Conjuntos Borrosos

Surgimiento de la Teoría de los Conjuntos Borrosos

Los conjuntos **borrosos** o **difusos** son conjuntos cuyos elementos tienen grados de pertenencia. Los conjuntos difusos fueron introducidos por [Lotfi A. Zadeh en 1965 (http://www.cs.berkeley.edu/~zadeh/papers/Fuzzy%20Sets-Information%20and%20Control-1965.pdf)](http://www.cs.berkeley.edu/~zadeh/papers/Fuzzy%20Sets-Information%20and%20Control-1965.pdf) como una extensión de la noción clásica de conjunto.

En la teoría de conjuntos clásica, la pertenencia de los elementos a un conjunto se evalúa en términos binarios de acuerdo con una condición bivalente: un elemento pertenece o no pertenece al conjunto. Por el contrario, la teoría de conjuntos borrosos permite la evaluación gradual de la pertenencia de los elementos a un conjunto; esto se describe con la ayuda de una función de pertenencia valorada en el intervalo unitario real $[0,\ \ 1]$.

Los conjuntos borrosos generalizan los conjuntos clásicos, ya que las funciones características (o indicadoras) de los conjuntos clásicos son casos especiales de las funciones de pertenencia de los conjuntos borrosos, si estas últimas solo toman valores 0 o 1. En la teoría de conjuntos borrosos, los conjuntos bivalentes clásicos suelen denominarse conjuntos **crisp**.

La lógica borrosa o teoría de los conjuntos borrosos fue propuesta por Lotfi Zadeh en 1965.

> "Los elementos clave en el pensamiento humano no son números, sino etiquetas . Estas etiquetas permiten que los objetos pasen de pertenecer de una clase a otra de forma suave y flexible".

La lógica borrosa puede verse como una extensión de la lógica multivaluada. (En 1922 Lukasiewicz cuestionaba la lógica clásica bivaluada de valores cierto y falso, propuso una lógica trivaluada.

Lukasiewicz suponía una lógica de valores ciertos en el intervalo unidad como generalización de su lógica trivaluada.

En lógica multivaluada se han sido realizado amplios trabajos por Rosser y Rescher.

En los años 30 fueron propuestas lógicas Multivaluadas para un número cualquiera de valores ciertos $n \geq 2$ identificados mediante números racionales en el intervalo $[0, 1]$.

$$\{0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1\}$$

La lógica borrosa puede verse como una extensión de la lógica multivaluada. Su objetivo es proporcionar las bases del razonamiento aproximado que utiliza premisas imprecisas como instrumento para formular el conocimiento.

La lógica borrosa incluye:

- Predicados borrosos (caro, alto, raro, peligroso,...)

- Cuantificadores borrosos (mucho, parecido, casi todo,...)
- Valores de verdad borrosos (muy cierto, más o menos cierto,...)
- Cercas semánticas (Semantic fences, muy, algo, ...)

Tras la publicación de Zadeh de 1965 hubo unos años de profundización de los aspectos teóricos con fuerte apoyo de Zadeh, Trillas, Dubois y Prade. A partir de 1975 se empezaron a desarrollar aplicaciones y surgen las primeras aplicaciones con éxito en el campo del control.

En Japón hubo una gran penetración de las teorías borrosas y se esperaba mucho de su aplicación en I.A., mientras que en Europa y EE.UU. las teorías de Zadeh se trataron con frialdad (críticas de Kalman, 1972 y Mac Lane), frivolidad de los conceptos y sin obtención de resultados.

A partir de 1973, con la teoría básica de los controladores borrosos de Zadeh, otros investigadores comenzaron a aplicar la Lógica Borrosa a diversos procesos. Se establecen grupos de investigación en lógica difusa en universidades japonesas; los profesores Terano y Shibata en Tokio y los profesores Tanaka y Asai en Osaka hacen grandes aportaciones tanto al desarrollo de la teoría de la Lógica Borrosa como al estudio de sus aplicaciones.

En 1974 Assilian y Mamdani en el Reino Unido desarrollaron el primer controlador difuso diseñado para la máquina de vapor. La implantación real de un controlador de este tipo no fue realizada hasta 1980 por F.L. Smidth & Co. en una planta cementera en Dinamarca.

En 1987 Hitachi usa un controlador fuzzy para el control del tren de Sendai, el cual usa uno de los sistemas más novedosos creados por el hombre. Desde entonces, el controlador ha realizado su trabajo correctamente con la consiguiente satisfacción por parte de los usuarios de dicho tren.

Es también en este año cuando la empresa Omron desarrolla los primeros controladores difusos comerciales. Debido a la gran cantidad de productos basados en Lógica Borrosa que se comercializan, 1987 es considerado como el «fuzzy boom» de la misma.

En 1993, Fuji aplica la Lógica Borrosa para el control de inyección química en plantas depuradoras de agua por primera vez en Japón. Ha sido precisamente aquí, en donde más apogeo ha tenido la Lógica Borrosa, creándose estrechas colaboraciones entre el gobierno, las universidades y las industrias, estableciendo proyectos llevados a cabo por el Ministerio de Industria y Comercio (MITI) y la Agencia de Ciencia y Tecnología (STA) en consorcio con el Laboratory for International Fuzzy Engineering Research (LIFE).

En Japón el éxito de los productos de consumo borrosos fue total (cámaras, lavadoras, ABS de vehículos,...). Casi todo el desarrollo fue en el campo de control.

A pesar de que, en un inicio, las teorías de Zadeh no tuvieron una buena acogida en Europa y EE.UU. (críticas de Kalman, 1972 y Mac Lane, fFrivolidad de los conceptos y sin obtención de resultados), la llama de las teorías borrosas se mantuvo no obstante. A partir de los 80 ayudado del éxito japonés se afianza en los círculos técnicos poco a poco.

Hoy día el campo de las aplicaciones está en pleno desarrollo y se esperan fuertes avances tanto técnicos como teóricos.

Conjuntos Borrosos

Recordemos primero cómo se definen y caracterizan los conjuntos tradicionales denominados conjuntos crisp (nítido).

Sea U un conjunto universal o universo de discurso. Sea A un subconjunto de U

> $x \in A$ significa que x es miembro o elemento del conjunto A

> $x \notin A$ significa x no es un elemento del conjunto A

Para describir un conjunto clásico utilizamos:

- Método de listas: se listan todos los elementos del conjunto

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

- Método de propiedades o reglas: se especifican propiedades de los elementos del conjunto.

$$B = \{b | b\ cumple\ P_1, P_2, \cdots, P_m\}$$

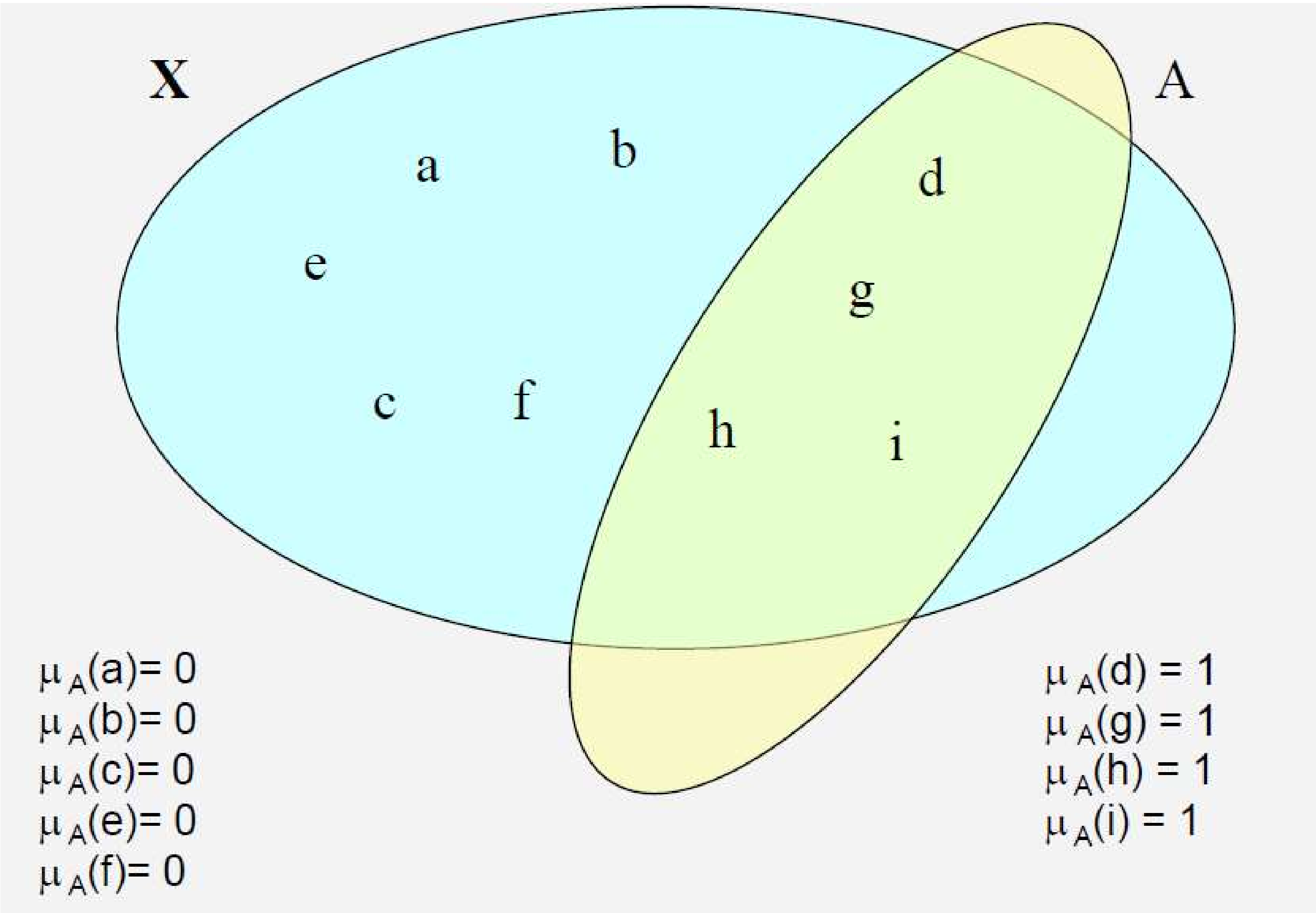
El proceso por el que un individuo es o no miembro de un conjunto A se puede definir como una "función característica" μ_A, la cual asocia elementos del conjunto universal al conjunto {0,1} tal que:

$$mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

Para un conjunto A, esta función asigna un valor:

$$\mu_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$$

$$\mu_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A$$



Veamos ahora cómo se definen y caracterizan los conjuntos borrosos o difusos.

Un conjunto difuso o conjunto borroso (en inglés: fuzzy set) es un conjunto que puede contener elementos de forma parcial, es decir, que la propiedad de que un elemento x pertenezca al conjunto A ($x \in A$) puede ser cierta con un grado parcial de verdad.

Este grado de pertenencia es una proposición en el contexto de la lógica difusa, y no de la lógica usual binaria, que solo admite dos valores: cierto o falso.

En la teoría de conjuntos clásica, la pertenencia de los elementos a un conjunto se evalúa en términos binarios de acuerdo con una condición bivalente: un elemento pertenece o no pertenece al conjunto. Por el contrario, la teoría de conjuntos borrosos permite la evaluación gradual de la pertenencia de los elementos a un conjunto; esto se describe con la ayuda de una función de pertenencia valorada en el intervalo unitario real $[0,\ 1]$.

Los conjuntos borrosos generalizan a los conjuntos clásicos, ya que las **funciones características** (o indicadoras) de los conjuntos clásicos son casos especiales de las funciones de pertenencia de los conjuntos borrosos. En la teoría de conjuntos borrosos, los conjuntos bivalentes clásicos suelen llamarse conjuntos crisp.

Un *conjunto difuso* se define mediante un par (U, m) donde U es un conjunto, el cual, a menudo se asume no vacío, donde $m: U \to [0, 1]$ es la **función de pertenencia**. El conjunto de referencia U (a veces se denota Ω o X) se denomina *universo de discurso*. Para cada $x \in U$, el valor $m(x)$ se denomina *grado de pertenencia* de x a (U, m). La función $m = \mu_A$ se denomina la función de pertenencia del conjunto borroso $A = (U, m)$.

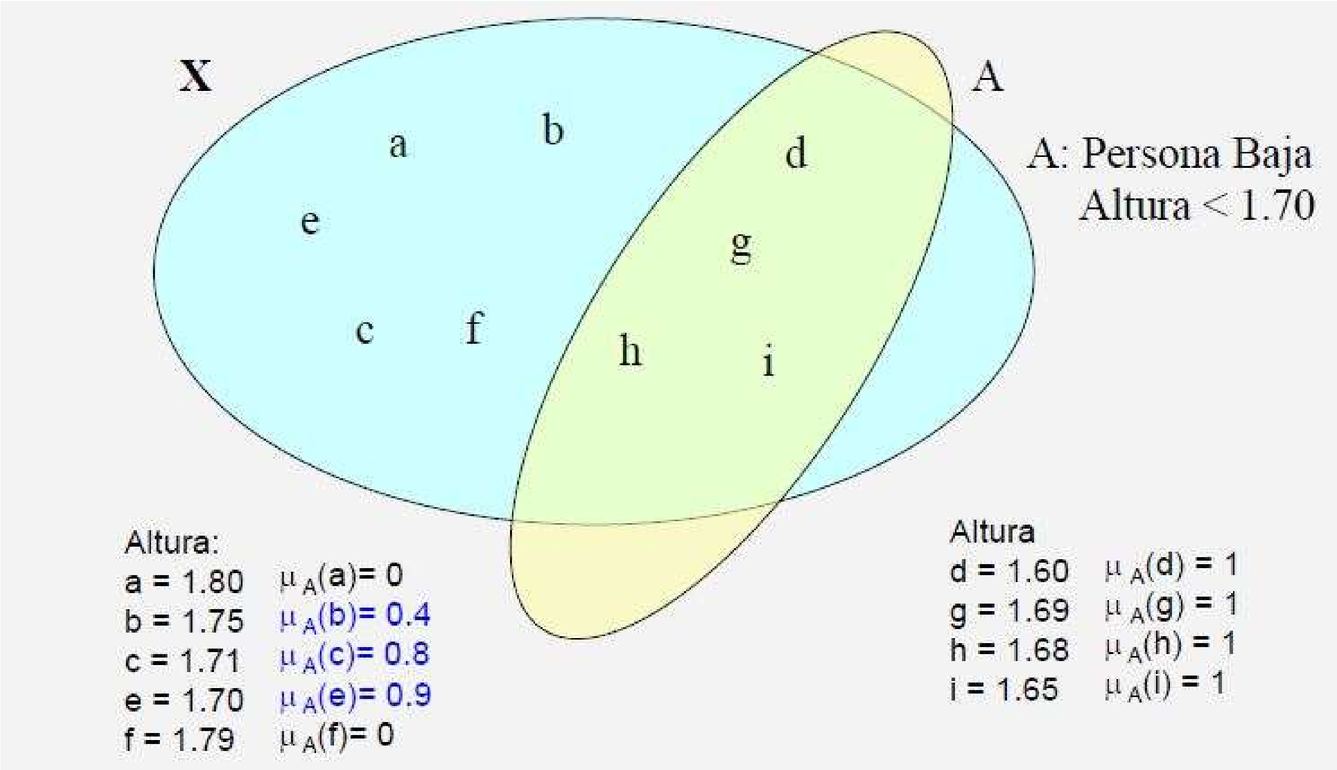
Para describir un conjunto borroso con un número finito de elementos del dominio se emplea la notación:

