Lógica Proposicional

El cálculo proposicional es una rama de la lógica. También se le llama lógica proposicional o lógica de orden cero. Se ocupa de proposiciones (que pueden ser verdaderas o falsas) y relaciones entre proposiciones, incluyendo la construcción de argumentos basados en ellas. Las proposiciones compuestas se forman conectando otras proposiciones mediante conectores lógicos. Las proposiciones que no contienen conectores lógicos se llaman proposiciones atómicas.

A diferencia de la lógica de primer orden, la lógica proposicional no trata con objetos no lógicos, predicados sobre ellos o cuantificadores. Sin embargo, toda la maquinaria de la lógica proposicional está incluida en la lógica de primer orden y en la lógica de orden superior. En este sentido, la lógica proposicional es el fundamento de la lógica de primer orden y de la lógica de orden superior.

Los conectores lógicos se encuentran en los lenguajes naturales. En inglés, por ejemplo, algunos ejemplos son "and" (conjunción), "or" (disyunción), "not" (negación) y "if" (pero solo en determinadas situaciones que veremos más adelante).

El siguiente es un ejemplo de una inferencia muy simple dentro del alcance de la lógica proposicional:

- Premisa 1: Si está lloviendo entonces está nublado.
- Premisa 2: Está lloviendo.
- Conclusión: Está nublado.

Tanto las premisas como la conclusión son proposiciones. Las premisas se dan por supuestas y, con la aplicación del modus ponens (una regla de inferencia), se llega a la conclusión.

Como la lógica proposicional no se preocupa por la estructura de las proposiciones más allá del punto en el que ya no pueden descomponerse mediante conectivos lógicos, esta inferencia se puede reformular reemplazando esas declaraciones atómicas con letras de declaraciones, que se interpretan como variables que representan declaraciones:

- Premisa 1: $P \to Q$
- Premisa 2: P
- Conclusión: Q

Lo mismo se puede enunciar de la siguiente manera:

$$\frac{P \to Q, P}{Q}$$

Cuando P se interpreta como "está lloviendo" y Q como "está nublado", se puede ver que las expresiones simbólicas anteriores se corresponden exactamente con la expresión original en lenguaje natural. No sólo eso, sino que también se corresponderán con cualquier otra inferencia de esta forma, que será válida sobre la misma base que esta inferencia.

Conceptos Básicos

Cualquier proposición dada puede representarse con una letra llamada 'constante proposicional', de manera análoga a representar un número con una letra en matemáticas (por ejemplo, $a = 5$). Todas las proposiciones requieren exactamente uno de dos valores de verdad: verdadero o falso. Por ejemplo, sea P la proposición de que afuera está lloviendo. Entonces, P será verdadero si está lloviendo afuera, y falso en caso contrario ($\neg P$).

Luego definimos operadores funcionales de verdad, comenzando con la negación. $\neg P$ representa la negación de P. En el ejemplo anterior, $\neg P$ expresa que no está lloviendo afuera, o por una lectura más estándar: "No es el caso que está lloviendo afuera." Cuando P es verdadera, $\neg P$ es falsa; y cuando P es falsa, $\neg P$ es verdadera. Como resultado, $\neg\neg P$ siempre tiene el mismo valor de verdad que P.

P	$\neg P$
F	V
V	F

La conjunción es un conector funcional veritativo que forma una proposición a partir de dos proposiciones más simples, por ejemplo, P y Q. La conjunción de P y Q se escribe $P \wedge Q$, y expresa que ambas son verdaderas. $P \wedge Q$ se lee como "P y Q". Para dos proposiciones cualesquiera, hay cuatro posibles asignaciones de valores de verdad:

1. P es verdadera y Q es verdadera
2. P es verdadera y Q es falsa
3. P es falsa y Q es verdadera
4. P es falsa y Q es falsa

La conjunción de P y Q es verdadera en el caso 1 y falsa en caso contrario. Donde P es la proposición de que está lloviendo afuera y Q es la proposición de que hay un frente frío sobre Kansas, P ∧ Q es verdadera cuando está lloviendo afuera y hay un frente frío sobre Kansas. Si no llueve afuera, entonces P ∧ Q es falso; y si no hay un frente frío sobre Kansas, entonces P ∧ Q también es falso.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

La disyunción se parece a la conjunción en que forma una proposición a partir de dos proposiciones más simples. Lo escribimos P ∨ Q, y se lee "P o Q".

