Modelo de examen

1. Sean p, q proposiciones lógicas tales que $p \wedge q$ es un enunciado contradictorio. Entonces:

   a) p es falsa o bien q es falsa.

   b) $p \vee q$ es contradictorio.

   c) $p \to q$ es contingente.

   d) $\neg p \wedge \neg q$ es tautológico.

2. Sea $p(x)$ el predicado $\forall y \in \mathbb{R}, x \cdot y < y^2$. Entonces:

   a) Se cumple $p(0)$.

   b) Se cumple $p(1)$.

   c) Se cumple $p(-1)$.

   d) El enunciado no se cumple para ningún $x \in \mathbb{R}$.

3. Sean A, B conjuntos tales que $|A| = 47$, $|B| = 53$ y $f : A \to B$ una aplicación. Entonces:

   a) f nunca puede ser inyectiva.

   b) f nunca puede ser sobreyectiva.

   c) f nunca puede ser biyectiva.

   d) f nunca puede tener inversa.

4. ¿Cuántos números de 16 bits se pueden construir con el mismo número de digitos "0" y "1"?

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \ln(x+1) + e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   Entonces:

   a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

   b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

   c) f es continua en $x = 0$.

   d) f es derivable en $x = 0$.

6. Sean A, B dos sucesos sucesos independientes tales que $p(A) = 0.4$ y $p(B) = 0.5$. Obténgase $p(A \cup B)$. Debe indicarse el resultado exacto, escalado entre 0 y 1 y utilizando coma "," en vez de punto "." para indicar la parte decimal.

7. Sea un algoritmo cuyo coste computacional asociado es $c(n) = (n^5 - 2n + 1)^2$. Entonces su complejidad computacional es:

   a) $\mathcal{O}(n^5)$.
   b) $\mathcal{O}(n^7)$.
   c) $\mathcal{O}(n^{10})$.
   d) $\mathcal{O}(n^5 2^n)$.

8. Un problema de decisión que no es verificable en tiempo polinomial...

   a) ...no está en P.
   b) ...no está en NP.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\det(A) = 2$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz diagonalizable cuyos autovalores son $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$. Obténgase $\det(2A^{-1}B)$.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica definida positiva. Selecciónese el o los enunciados correctos:

    a) $\forall v \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{\mathbf{0}\}, Av \neq -2v$.
    b) A es diagonalizable.
    c) $\det(A) > 0$.
    d) A es regular.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 5\times 5\times 5}$ un array multidimensional definido por $A_{i,j,k,l} = i + j + k + l$, para $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces A representa...

    a) Un tensor de rango 5 y dimensión 4.
    b) Un tensor de rango 4 y dimensión 5.
    c) Un tensor de rango 5^4 y dimensión 4^5.
    d) Un tensor de rango 4^5 y dimensión 5^4.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 - 2x^2$. Indíquese el punto al que converge el algoritmo de descenso de gradiente para $x_0 = 0.1$ y un ratio de aprendizaje lo suficientemente pequeño.

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Entonces:

    a) f no tiene puntos críticos.
    b) $(0, 0)$ es un punto crítico de f y se trata de un mínimo relativo.
    c) $(0, 0)$ es un punto crítico de f y se trata de un máximo relativo.
    d) $(0, 0)$ es un punto crítico de f y se trata de un punto de silla.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x + 1, x^2 - x)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = x - y$. Obténgase el valor de $[g \circ f]'(0)$.