Sea x_i un elemento del soporte del conjunto borroso A y μ_i su grado de pertenencia a A. (El índice i va de 1 a n). Entonces, el conjunto borroso A se puede escribir como:

$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \cdots + \mu_n/x_n$$

También se utiliza

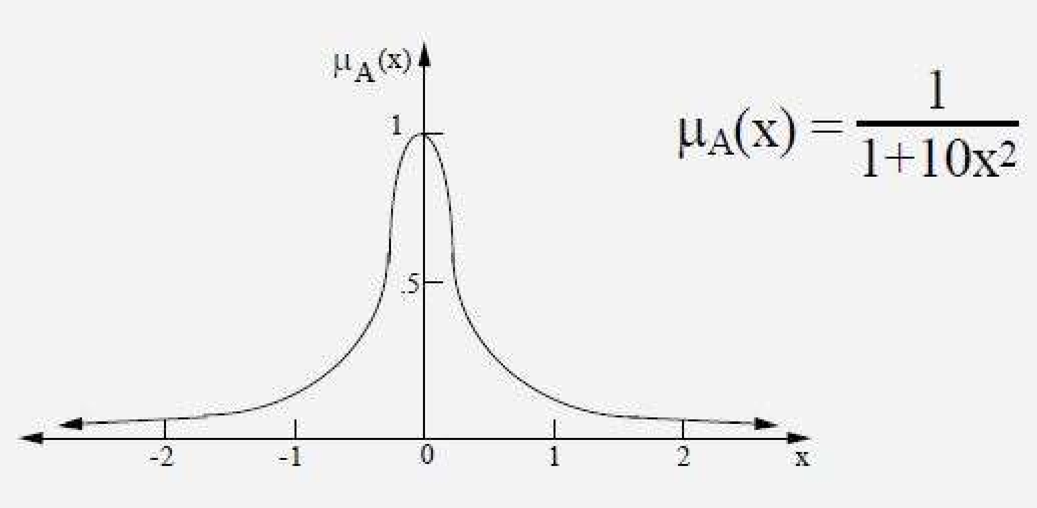
$$\{\mu(x_1)/x_1, \ldots, \mu(x_n)/x_n\}.$$



Sea $x \in U$. Entonces, se dice que x

- no está incluído en el conjunto difuso (U, m) si $m(x) = 0$ (no es miembro),
- está completamente incluído si $m(x) = 1$ (miembro completo),
- incluído parcialmente si $0 < m(x) < 1$ (miembro parcial o miembro fuzzy).

Una posible función de pertenencia que defina los números reales próximos a cero puede ser la siguiente, donde el número 3 tiene un grado de pertenencia 0.1 y el número 1 tiene un grado de pertenencia 0.9



Intuitivamente se podría pensar que haciendo algún cambio en la función correspondiente al conjunto de números cercanos a 0,

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + 10x^2}$$

podríamos obtener una función que representase los números *muy cercanos* a 0. Por ejemplo:

$$\mu_A(x) = \left(\frac{1}{1 + 10x^2}\right)^2$$

También podríamos pensar en una generalización a la función que representase los números cercanos a un valor dado a:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + 10(x - a)^2}$$

Aunque el intervalo $[0, 1]$ es el rango de valores más extendido para representar funciones de pertenencia, cualquier conjunto arbitrario con alguna ordenación total o parcial se podría utilizar:

$$\mu_A : X \rightarrow L$$

A estos se les llama **conjuntos borrosos $L-$fuzzy** (L = lattice).

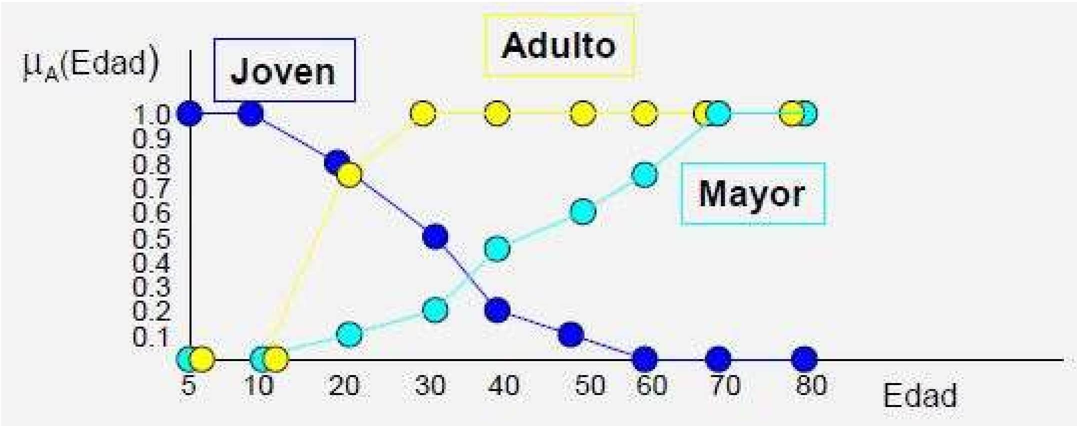
Sea un universo de discurso X de franjas de edad personas:

$X = \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$

donde 5 significa edad menor de años, 10 significa entre 5 y menor que 10 años, etc.

Se definen en X los siguientes conjuntos borrosos:

Edad	joven	adulto	mayor
5	1	0	0
10	1	0	0
20	0.8	0.8	0.1
30	0.5	1	0.2
40	0.2	1	0.4
50	0.1	1	0.6
60	0	1	0.8
70	0	1	1
80	0	1	1



Cardinalidad escalar de un conjunto borroso A definido en un conjunto de universo finito se define como la suma de los grados de pertenencia de todos los elementos del dominio en A:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

$$|Mayor| = 0 + 0 + 0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.6 + 0.8 + 1 + 1 = 4.1$$

Cardinalidad borrosa es un conjunto borroso cuya función de pertenencia se define como:

$$\mu_{|A'|}(A_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n_i}$$

donde α_i es un α-corte de A y n_i es el número de elementos del universo de discurso con grado de pertenencia superior o igual a α

$$|Mayor'| = 0.1/7 + 0.2/6 + 0.4/5 + 0.6/4 + 0.8/3 + 1.0/2$$

La familia de conjuntos que incluye todos los subconjuntos de un conjunto dado A se denomina **conjunto potencia** de A y se denota $P(A)$. El número de elementos del conjunto potencia será: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Veamos ahora, algunos conjuntos crisp relacionados con un conjunto difuso. Para cualquier conjunto difuso $A = (U, m)$ y $\alpha \in [0, 1]$ se definen los siguientes conjuntos crisp:

- $A^{\geq\alpha} = A_\alpha = \{x \in U \mid m(x) \geq \alpha\}$ se denomina α -corte (o conjunto de nivel α),
- $A^{>\alpha} = A'_\alpha = \{x \in U \mid m(x) > \alpha\}$ se denomina α-corte fuerte (o conjunto de nivel α fuerte),

Se denomina **soporte** de un conjunto borroso A al conjunto crisp que contiene todos los elementos del dominio que tienen un grado de pertenencia no nulo en A.

$$S(A) = \text{Supp}(A) = A^{>0} = \{x \in U \mid m(x) > 0\}$$

Ejemplo: $S(joven) = \{5, 10, 20, 30, 40, 50\}$

El **núcleo** o **kernel** de un conjunto borroso es el conjunto de elementos del soporte que tienen el máximo grado de pertenencia al conjunto borroso.

$$C(A) = \text{Core}(A) = A^{=1} = \{x \in U \mid m(x) = 1\}$$

En el ejemplo de las edades, el núcleo de $Mayor = \{70, 80\}$

Otras definiciones

- Un conjunto borroso $A = (U, m)$ está **vacío** $(A = \emptyset)$ iff (si y solo)
$$\forall x \in U : \mu_A(x) = m(x) = 0$$

- Dos conjuntos borrosos A y B son **iguales** $(A = B)$ iff
$$\forall x \in U : \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

- Un conjunto borroso A es un **subconjunto borroso** de (está incluído en) un conjunto borroso $B (A \subseteq B)$ iff

$$\forall x \in U : \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

> $Mayor$ es un subconjunto de $Adulto$, ya que:

$$\mu_{Mayor}(x) \leq \mu_{Adulto}(x)$$

> para todo x

- En cualquier conjunto borroso A, cualquier elemento $x \in U$ que satisfaga la condición $\mu_A(x) = 0.5$ se considera un punto de cruce.

- Dado un conjunto borroso A y un valor $\alpha \in [0, 1]$, para el cual $A^{=\alpha} = \{x \in U \mid \mu_A(x) = \alpha\}$ no se encuentre vacío se denomina un nivel de A.

- El **conjunto de niveles** (o **conjunto nivel**) de A es el conjunto formado por todos los niveles $\alpha \in [0, 1]$ que representan los diferentes α-cortes

- La **altura** de un conjunto borroso A está dada por el mayor grado de pertenencia que tiene cualquiera de los elementos del conjunto borroso

$$\mathrm{Hgt}(A) = \sup\{\mu_A(x) \mid x \in U\} = \sup(\mu_A(U))$$

> donde sup denota el supremo, el cual existe debido a que $\mu_A(U)$ no está vacío y está acotado por encima por 1. Si U es finito, podemos substituir el supremum por el máximo.

> En el anterior ejemplo de las edades, la altura de $Mayor = 1$

- Un conjunto borroso A se dice que está **normalizado** iff $\mathrm{Hgt}(A) = 1$. En el caso finito, donde el supremo es el máximo, esta condición significa que al menos un elemento del conjunto A es miembro completo (alcanza el grado de pertenencia 1). Un conjunto borroso A no vacío puede ser normalizado obteniendo el conjunto $\tilde{A}$ si dividimos la función de pertenencia de A por su altura:

$$\forall x \in U : \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_A(x) / \mathrm{Hgt}(A)$$

> En el ejemplo de las edades, los tres conjuntos Joven, Adulto y Mayor son normalizados.

> Más allá de las similitudes, esto difiere de la normalización habitual en que la constante de normalización no es una suma.

El α**-corte** de un conjunto borroso A es un conjunto crisp que contiene todos los elementos del conjunto universal que tienen un grado de pertenencia en A mayor o igual que el valor α:

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

> $Joven_{0.2} = \{5, 10, 20, 30, 40\}$

> $Joven_{0.8} = \{5, 10, 20\}$

> $Joven_{1.0} = \{5, 10\}$

El núcleo de un conjunto borroso normalizado es el α-corte de nivel 1

- El concepto de ancho de un conjunto borroso A de números reales ($U \subset \mathbb{R}$) con soporte acotado se define como:

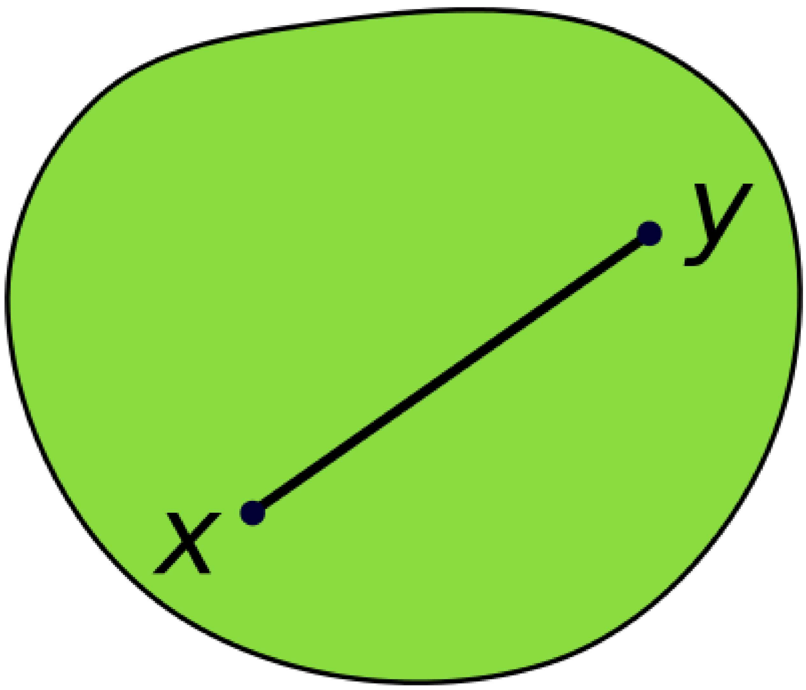
$$\mathrm{Width}(A) = \sup(\mathrm{Supp}(A)) - \inf(\mathrm{Supp}(A))$$

> En caso que $\mathrm{Supp}(A)$ sea un conjunto finito, o más generalmente un conjunto cerrado, el ancho se define como:

$$\text{Width}(A) = \max(\text{Supp}(A)) - \min(\text{Supp}(A))$$

> En el caso n-dimensional ($U \subset \mathbb{R}_n$), el ancho se puede reemplazar por el volumen n-dimensional de $\text{Supp}(A)$. En general, esto se puede definir dada cualquier medida en U, por ejemplo, mediante la integración (por ejemplo, la integración de Lebesgue) de $\text{Supp}(A)$.

En geometría, un subconjunto crisp de un espacio sobre los reales es convexo si, dados dos puntos cualesquiera del subconjunto, el subconjunto contiene todo el segmento de línea que los une. Por ejemplo, un cubo sólido es un conjunto convexo.



