Cuadernos de Matemática

1

Introducción al Análisis Real

Apuntes y ejercicios

Número Reales

Daniel Lara, Andrés Merino

Esta página ha sido dejada intencionalmente en blanco.

CUADERNOS DE MATEMÁTICA

D. LARA, A. MERINO

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS REAL

APUNTES Y EJERCICIOS

Número Reales

Cuaderno de Matemática de $\aleph_0$ No. 1

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS REAL: APUNTES Y EJERCICIOS
NÚMERO REALES

Daniel Lara, Andrés Merino

Responsable de la Edición: Daniel Lara

Registro de derecho autoral No.
ISBN:

Publicado en linea por Alephsub0,
Quito, Ecuador.

Primera edición: 2019
Primera impresión: -

A mi madre y abuelos

Índice general

PREFACIO

La presente obra es una recopilación de resultados clásicos que se pueden encontrar en la literatura en general. Aunque los resultados son comunes este libro está orientado a ser una guía, principalmente, para los estudiantes de la carrera de matemática sin embargo el lector únicamente requiere comprender nociones básicas sobre cálculo de una variable y nociones básicas sobre lógica. Un breve repaso sobre los temas necesarios y toda la notación empleada a lo largo del texto se puede encontrar en el capítulo 1, en este se estudia un repaso desde la lógica, teoría de conjuntos y funciones como bases para comenzar el estudio del análisis. En los capítulos posteriores del libro se revisaran conceptos como las sucesiones, series, límites, integrales, series de funciones y un último capítulo que incluye una introducción a la topología en $\mathbb{R}$ y secciones breves sobre espacios métricos y espacios de Lebesgue. Así, al terminar el libro el lector debe estar preparado para tomar cursos de análisis superior e introducirse en temas más complejos y extensos.

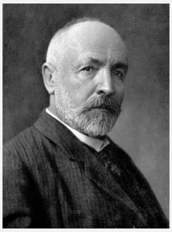
Por otra parte, como una de las motivaciones para escribir este libro quisiera contarle al lector mi experiencia que aspiro cambie en un par de años. En el transcurso de mis estudios y en la escritura de este libro encontré una gran variedad de fuentes e información, muchas de ellas las empleadas como referencias en varios idiomas, principalmente inglés y francés. Sin embargo, al realizar la misma búsqueda el lector podrá constatar, por si mismo, que las traducciones son pobres y muchas veces incompletas e incluso con ciertos errores ya sean de matemáticos o lingüísticos.

Finalmente, a diferencia de otros textos este busca ser más explicito, detallando de mejor manera las demostraciones correspondientes los teoremas y proposiciones enunciados y brindando más herramientas para una mejor comprensión de los temas mencionados. El lector podrá notar que los ejercicios propuestos presentan diversos niveles de complejidad e incluso su desarrollo presenta algunos retos por los "trucos" o artimañas necesarios para su resolución. Sin embargo, si el lector es tanto un estudiante de matemáticas o un entusiasta en la materia espero que este libro y el esfuerzo que he dedicado al realizarlo le sea de ayuda para incursionar en el maravilloso mundo de las matemáticas.

Daniel Lara

1 Introducción

Geroge Cantor   1845-1918



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor fue un matemático de origen ruso que definió la teoría de conjuntos y sentó las bases para las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales).

Durante este primer capítulo vamos a abordar nociones fundamentales para comenzar un estudio más riguroso de las sucesiones, series y funciones que veremos en capítulos posteriores. De esta manera, vamos a abordar los principales métodos de demostración una revisión a la teoría de conjuntos y funciones para iniciar con el estudio de los números reales en el siguiente capítulo.

1.1 Proposiciones del tipo $p \Rightarrow q$

En matemática, es usual demostrar proposiciones de la forma

$$p \Rightarrow q$$

donde

- p: hipótesis o antecedente;
- q: tesis o consecuente.

Esta proposición de lee

"si p, entonces q"

y se dice que "p implica q". Otra terminología común respecto a esta proposición es:

- **Condición necesaria:** una condición necesaria para p es q;
- **Condición suficiente:** una condición suficiente para q es p.

Otra forma usual de proposición es

$$p \iff q,$$

la cual se lee "p si y solo si q" y se dice que p es una condición suficiente y necesaria para q y es equivalente a

$$p \Rightarrow q \qquad \text{y} \qquad q \Rightarrow p.$$

1.1.1 Métodos de demostración

Método directo

Para demostrar que una proposición del tipo $p \Rightarrow q$ basta desarrollar el siguiente proceso.

- Suponer la veracidad de p (*usarla con toda seguridad*).
- Realizar una secuencia finita de razonamientos verdaderos a partir de la hipótesis. Conjugar axiomas, teoremas, proposiciones, lemas y corolarios que conectan a la proposición p con la proposición q. Para esto, usar las reglas de inferencia.
- Concluir q directamente de las conclusiones obtenidas en el paso anterior.

Para ilustrar el método directo, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Una condición suficiente para que k^2 sea un número impar es que k sea impar.

Solución. Queremos demostrar la proposición:

si k es impar, entonces k^2 es impar.

Por lo tanto, suponemos que k es impar y debemos demostrar que k^2 es impar.

Notemos que lo supuesto es equivalente a que

$$k = 2m + 1,$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$; por otro lado, queremos demostrar que existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $k^2 = 2N + 1$.

A partir de nuestro supuesto, notemos que

$$\begin{aligned} k^2 = (2m+1)^2 &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1. \end{aligned}$$

Si tomamos $N = 2m^2 + 2m \in \mathbb{Z}$, se sigue que

$$k^2 = 2N + 1,$$

por lo tanto, k^2 es impar. $\square$

MÉTODO DEL CONTRARRECÍPROCO

Para este método, se usa el hecho que

$$p \Rightarrow q \qquad \text{es equivalente a} \qquad \neg q \Rightarrow \neg p;$$

por lo tanto, para demostrar una proposición del tipo $p \Rightarrow q$ basta desarrollar el siguiente proceso.

- Suponer que $\neg p$ es verdadera.
- Realizar una secuencia finita de razonamientos verdaderos (como en el método anterior).
- Concluir que $\neg p$ es verdadera.
- Así, esto demuestra $p \Rightarrow q$ es verdadero.

Para ilustrar el método del contrarecíproco, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Una condición necesaria para que k^2 sea impar es que k sea impar.

Solución. Queremos demostrar la proposición:

si k^2 es impar, entonces k es impar.

Utilizando el contrarrecíproco, suponemos que k no es impar y debemos demostrar que k^2 no es impar; es decir, suponemos que k es par y debemos demostrar que k^2 es par. Notemos que lo supuesto es equivalente a que

$$k = 2m,$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$; por otro lado, queremos demostrar que existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $k^2 = 2N$. A partir de nuestro supuesto, notemos que

$$\begin{aligned} k^2 = (2m)^2 &= 4m^2 \\ &= 2(2m^2). \end{aligned}$$

Si tomamos $N = 2m^2 \in \mathbb{Z}$, se sigue que

$$k^2 = 2N,$$

por lo tanto, k^2 es par. Así, por el contrarrecíproco, se ha demostrado que si k^2 es impar, entonces k es impar. $\square$ $\square$

> Este método es especialmente útil cuando la información brindada por la proposición p no es suficiente para generar el método directo.

Método por casos

Para demostrar proposiciones del tipo

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_k) \Rightarrow q$$

con $k \in \mathbb{N}^*$, recordemos que esta es equivalente a

$$(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_k \Rightarrow q),$$

por lo tanto, debemos demostrar que

$$(p_i \Rightarrow q)$$

para todo $i = 1, \ldots, k$, mediante alguno de los métodos antes indicados.

Cabe indicar que, en ocasiones, la proposición a demostrar se presenta en la manera que indica este método, por lo tanto, nosotros debemos elegir los casos que generen información para la demostración necesaria.

Ejemplo 1.3. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Se tiene que $n^2 + n + 1$ es impar.

Solución. Dado que $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$n \text{ es par} \qquad \text{o} \qquad n \text{ es impar},$$

vamos a demostrar que $n^2 + n + 1$ es impar; por lo tanto, desarrollemos una demostración por casos.

- CASO 1: suponemos que n es par, vamos a demostrar que n^2+n+1 es impar.

  Como n es par, se tiene que $n = 2k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, de donde

  $$\begin{aligned} n^2+n+1 &= (2k)^2+(2k)+1 \\ &= (4k^2+2k)+1 \\ &= 2(2k^2+k)+1. \end{aligned}$$

  Tomando $N = 2k^2+k \in \mathbb{Z}$, se tiene que

  $$n^2+n+1 = 2N+1,$$

  por lo tanto, n^2+n+1 es impar.

- CASO 2: suponemos que n es impar, vamos a demostrar que n^2+n+1 es impar.

  Como n es impar, se tiene que $n = 2m+1$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, de donde

  $$\begin{aligned} n^2+n+1 &= (2m+1)^2+(2m+1)+1 \\ &= 4m^2+4m+1+2m+2 \\ &= 2(2m^2+3m)+1 \end{aligned}$$

  Tomando $N = 2m^2+3m \in \mathbb{Z}$, se tiene que

  $$n^2+n+1 = 2N+1,$$

  por lo tanto, n^2+n+1 es impar.

Por el método de casos, concluimos que si n es cualquier entero, entonces n^2+n+1 es impar. $\square$

MÉTODO DE REDUCCIÓN AL ABSURDO O POR CONTRADICCIÓN

Para demostrar que una proposición q es verdadera, se puede desarrollar el siguiente proceso.

- Suponer que $\neg q$ es una proposición verdadera.
- Realizar una secuencia finita de razonamientos verdaderos.
- Concluir la veracidad de alguna proposición r y de su negación, $\neg r$, es decir, concluir una contradicción.

- Esta contradicción muestra que el supuesto original es erróneo, por lo tanto, se tiene que q es verdadera.

Con esto y recodando que

$$p \Rightarrow q \qquad \text{es equivalente a} \qquad \neg p \vee q,$$

para demostrar una proposición del tipo $p \Rightarrow q$ mediante el método de reducción al absurdo, suponemos que

$$p \wedge \neg q$$

es verdadera y procedemos a hallar una contradicción.
Para ilustrar el método de reducción al absurdo o contradicción, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.4. Sea A un conjunto no vacío. Se tiene que $A \cap A^c = \varnothing$.

Solución. Por reducción al absurdo, supongamos que $A \cap A^c \neq 0$. Como $A \cup A^c \neq \varnothing$, existe un elemento $b \in A \cap A^c$. Por definición de intersección de conjuntos se tiene que

$$b \in A \quad \wedge \quad b \in A^c.$$

Por definición de complemento de un conjunto

$$b \notin A,$$

así, $b \in A$ y $b \notin A$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, el supuesto es falso, de donde, $A \cap A^c = \varnothing$. □

Este último método de demostración no es exclusivo para proposiciones de la forma $p \Rightarrow q$.

1.1.2 Reglas de inferencia

- **Deducción:** Si se tiene p y q se deduce de p, se puede concluir p implica q.

$$p \Rightarrow q.$$

- **Modus Ponens:** Si se tiene p implica q, y se tiene p, se puede concluir q.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}.$$

- **Modus Tollens:** Si se tiene p implica q, y se tiene $\neg q$, se puede concluir $\neg p$.

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}.$$

- **Introducción de la conjunción:** Si se tiene p y se tiene q, se puede concluir $p \wedge q$.

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}.$$

- **Introducción de la disyunción:** Si se tiene p, se puede concluir $p \vee q$.

$$\frac{p}{p \vee q}.$$

- **Eliminación de la conjunción:** Si se tiene $p \wedge q$, se puede concluir p.

$$\frac{p \wedge q}{p}.$$

- **Silogismo disyuntivo:** Si se tiene $p \vee q$, y se tiene $\neg q$, se puede concluir p.

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p}.$$

1.2 Proposiciones con cuantificadores

Definición 1.1: –Proposición–

Un predicado es una proposición o conjunto de proposiciones lógicas que dependen de una o más variables. Se las nota de la forma $P(x)$, donde x es la variable de la cual depende el predicado.

Definición 1.2: –Proposiciones universal y existencial–

Dado un conjunto A y un predicado $P(x)$ referente a los elementos de A, se define las siguientes proposiciones:

- **Universal:** se denota por

$$(\forall x \in A) P(x)$$

y se lee "para todo x en A se cumple $P(x)$".

- **Existencial:** se denota por

$$(\exists x \in A) P(x)$$

y se lee "existe x en A tal que $P(x)$".

Dado un conjunto A y un predicado $P(x)$ referente a los elementos de A se tiene que

- $\neg\big((\forall x \in A) P(x)\big)$ equivale a $(\exists x \in A) \neg P(x)$,
- $\neg\big((\exists x \in A) P(x)\big)$ equivale a $(\forall x \in A) \neg P(x)$.

1.2.1 Métodos de demostración

Método Directo

Para demostrar una proposición del tipo

$$(\exists x \in A) P(x)$$

se debe encontrar o determinar un elemento x_0 del conjunto A de tal forma que $P(x_0)$ sea verdadero.

Para demostrar una proposición del tipo

$$(\forall x \in A) P(x)$$

se toma un elemento arbitrario x del conjunto A y se demuestra que la proposición $P(x)$ es verdadera.

Ejemplo 1.5. Muestre que para cualquier número real existe otro real tal que lo domina, es decir, que el segundo sea mayor que el primero.

Solución. Se debe demostrar la proposición

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ (x < y).$$

Tomemos un elemento arbitrario de $\mathbb{R}$, sea $x \in \mathbb{R}$, debemos demostrar que la proposición

$$(\exists y \in \mathbb{R})\ (x < y)$$

es verdadera, para esto, debemos hallar $y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$. Si tomamos $y = x + 1 \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$x < x + 1 = y.$$

Con esto, se ha demostrado que para todo número real existe otro real tal que lo domina. □

Ejemplo 1.6. Muestre que existe un número real tal que sea menor o igual que cualquier números natural.

Solución. Se debe demostrar la proposición

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{N})\ (x \leq y);$$

es decir, debemos hallar un $x \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier elemento $y \in \mathbb{N}$ se tenga que

$$x \leq y.$$

Tomando $x = 0 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$0 \leq y$$

para todo $y \in \mathbb{N}$, por lo tanto, se ha demostrado el enunciado. □

Método del Contraejemplo

Se utiliza un contraejemplo para determinar la falsedad de proposiciones universales, es decir, dada una proposición del tipo

$$(\forall x \in A)P(x),$$

si se exhibe algún elemento x_0 de A tal que la proposición

$$\neg P(x_0)$$

es verdadera, se concluye que la proposición

$$(\forall x \in A)P(x),$$

es falsa.

Para ilustrar el método del contraejemplo, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.7. Muestre que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$.

Solución. Notemos que, si tomamos $a = 1$ y $b = -1$, tenemos que

$$a^2 = 1 = (-1)^2 = b^2$$

pero

$$1 \neq -1,$$

es decir,

$$a \neq b.$$

De donde, podemos concluir que el enunciado es falso. □

1.3 Teoría de Conjuntos

Durante todo el libro se usarán letras mayúsculas para denotar conjuntos y minúsculas para elementos. Con esta pequeña aclaración, vamos a introducir el concepto de *relación de pertenencia*. Así, si denotamos a X como un conjunto, tenemos que la expresión:

$$x \in X$$

nos indica que el elemento x "pertence" al conjunto X.

La notación usual para mostrar los elementos a, b, c pertenecen al conjunto X es colocarlos entre llaves, de la siguiente manera:

$$A = \{a, b, c\}$$

o

$$A = \{x : x \text{ cumple una propiedad determinada.}\}$$

donde el símbolo «:» *se lee «tal que»*.

Definición 1.3: –Unión de conjuntos–

Sean A y B dos conjuntos. Se define la intersección de A y B como todos los elementos que "están" en A y en B y lo notaremos por:

$$A \cup B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definición 1.4: –Intersección de conjuntos–

Sean A y B dos conjuntos. Se define la unión de A y B como todos los elementos que "están" en A o en B y lo notaremos por:

$$A \cap B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Definición 1.5: –Diferencia de conjuntos–

Sean A y B dos conjuntos. Se define la *diferencia* de A y B como todos los elementos que "pertenecen" a A pero no a B y lo notaremos por:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

A partir de estas definiciones, notemos que pueden existir casos en los que todos los elementos de un conjunto pertenezcan a otro conjunto. Así, este caso particular recibe un nombre propio y lo presentaremos en la siguiente definición.

