Álgebra lineal – Soluciones

1. Obténganse las normas 1, 2 e ∞ de los siguientes vectores:

   a) $v_1 = (1, 0, 2)$.
   De la definición de estas normas:

   - $\|v_1\|_1 = |1| + |0| + |2| = 3$
   - $\|v_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
   - $\|v_1\|_\infty = \text{máx}\{|1|, |0|, |2|\} = 2$

   b) $v_2 = (-6, 5)$.
   Aplicando las expresiones de arriba: $\|v_2\|_1 = 11$, $\|v_2\|_2 = \sqrt{61}$, $\|v_2\|_\infty = 6$.

   c) $v_3 = (\sqrt{2}, -1, 0, 1)$.
   Aplicando las expresiones de arriba: $\|v_3\|_1 = 2 + \sqrt{2}$, $\|v_3\|_2 = 2$, $\|v_3\|_\infty = \sqrt{2}$.

2. Calcúlese $u \cdot v$ en cada caso y determínese si u y v son perpendiculares.

   a) $u = (0, -1, 2)$, $v = (1, 0, 0)$.
   Recordad que dos vectores u y v son perpendiculares u ortogonales si $u \cdot v = 0$. En este caso, $u \cdot v = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$. Sí son perpendiculares.

   b) $u = (-3, 1, 4)$, $v = (1, 4, -2)$.
   $u \cdot v = -7$. No lo son.

   c) $u = (\sqrt{2}, 1, 0)$, $v = (-\sqrt{2}, 2, -3)$.
   $u \cdot v = 0$. Sí lo son.

3. Compruebe que $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ siendo $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

   Vamos a comprobar que se cumple la propiedad distributiva mediante las definiciones de suma y producto de vectores. ¡Recordad! Dados $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ y $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \tag{1}$$
$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + \cdots + u_n \cdot v_n. \tag{2}$$

   Entonces, $u \cdot (v + w)$ es

$$u_1 \cdot (v_1 + w_1) + \cdots + u_n \cdot (v_n + w_n). \tag{3}$$

   Y ahora podemos aplicar la propiedad asociativa para escalares (elementos de $\mathbb{R}$) para escribir $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para cada componente del vector. El resultado es

$$u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot w_1 + \cdots + u_n \cdot v_n + u_n \cdot w_n, \tag{4}$$

   que es la expresión de $u \cdot v + u \cdot w$, que se puede observar fácilmente al reordernar la expresión anterior como

$$u_1 \cdot v_1 + \cdots + u_n \cdot v_n + u_1 \cdot w_1 + \cdots + u_n \cdot w_n. \tag{5}$$

4. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que si u es perpendicular a w y v es perpendicular a w, entonces $u + v$ también es perpendicular a w.

   Recordad que u es perpendicular a w signfica que $u \cdot w = 0$. Del mismo modo, v es perpendicular a w equivale a $v \cdot w = 0$. Por lo tanto, usando la propiedad distributiva

   $$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w = 0 + 0 = 0. \tag{6}$$

   Es decir, $u + v$ es perpendicular a w.

5. Sean $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ y $w = (\alpha, 2, \alpha)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Encuentra para qué valores de α el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

   De la definición, u, v y w son linealmente independientes si

   $$au + bv + cw = \vec{0}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{7}$$

   tiene como única solución $a = b = c = 0$. Si escribimos la ecuación (7) explícitamente, tenemos el sistema lineal de ecuaciones siguiente:

   $$\begin{cases} a + \alpha c & = 0, \\ a + b + 2c & = 0, \\ b + \alpha c & = 0. \end{cases} \tag{8}$$

   Al resolverlo, obtenemos las ecuaciones $a = b = -\alpha c$, $c(1 - \alpha) = 0$. Estas ecuaciones tienen infinitas soluciones si $\alpha = 1$. No obstante, si $\alpha \neq 1$ entonces necesariamente $c = 0$, lo que implica $a = b = 0$. En definitiva, los vectores anteriores son linealmente independientes para $\alpha \neq 1$.

   De hecho, si sustituís $\alpha = 1$ en el vector inicial, podéis comprobar rápidamente que $w = u+v$. Es decir que w es combinación lineal de u y v.