Se dice que un conjunto crisp (A) es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ si para cada par de puntos:

> $r = (r_i | i \in N_n),\ \ s = (s_i | i \in N_n),\ \ N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

r, s pertenecen a A y cada número real λ entre 0 y 1, el punto:

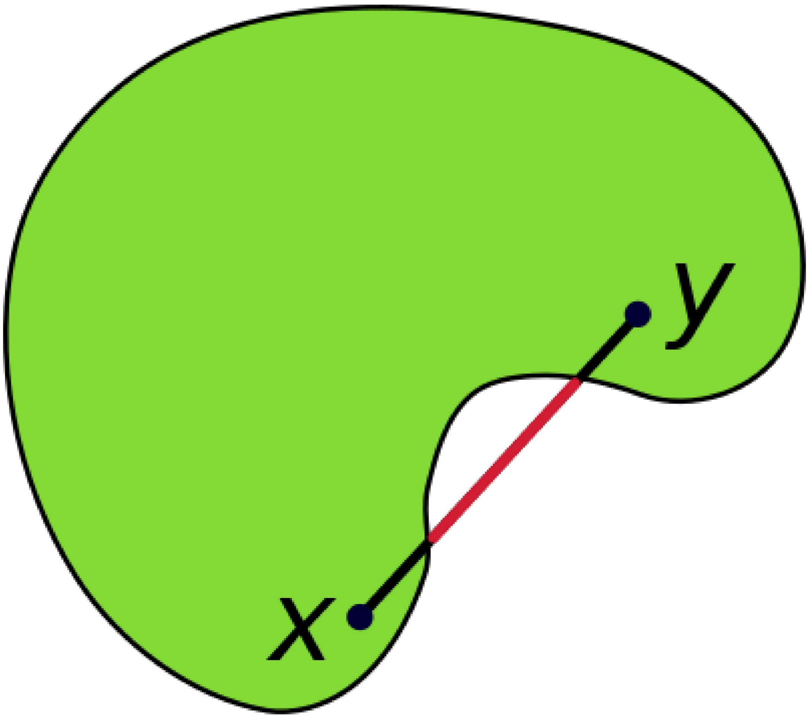
> $t = (\lambda r_i + (1 - \lambda) s_i | i \in N_n)$

es también de A. O sea, si para cada par de puntos r, s, los puntos pertenecientes a la recta que los une también pertenecen a A.

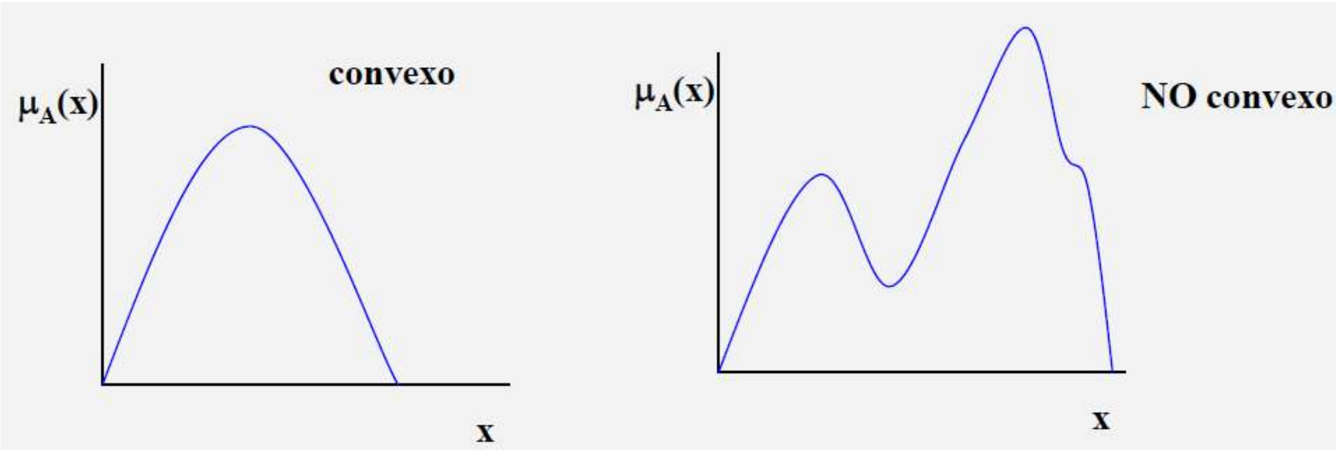
Un conjunto borroso A es **convexo** sí y solo sí cada uno de sus $\alpha-$cortes es un conjunto convexo en sentido crisp

> $\mu_A(\lambda r + (1 - \lambda)s) \geq min[\mu_A(r), \mu_A(s)] = \alpha$

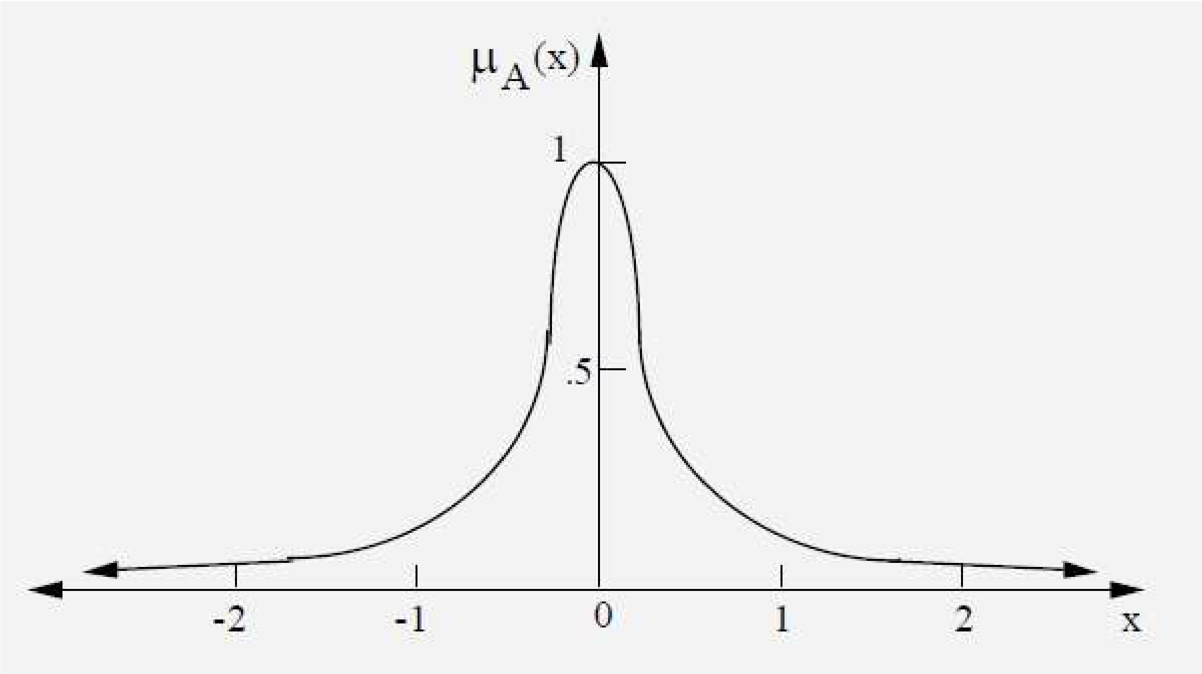
Para todo r, s reales y $\lambda \in [0, 1]$.



Un conjunto crisp que no es convexo se llama conjunto no convexo. Un polígono que no es un polígono convexo a veces se denomina polígono cóncavo, y algunas fuentes usan más generalmente el término conjunto cóncavo para referirse a un conjunto no convexo, pero la mayoría de las autoridades prohíben este uso.



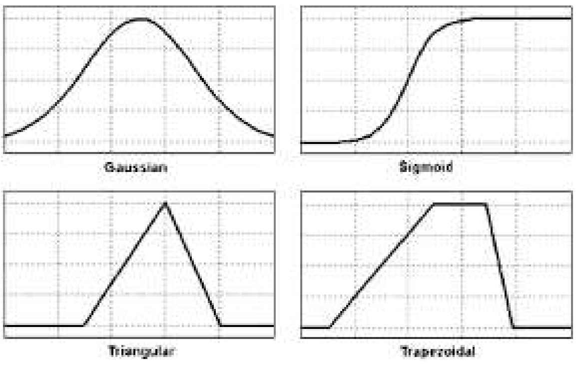
Un **número borroso** es un conjunto borroso convexo y normalizado cuya función de pertenencia es continua



Ejemplo del número borroso 0

Un número borroso es una generalización de un número real regular en el sentido de que no se refiere a un solo valor sino a un conjunto conectado de valores posibles, donde cada valor posible tiene su propio peso entre 0 y 1. Este peso se denomina función de pertenencia. Un número borroso es, por lo tanto, un caso especial de un conjunto borroso normalizado convexo de la línea real.

Los triángulos y trapecios que se utilizan habitualmente para describir la función de pertenencia son números borrosos, ya que son conjuntos convexos, normalizados (i.e., se alcanza el 1) y la función es continua.



El **conjunto complemento borroso** $\tilde{A}$ de un conjunto borroso A es aquel que:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in X$$

Ejemplo:

$$M\tilde{a}yor = 1/5 + 1/10 + 0.9/20 + 0.3/30 + 0.6/40 + 0.4/50 + 0.2/60$$

La **unión de dos conjuntos borrosos** A y B es otro conjunto $A \cup B$ borroso tal que:

$$\mu_{A \cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)],\ \forall x \in X$$

Joven ∪ Mayor $= 1/5 + 1/10 + 0.8/20 + 0.5/30 + 0.4/40 + 0.6/50 + 0.8/60 + 1/70 + 1/80$

La **intersección de dos conjuntos borrosos** A y B es otro conjunto borroso $A \cap B$ tal que:

$$\mu_{A \cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \ \forall x \in X$$

Joven ∩ Mayor $= 1/20 + 0.2/30 + 0.2/40 + 0.1/50$

Operadores Borrosos

Los conjuntos borrosos pueden operarse como los conjuntos crisp. La teoría original de conjuntos borrosos se formuló en base a los siguientes operadores:

- Negación: $\mu'_A(x) = 1 - \mu_A(x)$
- Unión: $\mu_{A \cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
- Intersección: $\mu_{A \cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$

Los conjuntos crisp tienen también estos operadores.

Propiedades Básicas

- **Conmutativa:** $A \bigcup B = B \bigcup A$; $A \bigcap B = B \bigcap A$;
- **Asociativa:** $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup B \bigcup C$;
  $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap B \bigcap C$;
- **Idempotencia:** $A \bigcup A = A$; $A \bigcap A = A$;
- **Distributiva:** $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;
  $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$;
- **Condiciones Frontera o Límite:** $A \bigcup \varnothing = A$; $A \bigcup X = X$;
  $A \bigcap \varnothing = \varnothing$; $A \bigcap X = A$;
- **Involución** (doble negación): $\neg(\neg A) = A$;
- **Transitiva:** $A \subset B$ y $B \subset C$, implica $A \subset C$;

- $(A \bigcap B) \subset A \subset (A \bigcup B)$;
- Si $A \subset B$, entonces $A = A \bigcap B$ y $B = A \bigcup B$;
- $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(A \bigcup B) + \mathrm{Card}(A \bigcap B)$;
- $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\neg A) = \mathrm{Card}(X)$;

$T-$normas y $T-$conormas

Posteriormente se han definido clases de funciones con propiedades axiomáticas adecuadas a la utilidad de cada operador, principalmente las T-normas y T-conormas, que sirven como modelos de la intersección y la unión respectivamente. El origen del uso de las T-normas y T-conormas se remonta a las consecuencias del artículo de Menger de 1942 "Statistical Metrics" (https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1078534/).

Para establecer la desigualdad triangular (en un triángulo cualquiera, la suma de dos lados siempre es mayor que el tercero), los discípulos de Menger establecieron y estudiaron el concepto de norma triangular (T-norma) como operación tipo para componer (sumar probabilísticamente) los lados de un triángulo que no "midan" un número, sino una función de distribución de probabilidad. Posteriormente se han revelado como herramienta adecuada para formalizar la intersección borrosa

Sea t una $t-$norma y s la correspondiente $t-$conorma (también conocida como $s-$norma). Dado un par de conjuntos borrosos A, B, su intersección $A \cap B$ está definida por:

$$\forall x \in U : \mu_{A \cap B}(x) = t(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

y su union $A \cup B$ se define por:

$$\forall x \in U : \mu_{A \cup B}(x) = s(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Una t-norma (también T-norma o norma triangular) es un tipo de operación binaria utilizada en el marco de los espacios métricos probabilísticos y en la lógica multivaluada, específicamente en la lógica difusa. Una norma t generaliza la intersección y la conjunción en lógica. El nombre norma triangular se refiere al hecho de que en el marco de los espacios métricos probabilísticos, las t-normas se utilizan para generalizar la desigualdad triangular de los espacios métricos ordinarios.

Intersección Borrosa y T-normas

Es una función $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mu_{A \cap B}(x) = T[\mu_A(x), \mu_B(x)]$ que debe cumplir las propiedades:

- $T(a, 1) = a$; existencia del elemento unidad (neutro)
- $T(a, b) = T(b, a), T$ es conmutativa
- Si $a \leq a'$ y $b \leq b'$ Entonces $T(a, b) \leq T(a', b'), T$ es monotónica
- $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c)), T$ es asociativa

Adicionales recomendados:

- T es una función continua
- $T(a, a) \leq a, T$ es subidempotente

Una $T-$norma continua que satisface la subidempotencia se denomina Arquímedea.

Dado que una $t-$norma es una operación algebraica binaria en el intervalo $[0, 1]$, la notación algebraica infija también es común, con la $t-$norma generalmente denotada por $*$.

Ejemplos de T-normas

- La t-norma mínima también se denomina t-norma de Gödel, ya que es la semántica estándar para la conjunción en la lógica difusa de Gödel. Además de eso, ocurre en la mayoría de las lógicas difusas basadas en normas t como la semántica estándar para la conjunción débil.
- La t-norma producto (el producto ordinario de números reales). Además de otros usos, la t-norma del producto es la semántica estándar para la conjunción fuerte en la lógica difusa del producto. Es una t-norma estricta de Arquímedes.
- La t-norma de Łukasiewicz El nombre proviene del hecho de que la t-norma es la semántica estándar para la conjunción fuerte en la lógica difusa de Łukasiewicz. Es una t-norma de Arquímedes involutiva (i.e., al aplicarla dos veces al mismo valor, devuelve el mismo valor).

Ejemplos

- Mínimo: $T_{min}(a, b) = min(a, b)$
- Producto $T_{prod}(a, b) = a * b$

- Lukasiewick $TLukasiewick(a, b) = max(0, a + b - 1)$
- Clase de Yager $T_w(a, b) = 1 - min[1, (1 - a)^w + (1 - b)^w)^{1/w}]$

> $T_1(a, b) = 1 - min(1, 2 - a - b)$ $T_2(a, b) = 1 - min(1, \sqrt{(1 - a)^2 + (1 - b)^2})$
> $\lim_{w \to \infty} T_w = (1 - min[1, ((1 - a)^w + (1 + b)^w)^{1/w}]) = min(a, b)$

Ejemplo: consideremos dos puntos $a = 0.4, b = 0.9$

> $min(a, b) = 0.4$

> $a * b = 0.36$

> $max(0, a + b - 1) = 0.3$

> $max(0, a + b - 1 <= a * b <= min(a, b)$

T-conormas

Las T-conormas (también llamadas S-normas) son duales a las t-normas bajo la operación de inversión de orden que asigna $1-x$ a x en $[0, 1]$. Dada una t-norma $\top$, la conorma complementaria está definida por $\perp(a, b) = 1 - \top(1 - a, 1 - b)$. Esto generaliza las leyes de De Morgan.