Definición 1.6: –Subconjunto–

Sean A y B dos conjuntos. Si todos los elementos de A "pertenecen" al conjunto B, se dice que A es subconjunto de B y lo notaremos por:

$$A \subseteq B.$$

Si colocamos en forma proposicional la definición anterior, se tiene que

$$A \subseteq B \quad \text{si y solo si} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Definición 1.7: –Igualdad de conjuntos–

Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A y B son conjuntos "iguales" si para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, se tiene que

$$a = b.$$

Definición 1.8: –Subconjunto estricto–

Sean A y B dos conjuntos. Si A es subconjunto de B pero $A \neq B$, entonces se dice que A es un subconjunto estricto de B y lo notaremos por:

$$A \subset B.$$

Una notación alternativa para la contenencia estricta es:

$$A \subsetneq B.$$

Teorema 1.1

Sean A, B y C tres conjuntos. Se tienen las siguientes proposiciones:

- $A = B$, entonces $B = A$;
- Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$;
- Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$;

Definición 1.9: –Conjunto vacío–

Se define el conjunto vacío como el conjunto que no tiene elementos y se lo representa por $\varnothing$.

Definición 1.10: –Conjuntos disjuntos–

Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A y B son disjuntos si

$$A \cap B = \varnothing.$$

Definición 1.11: –Complemento de un conjunto–

Sea A un conjunto. Se define el complemento de A como el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a A y se lo representa por

$$A^c.$$

La notación de conjuntos para complemento está dada por:

$$A^c = \{x : x \notin A\}.$$

Definición 1.12: –Producto Cartesiano–

Sean A y B dos conjuntos. Se define el *producto cartesiano* de A y B como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $x \in A$ y $y \in B$ y lo notaremos por:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Para ilustrar la idea del producto cartesiano de dos conjuntos, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.8. Sean $A = \{a, b, c\}$ y $b = \{1, 2\}$. Así, el producto cartesiano de A

y B se define de la siguiente manera:

$$A \times B = \{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}.$$

Definición 1.13: –Relación–

Sea A un conjunto no vacío y $\mathcal{P}$ una propiedad. Se define la relación $\mathcal{R}$ como :

$$\mathcal{R} = \{a \in A : \mathcal{P}(a)\}.$$

Definición 1.14: –Relación de equivalencia–

Sean A un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre A. Se dice que $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia si satisface las siguientes propiedades:

- **Reflexiva:** Para todo $a \in A$, entonces $a\,\mathcal{R}\,a$;
- **Simétrica:** Para todo $a, b \in A$. Si $a\,\mathcal{R}\,b$, entonces $b\,\mathcal{R}\,a$;
- **Transitiva:** Para todo $a, b, c \in A$. Si $a\,\mathcal{R}\,b$ y $b\,\mathcal{R}\,c$, entonces $a\,\mathcal{R}\,c$.

Notaciones alternativas para una relación de equivalencia son:

$$a\mathcal{R}b \quad \text{o} \quad \mathcal{R}(a,b) \quad \text{o} \quad a \sim b.$$

1.4 Funciones

Definición 1.15: –Función–

Dados A y B dos conjuntos, f es una **función de** A **en** B si:

- $f \subseteq A \times B$;
- para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$; y
- si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$, entonces $y = z$.

Si f es una función de A en B, escribirá $f\colon A \to B$. Y, en lugar de $(x,y) \in f$, escribiremos $f(x) = y$, ya que dado x, y es único.

En otras palabras, f es una función de A en B si es una relación entre los elementos de A y B de modo que para cada elemento x de A, hay un único elemento y de B que le corresponde a x en esta relación; a ese elemento y se le llama **imagen de** x **respecto de** f **y se le representa por** $f(x)$.

Definición 1.16: –Dominio–

Dada $f\colon A \to B$ el conjunto A se llama **dominio** de f y se le representa por $\operatorname{dom}(f)$.

Definición 1.17: –Imagen o recorrido–

Dada una función $f\colon A \to B$, la **imagen** o el **recorrido** de f es el conjunto

$$\{f(x) : x \in A\},$$

que se lo representa por

$$\operatorname{img}(f) \qquad \text{o} \qquad \operatorname{rec}(f).$$

Definición 1.18: –Restricción de una función–

Dada una función $f\colon A \to B$ y un conjunto $C \subseteq A$, la **restricción de f a C**, denotada por $f|_C$, es la función

$$\begin{aligned} f|_C\colon C &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Definición 1.19: –Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva–

Una función $f\colon A \to B$ es:

- **inyectiva** si para todo $u, v \in A$ tales que $f(u) = f(v)$, se tiene que $u = v$;
- **sobreyectiva** si para todo $v \in B$, existe $u \in A$ tal que $f(u) = v$;
- **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Proposición 1.2. –Sobreyectiva– Una función $f\colon A \to B$ es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{img}(f) = B$.

Definición 1.20: –Composición de funciones–

Dadas las funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$, la función

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

se denomina **composición de g y f**.

Definición 1.21: –Función invertible y función inversa–

Una función $f\colon A \to B$ es **invertible** si existe una única función $g\colon B \to A$ tal que para todo $u \in A$ y $v \in B$, se tiene que

$$v = f(u) \;\equiv\; u = g(v)$$

A esta función se la llama **función inversa de** f y se la denota por f^{-1}. Por tanto, $f^{-1}\colon B \to A$ es tal que

$$v = f(u) \;\equiv\; u = f^{-1}(v)$$

para todo $u \in A$ y todo $v \in B$.

Proposición 1.3. Dada una función $f\colon A \to B$ invertible, se tiene que

$$f\big(f^{-1}(v)\big) = v \qquad \text{y} \qquad f^{-1}\big(f(u)\big) = u$$

para todo $u \in A$ y todo $v \in B$.

Proposición 1.4. –Inversa– Una función $f\colon A \to B$ es invertible si y solo si f es biyectiva.

Definición 1.22: –Función creciente, decreciente y monótona–

Dada la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y el conjunto $I \subseteq A$, f es:

- **creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \leq f(v)$;
- **estrictamente creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) < f(v)$;
- **decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \geq f(v)$;
- **estrictamente decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) > f(v)$; y
- **monótona en** I si es creciente o decreciente en I.

Definición 1.23: –Conjunto simétrico–

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es **simétrico** si para todo $x \in A$, se tiene que $-x \in A$.

Definición 1.24: –Función par e impar–

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, con A un conjunto simétrico, es:

- **par** si para todo $x \in A$, se tiene que $f(x) = f(-x)$;
- **impar** si para todo $x \in A$, se tiene que $f(x) = -f(x)$.

1.5 Números Naturales

Axioma 1.1: –Axiomas de Peano–

El conjunto de los números naturales, está caracterizado por las siguientes propiedades:

1. El conjunto $\mathbb{N}$ es no vacío, posee al elemento 1;
2. Todo número natural posee un sucesor;
3. Dados dos números $n, m \in \mathbb{N}$ con el mismo sucesor, entonces $n = m$;
4. El número 1 no es sucesor de ningún otro elemento de $\mathbb{N}$;
5. Los números naturales son un conjunto inductivo.

Definición 1.25: –Conjunto inductivo–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que A es un conjunto inductivo si se cumple que

- $0 \in A$; y
- si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$.

⚠ Tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ son conjuntos inductivos.

Definición 1.26: –Números naturales–

Se define el conjunto de los número naturales, denotado por $\mathbb{N}$, por el conjunto inductivo más pequeño, es decir, a la intersección de todos los conjuntos inductivos.

⚠ Los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ son

- 0;
- $0 + 1 = 1$;
- $1 + 1 = 2$;

- $2+1=3$; etc.

Teorema 1.5: –Inducción finita–

Sea $A \subset \mathbb{N}$, si se cumple que

1. $0 \in A$; y
2. si $x \in A$ implica $x+1 \in A$,

entonces $A = \mathbb{N}$.

Si queremos demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, por el teorema anterior, basta demostrar que

1. $P(0)$ es verdadera; y
2. $P(n)$ es verdadera implica $P(n+1)$ sea verdadera.

Una implicación del Teorema de Inducción Finita es el Teorema de Recursión Finita, el cual, a breves rasgos, indica que, para definir una función sobre $\mathbb{N}$, basta definirla para 0 y en base a suponer definida la función para $n \in \mathbb{N}$, definirla para $n+1$.

Definición 1.27: –Exponente natural–

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define el número real a^n por

- $a^0 = 1$, y
- $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Definición 1.28: –Números enteros y racionales–

Se define:

- El conjunto de los número enteros, denotado por $\mathbb{Z}$, a

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- El conjunto de los número racionales, denotado por $\mathbb{Q}$, a

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad q \in \mathbb{N}^*\}.$$

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se define

$$A^{+} = \{x \in A : x > 0\}, \qquad A^{-} = \{x \in A : x > 0\}$$

y

$$A^{*} = \{x \in A : x \neq 0\}$$

1.5.1 Reglas de inferencia

- **Modus ponens universal**

$$\begin{array}{ll} \forall x: & P(x) \Rightarrow Q(x) \\ & P(a)\text{ , para algún } a \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\therefore Q(a)} \end{array}$$

- **Ejemplificación universal**

$$\begin{array}{c} \forall x : P(x) \\ \hline \therefore P(a) \quad \text{Cualquier } a \text{ fijo} \end{array}$$

- **Generalización universal**

$$\begin{array}{c} P(a) \quad \text{para cualquier } a \text{ fijo} \\ \hline \therefore \forall x : P(x) \end{array}$$

- **Ejemplificación existencial**

$$\begin{array}{c} \exists x : P(x) \\ \hline \therefore P(a) \quad \text{es cierto para algún } a \end{array}$$

- **Generalización existencial**

$$\begin{array}{c} P(a) \quad \text{para algún } a \\ \hline \therefore \exists x : P(x) \end{array}$$

1.6 Ejercicios resueltos

1.7 Ejercicios propuestos

(*Para el desarrollo de los siguientes ejercicios no olvide justificar cada paso de su demostración*)

1. Pruebe que las siguientes proposiciones son verdaderas usando el método de demostración indicado.

   a) Un entero a es un **cuadrado perfecto** si existe un entero b tal que $a = b^2$.

   Si $m, n \in \mathbb{Z}$ son cuadrados perfectos, entonces su producto mn también es un cuadrado perfecto. (**Método directo**)

   b) Si $n \in \mathbb{Z}$ y $3n + 2$ es impar, entonces n es impar. (**Método por contrarrecíproco**)

   c) Si $n = ab$, donde a, b son enteros positivos, entonces $a \leq \sqrt{n}$ o $b \leq \sqrt{n}$. (**Método por contradicción o reducción al absurdo**)

   d) Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n^2 \geq n$. (**Método por casos**)

2. En los siguientes ejercicios, indique el método de demostración a utilizar y luego realice la demostración respectiva justificando cada paso adecuadamente. (*Recuerde que dentro de una demostración es posible utilizar otro método de demostración.*)

   a) Si p y q son enteros con $q \neq 0$, se dice que q **divide a** p si existe un entero k tal que $p = kq$. Cuando q divide a p, se dice que q es un **factor** de p y que p es un **múltiplo** de q. Se usará la notación $q|p$ para decir que q divide a p.

   Sean a, b, c enteros. Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(mb + nc)$ para cualesquier m y n enteros.

   b) Un entero positivo $p > 1$ es llamado **primo** si los únicos factores de p son 1 y p. Un entero positivo que es mayor que uno y no es primo es llamado **compuesto**.

   Un entero $n > 1$ es compuesto si, y sólo si, existe un entero a tal que $a|n$ y $1 < a < n$.

   c) Si n es un entero compuesto, entonces n posee un divisor primo menos o igual que $\sqrt{n}$.

   d) ¿Es cierto que toda función continua es diferenciable?

   e) Sean $n, m \in \mathbb{Z}$, $A = n\mathbb{Z}$ y $B = m\mathbb{Z}$.

   - Muestre que si n es múltiplo de m, entonces $A \subseteq B$.
   - ¿Es la recíproca de la proposición anterior es verdadera?.

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestre las siguientes desigualdades:

   a) $|a + b| \leq |a| + |b|$;

b) $|a-b| \leq |a| + |b|$;

c) $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$;

d) $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

4. En los siguientes ejercicios muestre las identidades propuestas usando inducción matemática. Sea $n \in \mathbb{N}$:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+2)^2}{4}$;

   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

   e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$;

   f) $6^n - 1$ es divisible para 5;

   g) $5^{2n+1} + 2^{2n+1}$ es divisible para 7;

5. ***Rompecabezas del sentido común***

   En una isla hay k personas que tienen ojos azules, y las demás tienen ojos verdes. Inicialmente, nadie en la isla conoce su propio color de ojos. Por regla general, cuando una persona en la isla descubre que tiene los ojos azules, debe abandonar la isla al amanecer. Sin embargo, cualquiera que no haga tal descubrimiento, siempre duerme hasta después del amanecer. En la isla, cada persona conoce el color de los ojos de los demás, pero no puede comunicarle a los demás el color de ojos que ve y no hay superficies reflectantes. En algún momento, un extraño llega a la isla, convoca a todas las personas y hace el siguiente anuncio público: "Al menos uno de ustedes tiene los ojos azules". Además, todos saben que el extraño es confiable, y todos saben que todos los demás saben, es decir, es de conocimiento común que el extraño es confiable y, por lo tanto, se sabe que hay al menos un isleño que tiene ojos azules. Suponiendo que todas las personas en la isla son completamente lógicas y que esto también es de conocimiento común, muestre que al k-ésimo amanecer después del anuncio, todas las personas de ojos azules abandonarán la isla.

6. Muestre por inducción los siguientes enunciados:

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 4^n$ es un múltiplo de 3.

   b) Para cualquier número real $a \neq 1$ se cumple que

   $$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

   c) Para todo $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

2 Números Reales

Augustin Louis Cauchy 1789-1857
Fue un matemático francés,1 miembro de la Academia de Ciencias de Francia y profesor en la Escuela politécnica.
Cauchy ha sido uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, solo superado por Leonhard Euler, Paul Erdős y Arthur Cayley con cerca de 800 publicaciones y siete trabajos; su investigación cubre el conjunto de áreas matemáticas de la época. Fue pionero en análisis donde se le debe la introducción de las funciones holomorfas, los criterios de convergencia de series y las series de potencias. Sus trabajos sobre permutaciones fueron precursores de la teoría de grupos, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. En óptica se le atribuyen trabajos sobre la propagación de ondas electromagnéticas.

2.1 Axiomas de cuerpo o campo

En este capítulo, $\mathbb{K}$ representará un conjunto no vacío.

Definición 2.1: –Operación binaria–

Se llama operación binaria sobre un conjunto $\mathbb{K}$ a cualquier función del tipo

$$f : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}.$$

Definición 2.2: –Suma–
Se llama operación suma a una operación binaria denotada por

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a,b) &\longmapsto a+b. \end{aligned}$$

Definición 2.3: –Producto–
Se llama operación producto a una operación binaria denotada por

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a,b) &\longmapsto a\cdot b. \end{aligned}$$

Definición 2.4: –Grupo para la suma–
Dado un conjunto $\mathbb{K}$ y una operación suma, se dice que es un grupo para la suma si este verifica las siguientes propiedades:

- **Clausura**: Para todo $x, y \in \mathbb{K}$, se tiene que $x + y \in \mathbb{K}$.
- **Asociativa**: Para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$, se verifica que $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- **Neutro**: Existe un elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que para todo $x \in \mathbb{K}$, se verifica que $x + 0 = 0 + x = x$.
- **Inverso**: Para todo $x \in \mathbb{K}$, existe un elemento notado por $-x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Definición 2.5: –Grupo abeliano para la suma–
Dado un conjunto $\mathbb{K}$ y una operación suma, se dice que es un grupo abeliano si este es un grupo para la suma y además verifica la conmutabilidad sobre la misma operación; es decir, para la operación suma, se tiene que para todo $x, y \in \mathbb{K}$,

$$x + y = y + x.$$

Definición 2.6: –Grupo para el producto–
Dado un conjunto $\mathbb{K}$ y una operación producto, se dice que es un grupo para el producto si este verifica las siguientes propiedades:

- **Clausura**: Para todo $x, y \in \mathbb{K}$, se tiene que $x \cdot y \in \mathbb{K}$.
- **Asociativa**: Para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$, se verifica que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

- **Neutro**: Existe un elemento $1 \in \mathbb{K}$, con $0 \neq 1$, tal que para todo $x \in \mathbb{K}$, se verifica que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
- **Inverso**: Para todo $x \in \mathbb{K}$, con $x \neq 0$, existe un elemento notado por $x^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = 1$.

Definición 2.7: –Grupo abeliano para el producto–

Dado un conjunto $\mathbb{K}$ y una operación producto, se dice que es un grupo abeliano si este es un grupo para el producto y además verifica la conmutabilidad sobre la misma operación; es decir, para la operación producto, se tiene que para todo $x, y \in \mathbb{K}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Definición 2.8: –Campo–

Dado un conjunto $\mathbb{K}$ y una operación suma y una producto, se dice que es un campo o cuerpo si es un grupo abeliano tanto para la suma como para el producto y además se verifica que, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Axioma 2.1

Existe un conjunto $\mathbb{R}$ llamado el conjunto de los número reales.

Axioma 2.2

Sobre el conjunto $\mathbb{R}$, existe una operación suma y una operación producto con respecto a las cuales $\mathbb{R}$ es un campo.

Los axiomas de campo no caracterizan totalmente al sistema de los números reales.

