xy' + y \Rightarrow A(0, -xy' + y)$

$\cdot)\ (v = 0) \longrightarrow B$

$u = \frac{-y}{y'} + x \Rightarrow B\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$

Pendiente

16) Dado $f(y) + (xy + g(y))\frac{dy}{dx} = 0$, con $f, g \in C^1$.

a) Demostrar que $\exists$ factor integrante de la forma $\mu(x,y) = m(y)$.

Multiplicamos por $\mu(y)$, obteniendo: $\underbrace{\mu(y)f(y)}_{\hat{P}(x,y)} + \underbrace{(\mu(y)xy + \mu(y)g(y))}_{\hat{Q}(x,y)}\frac{dy}{dx} = 0$. Necesitamos que se cumpla la condición de exactitud, luego:

$$\frac{d\hat{P}}{dy} = \frac{d\hat{Q}}{dx}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot)\ \frac{d\hat{P}}{dy} = \mu'(y)f(y) + \mu(y)f'(y) \\ &\cdot)\ \frac{d\hat{Q}}{dx} = y\mu(y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Imponemos la condición} \Rightarrow \mu'(y)f(y) + \mu(y)f'(y) = y\mu(y)$$

Incógnita $\mu(y)$
Variable independiente y

Luego:

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{\mu(y)(y - f'(y))}{f(y)}$$

es una ecuación de variables separadas y tiene solución $\Rightarrow \exists \mu(y)$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu(y)} = \int \frac{y - f'(y)}{f(y)}\,dy \Rightarrow \ln(\mu) = \int \frac{y - f'(y)}{f(y)}\,dy \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{y - f'(y)}{f(y)}\,dy}$$

b) Toma $f(y) = y$, $g(y) = \cos(y)y$ y resuelve la ecuación.

Tenemos que el factor integrante era $\mu(y) = e^{\int \frac{y - f'(y)}{f(y)}\,dy} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{y-1}{y}\,dy} = e^{y - \ln(y)} = \frac{e^y}{y}$. Multiplicamos la ecuación por el factor integrante y resolvemos $\Rightarrow \frac{e^y \cdot \cancel{y}}{\cancel{y}} + \frac{e^y}{\cancel{y}}(x\cancel{y} + \cos(y)\cancel{y})\,y' = e^y + e^y(x + \cos(y))\,y' = 0$

$\cdot)$ $\frac{du}{dx} = e^y \Rightarrow u(x,y) = xe^y + \varphi(y)$ $\Big\}$ $\varphi'(y) = e^y \cos(y)$ — Acabar de resolver —

$\frac{du}{dy} = e^y\,(x + \cos(y))$

(17) Consideremos la familia de curvas biparamétricas $u(x,y) = c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y $u \in C^2(\mathbb{R})$.

a) Demostrar, justificando la respuesta, una condición suficiente para poder despejar $y(x)$: $u(x, y(x)) = c_1 x + c_2$

Queremos despejar y en función de $x = F(x,y) \Rightarrow F(x,y) = u(x,y) - c_1 x - c_2$. Aplicamos el Teorema de la Función Implícita y obtenemos:

$$\frac{dF}{dy} \neq 0 \Rightarrow \frac{dF}{dy} = \frac{du}{dy}(x,y) \neq 0$$

(18) Dada la curva en implícitas $\frac{1}{101}x^{101} + x + t^2 = 0$

a) Determinar los puntos de la curva donde puedo despejar $x(t)$.

En general, dada la ecuación $F(x,y) = 0$, será difícil saber en qué intervalo I está definido $x(t)$ y cuándo es de clase C^1. El teorema de la función implícita nos da una respuesta local: si podemos encontrar $(t_0, x_0) \in \Omega$ de manera que $F(t_0, x_0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$, entonces existe una función $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 definida en algún intervalo abierto I que cumple $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$ y

- $(t, x(t)) \in \Omega$ si $t \in I$
- $F(t, x(t)) = 0$

Además, $x(t)$ es la única solución continua de $F(x,t) = 0$, $x(t_0) = x_0$, definida en I.

Para poder despejar x en función de t debemos ver primero si puedo aplicar el Teorema de la Función Implícita:

$$\frac{dF}{dx}(x_0, t_0) \neq 0$$

$$\frac{dF}{dx} = x^{100} + 1 > 0, \ \forall (x_0, t_0) \in D \Rightarrow F(x_0, t_0) = 0, \ \frac{dF(x_0, t_0)}{dx} \neq 0 \Rightarrow \forall (x,t) \in D \text{ podemos despejar } x \text{ en función de } t.$$

b) En caso de que se pueda, determina su signo.

$$x\underbrace{\left(\frac{1}{101}x^{100} + 1\right)}_{>0} + t^2 = 0 \Rightarrow x\underbrace{\left(\frac{1}{101}x^{100} + 1\right)}_{>0} = -t^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = 0 \\ t \neq 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

c) Encontrar una ecuación diferencial de tipo $x'' = f(x, x')$ de modo que $x(t)$ sea solución.

Derivamos de forma implícita la ecuación:

$$x^{100} \cdot x' + 1 \cdot x' + 2t = 0$$

Volvemos a derivar:

$$100\,x^{99}(x')^2 + x^{100} \cdot x'' + x'' + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x'' = \frac{-2 - 100\,x^{99}(x')^2}{x^{100} + 1}}$$

(19)

a) Calcula el haz de rectas tangentes a la función $y = x^2$.

Teniendo en cuenta que la recta tangente viene determinada por $v - y(x) = y'(x)(u - x)$

$$v - x^2 = 2x(u - x) \Rightarrow \boxed{v = 2x(u - x) + x^2}$$

b) Dada la ecuación $y' = 2x + \sqrt{x^2 - y}$. Determina el dominio de definición y discute si $y = x^2$ es o no solución.

Para que esté bien definida, debe cumplir que $\begin{cases} x^2 - y > 0 \\ x^2 > y \end{cases}$

Para ver si $y = x^2$ es o no solución, debe cumplirse:

i) $x(t)$ derivable

ii) $(x, y) \in \Omega$ verifique la ecuación

Tomando $(x,y) = (x, x^2) \notin \Omega \Rightarrow$ No es solución

c) Estudia si el cambio $\varphi \begin{cases} s = x \\ u = x^2 - y \end{cases}$ es admisible y calcula la ecuación de las nuevas variables.

Para que el cambio de variable sea admisible debe cumplir que:

H1) $y': \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua ✓

H2) $\varphi: \Omega \longrightarrow \hat{\Omega}$ difeomorfismo de $C^1(\Omega)$ y su inversa ψ también es de clase C^1.

$$\varphi: \begin{cases} s = x \\ u = x^2 - y \end{cases}, \quad \psi: \begin{cases} x = s \\ y = s^2 - u \end{cases} \checkmark$$

H3) $\frac{d\varphi_1}{dx}(x,y) + \frac{d\varphi_1}{dy} f(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega \Rightarrow 1 + 0 = 1 \neq 0$ ✓

calculamos la ecuación con las nuevas variables:

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{du/dx}{ds/dx} = \frac{2x - y'}{1} = \cancel{2x} - \cancel{2x} - \sqrt{x^2 - y} = -\sqrt{u} \Rightarrow \boxed{u' = -\sqrt{u}}$$