Una t-conorma es una función $\perp : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $\mu_{A \cup B}(x) = \perp[\mu_A(x), \mu_B(x)]$ que debe cumplir las propiedades:

- Conmutatividad: ⊥(a, b) = ⊥(b, a)
- Monotonicidad: si a ≤ c y b ≤ d entonces ⊥(a, b) ≤ ⊥(c, d)
- Asociatividad: ⊥(a, ⊥(b, c)) = ⊥(⊥(a, b), c)
- Elemento de identidad (neutro): ⊥(a, 0) = a

Adicionales recomendados:

- ⊥ es una función continua
- ⊥(a,a)>a, ⊥ es superidempotente

Una T-conorma continua y superidempotente se denomina Arquímedea. Las T-conormas se utilizan para representar la disyunción lógica en la lógica difusa y la unión en la teoría de conjuntos difusos.

Ejemplos de $T-$conormas

- máximo: $\perp_{max}(a, b) = max(a, b)$
- producto: $\perp_{prod}(a, b) = a + b - a * b$
- Lukasiewick: $\perp_{Lukasiewick}(a, b) = min(1, a + b)$
- clase de Yager (no idempotentes): $\perp_w(a, b) = min(1, (a^w + b^w)^{1/w})$

> $\perp_1(a, b) = min(1, (a^1 + b^1)^{1/1}) = min(1, (a + b))$

$$\perp_2(a, b) = min(1, (a^2 + b^2)^{1/2}) = min(1, \sqrt{(a^2 + b^2)})$$

$$\lim_{w\to\infty} \perp_w(a, b) = min(1, (a^w + b^w)^{1/w}) = max(a, b)$$

$$max(a, b) \leq a + b - a * b \leq min(1, a + b)$$

Ejemplo: consideremos dos puntos $a = 0.4, b = 0.9$

$$\perp_{max}(a, b) = 0.9$$

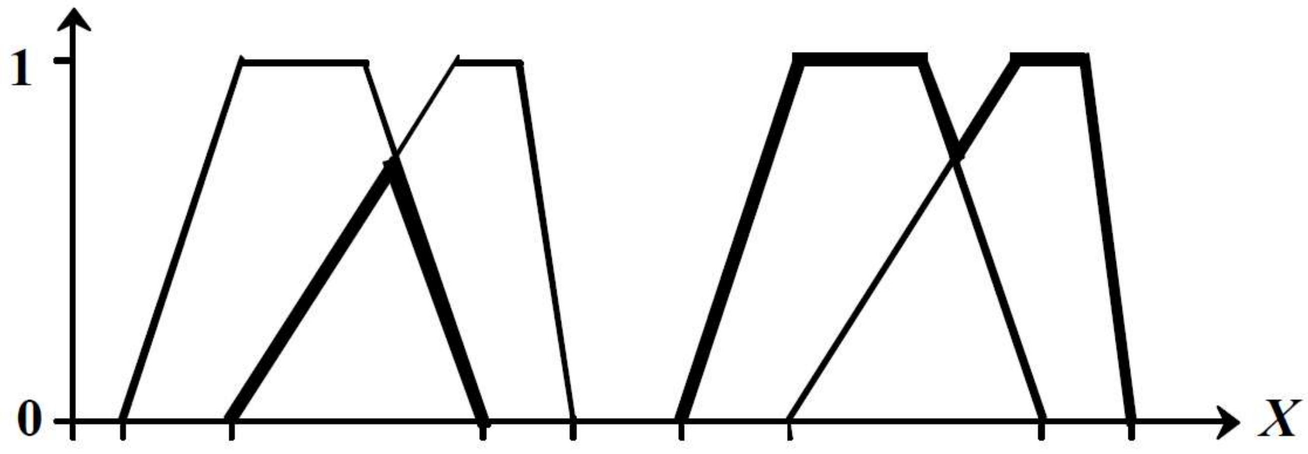
$$\perp_{prod}(a, b) = a + b - a * b = 0.4 + 0.9 - 0.4 * 0.9 = 1.3 - 0.36 = 0.94$$

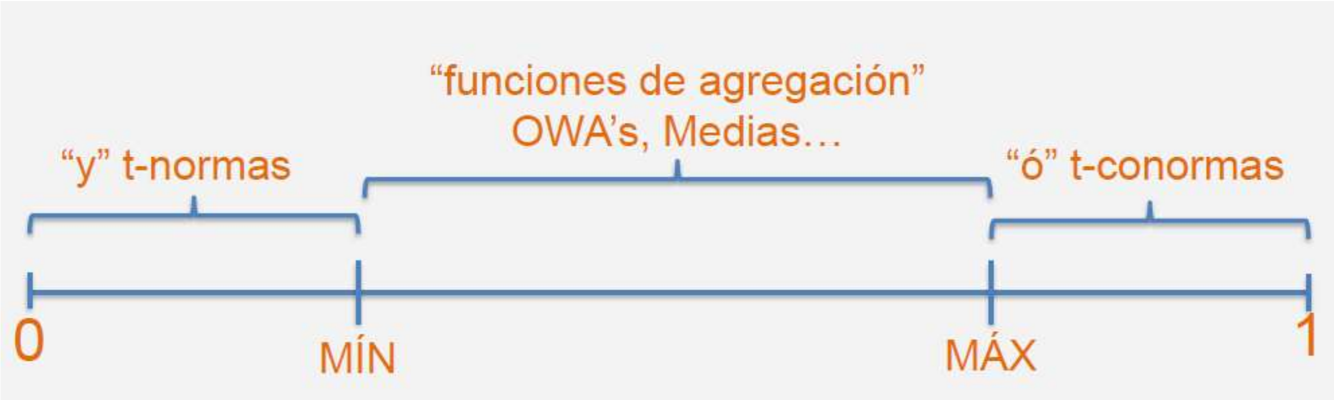
$$\perp_{Lukasiewick}(a, b) = min(1, a + b) = min(1, 1.39) = 1$$

$$max(a, b) \leq a + b - a * b \leq min(1, a + b)$$

Type *Markdown* and LaTeX: α^2

- t-norma del mínimo: La función mín (∧) es una t-norma, que corresponde a la operación de intersección en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en $[0, 1]$. Por eso, esta función es la extensión natural de la intersección en conjuntos difusos.
- t-conorma o s-norma del máximo: La función máx (∨) es una s-norma, que corresponde a la operación de unión en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en $[0, 1]$. Por eso, esta función es la extensión natural de la unión en conjuntos difusos.





Las funciones que residen en el intervalo $[0, min]$ son las T-normas y las que residen en el intervalo $[max, 1]$ son las T-conormas.

Ejemplos: la multiplicación es una T-norma y la suma es una T-conorma.

NOTA: la resta y la división no son ni una cosa ni la otra (no son conmutativas)

El intervalo $[min, max]$ se asocia con las funciones de agregación que se relacionan con los promedios y donde destacan los OWA (Ordered Weighted Average), semantic OWA (SOWA), Linguistic OWA (LOWA)

Los operadores de promedio ponderado ordenado (OWA) proporcionan una clase parametrizada de operadores de agregación de tipo medio. Fueron presentados por Ronald R. Yager (https://en.wikipedia.org/wiki/Ronald_R._Yager). Muchos operadores de tipo medio notables, como el máximo, el promedio aritmético, la mediana y el mínimo, son miembros de esta clase. Se han utilizado ampliamente en inteligencia computacional debido a su capacidad para modelar instrucciones de agregación expresadas lingüísticamente.

Implicaciones Borrosas

Un implicación borrosa I es una función de la forma:

$$I : [0, 1]x[0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

donde, para cualesquiera dos valores ciertos a, b de proposiciones borrosas p, q, define el valor cierto $I(a, b)$ de la proposición condicional "si p entonces q". Es una extensión de la implicación clásica $p \rightarrow q$ del dominio restringido {0,1} al dominio completo $[0, 1]$.

En lógica clásica una implicación se puede expresar de distintas formas y todas son equivalentes entre sí. Sus extensiones a lógica borrosa resultan no ser equivalentes y dan lugar a diferentes implicaciones borrosas.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1. Una forma de definir la implicación en lógica clásica es: $I(a, b) = \neg a \vee b$

> Expresada en lógica borrosa sería: $I(a, b) = \perp(\neg a, b)$ donde $\perp$ representa una $t-$conorma y $\neg$ la negación.

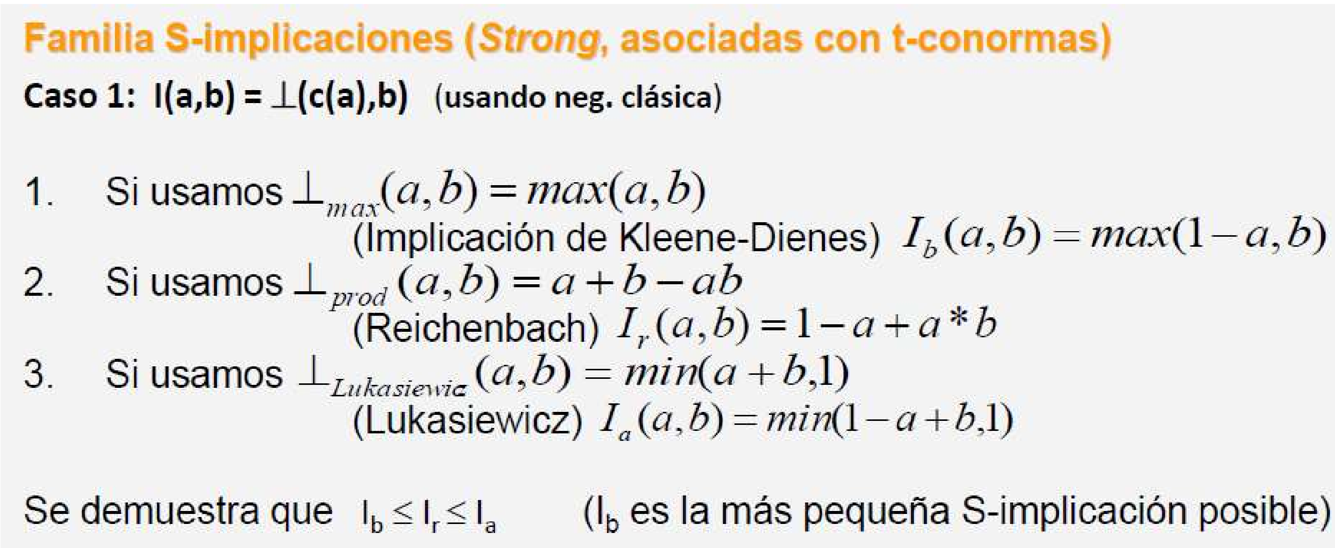
2. Otra forma alternativa de definir la implicación es: $I(a, b) = max\{x \in \{0, 1\} | a \wedge x \leq b\}$

> Expresada en lógica borrosa sería: $I(a, b) = sup\{x \in [0, 1] | T(a, x) \leq b\}$, donde T representa un $t-$norma

Otras formas de definir la implicación sería usando la ley de absorción:

3. $I(a, b) = \neg a \vee b \Leftrightarrow \neg a \vee (a \wedge b) \Rightarrow \perp(\neg a, T(a, b))$
4. $I(a, b) = (\neg a \wedge \neg b) \vee b \Rightarrow \perp(T(\neg a, ((\neg b), b)))$

En lógica borrosa hay distintas clases de implicaciones borrosas que al emplear diferentes t-normas y t-conormas dan lugar a diferentes implicaciones.



In [6]:

```
def kleene_dienes(a,b):
    return max(1-a,b)

def reichenbach(a,b):
    return 1-a+a*b

def lukasiewicz(a,b):
    return min(1-a+b,1)
```

Tener en cuenta que:

1. Un valor True en lógica clásica equivale a un valor alto en lógica borrosa
2. Un valor False en lógica clásica equivale a un valor bajo en lógica borrosa

In [7]:

```
a = 0.3
b = 0.7
kleene_dienes(a,b)
```

Out[7]:

```
0.7
```

In [8]:

```
reichenbach(a,b)
```

Out[8]:

```
0.9099999999999999
```

In [9]:

```
lukasiewicz(a,b)
```

Out[9]:

```
1
```

In [10]:

```
a = 0.7
b = 0.3
kleene_dienes(a,b)
```

Out[10]:

```
0.30000000000000004
```

In [11]:

```
reichenbach(a,b)
```

Out[11]:

```
0.51
```

In [12]:

```
lukasiewicz(a,b)
```

Out[12]:

```
0.6000000000000001
```

Caso 2: I(a,b)=sup{x∈ [0,1] | T(a,x) ≤ b} (usando neg. clásica)

1. Si usamos $T_{min}(a,b)=min(a,b)$ (Implicación de Gödel)

$$I_g(a,b) = \sup\{x \in [0,1] | min(a,x) \le b\} = \begin{cases} 1 \; cuando \; a \le b \\ b \; cuando \; a > b \end{cases}$$

2. Si usamos $T_{prod}(a,b)=a*b$ (Implicación de Goguen)

$$I_\Delta(a,b) = \sup\{x \in [0,1] | (a * x) \le b\} = \begin{cases} 1 \; cuando \; a \le b \\ b / a \; cuando \; a > b \end{cases}$$

3. Si usamos $T_{Lukasiewicz}(a,b)=max(0, a+b-1)$

$$I_a(a,b) = \sup\{x | max(0, a+x-1) \le b\} = min(1, 1-a+b)$$

La implicación de Lukasiewicz es una S y una R implicación

Se demuestra que $I_g \le I_\Delta \le I_a$ (I_g es la más pequeña R posible)

In [13]:

```
def godel(a,b):
    if a <= b:
        return 1
    else:
        return b

def goguen(a,b):
    if a <= b:
        return 1
    else:
        return b/a
```

In [14]:

```
a = 0.3
b = 0.7
godel(a,b)
```

Out[14]:

1

In [15]:

```
goguen(a,b)
```

Out[15]:

1

In [16]:

```
lukasiewicz(a,b)
```

Out[16]:

```
1
```

In [17]:

```
a = 0.7
b = 0.3
godel(a,b)
```

Out[17]:

```
0.3
```

In [18]:

```
goguen(a,b)
```

Out[18]:

```
0.42857142857142856
```

In [19]:

```
lukasiewicz(a,b)
```

Out[19]:

```
0.6000000000000001
```

Familia QL (Quantum Logic)

Caso 3: I(a,b)= ⊥(c(a), T(a,b)) (usando neg. clásica)

1. I_m(a,b)=max(1-a, min(a,b)) (Implicación de Early-Zadeh)

2. Con T_{prod}(a,b)=a*b y $\perp_{prod}$(a,b)=a+b-a*b

$$I_p(a,b) = 1 - a + ab - (1-a)ab = 1 - a + ab - ab + a^2b = 1 - a + a^2b$$

(Implicación de Klir y Yuan)

In [20]:

```
def early_zadeh(a,b):
    return max(1-a,min(a,b))

def klir_yuan(a,b):
    return 1-a+a*a*b
```

In [21]:

```
a = 0.3
b = 0.7
early_zadeh(a,b)
```

Out[21]:

```
0.7
```

In [22]:

```
klir_yuan(a,b)
```

Out[22]:

```
0.7629999999999999
```

In [23]:

```
a = 0.7
b = 0.3
early_zadeh(a,b)
```

Out[23]:

```
0.30000000000000004
```

In [24]:

```
klir_yuan(a,b)
```

Out[24]:

```
0.447
```

NOTA: estas implicaciones borrosas no se usan mucho

¿Cuál implicación elegir?

