Ejercicios de refuerzo (no evaluables)

Álgebra lineal

1. Obténganse las normas 1, 2 e ∞ de los siguientes vectores:

   a) $v_1 = (1, 0, 2)$.
   b) $v_2 = (-6, 5)$.
   c) $v_3 = (\sqrt{2}, -1, 0, 1)$.

2. Calcúlese $u \cdot v$ en cada caso y determínese si u y v son perpendiculares.

   a) $u = (0, -1, 2)$, $v = (1, 0, 0)$.
   b) $u = (-3, 1, 4)$, $v = (1, 4, -2)$.
   c) $u = (\sqrt{2}, 1, 0)$, $v = (-\sqrt{2}, 2, -3)$.

3. Compruebe que $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ siendo $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

4. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que si u es perpendicular a w y v es perpendicular a w, entonces $u + v$ también es perpendicular a w.

5. Sean $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ y $w = (\alpha, 2, \alpha)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Encuentra para qué valores de α el conjunto $\{u, v, w\}$ es lineamente independiente.

6. Compruebe las siguientes afirmaciones:

   a) Los vectores $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (-1, 1)$ son linealmente independientes
   b) Todo vector $v \in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de v_1 y v_2.

7. Realícense las siguientes operaciones matriciales:

   a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

8. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices cuadradas tales que $\det(A) = 2$ y $\det(B) = -3$. Obtén razonadamente el valor de $\det(12A^2B)$.

9. Sea
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
   a) Comprueba que $\det A = \det A'$. Siendo $A' = A^\top$ la matriz traspuesta de A.
   b) Deduce entonces que A es regular si y sólo si A' es regular.

10. Demuestra, usando las identidades trigonométricas convenientes, los enunciados (a) y (b) siguientes, siendo $f_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$:
   a) $\|f_\theta(v)\|_2 = \|v\|_2, \forall v \in \mathbb{R}^2, \forall\theta \in \mathbb{R}$.
   b) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   c) Comprueba que la aplicación $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal.
   d) Halla la representación matricial de $f_{\pi/4}$, i.e., la matriz $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $f_{\pi/4}(v) = Mv$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por $T(1, 0) = (1, 1)$ y $T(0, 1) = (-1, 1)$, calcule:
   a) $T(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   b) La representación matricial de T i.e., la matriz $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $T(v) = Mv$.

12. Diagonaliza, de ser posible, las matrices siguientes:
   a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   b)
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$