Definición 2.9: –Resta y división–

Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Se define

$$a - b = a + (-b)$$

y si $b \neq 0$, se define

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

De este definición, se tiene que si $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, entonces
$$\frac{1}{x} = x^{-1}.$$

De los axiomas de campo conocemos que, al menos, $\mathbb{R}$ posee los elementos 0 y 1.

2.2 Axiomas de Orden

Axioma 2.3

Existe un conjunto, llamado los reales positivos, notado por $\mathbb{R}^+$, con $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$, tal que se verifican las siguientes propiedades:

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $x + y \in \mathbb{R}^+$.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene que
$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad a = 0 \quad \veebar \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

Definición 2.10: –Reales negativos–

Se define el conjunto de los reales negativos como:
$$\mathbb{R}^- = \left\{-x : x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Proposición 2.1. El conjunto de los números reales se conforma de la siguiente manera
$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \sqcup \mathbb{R}^- \sqcup \{0\}.$$

Definición 2.11: –Desigualdades–

Sea $a \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes definiciones:

- $a > 0$ significa $a \in \mathbb{R}^+$;
- $a \geq 0$ significa $a \in \mathbb{R} \veebar a = 0$;
- $a < 0$ significa $-a \in \mathbb{R}^+$;
- $a \leq 0$ significa $-a \in \mathbb{R}^+ \veebar a = 0$.

Además, si tomamos $a, b \in \mathbb{R}$, se define:

- $a > b$ significa $a - b \in \mathbb{R}^+$;
- $a \geq b$ significa $a > b \veebar a = b$.

Definición 2.12: –Intervalo en $\mathbb{R}$–
Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que I es un intervalo si para todo $a, b \in I$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$a < x < b$$

se tiene que $x \in I$.

Definición 2.13: –Valor absoluto–
Sea $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de x, denotado por $|x|$, se define de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2.3 Cotas de un conjunto

Definición 2.14: –Cota superior–
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se llama cota superior del conjunto A a un número $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq M$$

para todo $a \in A$.

Definición 2.15: –Cota inferior–
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $a \in A$. Se llama cota inferior del conjunto A a un número $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$m \leq a$$

para todo $a \in A$.

Proposición 2.2. Todo conjunto finito es acotado tanto inferiormente como superiormente.

Proposición 2.3. El conjunto $\varnothing$ es acotado por vacuidad.

● **Observación.** Notar que si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ posee una cota superior (respectivamente una cota inferior), entonces dicho conjunto posee infinitas cotas superiores (respectivamente cotas inferiores). Es decir, si A es acotado superiormente, entonces existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$, de esta manera, por los axiomas de orden y de campo, tenemos que

$$M < M + 1$$

con $M + 1 \in \mathbb{R}$, por lo tanto, $M + 1$ también es una cota superior de A. En otras palabras, tanto el conjunto de cotas superiores como el de cotas inferiores son conjuntos infinitos.

● **Observación.** Si A es acotado superiormente, entonces el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es cota superior de } A\}$$

tiene cardinalidad infinita y además se verifica que

$$a \leq x$$

para todo $x \in S$ y para todo $a \in A$.

Definición 2.16: –Relación de orden parcial–

Se dice que una relación $\mathcal{R}$, sobre un conjunto $\mathbb{K}$, es una relación de orden parcial si cumple las siguientes propiedades:

- reflexiva,
- antisimétrica,
- transitiva.

Proposición 2.4. Dado un conjunto E, la relación "$\subseteq$" es una relación de orden parcial en $\mathcal{P}(E)$.

Ejemplo 2.1. Consideremos $E \neq \varnothing$ y el conjunto $\mathcal{P}(E)$, con

$$E = \{1,2,3\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{P}(x) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$$

además, consideremos

$$A = \{1\} \subseteq E \qquad \text{y} \qquad B = \{1,2\} =\subseteq E,$$

así es fácil notar que
$$A \subseteq B.$$
Por otra parte, si consideramos
$$C = \{1\} \qquad \text{y} \qquad D = \{2\},$$
notemos que
$$C \nsubseteq D \qquad \text{y} \qquad D \nsubseteq C.$$

Definición 2.17: –Relación de orden total–
Se dice que una relación $\mathcal{R}$, sobre un conjunto $\mathbb{K}$ es una relación de orden total si verifica las propiedades de una relación de orden parcial y, además, se cumple que para todo $a, b \in \mathbb{K}$
$$a\mathcal{R}b \qquad \text{o} \qquad b\mathcal{R}a.$$

Proposición 2.5. La relación "$\leq$" es una relación de orden total en $\mathbb{R}$.

2.4 Supremos e Ínfimos

Definición 2.18: –Supremo–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. Se dice que s es el supremo de A si:

- s es una cota superior de A,
- $s \leq v$ para toda v cota superior de A.

El supremo, si existe, es la menor de las cotas superiores de un conjunto.

Definición 2.19: –Ínfimo–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $i \in \mathbb{R}$. Se dice que i es el ínfimo de A si:

- i es una cota inferior de A,
- $v \leq i$ para toda v cota inferior de A.

El ínfimo, si existe, es la mayor de las cotas inferiores del conjunto.

Ejemplo 2.2. Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 5\}$.

Notemos que el conjunto de todas las cotas superiores es el intervalo

$$[5, +\infty),$$

así, el supremo de A es 5. Por otra parte, notemos que el conjunto de todas las cotas inferiores es el intervalo

$$(-\infty, 1],$$

así el ínfimo de A es 1, lo que notamos por

$$\sup(A) = 5 \notin A \qquad \text{y} \qquad \text{ínf}(A) = 1 \in A.$$

Definición 2.20: –Números reales extendido–

Dado el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales extendido se define por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

En $\overline{\mathbb{R}}$, tanto $-\infty$ como $+\infty$ son solo símbolos nuevos, es decir, no son número reales, por lo tanto, debemos definir cómo se comportan con respecto a la suma, el producto y el orden de $\mathbb{R}$; es decir, debemos extender las operaciones y orden de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.21: —Operaciones con números reales extendidos—

Se extienden las operaciones de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$ de la siguiente manera, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\pm\infty + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, \qquad (\mp\infty)(\pm\infty) = -\infty,$$

$$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \mp\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Notemos que no se definen la operación

$$\pm\infty + (\mp\infty),$$

además, $\pm\infty$ no tiene ni inverso aditivo ni inverso multiplicativo.

Definición 2.22: –Extensión de la relación de orden–

Se extienden el orden de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$ de la siguiente manera, para $x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x \qquad \text{y} \qquad x < +\infty,$$

además,

$$-\infty < +\infty.$$

Proposición 2.6. El conjunto de los números reales extendidos $\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto con orden total.

Proposición 2.7. El conjunto de los reales es un subconjunto de los reales extendidos, es decir

$$\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}.$$

Definición 2.23: –Máximo–

Si el $\sup(A) \in A$, entonces se conoce como máximo de A.

Definición 2.24: –Mínimo–

Si el $\inf(A) \in A$, entonces se conoce como mínimo de A.

- **Observación.** Consideremos el conjunto $C = \varnothing$.

Notemos que, el conjunto $\varnothing$ es acotado tanto superiormente como inferiormente. Así, el conjunto de cotas superiores e inferiores de C es $\mathbb{R}$. Por otra parte, notemos que

$$\sup(\varnothing) \quad \text{e} \quad \inf(\varnothing)$$

no existen en $\mathbb{R}$. Consideremos entonces el sistema extendido de los números reales. Tenemos $\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto de cotas superiores e inferiores para $\varnothing$. Así, por definición de ínfimo y supremo en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\sup(\varnothing) = -\infty \quad \text{e} \quad \inf(\varnothing) = +\infty.$$

Teorema 2.8: –Unicidad del supremo e ínfimo–

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $\sup(A)$ o $\inf(A)$ existe, es único.

Teorema 2.9: –Caracterización del supremo–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y $u \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\sup(A) = u$$

si y solo si

a) u es una cota superior de A; y

b) para todo $\epsilon > 0$, existe $a_\epsilon \in A$ tal que $u - \epsilon < a_\epsilon$, es decir,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a_\epsilon \in A)(u - \epsilon < a_\epsilon).$$

Teorema 2.10: –Caracterización del ínfimo–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y $v \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\text{ínf}(A) = v$$

si y solo si

a) v es una cota inferior de A; y

b) para todo $\epsilon > 0$, existe $a_\epsilon \in A$ tal que $v + \epsilon > a_\epsilon$, es decir,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a_\epsilon \in A)(v + \epsilon > a_\epsilon).$$

2.5 Propiedades de ínfimos y supremos

Axioma 2.4: –Completitud–
Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{R}$.

Corolario 2.11. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.12. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene supremo e ínfimo en $\overline{\mathbb{R}}$.

Teorema 2.13
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si A es acotado, entonces se tiene que

$$\text{ínf}(A) \leq \sup(A).$$

Definición 2.25: –Inverso de un conjunto–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos al inverso de un conjunto como

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\} = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$

Teorema 2.14

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Si A es acotado inferiormente, entonces $-A$ es acotado superiormente y $\sup(-A) = -\inf(A)$.
- Si A es acotado superiormente, entonces $-A$ es acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Teorema 2.15: –Monotonía del supremo e ínfimo–

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

- Si B es acotado superiormente, entonces A es acotado superiormente y
$$\sup(A) \leq \sup(B).$$
- Si B es acotado inferiormente, entonces A es acotado inferiormente e
$$\inf(A) \geq \inf(B).$$

Teorema 2.16

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se tiene que $a \leq b$, entonces
$$\sup(A) \leq \sup(B).$$

Teorema 2.17: –Aditividad–

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ acotados. Se define

$$A + B = \{a + b : a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}.$$

Este nuevo conjunto, cumple las siguientes propiedades:

- $A + B$ es acotado,
- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$,
- $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Teorema 2.18
Sean

$$A = \{a_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad B = \{b_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$$

dos familias de elementos acotadas de $\mathbb{R}$. Se definen sobre estas familias de conjuntos indexados las siguientes propiedades:

- **Subaditiva**

$$\sup(\{a_i + b_i\}_{i\in I}) \leq \sup(\{a_i\}_{i\in I}) + \sup(\{b_i\}_{i\in I}),$$

- **Superaditiva**

$$\text{ínf}(\{a_i + b_i\}_{i\in I}) \geq \text{ínf}(\{a_i\}_{i\in I}) + \text{ínf}(\{b_i\}_{i\in I}).$$

Notemos que, para las familias indexadas, se tiene que $\{a_i\}_{i\in I}$ y $\{b_i\}_{i\in I}$

$$\{a_i + b_i\}_{i\in I} \subseteq \{a_i\}_{i\in I} + \{b_i\}_{i\in I},$$

además

$$\sup(\{a_i\}_{i\in I} + \{b_i\}_{i\in I}) = \sup(\{a_i\}_{i\in I}) + \sup(\{b_i\}_{i\in I}).$$

Teorema 2.19
Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado y sea $a \in \mathbb{R}$. Se define

$$aS = \{as : s \in S\}.$$

Este nuevo conjunto cumple las siguientes propiedades:

- aS es acotado;
- si $a \geq 0$, entonces $\sup(aS) = a\sup(S)$;
- si $a < 0$, entonces $\sup(aS) = a\,\text{ínf}(S)$;
- si $a \geq 0$, entonces $\text{ínf}(aS) = a\,\text{ínf}(S)$;
- si $a < 0$, entonces $\text{ínf}(aS) = a\sup(S)$.

2.6 Supremo e ínfimo de funciones

En esta sección consideremos $A \subseteq \mathbb{R}$ y

$$f\colon A \to \mathbb{R}$$

una función.

Proposición 2.20. Se dice que f es acotada superiormente si la imagen de f es acotada superiormente, es decir, si

$$\operatorname{img}(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$$

es acotado superiormente.

Proposición 2.21. Se dice que f es acotada inferiormente si la imagen de f es acotada inferiormente, es decir, si

$$\operatorname{img}(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$$

es acotado inferiormente.

Proposición 2.22. Se dice que f es acotada si $\operatorname{img}(f) \subseteq \mathbb{R}$ es acotada, es decir si f es acotada superior e inferiormente.

Proposición 2.23. –Propiedades del supremo e ínfimo de funciones– Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f \leq g$, es decir, para todo $x \in A$ se tiene que $f(x) \leq g(x)$. Dadas estas funciones se cumplen las siguientes propiedades:

- si g es acotada superiormente entonces f también es acotada superiormente y
$$\sup(f) \leq \sup(g);$$
- si f es acotada inferiormente entonces g es acotada inferiormente y
$$\inf(f) \leq \inf(g).$$

Ejemplo 2.3. Sea $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Las funciones f y g definidas como

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x+1. \end{aligned}$$

Notemos que para todo $x \in [0,1]$ se tiene que $f(x) \leq g(x)$. Además

$$\text{ínf}(f) = 0, \quad \text{ínf}(g) = 1, \quad \sup(f) = 2 \qquad \text{y} \qquad \sup(g) = 3$$

es decir, podemos ver que

$$\text{ínf}(f) = 0 \leq 1 = \text{ínf}(g) \qquad \text{y} \qquad \sup(f) = 2 \leq 3 = \sup(g).$$

Ejemplo 2.4. Sean las funciones f y g definidas como

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

notemos que para todo $x \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $f(x) \leq g(x)$. Además, tenemos que

$$\text{ínf}(f) = 0 = \text{ínf}(g).$$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que

$$f(x) \leq g(y),$$

para todo $x, y \in A$, entonces se tiene que

$$\sup(f) \leq \text{ínf}(g).$$

Definición 2.26: –Operaciones con ínfimos y supremos–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas, entonces $f+g$ es acotada y se tiene que

- $\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$;
- $\text{ínf}(f+g) \geq \text{ínf}(f) + \text{ínf}(g)$.

Definición 2.27: –Múltiplo escalar de ínfimos y supremos–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función acotada y $a \in \mathbb{R}$, se tiene que:

- si $a \geq 0$, entonces $\sup(af) = a\sup(f)$;

- si $a < 0$, entonces $\sup(af) = a \inf(f)$;
- si $a \geq 0$, entonces $\inf(af) = a \inf(f)$;
- si $a < 0$, entonces $\inf(af) = a \sup(f)$.

Lema 2.24. Sean $a, p \in \mathbb{N}$ con p un primo. Si a^2 es un múltiplo de p, entonces a también es un múltiplo de p.

Proposición 2.25. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Se tiene que no existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = p$.

Proposición 2.26. Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$, que depende de x, tal que

$$x < n.$$

Teorema 2.27: –Propiedad Arquimediana de los números reales–

Para todo $y \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$, que depende de x y de y, tal que

$$y < nx.$$

Teorema 2.28: –Densidad de los números reales–

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Se tiene que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < q < y.$$

Teorema 2.29

Para todo $a \geq 0$, existe un único $x \geq 0$ tal que

$$x^2 = a.$$

- Notemos que $\sup(S_a) \in S_a$ y por lo tanto existe $\max(S_a)$.
- Se define
$$\sqrt{a} = \max\{x \geq 0 : x^2 \leq a\}.$$
- Si a es primo, entonces $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$, pues no verifica que exista un $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = a$.
- Se ha demostrado la existencia de números reales que no pertene-

cen a $\mathbb{Q}$.

Definición 2.28: –Irracionales–
Se define el conjunto de los números irracionales, notado por $\mathbb{I}$, como

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

es decir, el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que no existen $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}^*$ tales que verifiquen que

$$x = \frac{a}{b}.$$

Corolario 2.30. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, entonces existe $z \in \mathbb{I}$ tal que

$$x < z < y.$$

2.7 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1. Muestre que si $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$ y $y \in \mathbb{R}$ son tales que verifican $x \cdot y = 1$, entonces

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Solución. Supongamos que $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$ y $y \in \mathbb{R}$. Ahora, por los axiomas de campo tenemos que

$$\begin{aligned}
y &= 1 \cdot y && \text{existencia del neutro del producto,}\\
&= (x^{-1} \cdot x) \cdot y && \text{existencia del inverso del producto,}\\
&= x^{-1} \cdot (x \cdot y) && \text{asociativa del producto,}\\
&= x^{-1} \cdot 1 && \text{hipótesis,}\\
&= x^{-1} && \text{neutro multiplicativo.}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.2. Muestre que si $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

Solución. Supongamos $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, vamos a demostrar que $a^2 > 0$. Por tricotomía de los números reales, tenemos que

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

Aplicando el método de demostración por casos, tenemos lo siguiente.

- Supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$. Notemos que

  $$a^2 = a \cdot a$$

  de donde, por la propiedad clausurativa del producto concluimos que $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

- Supongamos que $a \in \mathbb{R}^-$. Notemos que

  $$a^2 = a \cdot a = (-a) \cdot (-a).$$

  Dado que, $a \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $-a \in \mathbb{R}^+$, entonces, por la propiedad clausurativa del producto concluimos que $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

Por tanto, hemos demostrado que si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$. □

Ejercicio 2.3. Muestre que $1 > 0$.