6. Compruebe las siguientes afirmaciones:

   a) Los vectores $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (-1, 1)$ son linealmente independientes

   Como en el ejercicio anterior, nos construimos el sistema de ecuaciones lineales resultante de hacer $\alpha v_1 + \beta v_2 = \vec{0}$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. De este obtenemos que $\alpha = \beta$ y $\alpha = -\beta$. Esto solo es posible si $\alpha = \beta = 0$. Por lo tanto, son linealmente independientes.

   b) Todo vector $v \in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de v_1 y v_2.

   Esta afirmación se traduce en: $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \; v = \alpha v_1 + \beta v_2$. ¿Es eso verdad? Vamos a comprobarlo. Sea $v = (a, b)$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$, entonces

   $$v = \alpha v_1 + \beta v_2 \tag{9}$$

   implica que $a = \alpha - \beta$ y $b = \alpha + \beta$. Es decir, aislando α y β de las expresiones anteriores, podemos escribir cualquier vector $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ como $\frac{1}{2}(a + b)v_1 + \frac{1}{2}(b - a)v_2$.

7. Realícense las siguientes operaciones matriciales:

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5 & -12 \\ 0 & 14 & 0 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

c)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} = 48$$

8. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices cuadradas tales que $\det(A) = 2$ y $\det(B) = -3$. Obtén razonadamente el valor de $\det(12A^2B)$.

   Mediante el Teorema visto en clase que nos dice que para matrices regulares $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se cumple $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, podemos obtener fácilmente que

$$\det(12A^2B) = 12^n \det(A)^2 \det(B) = -12^{n+1}. \tag{10}$$

   Fijáos que λA, para $\lambda \in \mathbb{R}$, multiplica todos los elementos de A por λ. Por lo tanto, λ aparecerá tantas veces en el determinante como filas tenga la matriz. Podéis hacer la comprobación para matrices 2×2 y 3×3, o incluso demostrarlo para todo n mediante la definición del determinante.

9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   a) Comprueba que $\det A = \det A'$. Siendo $A' = A^\top$ la matriz traspuesta de A.
      De la definición del determinante podéis ver que ambos cálculos dan $ad - bc$.

   b) Deduce entonces que A es regular si y sólo si A' es regular.
      Basta con usar el Teorema de la matriz inversa (A regular/invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$). De este se concluye que A' es invertible si y solo si $\det(A') \neq 0$ si y solo si $\det(A) \neq 0$ si y solo si A es invertible.

10. Demuestra, usando las identidades trigonométricas convenientes, los enunciados (a) y (b) siguientes, siendo $f_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$:

   a) $\|f_\theta(v)\|_2 = \|v\|_2, \forall v \in \mathbb{R}^2, \forall\theta \in \mathbb{R}$.
      Explícitamente, $\|f_\theta(v)\|_2 = x^2(\cos\theta)^2 + y^2(\sin\theta)^2 - 2xy\cos\theta\sin\theta + x^2(\sin\theta)^2 + y^2(\cos\theta)^2 + 2xy\sin\theta\cos\theta = (x^2+y^2)((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2) = x^2 + y^2 = \|v\|_2$.

b) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
De la definición de f_θ

$$\begin{aligned} f_\alpha \circ f_\beta = f_\alpha(f_\beta(v)) &= f_\alpha(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta) && (11)\\ &= ((x\cos\beta - y\sin\beta)\cos\alpha - (x\sin\beta + y\cos\beta)\sin\alpha, && (12)\\ &\quad (x\cos\beta - y\sin\beta)\sin\alpha + (x\sin\beta + y\cos\beta)\cos\alpha). && (13)\end{aligned}$$

Usando las identidades $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ y $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ se obtiene

$$f_\alpha \circ f_\beta = (x\cos(\alpha+\beta) - y\sin(\alpha+\beta), x\sin(\alpha+\beta) + y\cos(\alpha+\beta)), \qquad (14)$$

que es exactamente la definición de $f_{\alpha+\beta}$.