- Si queremos que se comporte más o menos como el caso clásico, elegimos una implicación que nos lleve a los extremos como Lukaziewics
- Si queremos que se quede por el medio utilizamos una Kleene-Deens

Recordemos la regla de inferencia de Modus Ponens:

El Modus Ponens borroso sería:

$$\frac{P \rightarrow Q, P'}{Q'}$$

donde

- $P \rightarrow Q$ se puede interpretar como la regla R
- P' como el hecho H
- por lo que $Q' = R \vee H$ sería una relación borrosa.

De esto se trata en razonamiento aproximado.

Una relación entre conjuntos crisp $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es un subconjunto de su producto cartesiano

$$R(X_1, X_2, \cdots, X_n) \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

Una relación es un conjunto por sí mismo al que se le puede aplicar cualquiera de los operadores de conjuntos.

Cada relación crisp puede definirse por una función característica que asigna un valor 1 a cada tupla del conjunto universal que pertenezca a la relación y 0 a cada tupla no perteneciente a ella

$$R(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 1, \Leftrightarrow < X_1 \times X2 \times \cdots \times X_n > \in R$$

$R(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0$, en cualquier otro caso

Una relación entre dos conjuntos es una relación binaria.

El concepto de relación se puede extender al campo borroso haciendo que la función característica que indica la pertenencia o no de una tupla a una relación pueda tomar valores en $[0, 1]$.

En conjuntos crisp, el "dominio" de una relación binaria se define como el subconjunto de X cuyos elementos participan en la relación:

$$domR(X, Y) = \{x | x \in X, (x, y) \in R, \exists y \in Y\}$$

Si $R(X, Y)$ es una relación binaria borrosa, su dominio será el conjunto borroso cuya función de pertenencia viene definida por

$$\mu_{domR}(X, Y) = max_{y \in Y}[\mu_R(X, Y)], \forall x \in X$$

Cada elemento del conjunto X pertenece al dominio de R en un grado igual a la fuerza de su mayor relación con cualquier miembro del conjunto Y

En conjuntos crisp, dadas 2 relaciones binarias $P(X, Y)$ y $Q(Y, Z)$, la composición de estas relaciones se define como:

$$R(X, Z) = P(X, Y) o Q(Y, Z)$$

Propiedades:

$$PoQ \neq QoP$$
$$(PoQ)^1 = Q^1 o P^1$$

La operación de composición para relaciones borrosas puede tener varias formas. La más extendida es la composición "max-min"

$$\mu_{PoQ}(x,z) = max_{y\in Y}[min(\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z))]$$

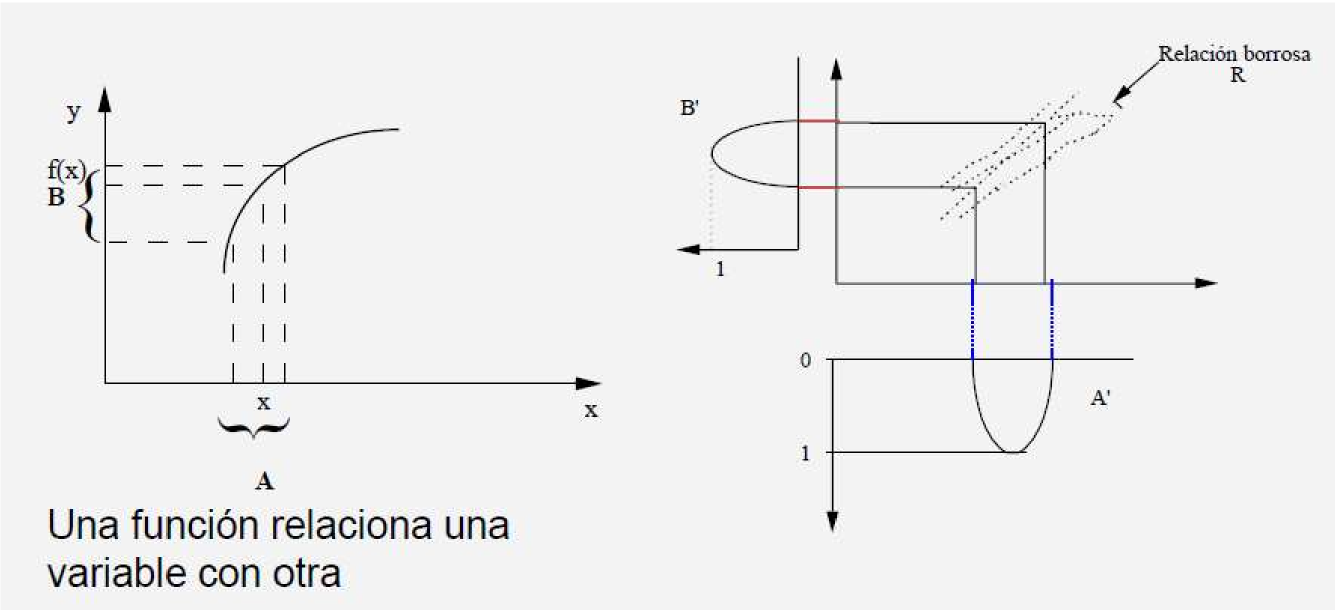
Sea R una relación binaria borrosa en los universos $X \times Y$. Sean A' y B' conjuntos borrosos en X, Y. Si conocemos R y conocemos A' podríamos conocer B' a través de la *regla de composición de inferencias*

$$B' = A'oR$$

$$B'(y) = sup_{x\in X} min[A'(x), R(x,y)], x \in X, y \in Y$$

Si x es A entonces y es B (Relación R)

$R(x,y) = I(A(x), B(y))$ Función de implicación



¿Cuál es la diferencia entre el "si" y el "solo si" en lógica?

- $P \rightarrow Q$ representa el "si"
- $Q \rightarrow P$ representa el "solo si"

Ejemplo: desarrollar un sistema para una empresa donde solo los del 3er piso pueden usar las impresoras

Sea P: 3er piso, Q: usar impresora

¿Cómo se escribe la regla?

$Q \rightarrow P$ es equivalente a $\neg P \rightarrow \neg Q$ por la ley de contraposición

Control Borroso

Ha habido una intensiva investigación en teoría de control e ingeniería de control. Sus múltiples enfoques se apoyan en dos hipótesis fundamentales:

- El sistema a ser controlado ha de ser conocido. El conocimiento es recogido en un modelo cuyos parámetros han de ser identificados.
- El objetivo de control ha de ser especificado en términos de concisas fórmulas matemáticas en las que

A medida que la complejidad del sistema a controlar aumenta, o la no fácil expresión matemática de su comportamiento, las hipótesis empiezan a fallar así como los métodos de identificación y ajuste del controlador existentes.

Nace un nuevo paradigma de control o control experto basado en el uso de cálculo simbólico como aplicación clásica de I.A. en el diseño de un algoritmo de control.

Esta metodología permite el uso de lógica heurística para diseñar tanto reguladores simples como multivariables con sofistica das leyes de control.

La aportación de la lógica borrosa al control experto parece atractiva por su tratamiento de la vaguedad de conceptos. Mejor modelado del comportamiento.

Los primeros controladores aparecieron en la literatura en 1974. Dos periodos de trabajos:

- Experimentos en laboratorio y desarrollo de prototipos.
- Finales de los 80 explosión de aplicaciones comerciales.

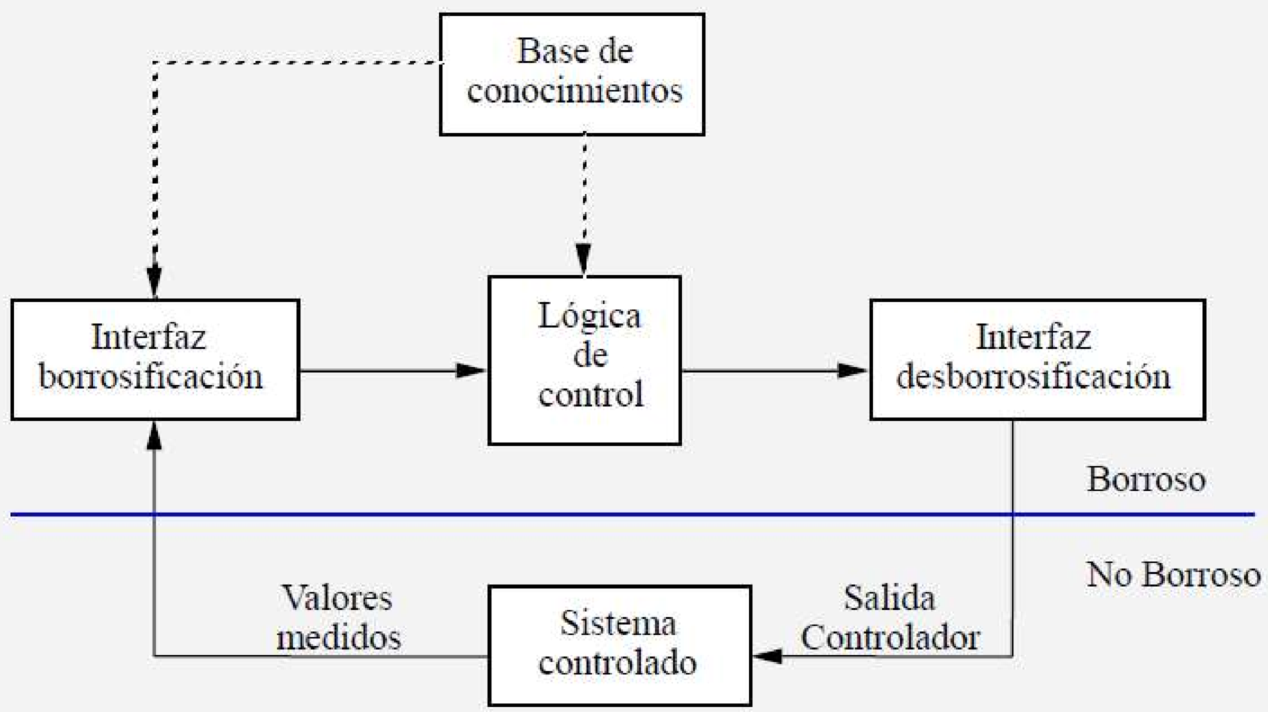
Aplicaciones de controladores borrosos II Algunos trabajos:

- Depuradoras de agua
- Control de tráfico
- Pilotaje de barcos
- Hornos de cemento
- Lavadora con control automático borroso (Matsushita Electrical
- Sistemas de aire acondicionado (Mitsubishi Heavy Industry)
- Video cámaras de 8mm (Sanyo)
- Bosch Eco fuzzy
- ABS cruise control de Mazda y Nissan…

Algunas observaciones sobre las aplicaciones comerciales:

1. Los controladores borrosos son usados en un entorno donde se ha trabajado mucho con éxito, se tiene mucha experiencia y se dispone de una valiosa fuente de información acerca de las políticas de control utilizadas.
2. Los sensores añadidos a estos dispositivos no son caros debido a que no es necesaria una precisión importante.
3. El tiempo de desarrollo es usualmente menor que los basados en los principios clásicos de control.

Arquitectura de un controlador borroso



En la etapa de **borrosificación** se toman los datos de entrada y se determina el grado en que pertenecen a cada uno de los conjuntos borrosos a través de las funciones de pertenencia.

La conversión de los datos de entrada a valores lingüísticos expresa la proporción de la similitud del dato a cada término lingüístico de la variable.

La **base de conocimientos** está formada por un conjunto de reglas borrosas, las cuales se pueden definir como la combinación de uno o más conjuntos borrosos de entrada llamados antecedentes y a los que se les asocia un conjunto borroso de salida llamado consecuente.

Los conjuntos borrosos de entrada se asocian mediante operadores borrosos. Al aplicar un operador sobre los conjuntos borrosos se obtiene otro conjunto borroso.

La **desborrosificación** es el proceso de convertir los valores borrosos de las variables de salida que resultan del proceso de inferencia, en información precisa expresada mediante un valor nítido.

Esta etapa es necesaria en los sistemas Mamdani, porque el conjunto borroso de salida para estos sistemas no es directamente utilizable para dar una información precisa al operador o mandar un accionador, es necesario pasar del “mundo borroso” al “mundo real”.

La selección del método de desborrosificación puede jugar un papel decisivo en la síntesis de modelos difusos para muchas áreas de aplicación. Particularmente dentro del área de control difuso, su influencia puede ser determinante en el comportamiento y la robustez del controlador. El más común y ampliamente usado es el método del centroide.

Enfoque de Mamdani al control borroso

Un experto ha de especificar su conocimiento en forma de reglas lingüísticas:

- Ha de definir las etiquetas lingüísticas que van a describir los estados de las variables.
- Para cada entrada se ha de especificar la correspondiente etiqueta lingüística que define la salida.
- Cada una de las variables de entrada y la de salida han de repartirse en conjuntos borrosos específicos con unos significados.

El formato de estas reglas es:

SI u1 es A1 Y u2 es A2 Y....Y un es An ENTONCES v es B

donde los ui y v son variables lingüísticas, y los Ai y B representan los valores lingüísticos (términos lingüísticos asociados a conjuntos borrosos) que dichas variables pueden asumir.

Cada una de las reglas tiene un lado izquierdo (LI) formado por uno o varios antecedentes y un lado derecho (LD) (consecuente), por ejemplo "SI la temperatura es alta y la presión es media ENTONCES bajar un poco el caudal de combustible".

Ventajas del método Mamdani: Es más intuitivo, está ampliamente aceptado, se adapta mejor al lenguaje humano.