Solución. Notemos que $1 \in \mathbb{R}$ y $1 \neq 0$, además, tenemos que

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2.$$

Así, por lo demostrado en el ejercicio anterior, podemos concluir que $1 > 0$. □

Ejercicio 2.4. Muestre que si $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $n > 0$.

Solución. Para realizar esta demostración vamos a emplear el método de inducción matemática. Consideremos la proposición

$$P(n): \quad n > 0.$$

- Primero, vamos a demostrar que nuestra proposición $P(n)$ es verdadera para $n = 1$.

  Por el ejercicio anterior, sabemos que $n = 1 > 0$, de donde $P(1)$ es cierta.

- Paso de la inducción. Supongamos que $P(k)$ es cierto para algún $k \in \mathbb{N}^*$, vamos a demostrar que $P(k+1)$ es cierta

Como $k > 0$, entonces por definición $k \in \mathbb{R}^+$ y como $1 > 0$, entonces $1 \in \mathbb{R}^+$. Por clausura de la suma en $\mathbb{R}^+$, tenemos que

$$k+1 \in \mathbb{R}^+,$$

es decir $k+1 > 0$.

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n > 0$. $\square$

2.8 Ejercicios propuestos

Axiomas

1. Muestre que los elementos: inverso aditivo e inverso multiplicativo del sistema de los números reales son únicos.

2. Pruebe que el conjunto binario $\{0,1\}$ con las operaciones de suma $+$ y producto $\cdot$ definidas por:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

   es un campo.

3. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Muestre que $x \cdot y = 0$ si y solo sí, $x = 0$ o $y = 0$.

4. Muestre que la relación $\leq$ es una relación de orden total sobre $\mathbb{R}$.

5. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Muestre que si $x \leq y$ y $z > 0$, entonces $xz < yz$.

6. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $0 < x \leq y$. Muestre que $y^{-1} \leq x^{-1}$.

7. Sean $a < b$ y $x, y \in [a, b]$. Muestre que $|x - y| \leq b - a$.

8. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$, se cumple que $x \leq y + \varepsilon$. Muestre que $x \leq y$.

9. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, $0 \leq x < \varepsilon$. Muestre que $x = 0$. Además, muestre que el resultado sigue siendo cierto para todo $\varepsilon > 0$, $0 \leq x \leq \varepsilon$.

10. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que

$$x \leq z \leq \frac{y}{n} + x$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que $z = x$.

11. Muestre que para todo $x \in \mathbb{Q}$ no nulo y para todo $y \in \mathbb{I}$, $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $\dfrac{x}{y}$ e $\dfrac{y}{x}$ son irracionales.

12. (*Densidad de los números irracionales* $\mathbb{I}$) Muestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, existe $t \in \mathbb{I}$ tal que
$$x < t < y.$$

13. El objetivo del siguiente ejercicio es introducir la **función parte entera** de $x \in \mathbb{R}$.

    a) Para $x \geq 0$, considere el conjunto
    $$E_x = \left\{ n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} : n \leq x \right\}$$
    I. Muestre que existe $\sup(E_x)$ en $\mathbb{R}$.
    II. Más aún, muestre que $\sup(E_x) \in E_x$. Esto nos dice que existe $\max(E_x)$.
    Usaremos la notación $\lfloor x \rfloor = \max(E_x)$.
    III. Justifique por qué para todo $x \geq 0$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

    b) Para $x < 0$, considere el conjunto
    $$F_x = \left\{ m \in \mathbb{Z}^- : m \leq x \right\}.$$
    I. Muestre que existe $\sup(F_x)$ en $\mathbb{R}$.
    II. Más aún, muestre que $\sup(F_x) \in F_x$. Esto nos dice que existe $\max(F_x)$.
    Igual que antes, se usará la notación $\lfloor x \rfloor = \max(F_x)$
    III. Justifique por qué para todo $x < 0$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

    Por lo tanto, de los literales anteriores se justifica la definición de la parte entera de un número $x \in \mathbb{R}$ como
    $$\lfloor x \rfloor = \max \{ k \in \mathbb{Z} : k \leq x \}.$$
    Además, esta definición verifica que para todo $x \in \mathbb{R}$,
    $$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

    c) Muestre que $\lfloor \cdot \rfloor$ define una función sobre $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Z}$. Grafique dicha función.

d) ¿Es $\lfloor \cdot \rfloor$ una función aditiva, superaditiva o subaditiva sobre $\mathbb{R}^+$? (*Justifique completamente su respuesta.*)

14. Muestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

    a) $(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N}^*)(0 < \frac{1}{n} < x)$.
    b) $(\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y)(\exists r \in \mathbb{Q})(x < r < y)$.
    c) $(\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y)(\exists p \in \mathbb{Z}$ y $\exists n \in \mathbb{N})(x < \frac{p}{2^n} < y)$.

    Sugerencia: Muestre la siguiente cadena de implicaciones $(3c) \Rightarrow (3b) \Rightarrow (3a) \Rightarrow (3c)$. Además, para mostrar $(3a) \Rightarrow (3c)$ muestre su contra positiva, es decir $\neg(3c) \Rightarrow \neg(3a)$.

15. Muestre que el único entero positivo que tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}$ es 1.

    Sugerencia: Primero muestre que no existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < k < 1$, y luego use este resultado para probar lo requerido.

16. El objetivo de este ejercicio es mostrar que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < 1$ y para cualquier $p \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p a^n = 0$.

    a) Muestre que existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que $M > p + 1$.
    b) Muestre que para $n > 2M$, se tiene que $\frac{1}{|a^n|} > \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^M}{M!} b^M$, donde $b > 0$ satisface que $\frac{1}{|a|} = 1 + b$.
       Sugerencia: Use el teorema binomial.
    c) Usando (a), $((b))$, la definición $\varepsilon - N$ y hallando **explícitamente** el valor de $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, concluya lo requerido.

COTAS, SUPREMOS E ÍNFIMOS

19. Muestre que todo conjunto finito es acotado.

20. *(Caracterización de cota superior)*. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $u \in \mathbb{R}$. Muestre que u es una cota superior de S si y solo si para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$t > u \Longrightarrow t \notin S.$$

21. *(Caracterización de cota inferior)*. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $u \in \mathbb{R}$. Muestre que u es una cota inferior de S si y solo si para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$t < u \Longrightarrow t \notin S.$$

22. *(Unicidad del ínfimo).* Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Muestre que el ínfimo de A es único.

23. *(Caracterización del ínfimo).* sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Muestre que $w = \operatorname{ínf}(A)$ si y solo si

$$\begin{cases} w \text{ es cota inferior de } A; \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists a(\varepsilon) \in A : w + \varepsilon > a). \end{cases}$$

24. *(Monotonía del supremo).* Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos con $A \subseteq B$. Si B es acotado superiormente, muestre que A es acotado superiormente y

$$\sup(A) \leq \sup(B).$$

25. *(Aditividad del ínfimo).* Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjunto no vacíos. Se define $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Muestre que si A y B están acotados inferiormente, entonces $A + B$ también lo está y

$$\operatorname{ínf}(A + B) = \operatorname{ínf}(A) + \operatorname{ínf}(B).$$

26. Sean $A = \{a_i\}_{i \in I}$ y $B = \{b_i\}_{i \in I}$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se define $C = \{a_i + b_i\}_{i \in I}$. Si A, B son conjuntos acotados inferiormente, muestre que C es acotado inferiormente y

$$\operatorname*{ínf}_{i \in I} \{a_i + b_i\} \geq \operatorname*{ínf}_{i \in I} \{a_i\} + \operatorname*{ínf}_{i \in I} \{b_i\}.$$

27. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Se define $aS = \{as : s \in S\}$. Muestre que

    a) Si $a \geq 0$ y S es acotado superiormente, entonces aS es acotado superiormente y $\sup(aS) = a \sup(S)$.

    b) Si $a < 0$ y S es acotado inferiormente, entonces aS es acotado superiormente y $\sup(aS) = a \operatorname{ínf}(S)$.

28. Sean $A, B \subseteq [0, +\infty)$ conjuntos no vacíos. Se define $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Muestre que si A y B están acotados superiormente, entonces AB también lo está y

$$\sup(AB) = \sup(A) \sup(B).$$

29. Sean $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de números reales no negativos que está acotado superiormente y se define $S^2 = \{x^2 : x \in S\}$.

a) Muestre que si $u = \sup(S)$, entonces $u^2 = \sup(S^2)$.

b) Dé un ejemplo que muestre que lo anterior puede ser falso si S no es un conjunto de los reales no negativos.

30. Sean A y B dos conjuntos acotados de $\mathbb{R}$.

a) Muestre que $A \cup B$ es acotado y que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

y

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}.$$

b) Muestre que si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

c) Halle dos conjuntos A,B tales que se alcance la igualdad en la desigualdad anterior. Además, halle A,B tales que la desigualdad sea estricta.

31. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $r \in \mathbb{R}$, muestre que:

a) $\sup(r + f) = r + sup(f)$.

b) $\inf(r + f) = r + \inf(f)$.

32. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y $h\colon A \times B \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se definen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sup_{y \in B} h(x, y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g\colon B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto g(y) = \inf_{x \in A} h(x, y). \end{aligned}$$

Muestre que $\sup(g) \leq \inf(f)$. *Esta desigualdad suele expresare como:*

$$\sup_{y \in B} \inf_{x \in A} h(x, y) \leq \inf_{x \in A} \sup_{y \in B} h(x, y).$$

33. Sean $A = B = I$, con I el intervalo abierto $(0, 1)$, y

$$\begin{aligned} h\colon\ A \times B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto h(x, y) = 2x + y. \end{aligned}$$

   a) Para cada $x \in A$, halle $f(x) = \sup_{y \in B} h(x, y)$. Luego, halle $\text{ínf}(f)$.

   b) Para cada $y \in B$, halle $g(y) = \inf_{x \in A}(g)h(x, y)$. Luego, halle $\sup(g)$.

   c) ¿Se verifica la desigualdad esperada?

34. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos y $h\colon A \times B \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se definen las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f\colon\ A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sup_{y \in B} h(x, y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g\colon\ B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto g(y) = \sup_{x \in A} h(x, y). \end{aligned}$$

   a) Muestre que se verifica el **principio del supremo iterado**, es decir,

$$\sup_{(x,y) \in A \times B} h(x, y) = \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} h(x, y) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} h(x, y).$$

   b) ¿Existe un resultado análogo para el ínfimo? En caso afirmativo, enúncielo y demuéstrelo; mientras que en caso negativo, dé un contraejemplo.

35. Sea $A = \left\{ \dfrac{3n + 5}{7n + 12} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Muestre que el $\sup(A) = \dfrac{3}{7}$.

36. Considere los siguientes conjuntos:

   - $A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : x < \dfrac{1}{x} \right\}$.
   - $B = \left\{ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$.

   Con los conjuntos mencionados, responda los siguientes literales:

   a) Intuya cuáles son el supremo y el ínfimo de cada uno de los conjuntos en el caso de que éstos existan.

b) Demuestre que efectivamente los valores intuidos corresponden al supremo y al ínfimo.

c) ¿A y B poseen máximo y/o mínimo? Justifique su respuesta.

d) ¿Es $A \cap B$ acotado inferiormente? Si es así, ¿cuál es su ínfimo?

37. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos acotados superiormente tales que $A \cap B \neq \varnothing$.

    a) Muestre que $A \cup B$ y $A \cap B$ son acotados superiormente y que

    $$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

    y

    $$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$$

    b) Dé un ejemplo de conjuntos A y B tales que la desigualdad presente en $\sup(A \cap B)$ sea estricta.

38. Considere el conjunto

    $$A = \left\{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

    Determine si A es acotado superiormente y/o inferiormente. En caso de que lo sea, halle su supremo y/o su ínfimo. Finalmente, determine si A posee máximo y/o mínimo.

39. Para cada $b \in \mathbb{R}$, se define el conjunto

    $$A_b = \{x \in \mathbb{R} : (\forall \varepsilon > 0)(x < b + \varepsilon)\}.$$

    a) Muestre que para todo $b \in \mathbb{R}$, A_b posee supremo.

    b) Demuestre que $\sup(A_b) = b$.

    c) ¿Posee el conjunto A_b máximo?

40. Sean A y B subconjunto no vacíos de $\mathbb{R}$ que verifican que

    a) $A \cup B = \mathbb{R}$

    b) Todo elemento de A es estrictamente menos que todo elemento de B.

    Demuestre que existe un único $\alpha \in \mathbb{R}$ que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B.

41. Sean $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas. Muestre que

a)
$$|\sup(f) - \sup(g)| \leq \sup(|f - g|).$$

b)
$$|\text{ínf}(f) - \text{ínf}(g)| \leq \sup(|f - g|).$$

42. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado.

    a) Muestre que $M \in \mathbb{R}$ si y solo si
    $$\begin{cases} M \text{ es cota superior de } A; \\ M \in A. \end{cases}$$

    b) ¿Es posible tener un resultado análogo para el mínimo de A?. Si la respuesta es afirmativa, enuncie el resultado y demuéstrelo; si es negativa, dé un contraejemplo.

43. Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada.

    a) Muestre que $|\sup(f)| \leq \sup(|f|)$.

    b) ¿Es posible tener una relación entre $|\text{ínf}(f)|$ y $\text{ínf}(|f|)$? Si la respuesta es afirmativa, conjeture la relación y demuéstrela; y si es negativa, dé un contraejemplo.

44. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función decreciente. demuestre que el conjunto $f(A)$ posee ínfimo y supremo y que
    $$f(\sup(A)) \leq \text{ínf}(f(A)) \leq \sup(f(A)) \leq f(\text{ínf}(A)).$$

3 Sucesiones Numéricas

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass **1815-1897**
Fue un matemático alemán que se suele citar como el "padre del análisis moderno". Entre sus logros más destacados figuran la definición de la continuidad de una función, demostrando el teorema del valor medio; y el teorema de Bolzano-Weierstrass usado posteriormente para estudiar las propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados.

3.1 Sucesiones

Definición 3.1: –Sucesión–
Una sucesión de números reales es una función definida por

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos $a_n = a(n)$ y lo llamamos n-ésimo término. Además a la función a se la denota por

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Otras notaciones para sucesión son:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n>1}, \quad (a_n)_{n\geq 0}, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Proposición 3.1. La imagen de una sucesión puede ser finita o infinita.

Ejemplo 3.1. Consideremos la siguiente sucesión

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Determine la imagen de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución. La gráfica de esta sucesión esta dada en la siguiente Figura 3.1

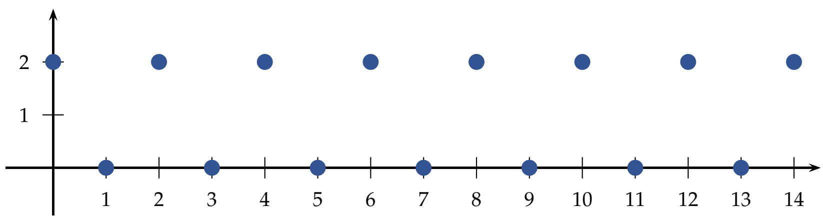


Figura 3.1: Gráfica de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Es fácil ver que, debido a la definición de la sucesión y con ayuda del la Figura 3.1,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,0,2,0,\ldots),$$

de donde,

$$\operatorname{img}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \{0,2\}.$$

□

Ejemplo 3.2. Consideremos la siguiente sucesión

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Determine la imagen de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solución. La gráfica de esta sucesión se encuentra en la siguiente Figura 3.2.

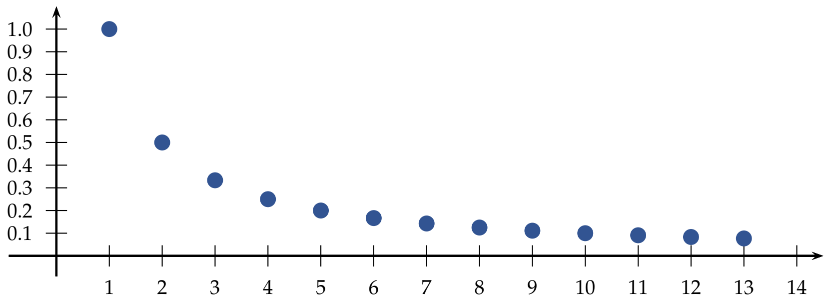


Figura 3.2: Gráfica de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Notemos que los primeros términos de la sucesión son:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right),$$

así, la imágen de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es igual a

$$\operatorname{img}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

□

Definición 3.2: –Forma explícita–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Se dice que está en forma explícita si se conoce una función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$x_n = f(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

● **Observación.** La forma explícita de una sucesión nos permite obtener el término deseado únicamente sustituyendo el valor en la función.

