Cálculo - Ejercicios no evaluables

1. Calcúlese el dominio de definición de las funciones siguientes:

   a) $f(x) = x^2 + 1$.
   f es un polinomio y, como tal, está definida en todo $\mathbb{R}$.

   b) $f(x) = \sqrt{x-1}$.
   En este caso, f se puede escribir como una composición de dos funciones $f = g \circ h$, donde $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x - 1$. h es un polinomio y como tal, está definida en todo $\mathbb{R}$. La función g, sin embargo, no está definida para valores negativos de x, es decir, $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Por lo tanto, el dominio de definición de f es $[1, +\infty[$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
   f es un cociente de polinomios y como tal, solo tiene puntos conflictivos cuando el denominador se anula. En este caso, hay una asíntota en $x = 1$. Es decir, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$. Por lo tanto, el dominio de definición de f es $\mathbb{R}\backslash\{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
   En este caso, el denominador no tiene soluciones en los reales, ya que $x^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el dominio de definición es $\mathbb{R}$.

   e) $f(x) = \log(1 - x^2)$.
   Como en el caso de la raíz cuadrada, podemos descomponer el problema en dos funciones. Sabemos que el logaritmo está definido para argumentos estrictamente positivos ($\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$). Por lo tanto, el dominio de definición será los valores para los que $1 - x^2 > 0$. Es decir, para $-1 < x < 1$. Por lo tanto, el dominio de definición es $]-1, 1[$.

   f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
   De nuevo, la raíz cuadrada está definida para valores positivos. Por lo tanto, el dominio de definición es $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

2. Obténgase el valor del límite en cada caso:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) + e^x$.
   Sabemos que por separado $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} e^x = 1$.
   Por lo tanto,
   $$\lim_{x\to 0} (\sin(x) + e^x) = 1.$$

   b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \log(1 - x)$.
   El logaritmo es una función definida para argumentos estrictamente positivos. Y además, si $x \to 1^-$, entonces $(1 - x) \to 0^+$. Por lo tanto,
   $$\lim_{x\to 1^-} \log(1 - x) = -\infty.$$

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \sin\big(\pi(x-3)\big) & x<3 \\ -2 & x=3 \\ e^{x-3}-1 & x>3 \end{cases}$$

Como f es una función definida por partes que tiene diferentes expresiones alrededor del punto $x=3$, debemos hacer los límites por izquierda y por derecha. Por la izquierda de $x=3$ tenemos

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} \sin(\pi(x-3)) = 0.$$

Por la derecha de $x=3$ tenemos

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} (e^{x-3}-1) = 0.$$

En definitiva, tenemos que los límites laterales coinciden. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 0.$$

Fijaos que $f(3) = -2 \neq 0$. Es decir, la función no es continua en el punto $x=3$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 2 & x=0 \\ 3-x & x>0 \end{cases}$$

El límite por la izquierda de 0 es el límite de valores de $x<0$ que se aproximan a 0. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (x+1) = 1.$$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, donde f es la función del apartado anterior.
Cuando nos acercamos a 0 por la derecha, es decir, para valores $x>0$, el límite es

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (3-x) = 3.$$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(x)}{x}$.
En este caso tenemos un cociente de funciones que divergen cuando $x\to+\infty$. Por lo tanto, obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para determinar el valor del límite necesitamos conocer el orden de divergencia de estas dos funciones. Para hacer esto, usamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/(x\ln 10)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln(10)} = 0$$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}$. En este caso obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}} = 1$$

3. Determínese si las siguientes funciones son o no continuas en los puntos indicados.

a) En $x = 0$ para

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{\sin(x)}+1 & x < 0 \\ x+3 & x \geq 0 \end{cases}$$

Para saber si esta función por partes es continua en $x = 0$ es necesario calcular los límites por izquierda y por derecha de este punto y comprobar si coinciden. Por la izquierda

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(2e^{\sin(x)}+1) = 3.$$

Por la derecha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+3) = 3.$$

Como los límites son iguales, la función es continua en $x = 0$.

b) En $x = 1$ para

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^2+2 & x > 1 \end{cases}$$

De nuevo nos calculamos los límites por ambos lados. En particular, en este caso el límite en $x = 1$ además debe coincidir con $f(1) = 2$. Por la izquierda

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x-1 = 2.$$

Por la derecha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2+2 = 3.$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto finito en $x = 1$ y en consecuencia la función no es continua en ese punto.

c) En $x = 0$ para

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

En el punto $x = 0$ el límite es

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1.$$

Sin embargo, $f(0) = 0 \neq 1$. Por tanto, la función no es continua.