1. P es verdadera o Q es verdadera
2. P es verdadera o Q es falsa
3. P es falsa o Q es verdadera
4. P es falsa o Q es falsa

La disyunción de P o Q es verdadera en los tres primeros casos y falsa en el cuarto.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Resumiendo, podemos decir que la conjunción es verdadera si y solo si ambas proposiciones son verdaderos. Y que, la disyunción es verdadera si y solo si ambas proposiciones no son falsas a la vez.

El condicional también une dos proposiciones más simples, y escribimos P → Q, que se lee "si P entonces Q". La proposición a la izquierda de la flecha se llama antecedente, y la proposición a la derecha se llama consecuente. (No existe tal designación para la conjunción o la disyunción, ya que son operaciones conmutativas). Expresa que Q es verdadera siempre que P sea verdadera.

1. si P es verdadera entonces Q es verdadera
2. si P es verdadera entonces Q es falsa
3. si P es falsa entonces Q es verdadera
4. si P es falsa entonces Q es falsa

Por lo tanto, P → Q es verdadero en todos los casos anteriores, excepto en el caso 2, porque este es el único caso en el que P es verdadero pero Q no lo es.

El condicional a menudo se confunde con la causalidad física. El condicional material, sin embargo, solo relaciona dos proposiciones por sus valores de verdad, que no es la relación de causa y efecto.

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Bicondicional une dos proposiciones más simples, y escribimos P ↔ Q, que se lee "P si y solo si Q". Expresa que P y Q tienen el mismo valor de verdad, de donde 'P es verdadera si y sólo si Q' es verdadera, y es falsa en caso contrario.

1. P es verdadera si y solo si Q es verdadera
2. P es verdadera si y solo si Q es falsa
3. P es falsa si y solo si Q es verdadera
4. P es falsa si y solo si Q es falsa

Por tanto, los casos 1 y 4 son verdaderos y los casos 2 y 3 son falsos.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Entre las reglas de la lógica proposicional clásica algunas de la más notables son listadas a continuación:

- Ley de doble negación
- Leyes de idempotencia
- Leyes asociativas
- Leyes conmutativas
- Leyes distributivas
- Leyes de De Morgan

Ley de doble negación

Dentro de un sistema de lógica clásica, la doble negación, esto es, la negación de la negación de una proposición p, es lógicamente equivalente a p. Expresado simbólicamente, ¬(¬p) ⇔ p.

Leyes de idempotencia

En matemática y lógica, la idempotencia es la propiedad para realizar una acción determinada varias veces y aun así conseguir el mismo resultado que se obtendría si se realizase una sola vez. Un elemento que cumple esta propiedad es un elemento idempotente, o un idempotente. De esta manera, si un elemento al multiplicarse por sí mismo sucesivas veces da él mismo, este elemento es idempotente. Por ejemplo, los dos únicos números reales que son idempotentes, para la operación producto (·), son 0 y 1. (0·0=0, 1·1=1).

Análogamente, los operadores Y (and, ∧) y O (or, ∨) son idempotentes. En efecto, si V=Verdadero, entonces $\mathrm{V} \wedge \mathrm{V} = \mathrm{V}, \quad \mathrm{V} \vee \mathrm{V} = \mathrm{V}$. Análogamente para F=Falso.