Definición 3.3: –Forma recursiva–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$ los primeros k términos de la sucesión. Se dice que la sucesión está en forma implícita si se conoce una función $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$$

para todo $n \geq k$. Así, se dice que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}) & \text{si } n \geq k, \\ x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ejemplo 3.3. Consideremos la sucesión de Fibonacci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} & \text{para } n \geq 2, \\ x_0 = x_1 = 1. \end{cases}$$

Así, tenemos que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots).$$

Definición 3.4: –Forma a trozos–

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $A \subseteq \mathbb{N}$. Se dice que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida a trozos si se conocen dos funciones $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$x_n = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \in A, \\ g(n) & \text{si } n \notin A, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.4. Consideremos la siguiente sucesión definida a trozos por

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ es par}, \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

Notemos que los primeros 6 términos de la sucesión son

$$(-1, 4, -1, 16, -1, 64, \ldots).$$

Definición 3.5: –Sucesión constante–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $r \in \mathbb{R}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es constante si

$$x_n = r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.6: –Convergencia–

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L, denotado por

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, que puede depender de ε, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon).$$

Otra forma de representar el hecho de que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a L es escribir:

$$x_n \to L \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty,$$

y se lee: x_n *tiende a* L *cuando* n *tiende a más infinito.*

Definición 3.7: –Divergencia–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* si no converge a ningún $L \in \mathbb{R}$.

3.2 Teoremas de Límites

Teorema 3.2: –Unicidad del límite–

El límite de toda sucesión convergente es único.

Definición 3.8: –Operaciones entre sucesiones–

Dadas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $z_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $c \in \mathbb{R}$, se definen las sucesiones:

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $c \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\dfrac{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 3.9: –Cola de una sucesión–
Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $m \in \mathbb{N}$. La m-cola de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es la sucesión definida por

$$(x_{m+n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\geq m} = (x_m, x_{m+1}, \dots).$$

● **Observación.** Si no hay ambigüedad es posible reemplazar el concepto de m-cola por cola.

Teorema 3.3
Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$. Se tiene que la m-cola de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x si y solo sí $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

● **Observación.** Todos los resultados presentados para una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales se extienden para las m-colas de la sucesión.

Teorema 3.4
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $m \in \mathbb{N}$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L si y solo si la m-cola de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a L.

Definición 3.10: –Sucesión acotada–
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión está acotada si existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|x_n| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.5
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces es acotada.

Proposición 3.6. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales convergentes tales que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = y,$$

entonces

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\lambda \cdot x_n) = \lambda x$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$ y $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

● **Observación.** Los recíprocos de la proposición anterior no son ciertos en general.

Proposición 3.7. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales convergentes a x y y, respectivamente. Si

$$x_n \leq y_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ implica que $x_n \leq y_n$, entonces

$$x \leq y.$$

⚠ Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales convergentes a x y y, respectivamente. En general, no es verdad que si

$$x_n < y_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$x < y.$$

Por ejemplo, considere las sucesiones

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Corolario 3.8. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \geq 0.$$

Teorema 3.9: –Teorema de compresión–

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n,$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n.$$

Proposición 3.10. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} x_n\right| = |x|.$$

Proposición 3.11. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos y $L \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L.$$

Si $0 < L < 1$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente y

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

Proposición 3.12. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0,$$

y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada. Se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = 0.$$

Proposición 3.13. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales y sea $x \in \mathbb{R}$. Si para alguna $C \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$|x_n - x| \leq C|a_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Definición 3.11: –Monotonía–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente si $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, se dice que es monótona si es una de las anteriores.

Definición 3.12: –Sucesión acotada superiormente–

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $M \in \mathbb{R}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente si

$$x_n \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.13: –Sucesión acotada inferiormente–

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $M \in \mathbb{R}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente si

$$M \leq x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.14: –Teorema de convergencia monótona–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente y es creciente o estrictamente creciente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acota inferiormente y decreciente o estrictamente decreciente entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ejemplo 3.5. La sucesión de números reales

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

es estrictamente creciente y

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ejemplo 3.6. La sucesión de números reales

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es estrictamente creciente y

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Ejemplo 3.7. La sucesión de números reales

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es estrictamente decreciente y

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Proposición 3.15. –Criterio de Cauchy– Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $p \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = p.$$

- Si $p < 1$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.
- Si $p > 1$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Teorema 3.16: –Teorema de las sucesiones adyacentes–

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales, tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Si

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0,$$

entonces,

- para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_0$;
- las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite.

3.3 Límites Infinitos

Definición 3.14: –Divergencia a más infinito–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge a más infinito*, denotado por

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty,$$

si para todo $R > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, que puede depender de R, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \geq R.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall R > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow x_n \geq R).$$

Definición 3.15: –Divergencia a menos infinito–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge a menos infinito*, denotado por

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty,$$

si para todo $R < 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, que pude depender de R, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \leq R.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall R < 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow x_n \leq R).$$

Otra forma de representar el hecho de que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverja a $\pm\infty$ es escribir:

$$x_n \to \pm\infty \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty,$$

y se lee: x_n *diverge a más o menos infinito cuando n tiende a más infinito.*

Proposición 3.17. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales. Se tienen las siguientes propiedades:

- Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$
- Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = -\infty.$$
- Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ y existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \mathbb{N}$, se tiene que $y_n \geq x_n$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty.$$
- Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ y existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \mathbb{N}$, se tiene que $y_n \leq x_n$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = -\infty.$$
- Si x_n es acotada y $\lim_{n\to+\infty} y_n = \pm\infty$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Proposición 3.18. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, se tienen los siguientes casos:

- $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$,
- $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$,
- $\lim_{n\to+\infty} x_n$ no existe.

Proposición 3.19. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente monótona. Se tiene que x_n es divergente si y solo si x_n no es acotada y, además:

a) Si x_n es creciente, entonces x_n diverge a más infinito;

b) Si x_n es decreciente, entonces x_n diverge a menos infinito.

Proposición 3.20. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}^*$. Si

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = +\infty,$$

entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión divergente.

3.4 Subsucesiones

Definición 3.16: –Subsucesiones–

Sean $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ una sucesión de números reales y $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una función estrictamente creciente, es decir

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k) < \cdots .$$

Se dice que la sucesión de números reales

$$a\circ\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$$

es una subsucesión de a. Si a la sucesión a se la denota por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a la subsucesión $a\circ\phi$ se la denota por

$$(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$$

Con esto, se tiene que

$$(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{\varphi(0)}, a_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(k)}, \ldots)$$

Dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una función estrictamente creciente $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, se suele notar por

$$n_k = \varphi(k)$$

para $k\in\mathbb{N}$, con esto, se tiene que

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

y se denota a la subsucesión $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ por

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

con lo cual,
$$\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\right).$$

Ejemplo 3.8. Consideremos la sucesión de números reales definida por
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$
se tiene que
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

Tomemos las funciones
$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ k &\longmapsto 2k \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \sigma\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ k &\longmapsto 2k+1, \end{aligned}$$
las cuales son estrictamente crecientes, con esto, tenemos que
$$\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2k+2} \ldots\right)$$
y
$$\left(x_{\sigma(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2k+1}, \ldots\right)$$
son subsucesiones de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que toman los términos pares e impares, respectivamente, de la sucesión original.

Proposición 3.21. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. A partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se pueden obtener infinitas subsucesiones.

Proposición 3.22. Sea $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un función estrictamente creciente, se tiene que
$$k \leq \varphi(k)$$
para todo $k \in \mathbb{N}$

De la proposición anterior, se tiene que, dadas una sucesión de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una subsucesión $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de esta, se tiene que
$$k \leq n_k$$
para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.23
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente a $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

Proposición 3.24. Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es una subsucesión de si misma.

Proposición 3.25. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. La cola de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 3.26: –Criterio de la divergencia–
Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $L, R \in \mathbb{R}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica alguna de estas condiciones:

- no es acotada;
- existen dos subsucesiones de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes tales que $x_{n_k} \to L$ cuando $k \to +\infty$ y $x_{n_\ell} \to R$ cuando $\ell \to +\infty$ con $L \neq R$,

entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Teorema 3.27
Toda sucesión de números reales posee subsucesiones monótonas.

3.5 Teorema de Bolzano-Weierstrass

Teorema 3.28: –Bolzano-Weierstrass–
Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente.

Teorema 3.29
Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L si y solo si toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

Lema 3.30. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a L, entonces existen un $M > 0$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$|x_{n_k} - L| \geq M.$$

Definición 3.17: –Límite subsecuencial–

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Si existe $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que converge a L, entonces se dice que L es un límite subsecuencial de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 3.31. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se tiene que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, entonces el conjunto de todos los límites subsecuenciales de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado.

Definición 3.18: –Límite superior e inferior–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

- Sea

  $$V = \{v \in \mathbb{R} : x_n \leq v \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ salvo una cantidad finita}\}.$$

  Se define el *límite superior* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

  $$\inf(V)$$

  y se lo denota por

  $$\limsup x_n.$$

- Sea

  $$W = \{w \in \mathbb{R} : w \leq x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ salvo una cantidad finita}\}.$$

  Se define el *límite inferior* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

  $$\sup(V)$$

  y se lo denota por

  $$\liminf x_n.$$

Otras notaciones para el límite superior e inferior de una sucesión son:

$$\overline{\lim}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{y} \qquad \underline{\lim}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

respectivamente.

Otra forma de definir los límites superiores e inferiores de una sucesión son las siguientes. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, se definen las sucesiones

$$(\sup\{x_k : k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{y} \qquad (\inf\{x_k : k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}},$$

las cuales son decreciente y creciente, respectivamente, por lo tanto, se define

$$\limsup x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$$

y

$$\liminf x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k.$$

Teorema 3.32

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $s \in \mathbb{R}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $s = \limsup x_n$;
- $s = \lim_{n\to+\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$; y
- $s = \sup(S)$, donde S es el conjunto de los límites subsecuenciales de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 3.33

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $s \in \mathbb{R}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $s = \liminf x_n$;
- $s = \lim_{n\to+\infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k$; y
- $s = \inf(S)$, donde S es el conjunto de los límites subsecuenciales de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 3.34

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si

$$\lim\sup x_n = \lim\inf x_n.$$

Proposición 3.35. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones acotadas. Se tiene que

$$\lim\sup(x_n + y_n) \leq \lim\sup(x_n) + \lim\sup(y_n).$$

3.6 Criterio de Cauchy

Definición 3.19: –Sucesión de Cauchy–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, que depende de ε, tal que, para todo $n, m \geq N$ se tiene que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

La idea intuitiva acerca de una sucesión de Cauchy es que la distancia entre cualquier término de la sucesión a partir de un $N \in \mathbb{N}$ es tan pequeña como queramos.

Lema 3.36. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Lema 3.37. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

- **Observación.** El recíproco del lema anterior no es cierto.

Teorema 3.38: –Criterio de convergencia de Cauchy–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

- **Observación.** Por el teorema anterior, se dice que el espacio $\mathbb{R}$ es *completo*. En general, se dice que un espacio es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición 3.20: –Sucesión contractiva–

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $C \in \mathbb{R}$ tal que $0 < C < 1$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva si

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. El número C se denomina **constante** de la sucesión contractiva.

Teorema 3.39

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva, entonces es convergente.

Corolario 3.40. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $C, L \in \mathbb{R}$ tal que $0 < C < 1$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva con constante C y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$, entonces

- $|L - x_n| \leq \dfrac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|$; y
- $|L - x_n| \leq \dfrac{C^{n-1}}{1-C}|x_2 - x_1|$.

3.7 Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.1. Muestre que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k}$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$, arbitrario pero fijo. Debemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq N$, se tenga que

$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon$$

□

Ejercicio 3.2. Use la definición de límite de una sucesión para demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right) = 0.$$

Solución. Por la definición de límite, vamos a probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que

$$\left| \frac{n}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^2+1} &< \frac{n}{n^2} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por la propiedad arquimediana, existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_1,$$

de donde, para todo $n > N_1$, se tiene que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

así, si $n > N_1$, se tiene que

$$\left| \frac{n}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon,$$

lo que implica que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right) = 0.$$ □

Ejercicio 3.3. Use la definición de límite de una sucesión para demostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right) = 2.$$

Solución. Por la definición de límite, vamos a probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| &= \left| 2 - \frac{2}{n+1} - 2 \right| \\ &= \left| -\frac{2}{n+1} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{2}{n+1} \right| \\ &< \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Por la propiedad arquimediana, existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2}{\varepsilon} < N_1,$$

de donde, para todo $n > N_1$, se tiene que

$$\frac{2}{n} < \varepsilon,$$

así, si $n > N_1$, se tiene que

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

lo que implica que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right) = 2. \qquad \square$$

Ejercicio 3.4. Use la definición de límite de una sucesión para demostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+5} \right) = \frac{3}{2}.$$

Solución. Por la definición de límite, vamos a probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que

$$\left| \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon.$$

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| &= \left| \frac{2(3n+1) - 3(2n+5)}{2(2n+5)} \right| \\ &= \left| \frac{-13}{4n+10} \right| \\ &= \left| \frac{13}{4n+10} \right| \\ &< \frac{13}{4n}. \end{aligned}$$

Por la propiedad arquimediana, existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{13}{4\varepsilon} < N_1,$$

de donde, para todo $n > N_1$, se tiene que

$$\frac{13}{4n} < \varepsilon,$$

así, si $n > N_1$, se tiene que

$$\left|\frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon,$$

lo que implica que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2}.$$ □

Ejercicio 3.5. Use la definición de límite de una sucesión para demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-1}{2n^2+3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Solución. Por la definición de límite, vamos a probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que

$$\left|\frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2(n^2-1)-(2n^2+3)}{2(2n^2+3)}\right| \\
&= \left|\frac{-5}{4n^2+6}\right| \\
&= \left|\frac{5}{4n^2+6}\right| \\
&< \frac{5}{4n^2}.
\end{aligned}$$

Por la propiedad arquimediana, existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}} < N_1,$$

de donde, para todo $n > N_1$, se tiene que

$$\frac{5}{4n^2} < \varepsilon,$$

así, si $n > N_1$, se tiene que

$$\left| \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

lo que implica que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+3} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Ejercicio 3.6. Sea $y_1 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < y_1$. Para $n \geq 2$, se define

$$y_n = \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}}.$$

Asumiendo que la sucesión $(y_n)_{n \geq 1}$ es convergente, halle su limite.

Solución. Sea $L \in \mathbb{R}$ el límite de la sucesión. Para determinar el valor de L, utilizaremos el hecho de que

$$y_n = \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}} \tag{3.1}$$

para todo $n \geq 2$, con esto, tomando el límite cuando n tiende a infinito en (3.1), tenemos que

$$L = \frac{1}{2} L + \frac{1}{L},$$

lo que equivale a

$$L^2 = 2,$$

por lo tanto

$$L = \sqrt{2} \qquad \text{o} \qquad L = -\sqrt{2}.$$

Ahora, utilizando inducción se puede demostar fácilmente que

$$y_n > 0$$

para todo $n \geq 1$, por lo tanto, se tiene que $L \geq 0$. Así, se tiene que $L = \sqrt{2}$, es decir,

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \sqrt{2}. \qquad \square$$

Ejercicio 3.7. Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tales que $y_1 < y_2$. Para $n \geq 3$, se define

$$y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2}.$$

Asumiendo que la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ es convergente, halle su limite.

Solución. Sea $L \in \mathbb{R}$ el límite de la sucesión. Para determinar el valor de L, una primera idea sería el utilizar el hecho de que

$$y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2} \tag{3.2}$$

para todo $n \geq 3$, con esto, tomando el límite cuando n tiende a infinito en (3.2), tenemos que

$$L = \frac{1}{3}L + \frac{2}{3}L = L,$$

lo cual no nos dice nada útil acerca del límite, por tanto debemos buscar otra alternativa.