La inferencia en los sistemas tipo Mamdani comprende dos fases básicas:

1. Cálculo de la parte SI de las reglas: Evalúa el grado de certeza o activación del lado izquierdo (LI) de cada regla para los valores actuales de las variables de entrada. Si se evalúa la regla n, el grado de certeza o activación se representa por µLI(n). En esta fase se usan generalmente los operadores Mínimo y Producto para evaluar el "and" que conecta las proposiciones del lado izquierdo.
2. Cálculo de la parte ENTONCES de las reglas: A partir del grado de activación se determina la conclusión de la regla. Asigna a cada variable de salida del consecuente el conjunto borroso correspondiente modificado en el grado especificado por µLI(n). La función de pertenencia del conjunto modificado se representa por µLD(n)(v), donde n es la regla evaluada y v es la variable de salida. La modificación del conjunto borroso de salida en el grado especificado por µLI(n) se realiza mediante la implicación borrosa.

La implicación tipo Mamdani es de las más usadas y se implementa con la función mínimo:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = min(\mu A(x), \mu B(y))$$

La base de reglas constará de K reglas de control. Esta definición de reglas tiene el sentido de definir una función a trozos más que una inferencia propiamente dicha.

$$y \hat{=} \begin{cases} B_{i_1} & \text{si } H_1 \hat{=} A^{(1)}_{i_{1,1}} \text{ y ... y } H_n \hat{=} A^{(n)}_{i_{n,1}} \\ \text{- -} & \\ B_{i_k} & \text{si } H_1 \hat{=} A^{(1)}_{i_{1,k}} \text{ y ... y } H_n \hat{=} A^{(n)}_{i_{n,k}} \end{cases}$$

Cada regla de la base de reglas se comprueba separadamente. Se determina el grado de cumplimiento de cada hipótesis de la regla de acuerdo a la variable medida.

Para cada regla se observa el grado de cumplimiento de las variables medidas H1, H2,....Hn a las etiquetas lingüísticas A(1)...A(n) y después se hace la conjunción de grados de cumplimiento.

Para cada regla de control se calcula:

$$\alpha_r = min(\mu^1_{i_{1,r}}(x_1), \cdots, \mu^n_{i_{n,r}}(x_n))$$

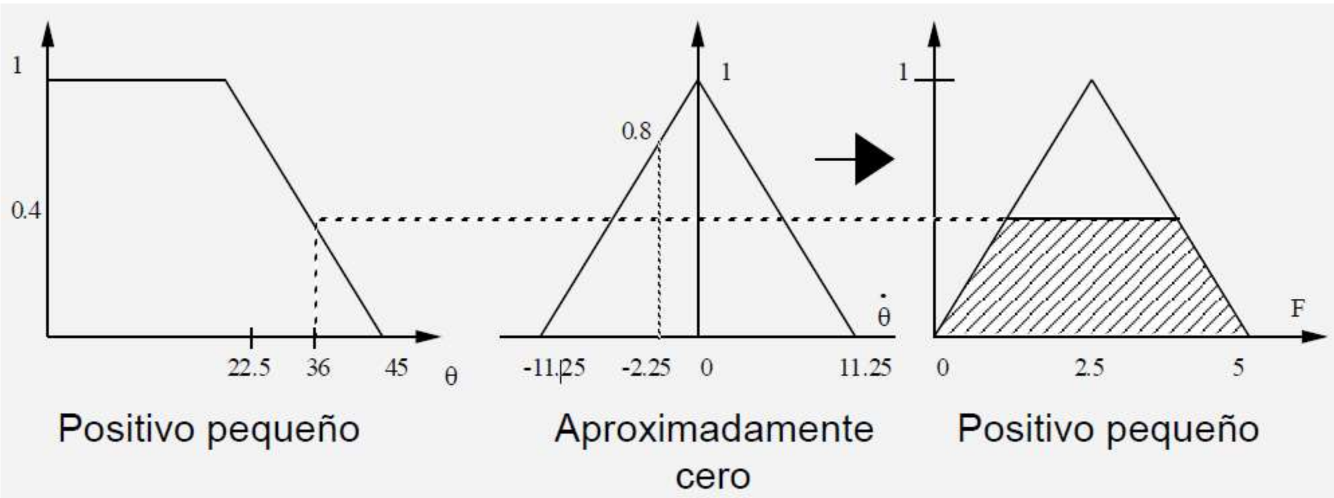
La salida de la regla r es un conjunto borroso de valores de salida obtenidos cortando el conjunto borroso μ_{ir} asociado con la conclusión de la regla r en el nivel de cumplimiento α_r

Ejemplo con una base de reglas tal como:

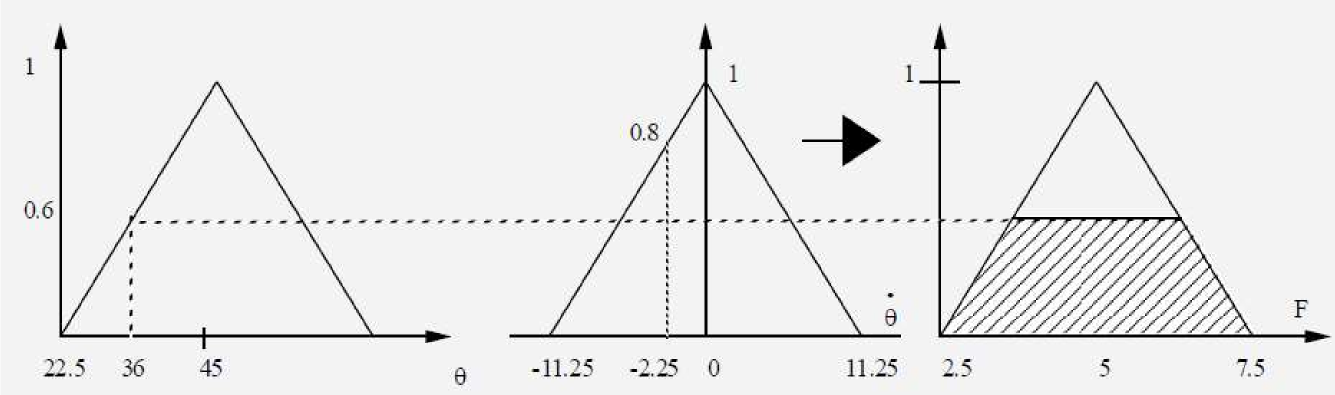
- R1: Si θ es positivo pequeño y θ' es aproximadamente cero Entonces F es positivo pequeño
- R2: Si θ es positivo medio y θ' es aproximadamente cero entonces F es positivo medio

Datos medidos $\theta = 36^o, \theta' = -2.25^o s^{-1}$

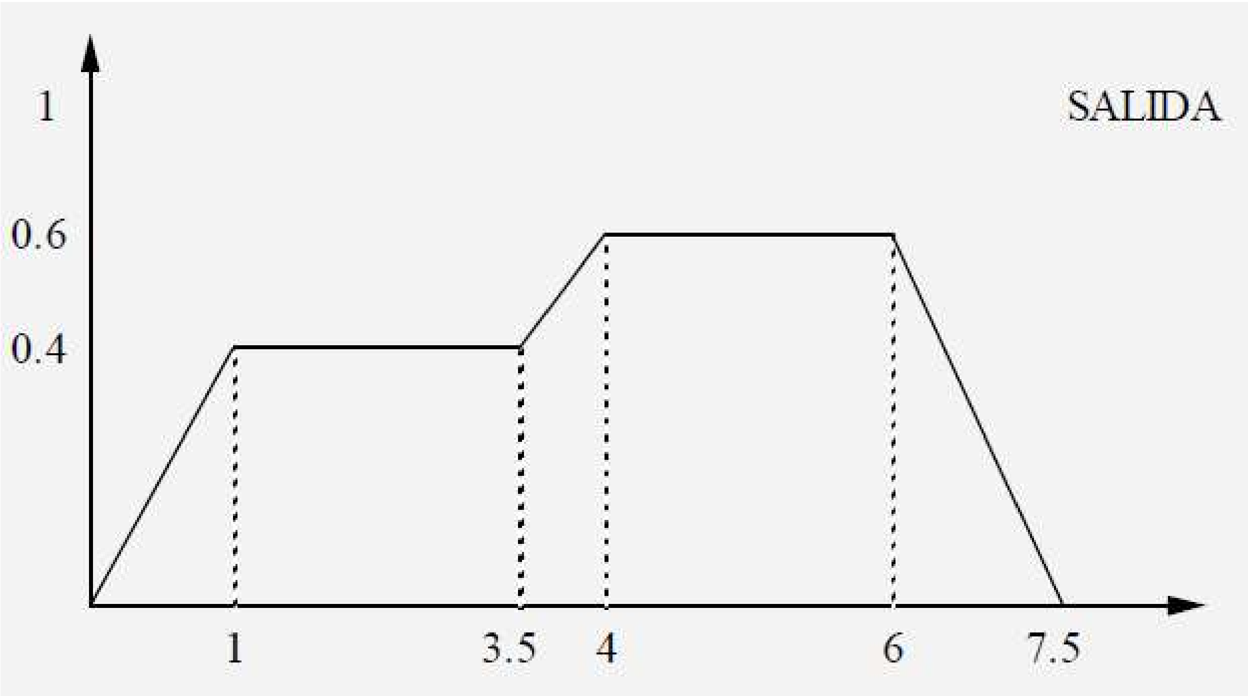
Evaluación de la regla R1



Evaluación de la regla R2



Tras la evaluación de cada regla, se han de combinar todos los conjuntos borrosos obtenidos de la salida de las reglas mediante la operación máximo (unión).



Ejemplo de control difuso para calcular la propina en un restaurante en base a la calidad de la comida y el servicio

La asociación de cada tupla de entradas medidas con un conjunto borroso de salida para Y

NO ES UN VALOR CRISP

Por lo que es necesario una interface de "desfuzificación" o "desborrosificación" para lo cual existen varias estrategias:

- Método del criterio del Máximo.
- Método de la Media del Máximo.
- Método del Centro de Gravedad.

Método del criterio del máximo

Consiste en elegir un valor arbitrario $y \in Y$ que en el conjunto borroso de salida alcance el máximo grado de pertenencia. En el ejemplo cualquier valor en $[4, 6]$ podría ser el valor crisp de salida.

- Ventaja: Aplicable a conjuntos borrosos arbitrarios y para cualquier dominio de control de Y
- Desventaja: No especificación de qué valor de máximo grado de pertenencia ha de ser elegido. Si se escoge un valor aleatorio cada vez se obtendría un controlador no determinista que puede llevar a

acciones de control discontinuas.

Método de la media del máximo

Si el conjunto de la salida no es vacío, entonces el valor crisp de salida será el valor medio del conjunto máximo. El método puede dar lugar a acciones de control discontinuas. La salida salta de un valor a otro a intervalos de máximo grado de pertenencia. En el ejemplo el valor de salida será 5 con este criterio.

Método del centro de gravedad

El valor crisp de salida para la acción de control es aquel que es el centro de gravedad del conjunto borroso de salida.

El método del centro de gravedad convierte una función de distribución de posibilidad en un valor numérico a partir, precisamente, del cálculo de su centro de gravedad. Dada una función de distribución de posibilidad genérica μp(x) y un conjunto de puntos de discretización de la función {x1, x2, …, xn}, el centro de gravedad de μp(x) se define como:

$$g_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mu_p(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_p(x_i)}$$

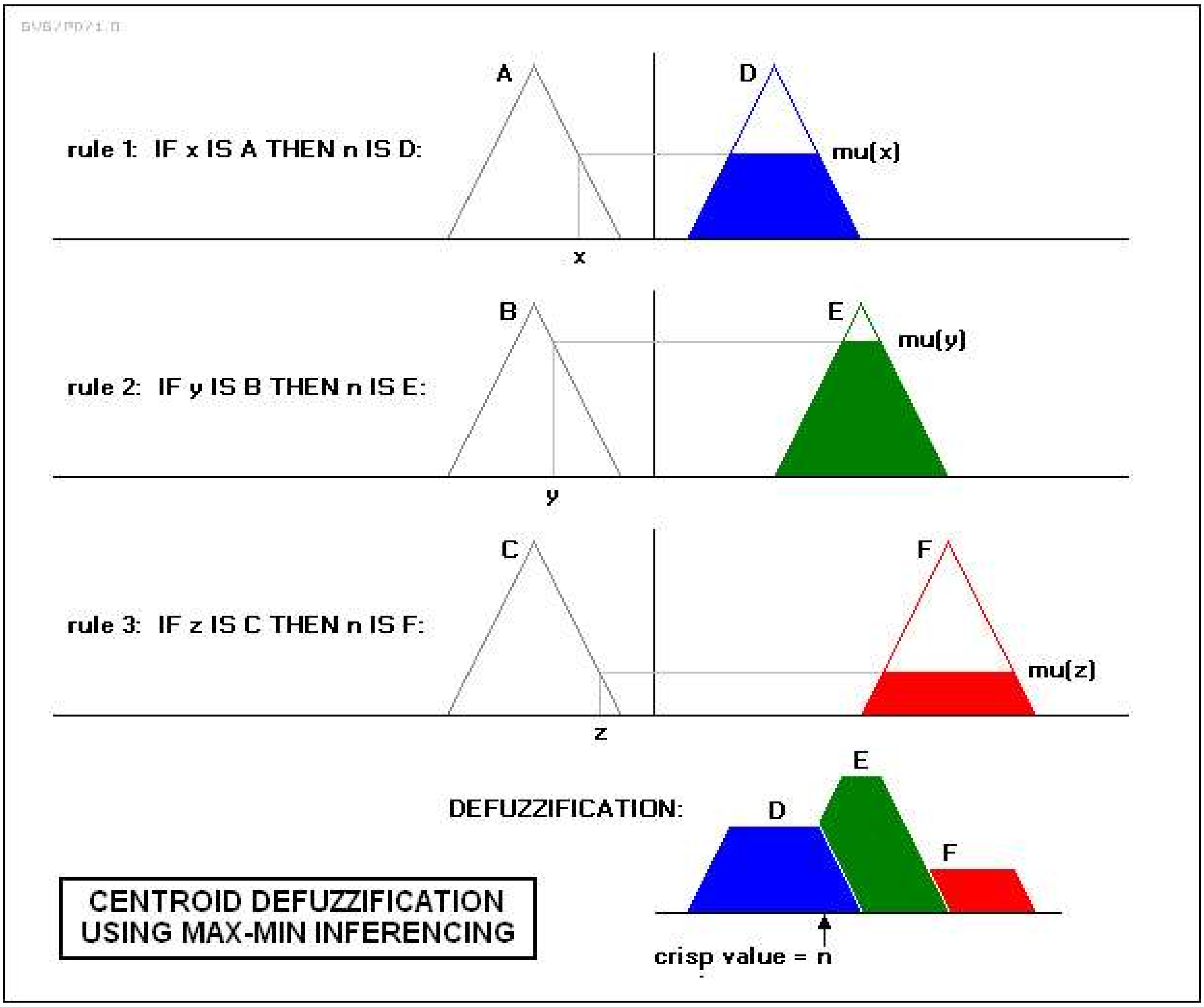
- Ventaja: el controlador muestra un comportamiento suave de control (continuo). Tiene en cuenta las reglas considerando su grado de aplicabilidad.
- Desventaja: difícil justificación desde el punto de vista semántico y necesita más tiempo de cálculo que otros métodos.