Leyes asociativas

La asociatividad es una propiedad en el álgebra y la lógica proposicional que se cumple , si dados tres o más elementos cualquiera de un conjunto determinado, se verifica que existe una operación ⊙, que cumpla la igualdad:

$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$$

Es decir, en una expresión asociativa con dos o más ocurrencias seguidas de un mismo operador asociativo, el orden en que se ejecuten las operaciones no altera el resultado, siempre y cuando se mantenga intacta la secuencia de los operandos. En otras palabras, reorganizar los paréntesis en una expresión asociativa no cambia su valor final.

La suma y el producto de números reales cumplen la propiedad asociativa, siendo válidas las igualdades:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

En la lógica proposicional estándar, la asociatividad define dos reglas de reemplazo válidas. Estas reglas permiten mover los paréntesis en expresiones lógicas usadas en pruebas lógicas. Las reglas son:

$$(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$$

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$$

Leyes Conmutativas

En matemáticas, la propiedad conmutativa o conmutatividad es una propiedad fundamental que tienen algunas operaciones según la cual el resultado de operar dos elementos no depende del orden en el que se toman. Esto se cumple en la adición y la multiplicación ordinarias: el orden de los sumandos no altera la suma, o el orden de los factores no altera el producto. Lo mismo no ocurre con la resta y la división.

La propiedad conmutativa también es aplicable a algunas operaciones de la lógica proposicional. En lógica proposicional, la conmutación se encuentra en algunas reglas de sustitución:

$$(P \lor Q) \Leftrightarrow (Q \lor P)$$

y

$$(P \land Q) \Leftrightarrow (Q \land P),$$

Leyes Distributivass

En matemáticas, la distributividad es la propiedad de las operaciones binarias que generaliza la propiedad distributiva del álgebra elemental. La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma en álgebra elemental es aquella en la que el resultado de un número multiplicado por la suma de dos o más sumandos, es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número. En términos algebraicos:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

En lógica proposicional, la distribución utiliza dos reglas de reemplazo válidas para expandir las ocurrencias individuales de algunos conectores. Las reglas son

$$(P \land (Q \lor R)) \Leftrightarrow ((P \land Q) \lor (P \land R))$$

$$(P \lor (Q \land R)) \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land (P \lor R))$$

Leyes de De Morgan

Las leyes de De Morgan son un par de reglas de transformación o de inferencia válidas. Llevan el nombre de Augustus De Morgan, un matemático británico del siglo XIX. Las reglas permiten la expresión de conjunciones y disyunciones puramente en términos mutuos a través de la negación.

Las reglas se pueden expresar como:

- La negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones.
- La negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones.

o

- $\neg(A \lor B) = (\neg A) \land (\neg B)$
- $\neg(A \land B) = (\neg A) \lor (\neg B)$

En el siguiente ejemplo de un cálculo proposicional, las reglas de transformación pretenden ser interpretadas como las reglas de inferencia de un llamado sistema de deducción natural. El sistema particular presentado aquí no tiene puntos iniciales, lo que significa que su interpretación para aplicaciones lógicas deriva sus teoremas de un conjunto de axiomas vacío $\mathrm{I} = \emptyset$.

Nuestro cálculo proposicional tiene once reglas de inferencia. Estas reglas nos permiten derivar otras fórmulas verdaderas dado un conjunto de fórmulas que se supone que son verdaderas. Las diez primeras simplemente establecen que podemos inferir ciertas fórmulas bien formadas a partir de otras fórmulas bien formadas. Una fórmula bien formada (WFF) es una secuencia finita de símbolos de un alfabeto dado generada según una gramática formal.

Sin embargo, la última regla usa razonamiento hipotético en el sentido de que en la premisa de la regla asumimos temporalmente que una hipótesis (no comprobada) es parte del conjunto de fórmulas inferidas para ver si podemos inferir otra fórmula determinada. Dado que las primeras diez reglas no hacen esto, generalmente se describen como reglas no hipotéticas y la última como una regla hipotética.