Vamos a intentar buscar un forma no recursiva para el término y_n, con $n \geq 3$ (una manera para realizar esto es aplicando la teoría de Ecuaciones en Diferencial que no es parte de este curso). Para esto, analicemos la diferencia $y_n - y_{n-1}$ con $n \in \mathbb{N}^*$, así, para $n \geq 3$, utilizando (3.2) nos podemos dar cuenta que

$$y_n - y_{n-1} = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2} - y_{n-1} = \frac{2}{3}y_n - \frac{2}{3}y_{n-1} = \frac{2}{3}(y_{n-2} - y_{n-1}). \tag{3.3}$$

¿Qué podemos hacer ahora? Podemos analizar la diferencia $y_{n-2} - y_{n-1}$ volviendo aplicar lo anterior, así, si $n - 1 \geq 3$, tenemos que

$$y_{n-2} - y_{n-1} = y_{n-2} - \left(\frac{1}{3}y_{n-2} + \frac{2}{3}y_{n-3}\right) = \frac{2}{3}(y_{n-2} - y_{n-3}),$$

de donde, reemplazando en (3.3) nos queda así:

$$y_n - y_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (y_{n-2} - y_{n-3}) = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 (y_{n-3} - y_{n-2})$$

Repitiendo este proceso, podemos conjeturar que

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= \frac{2}{3}(y_{n-2} - y_{n-1}) \\ &= (-1)\left(\frac{2}{3}\right)^2 (y_{n-2} - y_{n-3}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 (y_{n-4} - y_{n-3}) \\
&\vdots \\
&= (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} (y_1 - y_2),
\end{aligned}
$$

es decir, conjeturamos que, para todo $n \geq 3$, se tiene que

$$y_n = -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2} (y_1 - y_2) + y_{n-1}.$$

Esto se lo puede demostrar fácilmente por inducción. Esta nueva fórmula es muy útil dado que a diferencia de (3.2), logramos obtener que y_n solo depende del término anterior y no de los dos anteriores. Ahora, aplicando esta fórmula, podemos conjeturar que, para $n \geq 3$,

$$
\begin{aligned}
y_n &= -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2} (y_1 - y_2) + y_{n-1} \\
&= -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2} (y_1 - y_2) - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3} (y_1 - y_2) + y_{n-2} \\
&\vdots \\
&= -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2} (y_1 - y_2) - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3} (y_1 - y_2) - \cdots - \left(-\frac{2}{3}\right) (y_1 - y_2) + y_2 \\
&= -\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3} + \cdots + \left(-\frac{2}{3}\right)\right) (y_1 - y_2) + y_2 \\
&= y_2 - (y_1 - y_2) \sum_{k=1}^{n-2} \left(-\frac{2}{3}\right),
\end{aligned}
$$

es decir, conjeturamos que

$$y_n = y_2 - (y_1 - y_2) \sum_{k=1}^{n-2} \left(-\frac{2}{3}\right)$$

para todo $n \geq 3$. De nuevo, esto podemos demostrarlo por inducción. Así, aplicando la fórmula de la suma de los primeros términos de una progresión geométrica, obtenemos que, para $n \geq 3$,

$$y_n = y_2 - (y_1 - y_2) \sum_{k=1}^{n-2} \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= y_2 - (y_1 - y_2)\left(\frac{\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}\right) \\
&= y_2 - \frac{3}{5}(y_1 - y_2)\left(\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

Como $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito, tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y_2 - \frac{3}{5}(y_1 - y_2)\left(-\frac{2}{3}\right) = y_2 + \frac{2}{5}(y_1 - y_2),$$

o lo que es equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{2}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2. \qquad \square$$

3.8 Ejercicios propuestos

1. Usando la definición de límite de una sucesión, muestre que

   a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0;$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2)}{\sqrt[3]{n}} = 0;$

   c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{2};$

   d) La sucesión $x_n = \dfrac{1}{n^2+n+2}$ no converge a $\frac{1}{2}$.

2. Sea $\gamma > 0$ un número real arbitrario pero fijo. Usando la definición, muestre que:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\gamma} = 0;$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\gamma}$, con $\gamma \geq 1$;

   c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\gamma}}.$

3. Sea $x_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ para $n \in \mathbb{N}$.

   a) Usando la definición de límite de una sucesión, muestre que $x_n \to 0$.

b) Considere $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Halle el valor de $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que verifique la definición de límite.

Sugerencia: Use lo realizado en el literal anterior.

4. Sea $x_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$ para $n \in \mathbb{N}$.

   a) Usando la definición de límite de una sucesión, muestre que $x_n \to 2$.

   b) Considere $\varepsilon = 10^{-5}$. Halle el valor de $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que verifique la definición de límite.

   Sugerencia: Use lo realizado en el literal anterior.

5. Muestre que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad \lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0.$$

6. Dé un ejemplo de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la convergencia de la sucesión $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ no implique la convergencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Dé un ejemplo de una sucesión convergente (no constante) que no sea monótona.

8. Determine la monotonía de las siguientes sucesiones:

   a) Sea $x = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$;

   b) Sea $x = \left(n^2 - n\right)_{n\in\mathbb{N}}$;

   c) Sea $x = \left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

9. Muestre que si $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

10.

11. Muestre que si $0 < x < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} nx^n = 0$.
    Sugerencia: Use el Teorema Binomial: Sean $a, b \in \mathbb{R}$. para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k.$$

12. Suponga que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$ y $L > 0$. Muestre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in \left(\dfrac{1}{2}L, 2L\right)$.

13. Demuestre los literales $c)$ y $d)$ de la proposición

14. Calcule los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(3\sqrt{n})^{\frac{1}{2n}}$.

    b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{\ln(n+1)}}$.

15. Sea $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Muestre que $\left(\sqrt{n}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente y encuentre su límite.

16. Dé un ejemplo de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ convergente tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_n+1}{x_n}\right| = 1.$$

17. Dé un ejemplo de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ divergente tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_n+1}{x_n}\right| = 1.$$

● **Observación.** Los ejercicios (11) y (12) nos dicen que si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ verifica que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x_n+1}{x_n}\right| = 1$, entonces no podemos garantizar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge o diverge.

13. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L > 1$. Muestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

14. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n|^{\frac{1}{n}} = L < 1$. Muestre que $x_n \to 0$.

15. Dé un ejemplo de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ convergente tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n|^{\frac{1}{n}} = 1$.

● **Observación.** Los ejercicios (14) y (15) nos dicen que si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ verifica que $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, entonces no podemos garantizar que la sucesión converge o diverge.

16. Usando el teorema de estricción y las propiedades de convergencia de una sucesión, en los casos en que se puedan aplicar, muestre que

    a) $x_n = \frac{2^n}{n}$ diverge.

b) $x_n = (-3)^{\sqrt{n}}$ diverge.

c) $x_n = \frac{1}{n!} \to 0$.

d) $x_n = (1 + (-1)^n)^n$ diverge.

e) $x_n = \frac{a^n}{n!} \to 0$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$ fijo.

f) $x_n = n^{\frac{1}{n}} \to 1$.

Sugerencia: Muestre, usando el teorema binomial, que existe una sucesión $({}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \to 0$ y $n^{\frac{1}{n}} - 1 \leq a_n$.

17. Muestre que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes, entonces las sucesiones

$$u_n = \max_{n\in\mathbb{N}} \{x_n, y_n\} \qquad \text{y} \qquad v_n = \min_{n\in\mathbb{N}} \{x_n, y_n\}$$

son convergentes.

Sugerencia: Muestre primero que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2} \qquad \text{y} \qquad \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2},$$

y use este resultado para probar lo requerido.

18. Muestre que $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, con $n \in \mathbb{N}$, una sucesión convergente.

19. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida por

$$\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, & \text{para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Muestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y monótona. Concluya que la sucesión es convergente y calcule su líimite.

20. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto infinito que está acotado superiormente. Muestre que existe una sucesión creciente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en S tal que

$$\sup(S) = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

21. Sea $p > 0$ y

$$y_n = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{si } n = 1 \\ \sqrt{p + y_{n-1}} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

(a) Muestre explícitamente que existe $M = M(p) > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq M$.

(b) Muestre que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y halle su límite.

22. Considere la sucesión $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Muestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente.

    Sugerencia: Use la desigualdad de Bernoulli, para todo número real $x > -1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$

    $$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

    (b) Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo u en el intervalo abierto $(-1, \frac{1}{n})$

    $$(1 + u)^n \leq \frac{1}{1 - nu}.$$

    Sugerencia: Muestre que $\frac{1}{u+1} - 1$ verifica la desigualdad de Brenoulli.

    (c) Usando *(b)*, muestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado superiormente.

    (d) Finalmente, muestre que el número e se encuentra bien definido como

    $$e = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

23. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\frac{1}{nx_n} \to 0$. Demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - x_n)^n = 0$.

24. Muestre que la siguiente sucesión no es convergente:

    $$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1 - (-1)^n + \frac{1}{n}.$$

25. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones. Se define la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

    $$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ y_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

    Muestre que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes y, además, $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{n\to+\infty} (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

26. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = n^{\frac{1}{n}}$, con $n \in \mathbb{N}$. Muestre que

$$x_{n+1} < x_n \Longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Además, muestre que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$ para todo $n \geq 3$, y concluya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

27. Muestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ usando el hecho de que la subsucesión $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge al mismo límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, $L = \lim\limits_{n\to+\infty}(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y así, concluya que $L = 1$.

28. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada y se define $\alpha_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$, con $n \in \mathbb{N}$ y $L = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$. Muestre que existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converge a L.

29. Usando la definición de divergencia de una sucesión, demuestre las siguientes proposiciones:

    (a) Demuestre los literales $a)$ y $b)$ de la proposición

    (b) Usando el resultado anterior, muestre que toda sucesión no acotada posee una subsucesión monótona tal que diverge a *más infinito* o a *menos infinito*.

30. Muestre que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{x_{n_k}} = 0.$$

31. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada y $s = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Muestre que si $s \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a s.

32. Usando la definición, muestre que la sucesión $s_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, con $n \in \mathbb{N}$, es de Cauchy.

33. Usando la definición, muestre que la sucesión $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión de Cauchy.

34. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesión de Cauchy. Muestre que:

    (a) $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

(b) $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

35. Sea $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tales que $y_1 < y_2$. Para $n \geq 3$, se define

$$y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2}.$$

Muestre que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y halle su límite.

36. Muestre que toda sucesión contractiva es de Cauchy.

37. Sea $L \in \mathbb{R}$ el límite de una sucesión contractiva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con constante λ. Muestre que:

(a) $|L - x_n| \leq \dfrac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}|x_2 - x_1|$.

(b) $|L - x_n| \leq \dfrac{\lambda}{1-\lambda}|x_n - x_{n-1}|$.

38. Considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Muestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ y, sin embargo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión de Cauchy. ¿Contradice este ejemplo la definición de sucesión de Cauchy o la definición de sucesión contractiva?. Explique su razonamiento.

39. Considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_n = \begin{cases} x_1 > 0 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2+x_{n-1}} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Muestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva y halle su límite.

40. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy tal que posee una subsucesión $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, digamos a L. Muestre que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente al mismo límite L.

41. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de Cauchy. Muestre que la sucesión $z_n = |x_n - y_n|$ es convergente.

42. Demostrar el siguiente límite de sucesiones

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+4} - n\right) = 2$$

43. Calcular el siguiente límite de sucesiones

$$\lim_{n\to+\infty} \left| n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right|,$$

Sugerencia: Recordar que $|\operatorname{sen}(t)| \leq |t|$, para todo $t \in \mathbb{R}$

44. El objetivo de este ejercicio es mostrar que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < 1$ y para cualquier $p \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p a^n = 0$.

    (a) Muestre que existe un $M = M(p) \in \mathbb{N}$ tal que $M > p + 1$.

    (b) Muestre que para $n > 2M$, se tiene que $\frac{1}{|a^n|} > \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^M}{M!} b^M$, donde $b > 0$ satisface que $\frac{1}{|a|} = 1 + b$.
    Sugerencia: Use el teorema binomial.

    (c) Usando (*a*), ((*b*)), la definición $\varepsilon - N$ y hallando **explícitamente** el valor de $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, concluya lo requerido.

45. Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión que verifica que

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(n \geq N \Longrightarrow |u_n - u| < \varepsilon).$$

    Muestre que el número de términos distintos de la sucesión es finito.

46. Muestre que dado cualquier número $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ decreciente tal que $r_n \to x$.

47. Considere las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas por:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{y} \qquad y_n = x_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

    a) Muestre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones monótonas.

    b) Usando lo anterior, muestre que existen $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_n \to L_1$ y $y_n \to L_2$.

    c) Muestre que $L_1 = L_2$. Además, si se denota como $L = L_1 = L_2$, muestre que $2{,}5 < L < 2{,}75$.

48. Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión que verifica que

$$(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(n \geq N \Longrightarrow |u_n - u| < \varepsilon).$$

    Muestre que el número de términos distintos de la sucesión es finito.

49. Muestre que dado cualquier número $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ decreciente tal que $r_n \to x$.

50. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ reales fijos. Para $n \geq 2$ se define

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 3x_{n-1}}{5}.$$

   (a) Muestre que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

   (b) Argumente por qué $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y halle su límite.

51. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $x_n \to x$. Usando la definición de convergencia de una sucesión, muestre que $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

52. (a) Sea $a \in \mathbb{R}$. Muestre que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > |a|$.

   (b) Use (a) para mostrar que para cualquier $n \geq k$, $\left|\frac{a^n}{n!}\right| < \frac{|a|^{k+1}}{k!n}$, donde $m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ (el factorial de m).

   (c) Mediante la definición de convergencia de una sucesión, muestre que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ fijo.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^2}{n!}.$$

53. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ la sucesión definida por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ para $n \geq 1$.

   (a) Muestre que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

   (b) ¿Por qué $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente? Argumente con precisión su respuesta.

   (c) Halle el límite de dicha sucesión.

54. Sea $(x_n)_{n\geq 1} = (\sqrt{n})_{n\geq 1}$.

   (a) Muestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$.

   (b) Pruebe que $(x_n)_{n\geq 1}$ no es una sucesión de Cauchy.

   (c) ¿Contradice este ejemplo la definición de sucesión de Cauchy? Argumente con precisión su respuesta.

55. Muestre que la sucesión $\left\{\frac{\cos(n^2\pi)}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, usando la definición.

4 Series Infinítas

Leonhard Euler 1707-1783
Fue un matemático y físico suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos, muy conocido por el número de Euler (e), número que aparece en muchas fórmulas de cálculo y física.

4.1 Series

Definición 4.1: –Serie–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Una *serie infinita* o simplemente llamada *serie*, generada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$s_0 = x_0 \qquad \text{y} \qquad s_{k+1} = s_k + x_{k+1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

A esta sucesión se la representa por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$

Otras notaciones para las series son

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \qquad \text{o} \qquad \sum x_n.$$

Definición 4.2: –Término general, suma parcial, sucesión de sumas parciales–

Bajo los establecido en la definición anterior, se tienen las siguientes definiciones.

- El números x_n, con $n \in \mathbb{N}$, es llamado el *n-ésimo término* o el *término general* de la serie.
- El número s_n, con $n \in \mathbb{N}$, es llamado la *suma parcial* de la serie.
- A la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se la llama la *sucesión de sumas parciales*.

Definición 4.3: –Convergencia de una serie–

Sean $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su sucesión de sumas parciales. Si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = L,$$

entonces se dice que la serie es convergente y converge a L, lo cual se denota por

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n.$$

Definición 4.4: –Divergencia–

Sea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ no es convergente a ningún $L \in \mathbb{R}$, entonces se dice que es *divergente*.

● **Observación.** Las series pueden iniciar en otro índice diferente a 0, por ejemplo, dados $n_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión de números reales $(x_n)_{n\geq n_0}$, la serie formada por esta sucesión se la denota por

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n \qquad \text{o} \qquad \sum_{n_0\leq n} x_n.$$

Los términos **sucesión** y **serie** son distintos. Una serie es una sucesión de sumas parciales generada a partir de una sucesión de números reales.

4.2 Criterios de convergencia

Teorema 4.1

Sea $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

El teorema anterior establece que, dada una serie de número reales $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, se tiene que si

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0,$$

entonces podemos concluir que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ no converge.

Teorema 4.2: –Criterio de Cauchy para series–

Sea $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales. Se tiene que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $M >\in \mathbb{N}$, que depende de ε, tal que para todo $m > n \geq M$ se tiene que

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon,$$

donde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ representa la sucesión de sumas parciales de la serie.

Otra notación alternativa para el teorema anterior está dada por:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| < \varepsilon.$$

Teorema 4.3

Sea $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente si y solo si la sucesión de las sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. En este caso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{k\to+\infty} s_k = \sup\{s_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

4.2.1 Criterios de comparaciones

Teorema 4.4

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales y $N \in \mathbb{N}$. Si para todo $n \geq N$ se tiene que

$$0 \leq x_n \leq y_n,$$

entonces:

- la convergencia de $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ implica la convergencia de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$;
- la divergencia de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ implica la divergencia de $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$.

Teorema 4.5

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales positivos. Si existe un $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L,$$

entonces:

- si $L \neq 0$, se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente si y solo si $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ es convergente;
- si $L = 0$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ es convergente, se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente.

Definición 4.5: –Serie alternante–

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que una serie de números reales es alternante si está dada de la siguiente forma:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x_n.$$

Teorema 4.6: –Criterio de Leibniz–

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números y $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n x_n$ una serie reales. Si la sucesión x_n es decreciente y

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0,$$

entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x_n$$

es convergente.

4.3 Convergencia Absoluta

Definición 4.6: –Convergencia absoluta–

Sea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales. Se dice que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es *absolutamente convergente* si la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

es convergente.

Definición 4.7: –Convergencia condicional o no absoluta–

Sea $\sum\limits_{\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales. Se dice que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *condicionalmente convergente* o de *convergencia no absoluta* si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

es convergente, pero

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

no es convergente.

Teorema 4.7

Sea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ es convergente, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

es convergente.