4. Obténgase la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 4$.
   De la derivada de un polinomio,
   $$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 10x - 1$$

   b) $f(x) = x\ln(x)$.
   Usando la regla de la derivada del producto
   $$f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

   c) $f(x) = x^2\sin(x)$.
   Como en el caso anterior $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$.

   d) $f(x) = -2x^3\cos(x)\ln(x)$.
   Aplicamos la derivada del producto de forma iterativa para obtener
   $$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2\cos(x)\ln(x) - 2x^3(\cos(x)\ln(x))' \\ &= -6x^2\cos(x)\ln(x) + 2x^3\sin(x)\ln(x) - 2x^3\cos(x)\frac{1}{x} \\ &= -6x^2\cos(x)\ln(x) + 2x^3\sin(x)\ln(x) - 2x^2\cos(x) \end{aligned}$$

   e) $f(x) = e^{x^2+1}$.
   Aplicando la regla de la cadena
   $$f'(x) = e^{x^2+1}\cdot 2x$$

   f) $f(x) = \ln(\ln(x))$.
   Aplicando la regla de la cadena
   $$f'(x) = \frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

   g) $f(x) = \sqrt{\sin(x) + \cos(x) + 2}$.
   Aplicando la regla de la cadena
   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x) + \cos(x) + 2}}(\cos(x) - \sin(x))$$

   h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)\sin(x)}{1 + x^2}$.
   Aplicando la regla de derivación para un cociente de funciones y la de la derivada de un producto
   $$f'(x) = \frac{(-\sin(x)^2 + \cos(x)^2)(1 + x^2) - \cos(x)\sin(x)2x}{(1 + x^2)^2}$$

i) $f(x) = \arctan\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$.
Aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2} \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2+\ln(x)^2}$$

j) $f(x) = \sin(\cos(\tan(x)))$.

Aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan(x))) \cdot (-\sin(\tan(x))) \cdot (1+\tan(x)^2)$$

5. Obténgase el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan(x)^2}{1} = 1.$$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{2x-3} = 0.$$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\ln(x)}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}}{1/x} = \lim_{x\to 1} xe^{x-1} = 1.$$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital dos veces para obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\cos(x)^2-\sin(x)^2}{2} = 1.$$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)+e^x-1}{x^2\cos(x)}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+e^x-1}{x^2\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)+e^x}{(2x\cos(x)-x^2\sin(x))} = \infty,$$

puesto que el denominador tiende a 0 pero el numerador tiende a 1.

6. Calcúlese los puntos críticos de las siguientes funciones y determínese su tipo:

a) $f(x,y) = x^2+y^2-1$.
Los puntos críticos son aquellos puntos z_0 tal que $\nabla f(z_0) = 0$. En este caso

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y),$$

por lo que el punto crítico es $(0,0)$. Para saber qué tipo de punto es necesitamos calcularlos la matriz Hessiana.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicando el Teorema para caracterización de puntos críticos, como $\det(H_f(0,0)) = 4 > 0$ y $H_f(0,0)_{(1,1)} = 2 > 0$, el punto $(0,0)$ es un mínimo local.

b) $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$.

$$\nabla f = (-2x, -4y), \quad H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Hay un punto crítico en $(0,0)$ y es un máximo local, ya que $\det(H_f(0,0)) > 0$ y $H_f(0,0)_{(1,1)} = -2 < 0$.

c) $f(x,y) = 9 - 2x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x - y$.

$$\nabla f = (-4x+5y+4, 6y+5x-1), \quad H_f = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Hay un punto crítico en $z_0 = (29/49, -16/49)$ y es un punto de silla, ya que $\det(H_f(z_0)) = -49 < 0$.

d) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 1$.

$$\nabla f = (3x^2-6xy+3y^2, -3x^2+6xy-3y^2), \quad H_f = \begin{pmatrix} 6x-6y & -6x+6y \\ -6x+6y & 6x-6y \end{pmatrix}$$

En este caso existe una recta de puntos críticos $x = y$ (esto se puede ver escribiendo $\nabla f = 3(x-y)^2(1,-1)$).
Para caracterizarlos usamos la matriz Hessiana, que satisface $\det(H_f(x,y)) = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el criterio no es decisivo y debemos usar otros métodos para razonar sobre el tipo de punto crítico (cosa que no hemos discutido en este asignatura).