c) Comprueba que la aplicación $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal.
Tenemos que comprobar que $f_\theta(au + bv) = af_\theta(u) + bf_\theta(v)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$. Fijáos que es equivalente a probar por separado $f_\theta(au) = af_\theta(u)$ y $f_\theta(u+v) = f_\theta(u) + f_\theta(v)$.
De la definición, para $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$,

$$f_\theta(au) = f_\theta(au_1, au_2) = (au_1\cos\theta - au_2\sin\theta, au_1\sin\theta + au_2\cos\theta) = af_\theta(u) \qquad (15)$$

$$\begin{aligned} f_\theta(u+v) &= f_\theta(u_1+v_1, u_2+v_2) && (16)\\ &= ((u_1+v_1)\cos\theta - (u_2+v_2)\sin\theta, (u_1+v_1)\sin\theta + (u_2+v_2)\cos\theta) && (17)\\ &= (u_1\cos\theta - u_2\sin\theta, u_1\sin\theta + u_2\cos\theta) && (18)\\ &\quad + (v_1\cos\theta - v_2\sin\theta, v_1\sin\theta + v_2\cos\theta) && (19)\\ &= f_\theta(u) + f_\theta(v) && (20)\end{aligned}$$

d) Halla la representación matricial de $f_{\pi/4}$, i.e., la matriz $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $f_{\pi/4}(v) = Mv$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.
De la definición, la representación matricial es

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Para $\theta = \pi/4$,

$$M_{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

11. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por $T(1,0) = (1,1)$ y $T(0,1) = (-1,1)$, calcule:

a) $T(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

Como $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ y T es lineal, tenemos que $T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1)$. Por tanto

$$T(x,y) = (x-y, x+y)$$

b) La representación matricial de T i.e., la matriz $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $T(v) = Mv$:

Llamemos $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, entonces M es la matriz $(T(e_1)|T(e_2))$, escribiendo $T(e_1)$, $T(e_2)$ como vectores columna, i.e.,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Si } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Mv = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = T(v).$$

12. Diagonaliza, de ser posible, las matrices siguientes:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, para cada matriz M, debemos hallar su polinomio característico $p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ y entonces hallar el conjunto de autovalores reales de M $\sigma(M) := \{\lambda \in \mathbb{R} : p(\lambda) = 0\}$. Y en segundo lugar verificar si hay una base de autovectores:

(a) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Por tanto $\sigma(A) = \{1, 2\}$.

Ahora, para cada $\lambda \in \sigma(A)$ hallemos un autovector asociado v_λ i.e., una solución no trivial ($\neq \vec{0}$) de $(A - \lambda I)v = \vec{0}$. Equivalentemente, buscamos $v_\lambda = (x, y)$ solución no trivial del sistema

$$\begin{cases} -\lambda x + 2y & = & 0 \\ -x + (3-\lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema encontramos $v_1 = (2,1)$ y $v_2 = (1,1)$. De modo que la matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = \text{Diag}\,(1,2)$ es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y $\text{Diag}\,(1,2) = (d_{ij})$ es la matriz diagonal con entradas $d_{11} = 1, d_{22} = 2$ y $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

(b) $p_B(\lambda) = \lambda^2$, por lo que $\sigma(B) = \{0\}$ i.e., $\lambda = 0$ es autovalor doble (de multiplicidad algebraica 2).

Resolviendo el sistema asociado a $Bv = \vec{0}$ encontramos que cualquier autovector es múltiplo de $v = (0,1)$. De modo que B no es diagonalizable.

(c) $p_C(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, cuyo discriminante $\Delta = -4$, por lo que no hay soluciones reales a la ecuación característica $p_C(\lambda) = 0$. Así pues, C no es diagonalizable.

b)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1)$, por lo que $\sigma(A) = \{0, \pm 1\}$. Al ser tres autovalores distintos tendremos una base de autovectores y por tanto A es diagonalizable. Hallemos la matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = \text{Diag}\,(-1, 0, 1)$.

Recordemos que $P = (v_{-1}|v_0|v_1)$ donde los autovectores v_λ están dispuestos como columnas. Y cada v_λ es una solución no trivial de $A - \lambda I_3 = \vec{0}$. Resolviendo los sistemas asociados encontramos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$