Teorema 4.8

Sean $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_k|}{|y_k|} = L$$

entonces, se tienen los siguientes enunciados:

1. Si $L \neq 0$, entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolutamente si y solo si la serie generada por $(y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolutamente;

2. Si $L = 0$, y la serie generada por $(y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente.

Teorema 4.9

Sea $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

a) Si existe un $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1$ y un $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_k|^{\frac{1}{k}} \leq r \quad \text{para } k \geq K_0$$

entonces, la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente;

b) Si existe un $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_k|^{\frac{1}{k}} > 1 \quad \text{para } k \geq K_0$$

entonces, la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Corolario 4.10. Sean $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $r \in \mathbb{R}$, tales que

$$\lim_{n\to+\infty} |x_k|^{\frac{1}{k}} = r,$$

entonces:

1. Si $0 \leq r < 1$, entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente;

2. Si $r > 1$, entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Para $r = 1$ el criterio anterior no es concluyente.

Teorema 4.11: –Radio de convergencia de D'Alambert–

Sea $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $x_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

a) Si existen $q \in [0, 1)$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \leq q \quad \text{para todo } k \geq k_0,$$

entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente;

b) Si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \geq 1 \quad \text{para todo } k \geq k_0,$$

entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Corolario 4.12. Sean $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales con $x_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| = L,$$

entonces se tiene que

a) Si $0 \leq L < 1$, entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente;

b) Si $L > 1$, entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Para $L = 1$ el criterio anterior no es concluyente.

Teorema 4.13: –Criterio de Raabe-Duhamel–

Sean $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales con $x_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$

y $a \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que:

a) Si $a > 1$ y existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \leq 1 - \frac{a}{k} \quad \text{para todo } k \geq k_0$$

entonces, la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente;

b) Si $a \leq 1$ y existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \geq 1 - \frac{a}{k} \quad \text{para todo } k \geq k_0,$$

entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Corolario 4.14. Sean $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales con $x_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $L \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} k\left(1 - \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|\right) = L.$$

a) Si $L > 1$, entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente;

b) Si $L \leq 1$, entonces la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Lema 4.15. Sean $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales, y las sumas parciales de $\sum_{k=1}^{n} y_k$ denotadas por (s_n) con $s_0 = 0$. Si $m > n$, entonces

$$\sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k = (x_m s_m - x_{n+1} s_n) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) s_k.$$

Teorema 4.16: –Criterio de Dirichlet–

Sean $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales con

$$\lim_{n\to+\infty} x_k = 0$$

y $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente. Si las sumas parciales de $\sum_{k=1}^{n} y_k$ son acotadas, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$$

es convergente.

Teorema 4.17: –Criterio de Abel–

Sean $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de series reales. Si $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona, convergente y la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ es convergente, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$$

es convergente.

Teorema 4.18: –Criterio Integral–

Sean $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $f\colon [1,+\infty] \to \mathbb{R}$ una función decreciente tal que

$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 1.$$

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$x_k = f(k)$$

y la serie generada por $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si a integral impropia

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$$

existe.

4.4 Ejercicios resueltos

4.5 Ejercicios propuestos

1. Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)$ es divergente.

2. Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ es convergente.

3. Muestre que $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$, donde

   a) $s_n = \sum_{k=1}^{n} k$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

   b) $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

   c) $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

   d) $s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

4. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Muestre que la serie hiper geométrica:

$$\frac{ab}{1!c} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} + \cdots$$

   es absolutamente convergente para $c > a + b$ y divergente para $c < a + b$.

5 LÍMITES

Guillaume de l'Hôpital 1661-1704
Fue un matemático francés. El más importante de sus logros es el descubrimiento de la regla de L'Hôpital, atribuido a su nombre, que se emplea para calcular el valor límite de una fracción donde numerador y denominador tienden a cero o ambos tienden al infinito.

5.1 LÍMITES DE FUNCIONES

Definición 5.1: –Punto de acumulación–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que a es un punto de acumulación de A si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un x, que depende de ε, tal que $a \neq x$ y

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Definición 5.2: –Vecindad–
Sean $a \in \mathbb{R}$ un número real y $\delta \in \mathbb{R}^+$. Una *vecindad* o un **entorno** de radio δ de a es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x - a| < \delta.$$

Esto lo notamos por

$$V_\delta(a).$$

Otra forma de denotar esto es $B(a, \delta)$ y se la llama, la bola de centro a y radio δ. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} B(a, \delta) &= V_\delta(a) \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\} \\ &=]a - \delta, a + \delta[\,. \end{aligned}$$

Con esto, se puede parafrasear la definición de **punto de acumulación** de la siguiente manera: Un punto a es un punto de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ si toda vecindad de a contiene al menos un punto de A distinto de a.

Definición 5.3: –Derivado de un conjunto–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A se lo nota como

$$A_a \qquad \text{o} \qquad A'$$

y se lo denomina *el derivado de* A.

● **Observación.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Tenemos que un punto de acumulación de A no necesariamente debe ser un elemento de A ni todo elemento de A es un punto de acumulación de este. Por ejemplo, tomemos

$$A =]0, 1[\cup \{2\},$$

con esto, se tiene que 0 no es un elemento de A pero sí es un elemento de acumulación de A; por otro lado, 2 es un elemento de A pero no es un punto de acumulación de A. Es más, tenemos que

$$A' = [0, 1].$$

Definición 5.4: –Punto aislado–

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que *a es un punto aislado de A* si existe un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$]a - \delta, a + \delta[\cap A = \{a\}$$

Teorema 5.1: –Caracterización de un punto de acumulación–

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $a \in \mathbb{R}$. Se tiene que $a \in A'$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

Definición 5.5: –Definición de límite–

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que L *es límite de* f *en* a, denotado por

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que puede depender de ϵ, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

- **Observación.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Para que

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

este definido adecuadamente, el punto a debe ser un punto de acumulación de A.

- **Observación.** Notemos que el valor de δ usualmente depende de ε, de esta manera es usual escribir $\delta(\varepsilon)$ o δ_ε para enfatizar esta dependencia.

- **Observación.** La inecuación $0 < |x - a|$ es equivalente a $x \neq a$.

Para expresar el hecho de que el límite de f en a es L, es usual encontrar la siguiente notación:

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a,$$

la cual se lee: $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* a.

Teorema 5.2: –Unicidad del límite–

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces L es único.

● **Observación.** Si $f\colon A \to \mathbb{R}$, para demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se suele proceder de la siguiente manera. Se toma $\varepsilon > 0$; el objetivo es encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$|f(x) - L| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Para ello, se "trabaja" el lado izquierdo de la desigualdad (5.1) hasta obtener, en lo posible, una desigualdad del siguiente tipo:

$$|f(x) - L| \leq |x - a| g(x) \tag{5.2}$$

para todo $x \in A \setminus \{a\}$.

Si la expresión $g(x)$ fuera una constante (es decir, independiente de x), por ejemplo M, tendríamos:

$$|f(x) - L| \leq |x - a| M \tag{5.3}$$

para todo $x \in A \setminus \{a\}$. Entonces, para que la desigualdad (5.1) se verifique, es suficiente que

$$|x - a| M < \varepsilon$$

para $x \in A \setminus \{a\}$; es decir, es suficiente que

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{M}$$

para $x \in A \setminus \{a\}$. Por lo tanto, si definiéramos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M},$$

tendríamos que, si $0 < |x - a| < \delta$, se verificaría

$$|f(x) - L| = |x - a| M < \delta M = \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

En el caso de que $g(x)$ no fuera una función constante, lo que se suele hacer es encontrar un $\delta' > 0$ tal que $(a - \delta', a + \delta') \subseteq A \cup \{a\}$ y

$$|g(x)| \leq M,$$

para todo $x \in (a - \delta', a + \delta')$. Entonces, es suficiente tomar δ así:

$$\delta = \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \delta'\right\}.$$

5.2 CRITERIO DE SUCESIONES PARA LÍMITES

Teorema 5.3: –Caracterización de límite a través de sucesiones–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que converge a a, se tiene que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

5.3 CRITERIO DE LA DIVERGENCIA

Teorema 5.4
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. La función f no tiende a L cuando x tiende a a si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que converge a a, pero $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a L.

Teorema 5.5
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. La función f no tiene límite en $\mathbb{R}$ cuando x tiende a a si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que converge a a pero $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

5.4 Teoremas de Límites

Definición 5.6: –Función acotada en una vecindad–

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Se dice que f *está acotada en una vecindad de* a si existe una vecindad $V_\delta(a)$ de a y una constante $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f(x)| \leq M,$$

para todo $x \in A \cap V_\delta(a)$.

Teorema 5.6

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

entonces f es acotada en alguna vecindad $V_\delta(a)$ de a.

Definición 5.7: –Entorno reducido–

Sean $a \in \mathbb{R}$ un número real y $\delta \in \mathbb{R}^+$. Una *vecindad reducida* o *entorno reducido* de a es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}.$$

Proposición 5.7. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones, $a \in A'$ y $L, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M,$$

entonces

- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$.
- $\lim\limits_{x \to a} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda L$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$.

Observación. La demostración de estos teoremas son resultados de la caracterización de límites por sucesiones.

Proposición 5.8. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap B)'$ y $L, M \in \mathbb{R}$. Si

$$f(x) \leq g(x),$$

para todo $x \in A \cap B$, con $x \neq a$, y

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M,$$

entonces

$$L \leq M.$$

Proposición 5.9. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap B)'$ y $L, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Se tiene que, si

$$L < M,$$

entonces existe un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(x) < g(x),$$

para todo $x \in A \cap B \cap (]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\})$.

- **Observación.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon A \to \mathbb{R}$ funciones y $a \in A'$. Si

$$\lim_{x \to a} f_k(x) = L_k,$$

para $k = 1, \ldots, n$, entonces, inductivamente, se tiene que

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)) = L_1 + L_2 + \cdots + L_n,$$

y

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x)) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n.$$

Proposición 5.10. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

entonces,

$$\lim_{x\to a} (f(x))^n = L^n.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.11. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L, m, M \in \mathbb{R}$. Si

$$m \leq f(x) \leq M,$$

para todo $x \in A$, con $x \neq a$, y si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

entonces

$$m \leq L \leq M.$$

Teorema 5.12: –Teorema de la estricción–

Sean $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $h\colon C \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap B \cap C)'$ y $L \in \mathbb{R}$. Si

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

para todo $x \in A \cap B \cap C$, con $x \neq a$, y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Proposición 5.13. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$

Proposición 5.14. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y $L \in \mathbb{R}$. Si para todo $x \in A$, con $x \neq a$,

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = L,$$

entonces
$$L \geq 0.$$

Proposición 5.15. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de números reales positivos, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}^+$. Si
$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$
entonces
$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

5.5 Límites Laterales

En esta sección consideraremos intervalos ubicados a los lados de los puntos de acumulación, diferenciándolos de los intervalos centrados en un punto, analizados en el resumen anterior.

Definición 5.8: –Límite por la derecha–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap]a, +\infty[)'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que *L es el límite de f en a por la derecha*, denotado por
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$
si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que depende de ε, tal que para todo $x \in A$, se cumple que
$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$
es lógicamente equivalente a
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Definición 5.9: –Límite por la izquierda–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap]-\infty, a[)'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que L *es el límite de f en a por la izquierda*, denotado por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que depende de ε, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Teorema 5.16: –Caracterización de límite por la derecha a través de sucesiones–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in (A \cap]a, +\infty[)'$. Se tiene que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión decreciente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ que converge a a, se tiene que $f(x_n)$ converge a L.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión decreciente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

Teorema 5.17: –Caracterización de límite por la izquierda a través de sucesiones–
Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in (A \cap]-\infty, a[)'$. Se tiene que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión creciente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ que converge a a, se tiene que $f(x_n)$ converge a L.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión creciente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

Teorema 5.18
Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in (A \cap]a, +\infty[)' \cap (A \cap]-\infty, a[)'$. Se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe si y solo si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

En este caso, se tiene que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

La noción de límite lateral es bastante intuitiva, para comprenderla de mejor manera, considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.1. Definamos la *función signo* como:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La gráfica de la función f la podemos ver en la Figura 5.1.

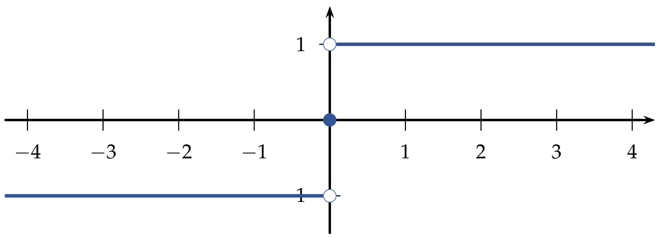


Figura 5.1: Gráfica de la función signo.

Notemos que, de la gráfica anterior, se puede apreciar que

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

Además como, $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x),$$

no existe.

Ejemplo 5.2. Considere la siguiente función:

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{e^{1/x}+1} \end{aligned}$$

Así, la gráfica de la función f la podemos ver en la Figura 5.2

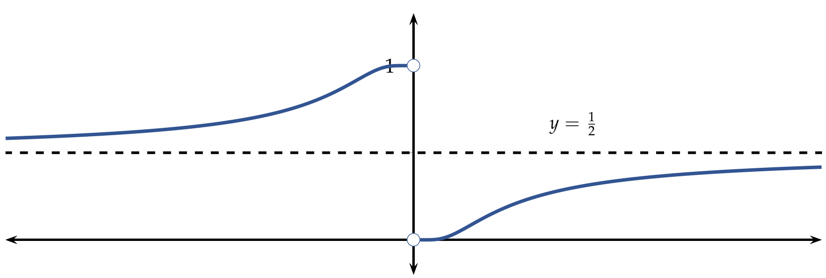


Figura 5.2: Gráfica de la función definida por $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$.

Luego, intuitivamente, se puede ver que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

De donde, los límites laterales existen pero no son iguales, así

$$\lim_{x\to 0} f(x),$$

no existe.

5.6 Extensiones al concepto de límite

5.6.1 Límites Infinitos

Para esta sección, es importante recalcar el hecho de que, los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ *no* representan un número real.

Definición 5.10: –Límite a más–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Se dice que *el límite de f en a es más infinito*, denotado por

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de α, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha).$$

Definición 5.11: –límite a menos infinito–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Se dice que *el límite de f en a es menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

si para todo $\beta \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de β, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < \beta).$$

Ejemplo 5.3. Considere la siguiente función:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Así, la gráfica de la función f la podemos ver en la Figura 5.3.

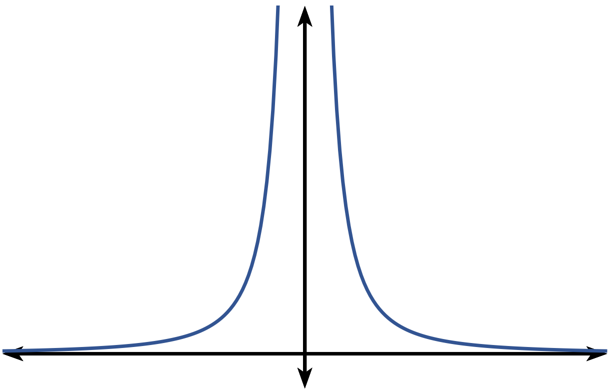


Figura 5.3: Gráfica de la función definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Luego, intuitivamente, se concluye que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$$

Teorema 5.19

Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Si

$$f(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in A$ con $x \neq a$, entonces:

- si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$;
- si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Definición 5.12: –Límite en un punto a más infinito por la derecha–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap]a, +\infty[)'$. Se dice que *el límite de f en a, por la derecha, es más infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty,$$

si y solo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de α, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < \alpha).$$

Definición 5.13: –Límite en un punto a menos infinito por la derecha–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap]a, +\infty[)'$. Se dice que *el límite de f en a, por la derecha, es menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty,$$

si y solo si para todo $\beta \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de β, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < \beta).$$

Definición 5.14: –Límite en un punto a más infinito por la izquierda–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap]-\infty, a[)'$. Se dice que *el límite de f en a, por la izquierda, es más infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty,$$

si y solo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de α, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha).$$

Definición 5.15: –Límite en un punto a menos infinito por la izquierda–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap]a, +\infty[)'$. Se dice que *el límite de f en a, por la izquierda, es menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty,$$

si y solo si para todo $\beta \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de β, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) < \beta).$$

Ejemplo 5.4. Considere la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

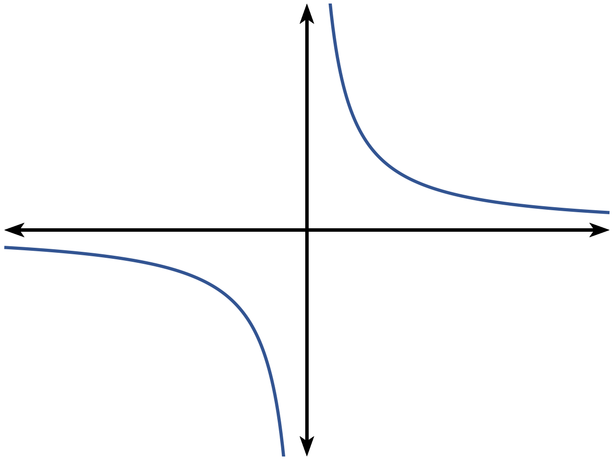


Figura 5.4: Gráfica de la función definida por: $f(x) = \frac{1}{x}$

De la Figura 5.4, es fácil concluir que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe. Pues, de manera intuitiva, se tiene que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

5.6.2 Límites al infinito

Finalmente, en esta sección definiremos el concepto de límite cuando $x \to +\infty$ y de manera análoga, cuando $x \to -\infty$.