Al describir las reglas de transformación, vamos a introducir un símbolo del metalenguaje ⊢, el cual es básicamente una abreviatura conveniente para decir "inferir esto". El formato es $\Gamma \vdash \psi$, en el que Γ es un conjunto (posiblemente vacío) de fórmulas llamadas premisas, y ψ es una fórmula llamada conclusión. La regla de transformación $\Gamma \vdash \psi$ significa que si cada proposición en Γ es un teorema (o tiene el mismo valor de verdad que los axiomas), entonces ψ también es un teorema.

Tenga en cuenta que considerando la regla de Introducción de la Conjunción, sabremos que siempre que Γ tenga más de una fórmula, siempre podemos reducirla de forma segura a una fórmula usando la conjunción. Entonces, para abreviar, a partir de ese momento podemos representar Γ como una fórmula en lugar de un conjunto. Otra omisión por conveniencia es cuando Γ es un conjunto vacío, en cuyo caso Γ puede no aparecer.

Regla de Introducción de la Negación

Partiendo de $(p \to q)$ y $(p \to \neg q)$, se infiere $\neg p$.

Por tanto, $\{(p \to q), (p \to \neg q)\} \vdash \neg p$.

Regla de Eliminación de la Negación

A partir de $\neg p$, se infiere $(p \to r)$.

Por tanto, $\{\neg p\} \vdash (p \to r)$.

Regla de Eliminación de la Doble Negación

A partir de $\neg\neg p$, se infiere p.

Por tanto, $\neg\neg p \vdash p$.

Regla de Introducción de la Conjunción

A partir de p y q, se infiere $(p \land q)$.

Por tanto, $\{p, q\} \vdash (p \land q)$.

Regla de Eliminación de la Conjunción

A partir de $(p \land q)$, se infiere p.

A partir de $(p \land q)$, se infiere q.

Por tanto, $(p \land q) \vdash p$ y $(p \land q) \vdash q$.

Regla de Introducción de la Disjunción

A partir de p, se infiere $(p \vee q)$.

A partir de q, se infiere $(p \vee q)$.

Por tanto, $p \vdash (p \vee q)$ y $q \vdash (p \vee q)$.

Regla de Eliminación de la Disjunción

A partir de $(p \vee q)$ y $(p \rightarrow r)$ y $(q \rightarrow r)$, se infiere r.

Por tanto, $\{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \vdash r$.

Regla de Introducción de la Bicondicional

A partir de $(p \rightarrow q)$ y $(q \rightarrow p)$, se infiere $(p \leftrightarrow q)$.

Por tanto, $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p\} \vdash (p \leftrightarrow q)$.

Regla de Eliminación de la Bicondicional

A partir de $(p \leftrightarrow q)$, se infiere $(p \rightarrow q)$.

A partir de $(p \leftrightarrow q)$, se infiere $(q \rightarrow p)$.

Por tanto, $(p \leftrightarrow q) \vdash (p \rightarrow q)$ y $(p \leftrightarrow q) \vdash (q \rightarrow p)$.

Regla de Modus ponens (Eliminación de la Condicional)

A partir de p y $(p \rightarrow q)$, se infiere q.

Por tanto, $\{p, p \rightarrow q\} \vdash q$.

Regla de Introducción de la Condicional

Si se asume p permite demostrar q, se infiere $(p \rightarrow q)$.

Por tanto, $(p \vdash q) \vdash (p \rightarrow q)$.

Bibliografía

- Lógica proposicional (https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica_proposicional)
- Lógica matemática (https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica_matem%C3%A1tica)
- Deducción natural (https://es.wikipedia.org/wiki/Deducci%C3%B3n_natural)
- Natural deduction (https://en.wikipedia.org/wiki/Natural_deduction)
- Propositional calculus (https://en.wikipedia.org/wiki/Propositional_calculus#Example_1._Simple_axiom_system)