7. Obténgase el valor de $\nabla\left[g \circ f\right](0)$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

   $$f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

   Usando la regla de la cadena,

   $$\nabla[g \circ f](x) = \nabla g(f(x)) \cdot \nabla f(x). \tag{1}$$

   Así pues, para calcular la derivada de la composición de funciones podemos usar la fórmula (1) o bien expresar la función compuesta y derivarla. Vamos a verlo.
   Aplicando la regla de la cadena,

   $$\nabla[g \circ f](x) = \nabla g(f(x)) \cdot \nabla f(x) = -\frac{1}{(e^x)^2} \cdot e^x = -e^{-x}.$$

   Por lo tanto, $\nabla[g \circ f](0) = -1$.
   Expresando la función compuesta y derivándola obtenemos el mismo resultado (como debe ocurrir si hemos hecho todo bien)

   $$(g \circ f)(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}, \quad \nabla[g \circ f](x) = -e^{-x}.$$

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumpliendo $f(0) = 5$, $f'(0) = -7$, $g'(5) = 2$.
   Usando la regla de la cadena,

   $$(g \circ f)'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(5)f'(0) = -14.$$

   c) $f : \mathbb{R}^2 \to]0, +\infty[$, $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dadas por

   $$f(x,y) := x^2 + y^2 + 1, \quad g(z) = \ln(z).$$

   $$(g \circ f)(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$
   $$\nabla(g \circ f)(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}(2x, 2y)$$

   Por tanto, $\nabla(g \circ f)(0,0) = (0,0)$.

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x, y) = (x^2 + y, x - y^3), \quad g(w, z) = w - z.$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x, y) &= x^2 + y - x + y^3 \\ \nabla(g \circ f)(x, y) &= (2x - 1, 3y^2 + 1)\end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla(g \circ f)(0, 0) = (-1, 1)$.

e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x, y, z) = (xy + z, x - yz), \quad g(s, t) = s^2 - \sin(t).$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x, y, z) &= (xy + z)^2 - \sin(x - yz) \\ \nabla(g \circ f)(x, y, x) &= ((xy + z)y - \cos(x - yz), \\ &\qquad (xy + z)x + z\cos(x - yz), \\ &\qquad (xy + z) + y\cos(x - yz))\end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla(g \circ f)(0, 0, 0) = (-1, 0, 0)$.

8. Determínese la expresión general asociada a las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int (x^2 - 4x - 1)\mathrm{d}x$.

Usando la tabla para integrales de polinomios,

$$\int (x^2 - 4x - 1)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - x + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{4}{1 + x^2}\mathrm{d}x$.

En este caso, podemos consultar la tabla de primitivas o bien escribir $x = \tan(y)$. Por lo que $y = \arctan(x)$ y $\mathrm{d}x = (1 + \tan^2(y))\mathrm{d}y$. Sustituyendo estas expresiones en la integral obtenemos

$$\int \frac{4}{1 + x^2}\mathrm{d}x = \int 4\mathrm{d}y = 4y + C = 4\arctan(x) + C.$$

c) $\displaystyle\int x\cos(x)\mathrm{d}x$.

Esta integral no tiene una primitiva directa, pero podemos aplicar la regla de la integral por partes para solucionarla.

La regla de la integral por partes es

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Por lo tanto, escogiendo $u = x$ y $\mathrm{d}v = \cos(x)\mathrm{d}x$ se obtiene

$$\int x\cos(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) - \int \sin(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

d) $\int x^2 \sin(x)\mathrm{d}x.$
Aplicamos de nuevo la regla de la integral por partes dos veces seguidas escogiendo u como el término polinómico y $\mathrm{d}v$ como el término trigonométrico para obtener

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x)\mathrm{d}x &= -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C.\end{aligned}$$

9. Calcúlese el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{3}(4x^3 - 6x^2 + 1)\mathrm{d}x.$
La primitiva se puede calcular fácilmente y es $F(x) = x^4 - 2x^3 + x + C$.
A continuación podemos usar la regla de Barrow para obtener la integral definida de la siguiente forma

$$\int_{-2}^{3}(4x^3 - 6x^2 + 1)\mathrm{d}x = F(3) - F(-2) = 30 - 30 = 0$$

b) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$
Como hemos visto en el ejercicio anterior, la primitiva es $F(x) = \arctan(x) + C$. Por tanto, la integral definida será $F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

c) $\int_{-3\pi}^{\pi}\sin(x)\mathrm{d}x.$
En este caso la primitiva es $F(x) = -\cos(x) + C$ y la integral definida será $F(\pi) - F(-3\pi) = -1 - (-1) = 0$.

d) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(x) + \cos(x))\,\mathrm{d}x.$
La primitiva es $F(x) = \sin(x) - \cos(x) + C$ y la integral definida, $F(\pi) - F(-\pi) = -1 - (-1) = 0$.