Probabilidad - Ejercicios no evaluables

1. Calcúlese la probabilidad de obtener alguna cruz tras lanzar 5 monedas.

2. Sea $\Omega = \{00, 01, 02, 03, \ldots, 98, 99\}$ espacio muestral, correspondiente a una urna con bolas numeradas del 00 al 99, A el suceso "obtener un número múltiplo de 7" y B el suceso "obtener un número cuya suma de sus cifras es múltiplo de 5". Obténganse las siguientes probabilidades:

   a) $P(A)$.
   $P(A)$ equivale a la proporción de números múltiples de 7 respecto al total. Los múltiplos de 7 son $\{00, 07, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$, es decir 14 elementos.
   Por tanto, $P(A) = 15/100 = 3/20 = 0.15$.

   b) $P(B)$.
   Para obtener $P(B)$ necesitamos conocer el número de elementos que cumplen B. Es decir, números del tipo xy tal que $x + y$ es múltiplo de 5 ($x + y \in \{5, 10, 15\}$). Estos son $\{00, 05, 14, 19, 23, 28, 32, 37, 41, 46, 50, 55, 64, 69, 73, 78, 82, 87, 91, 96\}$.
   Por lo tanto, $P(B) = 20/100 = 1/5 = 0.2$.

   c) $P(A \cap B)$.
   $A \cap B$ es $\{00, 14, 28, 91\}$. Por tanto, $P(A \cap B) = 4/100 = 1/25 = 0.04$.

   d) $P(A \cup B)$.
   En este caso podemos obtener $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 15 + 20 - 4 = 31$. Por lo tanto, $P(A \cup B) = 31/100 = 0.31$.

   e) $P(A|B)$.
   Por la definición de probabilidad condicionada,
   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/25}{1/5} = \frac{1}{5}.$$

   f) $P(B|A)$.
   Podemos usar de nuevo la definición o bien usar el Teorema de Bayes para obtener
   $$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{1/5 \cdot 1/5}{3/20} = \frac{4}{15}.$$

3. Se propone el siguiente juego: se lanzan un dado y una moneda, ganándose éste si sale un 6 en el dado y una cara en la moneda, mientras que en caso contrario se pierde. Si la apuesta es de 10 euros por jugada y el premio por ganar son 100 euros más la devolución de los 10 euros apostados, obténganse los beneficios esperados por jugada.

   Primero definimos nuestra variable aleatoria X como el beneficio obtenido en la jugada. De modo que la función que toma el valor 100 en caso de éxito (cuando se dan las condiciones para ganar el juego) y -10 caso contrario. Nuestro espacio muestral es $\Omega = \{(d, m)|d \in$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, m \in \{cara, cruz\}\}$ y con la definición anterior, $X(6, cara) = 100$ y es -10 para el resto de valores.

Para calcular el valor esperado, necesitamos saber las propiedades de cada resultado en el espacio muestral. Como el dado tiene 6 posibilidades y la moneda, solo 2, las posibles combinaciones son $6 \cdot 2 = 12$. Por tanto,

$$P(X = 100) = P(\{(w, z) \in \Omega | w = 6 \cap z = cara\}) = \frac{1}{12},$$
$$P(X = -10) = 1 - P(X = 100) = 11/12.$$

Y de la definición del valor esperado,

$$E[X] = 100 \cdot P(X = 100) + (-10) \cdot P(X = -10) = \frac{100}{12} - \frac{110}{12} = -\frac{5}{6}.$$

Es decir, los beneficios esperados serán $-5/6$ euros.

4. Calcúlese la varianza asociada al problema anterior.

   De la definición de la varianza, $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$ y

   $$E[X^2] = 100^2 \cdot P(X = 100) + (-10)^2 \cdot P(X = -10) = 1.11 \cdot 10^4/12.$$

   Por tanto, $\text{Var}(X) = \dfrac{33275}{36} \approx 924.3$.

5. Un experimento tiene una probabilidad de fracaso de un $10\,\%$. ¿Cuál es la probabilidad de fracasar menos de 3 veces tras realizar el experimento 25 veces?

   El experimento tiene un resultado binario y, por lo tanto, sigue una distribución de Bernoulli $X \sim \text{Be}(0.1)$ (10 % probabilidad de fracaso). Si realizamos el experimento múltiples veces, entonces tenemos una distribución binomial $Y \sim \text{B}(25, 0.1)$. Y nos piden $P(Y < 3)$.