En el ejemplo el valor de salida con este método es 3.9

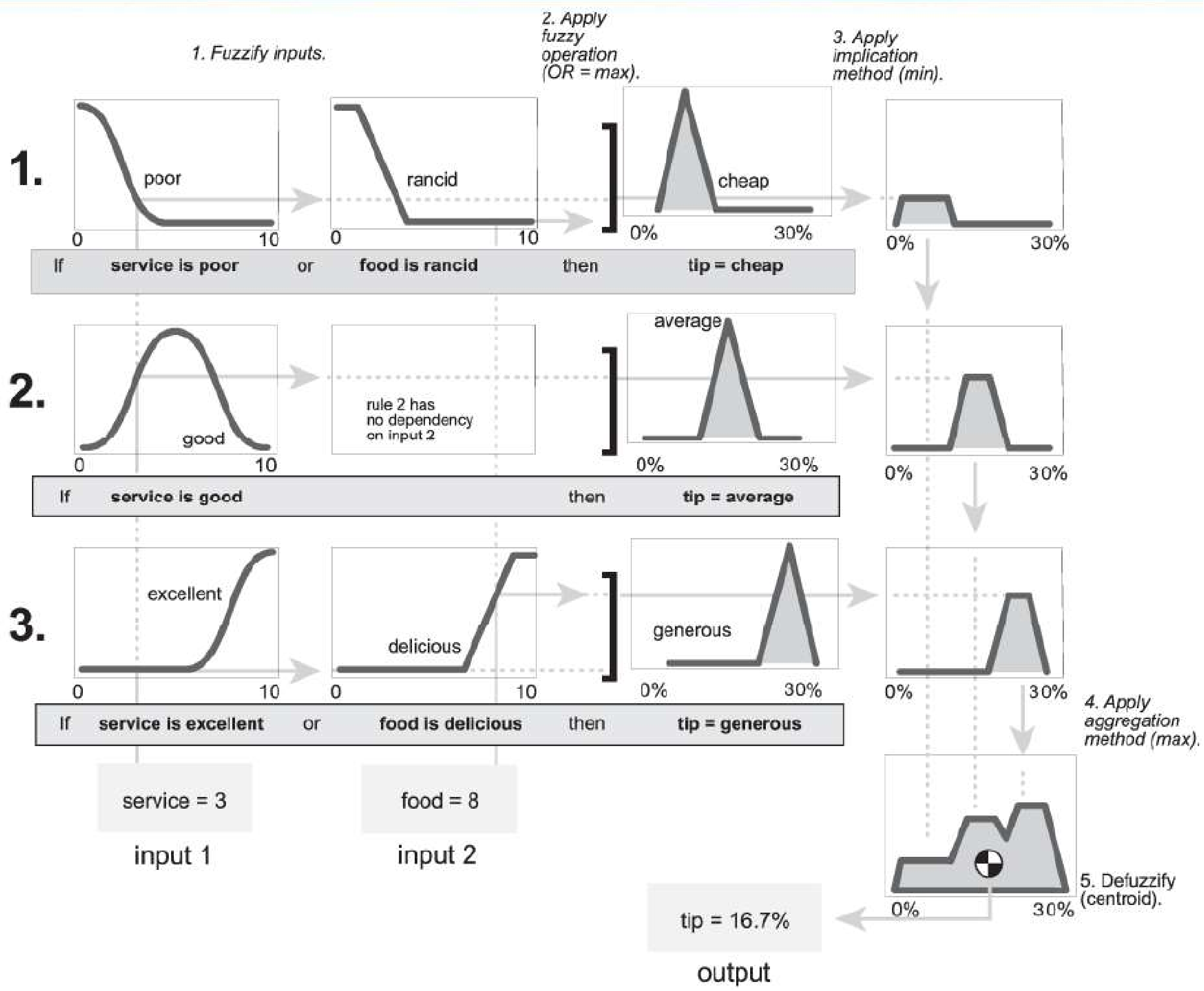
$$(0.4 * 1 + 0.4 * 3.5 + 0.6 * 4 + 0.6 * 6)/(0.4 + 0.4 + 0.6 + 0.6) = 3.9$$

donde el primer trapecio alcanza su máximo (=0.4) en $[1, 3.5]$ y el segundo trapecio alcanza su máximo (=0.6) en $[4, 6]$

El siguiente diagrama demuestra la inferencia max-min y la defuzzificación del centroide para un sistema con variables de entrada "x", "y" y "z" y una variable de salida "n".



Observe cómo cada regla proporciona un resultado como valor de verdad de una función de pertenencia particular para la variable de salida. En la defuzzificación del centroide, los valores tienen OR, es decir, se usa el valor máximo y no se suman los valores, y luego los resultados se combinan mediante el cálculo del centroide.



Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso

En 1985, Takagi y Sugeno aportan a la teoría del control difuso un nuevo método llamado de Takagi-Sugeno-Kang (TSK), como alternativa al método de Mamdani. Se trata de un método basado en reglas difusas, pero en el que el consecuente no nos da un conjunto difuso sino una serie de funciones lineales. Este modelo es útil para sistemas complejos y de dimensiones mayores que los que podemos resolver por el método de Mamdani.

En lugar de trabajar con una salida borrosa, TSK propusieron un nuevo modelo basado en reglas donde el antecedente está compuesto de variables lingüísticas y el consecuente se representa como una función lineal de las variables de entrada.

La principal diferencia que presenta el método TSK respecto al de Mamdani es que no es necesario realizar un proceso de defuzzificación. Esto se debe al hecho de que no obtenemos ningún conjunto difuso sino un conjunto de funciones lineales.

Usa la misma especificación de las particiones borrosas de los dominios de las entradas que en el modelo de Mandani, pero no se requiere una partición borrosa del dominio de salida.

Reglas de control:

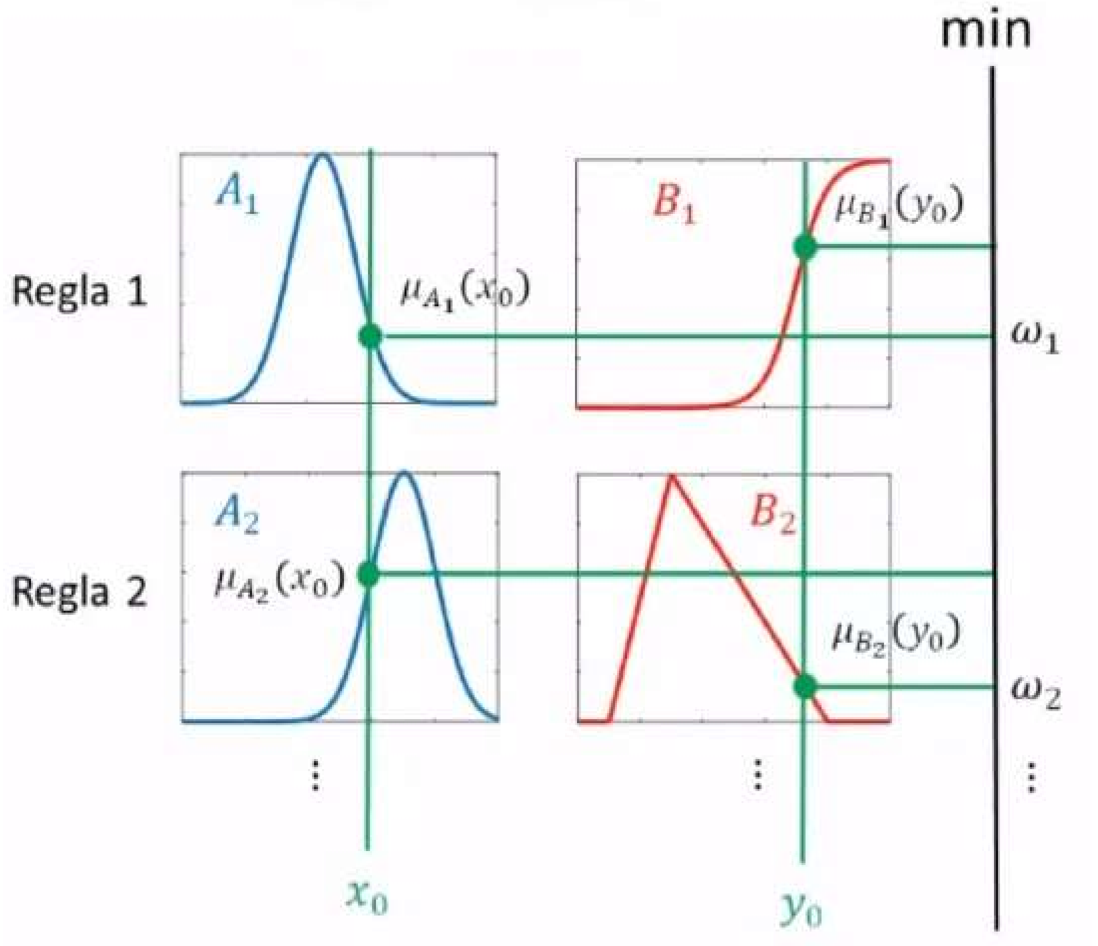
$$R_r : SI\ h_1\ es\ A^1_{i_{1,r}}\ y \cdots y\ h_n\ es\ A^n_{i_{1,n}} \text{ Entonces } v_r = f_r(h_1, \cdots, h_n),\ r = 1, \cdots, k$$

Cálculo de la parte SI de las reglas

El cálculo del lado izquierdo de las reglas borrosas en estos sistemas es el mismo que en los sistemas Mamdani. Para cada regla de control se calcula:

$$\alpha_r = min(\mu^1_{i_{1,r}}(x_1), \cdots, \mu^n_{i_{n,r}}(x_n))$$

Al aplicar el operador de implicación escogido se obtiene un grado de pertenencia o activación α_j para cada una de las reglas disparadas. Generalmente, se obtiene calculando el mínimo de los valores de entrada en cada regla R_i



NOTA: los w_i de la imagen se corresponden a los α_i en la notación vista anteriormente

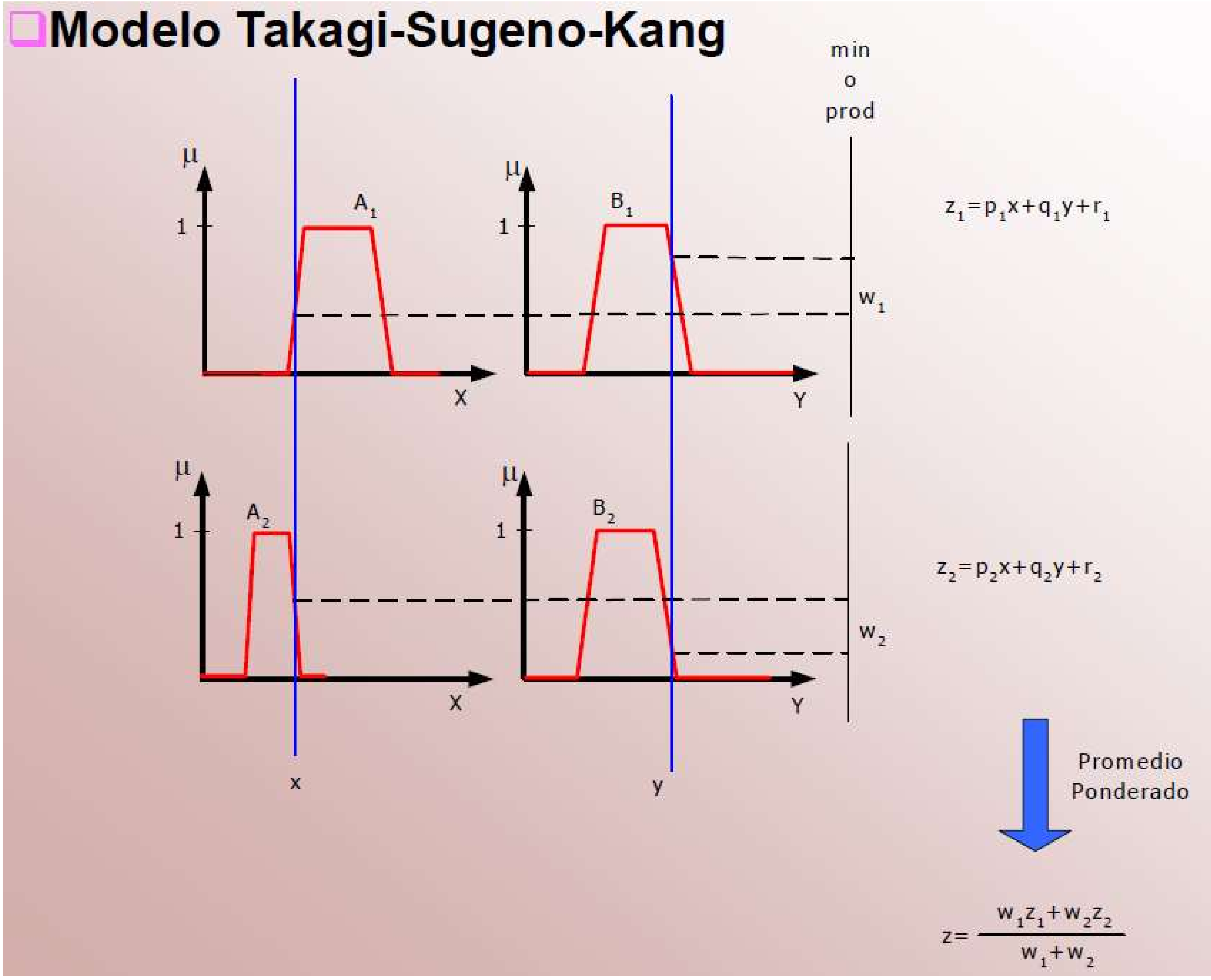
Cálculo de la parte ENTONCES de las reglas

En el lado derecho de estas reglas se obtiene el respectivo valor de salida mediante la combinación lineal de las entradas: $v_r = f_r(h_1, \cdots, h_n)$ donde el subíndice en la variable de salida v_r se refiere al número de la regla disparada.