   De la definición de distribución binomial sabemos que

   $$P(Y = k) = \binom{25}{k} 0.1^k (1 - 0.1)^{25-k}.$$

   Por tanto,

   $$P(Y < 3) = P(Y \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P(Y = k) \approx 0.537.$$

6. La probabilidad de obtener un determinado producto defectuoso en una cadena de montaje es de un $0.005\,\%$. Estímese la probabilidad de obtener más de 2 productos defectuosos tras producir un total de 50000 unidades.

   Este problema se asemeja al anterior, pero tiene unas condiciones que nos permiten aproximarlo mediante una distribución de Poisson. Las condiciones son que la probabilidad del evento deseado es pequeña y el número de sucesos es muy grande. Por tanto, si X es la variable aleatoria que corresponde al número de productos defectuosos, entonces $X \sim \text{Po}(2.5)$ y

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-2.5} 2.5^k}{k!} \approx 0.456.$$

7. Se dispone de una moneda trucada, de tal forma que la probabilidad de obtener cara es de un $60\,\%$ y la de obtener cruz un $40\,\%$. Estímese la probabilidad de que tras lanzar la moneda 2000 veces se obtengan más de 850 cruces.

   Si llamamos $X_i \sim \text{Be}(0.6)$ a la variable aleatoria que vale 1 si se obtiene la primera cara en la tirada i y 0, si se obtiene cruz. Entonces $S = \sum_{i=1}^{2000} X_i$ es la variable aleatoria que cuenta el número de caras obtenidas en 2000 tiradas. Por el Teorema Central del Límite, podemos aproximar S por una v.a. $W \sim \text{N}(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$ donde $n = 2000$,

$$\mu = E(X_i) = 0.6$$
$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X_i)} = \sqrt{0.24}.$$

   Entonces,

$$P(S \leq 1150) = P\left(\frac{S - 1200}{\sqrt{2000}\sqrt{0.24}} \leq \frac{1150 - 1200}{\sqrt{2000}\sqrt{0.24}}\right) \approx P(Z < -2.282) \approx 0.0112,$$

   donde $Z = \dfrac{W - 1200}{\sqrt{2000}\sqrt{0.24}} \sim \text{N}(0, 1)$.

8. Demuéstrese mediante la definición de esperanza las siguientes propiedades para una variable aleatoria continua:

   a) $E[aX] = aE[X]$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
   b) $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.

   La definición de esperanza para una variable aleatoria continua X con distribución de densidad f es

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{d}x.$$

   Entonces

$$E[aX] = \int_{\mathbb{R}} a x f(x) \mathrm{d}x = a \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{d}x = aE[X].$$

   Y sea Y una distribución de probabilidad con función de densidad g, entonces

$$E[X + Y] = \int_{\mathbb{R}} (x f(x) + x g(x)) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} x g(x) \mathrm{d}x = E[X] + E[Y].$$

9. Demuéstrese mediante la definición de varianza las siguientes propiedades para una variable aleatoria continua:

a) $\mathsf{Var}(aX) = a^2\mathsf{Var}(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) $\mathsf{Var}(X + a) = \mathsf{Var}(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

La definición de varianza para una variable aleatoria continua X con distribución de densidad f es

$$\mathsf{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}(aX) &= E[(aX)^2] - E[aX]^2 = E[a^2X^2] - a^2E[X]^2 = a^2\mathsf{Var}(X), \\ \mathsf{Var}(X+a) &= E[(X+a)^2] - E[X+a]^2 \\ &= E[X^2 + 2Xa + a^2] - E[X]^2 - 2aE[X] - a^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 = \mathsf{Var}(X), \end{aligned}$$

10. Sea X una variable aleatoria uniforme, es decir, $X \sim U([a,b])$. Obténgase razonadamente F_X, f_X, $E[X]$ y $\mathsf{Var}[X]$.

Como vimos en las diapositivas, al escoger un número al azar en el intervalo $[0,1]$ tenemos

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

En el caso $X \sim U([a,b])$ escogemos un número al azar en el intervalo $[a,b]$. Por tanto,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \le x \le b, \\ 0, & \text{si } x > b, \end{cases}$$

donde $b - a$ representa la longitud del intervalo. De este modo cumplimos la condición de normalidad

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}[x]_a^b = 1.$$

De la función de densidad podemos deducir la función de distribución (la primitiva de f_X)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ \dfrac{x}{b-a}, & \text{si } a \le x \le b, \\ 0, & \text{si } x > b, \end{cases}$$

y los valores de la esperanza y la varianza

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_a^b x f_X(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}, \\ \mathsf{Var}(X) &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{b^2 + a^2 + ab}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$