Salida en sistemas Sugeno

La salida de un sistema borroso TSK que usa una base de conocimiento con k reglas se obtiene como la media ponderada de las salidas individuales $v_r (r = 1, \cdots, k)$ proporcionadas por las reglas disparadas, como sigue:

$$\eta = \frac{\sum_{r=1}^{k} \alpha_r f_r(x_1, \cdots, x_n)}{\sum_{r=1}^{k} \alpha_r}$$

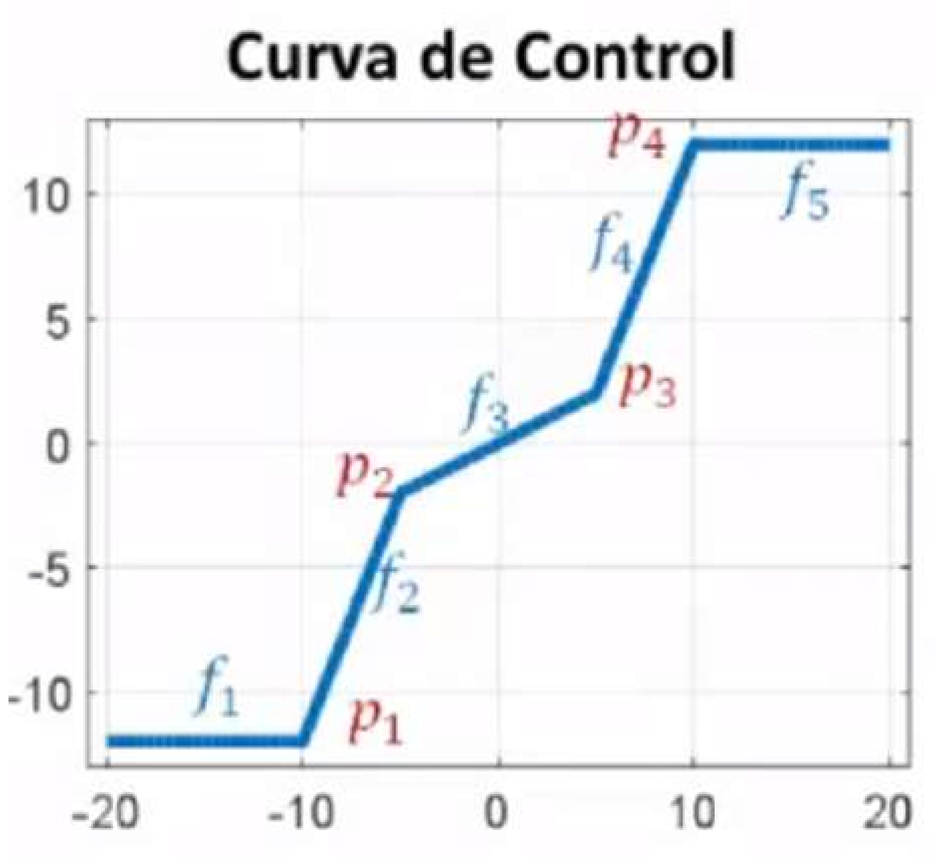


NOTA: la variable z corresponde con la variable η mencionada anteriormente

Ejemplo: Consideremos que queremos diseñar un sistema para controlar la posición de un cartucho de una impresora de inyección de tinta. Partimos de una Curva de Control en la cual el eje de abscisas representa el Error y la ordenada el Voltaje que se le aplica al motor. A partir de ella podemos establecer las Reglas de Control.

- R1: Si e es NG, entonces v = f1(e) = -12
- R2: Si e es NP, entonces v = f2(e) = 2e+8
- R3: Si e es C, entonces v = f3(e) =0.4e
- R4: Si e es PP, entonces v = f3(e) =2e-8
- R5: Si e es PG, entonces v = f5(e) = 12

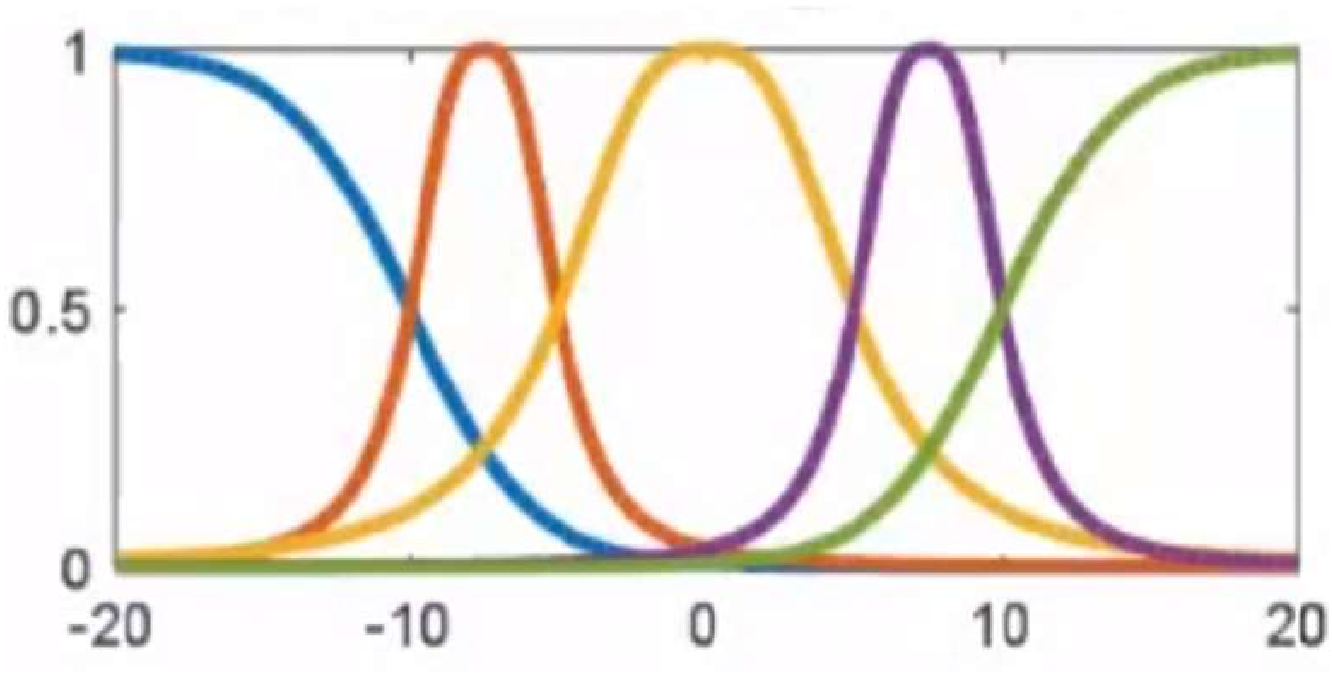
Los puntos p_i de la gráfica corresponden a los valores: $p_1(-10, -12)$, $p_2(-5, -2)$, $p_3(5, 2)$, $p_4(10, 12)$



A partir de la curva de control obtenemos las cinco funciones lineales y los cuatro puntos característicos que separan dichas funciones.

A la variable de entrada Error le asociamos cinco términos lingüísticos que representan cinco conjuntos difusos: NG (\Negativo Grande"), NP (\Negativo Pequeño"), C (\Cero"), PP (\Positivo Pequeño") y PG (\Positivo Grande").

A continuación, se presentan las cinco funciones de pertenencia de los conjuntos difusos del sistema asociados a la variable Error: NG (azul), NP (naranja), C (amarillo), PP (morado) y PG (verde).



Este ejemplo es muy sencillo, ya que solo utilizamos una variable. Supongamos que tenemos un error nulo ($e = 0$). En este caso tendríamos que: $\mu_{NP}(0) = 0.1$, $\mu_C(0) = 1$, $\mu_{PP}(0) = 0.1$

Como para cada regla de control solo tenemos una variable y α_i se obtiene del mínimo de las variables de entrada, obtenemos de forma inmediata: $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0.1$. Calculamos ahora el valor de salida del sistema para un error nulo:

$$\eta = \frac{0.1 * f_1(0) + 1 * f_2(0) + 0.1 * f_3(0)}{0.1 + 1 + 0.1} = \frac{0.1 * 8 + 1 * 0 - 0.1 * 8}{1.2} = 0$$

Como era de esperar, cuando no hay error alguno, no es necesario aplicar ningún voltaje a la impresora.

hasta aquí

El **principio de extensión** es una de las ideas básicas en la teoría de conjuntos borrosos, ya que proporciona un método general para extender conceptos matemáticos crisp para abordar cantidades borrosas, como operaciones algebraicas reales en números borrosos. Estas operaciones son generalizaciones computacionalmente efectivas del análisis de intervalos. Permite la generalización de conceptos matemáticos crisp sobre funciones a la teoría de conjuntos borrosos.

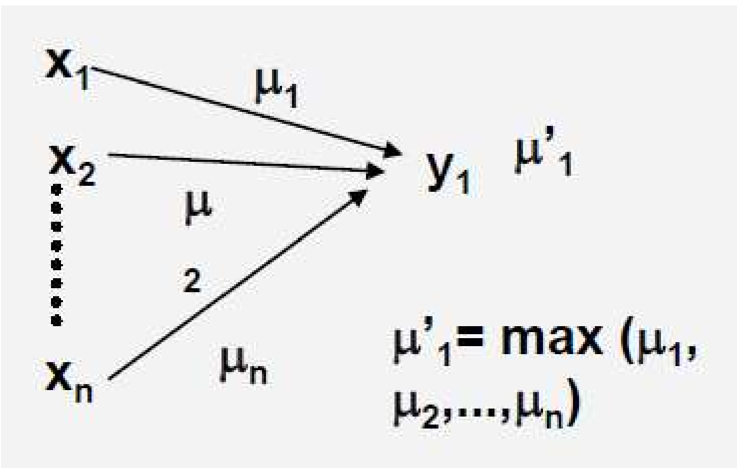
Cualquier función f que asocie elementos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ del conjunto crisp X al Y puede generalizarse en lógica borrosa asociando subconjuntos borrosos de X a otros de Y mediante una función f cualquiera $f : X \rightarrow Y$

Sea A un conjunto borroso en X tal que $A = \mu_1|x_1 + \mu_2|x_2 + \ldots + \mu_n|x_n$

Entonces, se puede obtener otro conjunto borroso en Y como:

$f(A) = f(\mu_1|x_1 + \mu_2|x_2 + \ldots + \mu_n|x_n)$

$$= \mu'_1|f(x_1) + \mu'_2|f(x_2) + \ldots + \mu'_n|f(x_n)$$



Sea $f : X \rightarrow Y$ una función que asocia elementos de X a elementos de $Y : y = f(x)$

Sea el dominio de $X = \{a, b, c\}$ y el de $Y = \{p, q, r\}$, con $f(a) = p, f(b) = q, f(c) = p$

Sea $A = 0.3/a + 0.9/b + 0.5/c$, conjunto borroso definido en X

Entonces $B = f(A)$ será

> $\mu_B(p) = max[0.3, 0.5] = 0.5$

> $\mu_B(q) = max[0.9] = 0.9$

> $\mu_B(r) = 0$

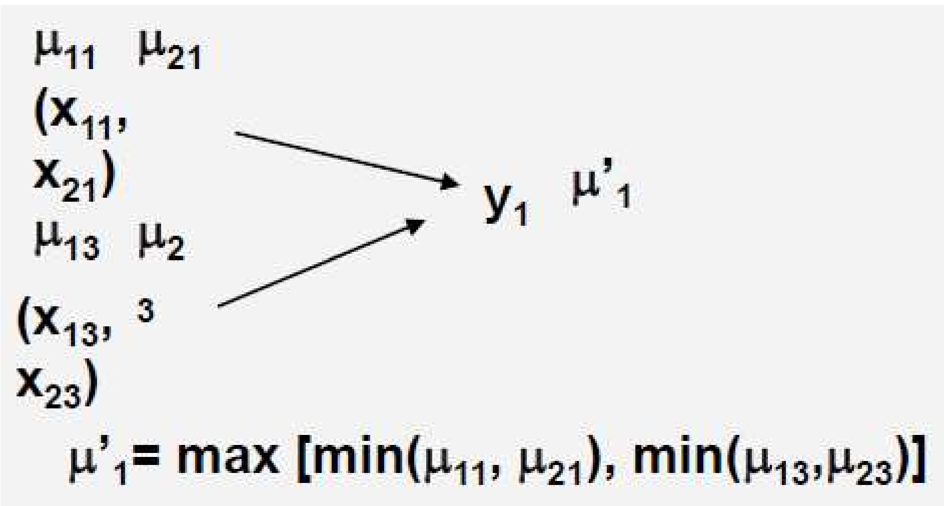
> $B = f(A) = 0.5/p + 0.9/q$

Se puede generalizar el Principio de Extensión para el caso en el que el Universo X sea el producto cartesiano de n Universos $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$

- La función de transformación: $f : X \rightarrow Y, y = f(x)$, con $x = (x1, x2, ..., xn)$
- El Principio de Extensión transforma n Conjuntos Difusos $A_1, A_2, \cdots, A_n$, de los universos $X_1, X_2, \cdots, X_n$ respectivamente, en un conjunto difuso $B = f(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ en Y, definido como:
$$B(y) = sup\{min[A_1(x_1), A_2(x_2), \cdots, A_n(x_n)] | x \in X, y = f(x)\}$$

Si más de un $x \in X$ es asociado por f a un mismo elemento $y \in Y$, su grado de pertenencia será el máximo de los grados de pertenencia (si el conjunto es finito, si es infinito se utiliza el supremo)

Si varias tuplas de elementos x_i apuntan a un y, su grado de pertenencia será el mínimo de los grados de pertenencia de los elementos de la tupla



Ejemplo:

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función que asocia pares de elementos de X con elementos de $Y : y = f(x_1, x_2)$

Sea el dominio de $X = \{x1, x2\}$ con $x_1 = \{a, b, c\}, x_2 = \{x, y\}$ y el dominio de $Y = \{p, q, r\}$

Definición de f:

	x	y
a	p	p
b	q	r
c	r	p

Sean

$A_1 = 0.3/a + 0.9/b + 0.5/c$ (conjunto borroso definido en x_1)

$A_2 = 0.5/x + 1/y$ (conjunto borroso definido en x_2)

$B = f(A_1, A_2)$

Entonces

$\mu_B(p) = max[min(0.3, 0.5), min(0.3, 1), min(0.5, 1)] = 0.5$

$\mu_B(q) = max[min(0.9, 0.5)] = 0.5$

$\mu_B(r) = max[min(0.5, 0.5), min(0.9, 1)] = 0.9$

$B = f(A1, A2) = 0.5/p + 0.5/q + 0.9/r$

Bibliografía

- La lógica borrosa y sus aplicaciones (http://padron.entretemas.com.ve/cursos/Epistem/Definiciones/LogicaBorrosa.pdf)
- Lógica difusa (https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica_difusa)
- Fuzzy logic (https://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic)
- Fuzzy set operations (https://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_set#Fuzzy_set_operations)
- Reseña historica Lógica Difusa (https://joseocanto.wordpress.com/resena-historica-del-metodo-difusa/)