Definición 5.16: –Límite a más infinito–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que L *es el límite de f cuando x tiende a más infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$, que depende de ε, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Definición 5.17: –Límite a menos infinito–

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado inferiormente, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que L *es el límite de* f *cuando* x *tiende a menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$, que depende de ε, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Teorema 5.20: –Caracterización a través de sucesiones–

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que diverge a más infinito, se tiene que $f(x_n)$ converge a L.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to +\infty \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

Teorema 5.21: –Caracterización a través de sucesiones–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado inferiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que diverge a menos infinito, se tiene que $f(x_n)$ converge a L.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to -\infty \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

5.6.3 Límites infinitos al infinito

Definición 5.18
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se dice que *el límite de f cuando x tiende a más infinito es más infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $M > 0$, que depende de α, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$x > M \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists M > 0)(\forall x \in A)(x > M \Rightarrow f(x) > \alpha).$$

Definición 5.19
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado inferiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se dice que *el límite de f cuando x tiende a más infinito es menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $M > 0$, que depende de α, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$x > M \Rightarrow f(x) < \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists M > 0)(\forall x \in A)(x > M \Rightarrow f(x) < \alpha).$$

● **Observación.** Análogamente, se tienen las definición anteriores para el caso en el que $x \to -\infty$.

Teorema 5.22: –Caracterización a través de sucesiones–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que diverge a más infinito, se tiene que $f(x_n)$ diverge a más infinito.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to +\infty \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to +\infty.$$

Teorema 5.23: –Caracterización a través de sucesiones–
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado inferiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que diverge a más infinito, se tiene que $f(x_n)$ diverge a menos infinito.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to +\infty \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to -\infty.$$

● **Observación.** Análogamente, se tienen las caracterizaciones correspondientes para el caso en el que $x \to -\infty$.

Teorema 5.24
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Si $g(x) > 0$ para todo $x \in A$ y para algún $L \in \mathbb{R}$, con $L \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

entonces:

- si $L > 0$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si y solo si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;
- si $L < 0$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si y solo si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

5.7 Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.1. Demostrar que $\lim_{x\to c} x = c$.

Solución. En este caso consideramos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - c| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$|f(x) - c| < \varepsilon.$$

Para hallar el número δ, notemos que

$$|f(x) - c| = |x - c|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta manera, si tomamos $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - c| < \delta$, entonces

$$|f(x) - c| = |x - c| < \varepsilon,$$

lo que implica que

$$\lim_{x\to c} x = c.$$

$\square$ $\square$

Ejercicio 5.2. Demostrar que $\lim_{x\to 3}(8x-15) = 9$.

Solución. En este caso, consideramos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 8x-15. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x-3| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$|(8x-15)-9| < \varepsilon. \tag{5.4}$$

Para hallar el número δ, observemos que:

$$\begin{aligned} |(8x-15)-9| &= |8x-24| \\ &= |8(x-3)| \\ &= 8|x-3| \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para que la desigualdad (5.4) se verifique, es suficiente que

$$8|x-3| < \varepsilon,$$

que equivale a

$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8},$$

tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x-3| < \delta$, entonces

$$|(8x-15)-9| = 8|x-3| < 8(\delta) = 8\left(\frac{\varepsilon}{8}\right) = \varepsilon.$$

$\square$ $\square$

Ejercicio 5.3. Demostrar que $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} = -5$.

Solución. Puesto que

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

consideramos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{1,2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2}. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, si $0 < |x-1| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$\left| \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2} - (-5) \right| < \varepsilon. \tag{5.5}$$

Podemos observar que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2} - (-5) \right| &= 7 \left| \frac{(x-1)^2}{(x-2)(x-1)} \right| \\ &= \frac{7}{|x-2|} |x-1| \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$. Para acotar superiormente el factor $\dfrac{1}{|x-2|}$, supongamos que $x \in (1-\delta', 1+\delta')$ para $\delta' = \frac{1}{2}$; es decir, supongamos que

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \tag{5.6}$$

que equivale a suponer que

$$|x-1| < \frac{1}{2}. \tag{5.7}$$

Ahora, a partir de (5.7) y (5.6), "construimos" el factor $\dfrac{1}{x-2}$:

$$\begin{aligned} |x-1| < \frac{1}{2} &\Longrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ &\Longrightarrow -\frac{3}{2} < x - 2 < -\frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{|x-2|} < 2 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{|x-2|} |x-1| < 2|x-1|. \end{aligned}$$

Por tanto, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ y $0 < |x-1| < \frac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} - (-5)\right| &= \frac{7}{|x-2|}|x-1| \\ &< 14|x-1|;\end{aligned}$$

es decir, si $0 < |x-1| < \frac{1}{2}$ y $x \neq 2$, tenemos

$$\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} - (-5)\right| < 14|x-1|. \tag{5.8}$$

Luego, para que las desigualdades (5.8) y (5.5) se cumplan, es necesario que:

$$|x-1| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{14}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{14}\right\},$$

tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, si $0 < |x-1| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} - (-5)\right| < \varepsilon.$$

□ □

5.8 Ejercicios

1. Usando la definición $\varepsilon - \delta$, muestre que para cualquier $a \in \mathbb{R}$

   (a) $\lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3$.

   (b) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$.

2. Sean: $f\colon \operatorname{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de acumulación de $\operatorname{Dom}(f)$. Muestre que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0} |f(x) - L| = 0.$$

3. Muestre que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x+1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$ usando:

   (a) La definición $\varepsilon - \delta$.

(b) La caracterización de límite a través de sucesiones.

4. Muestre que los siguientes límites no existen

(a) $\lim_{x\to 0}(x + \operatorname{sgn}(x))$, donde $\operatorname{sgn}(x)$ es la **función signo** de x definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0; \\ 0, & \text{si } x = 0; \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

5. Sean $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L1 \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$. Muestre que

$$\lim_{x\to x_0} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{L_1, L_2\} \qquad \text{y}$$
$$\lim_{x\to x_0} \min\{f(x), g(x)\} = \min\{L_1, L_2\}.$$

6. Sean: $f\colon \operatorname{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \operatorname{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones y $x_0 \in \operatorname{Dom}(f)_a \cap \operatorname{Dom}(g)_a$. Suponga que existen $C > 0$ y $r > 0$ tales que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ y que $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Muestre que $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

7. Sea: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface que que para todo $x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(a) Si $\lim_{x\to 0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, entonces muestre que $L = 0$.

(b) Muestre que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Sugerencia: Note que para todo $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x+y) = 2f(x)$ y $f(x) = f(x - x_0) + f(x_0)$.

8.

9. Demostrar que si $\lim_{x\to a^-} f(x) = 0$ y $\beta < 0$, entonces

$$\lim_{x\to a^-} \frac{\beta}{|f(x)|} = -\infty.$$

10. ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x \to 0} f(x)$? Donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha^2 \cos(x) - 6 & \text{si } < 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

11. Demostrar que no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

12. Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$. muestre que no existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = L$.

6 Continuidad

Carl Friedrich Gauss **1777-1885**
fue un matemático, astrónomo, geobotánico y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado el Princeps Mathematicorum, Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido en la historia. Fue de los primeros en extender el concepto de divisibilidad a otros conjuntos.

6.1 Funciones Continuas

En esta sección se considerará $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 6.1
Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se dice que f *es continua en* a si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que puede depender de ε, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Es importante recalcar que la definición anterior trata exclusivamente la continuidad de una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in A$, es decir un punto de su dominio.

Definición 6.2
Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. Si f no es continua en a se dice que f *es discontinua en* a.

Si un punto no pertenece al dominio de una función entonces la función no es ni continua ni discontinua en este punto.

Ejemplo 6.1. Para ilustrar la idea de continuidad en un punto, consideremos la siguiente función $f\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ ilustrada en la Figura 6.1.

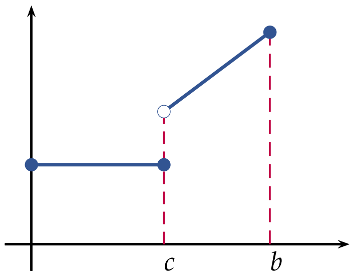


Figura 6.1: Gráfico de una función discontinua en c.

Notemos que $c \in \operatorname{dom}(f)$ sin embargo, por la definición de continuidad en un punto, f es discontinua en c.

Ejemplo 6.2. Ahora, consideremos la siguiente función $f\colon [0,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ ilustrada en la Figura 6.2.

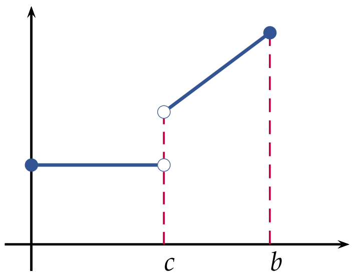


Figura 6.2: Gráfico de una función no definida en c.

Notemos que $c \notin \operatorname{dom}(f)$, por lo tanto, la función no es ni continua ni discontinua en c.

Definición 6.3

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Se dice que f *es continua en* B si para todo $x \in A$, f es continua en x. Además, se dice que f *es continua* si es continua en su dominio.

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si A es un **intervalo**, la idea intuitiva de que f es continua es que su gráfica no presenta "rupturas", es decir, no presenta saltos. Esta idea no se preserva si A no es un intervalo, por ejemplo, se tiene que la función representada en la Figura 6.2 es una función continua.

Teorema 6.1: –Caracterización de continuidad por sucesiones–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se tiene que f es continua en a si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A, que converge a a, se cumple que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$.

Es decir, se tiene que f es continua en $a \in A$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A se cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to f(a).$$

Teorema 6.2

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. La función f es continua en a si y solo si dada una vecindad $V_\varepsilon(f(a))$ de $f(a)$, existe una vecindad $V_\delta(a)$ de a tal que si $x \in A \cap V_\delta(a)$, entonces $f(x)$ pertenece a la vecindad $V_\varepsilon(f(a))$, es decir

$$f(A \cap V_\delta(a)) \subseteq V_\varepsilon(f(a)).$$

Teorema 6.3: –Caracterización de discontinuidad–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se tiene que f es discontinua en a si y solo existe un sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A, que converge a a, tal que la $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(a)$.

Es decir, se tiene que f es discontinua en $a \in A$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tal que cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{y} \qquad f(x_n) \nrightarrow f(a).$$

● **Observación.** Existen funciones que no son continuas en ningún punto de su dominio.

Ejemplo 6.3. Consideremos la siguiente función, llamada la función de Dirichlet;

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Se tiene que f no es continua en ningún punto de su dominio.

● **Observación.** Existen funciones que son continuas en un punto y discontinuas en los puntos restantes de su domino.

Ejemplo 6.4. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Se tiene que esta función es continua únicamente en 0 y discontinua en el resto de su dominio.

Ahora, consideremos el siguiente ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es discontinua en todo su domino y sin embargo, $|f|$ si es continua.

Ejemplo 6.5. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que f, al igual que la función de Dirichlet, es discontinua en $\mathbb{R}$. Sin embargo, si tomamos $g = |f|$, se tiene que

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

Así, f es discontinua en todo su dominio, mientras que g es continua en todo su dominio.

6.2 Extensión continua de una función

Consideremos una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$ pero $a \notin A$. Por la definición, no se puede hablar de la continuidad de f en a. Sin embargo, si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, es decir, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

Podemos definir una nueva función que sea una extensión de f. Esta función es

$$\begin{aligned} F\colon\ A\cup\{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in A$ y, además, F es continua en a.

Ejemplo 6.6. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La gráfica de esta la podemos ver en la Figura 6.3.

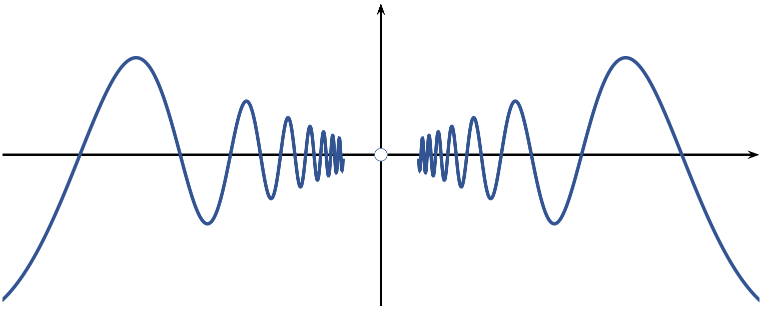


Figura 6.3: Gráfica de la función $x \mapsto x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$.

Notemos que f es continua pero su dominio no es $\mathbb{R}$ al no estar definida en 0. Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

por lo tanto, podemos definir una extensión de f que sea continua en $\mathbb{R}$, así, tomemos la función

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

la cual es continua en su dominio, es decir, es continua en $\mathbb{R}$.

6.3 Continuidad en Intervalos

De las definiciones dadas anteriormente, sabemos que si f es continua en a, entonces f es acotada localmente. Sin embargo, el teorema del acotamiento nos da condiciones suficientes para que una función continua en su dominio, sea acotada globalmente.

Definición 6.4

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se dice que f *es acotada*, si existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M,$$

para todo $x \in A$.

En lo subsiguiente, tomaremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Teorema 6.4: –Teorema del acotamiento–

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si f es continua, entonces f es acotada.

Definición 6.5: –Máximo y mínimo de una función–

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función.

- Se dice que f tiene *máximo absoluto* si existe $x_M \in A$ tal que

  $$f(x_M) \geq f(x),$$

  para todo $x \in A$. A $f(x_M)$ se lo conoce como el *máximo absoluto* de f.

- Se dice que f tiene *mínimo absoluto* si existe $x_m \in A$ tal que

  $$f(x_n) \leq f(x),$$

  para todo $x \in A$.A $f(x_m)$ se lo conoce como el *mínimo absoluto* de f.

Con esta definición tenemos que

$$f(x_m) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{y} \qquad f(x_n) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Teorema 6.5

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si f es continua, entonces f tiene un máximo y un mínimo absoluto .

Teorema 6.6: –Teorema de Bolzano–

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un $c \in\,]a,b[$ tal que

$$f(c) = 0.$$

Este teorema da condiciones suficientes para que una función continua se anule en un punto (esto último también se expresa diciendo que la función tiene una raíz).

● **Observación.** En teorema anterior, la hipótesis de continuidad es esencial. En efecto, consideremos la función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se encuentra en la Figura 6.4.

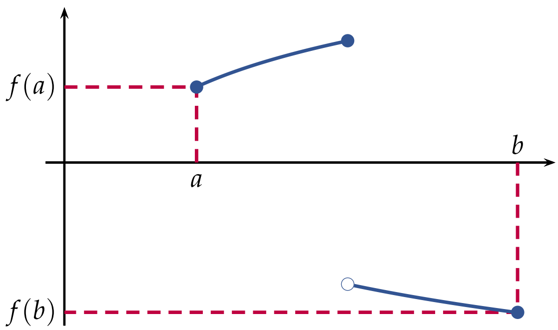


Figura 6.4: Ejemplo de función que no cumple la hipótesis del Teorema de Bolzano.

Así, es fácil ver que la función f no tienen ninguna raíz en $[a,b]$.

Teorema 6.7: –Teorema del valor intermedio–

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\min\{f(a), f(b)\} \le r \le \max\{f(a), f(b)\},$$

existe un $x_r \in]a,b[$ tal que
$$f(x_r) = r.$$

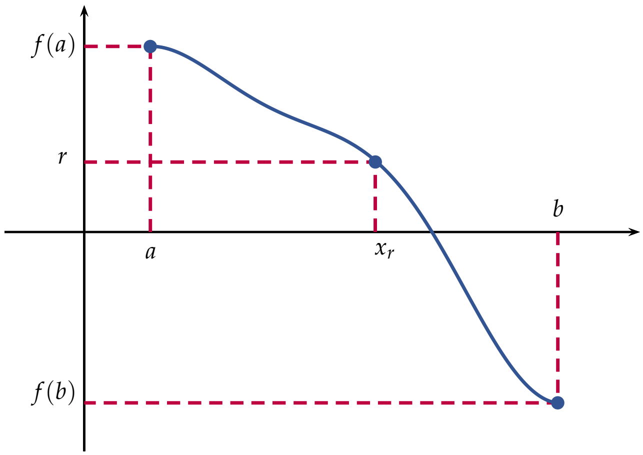


Figura 6.5: Ilustración del Teorema del valor intermedio.

Proposición 6.8. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Se tiene que si f es estrictamente monótona en $[a,b]$, entonces f posee una única raíz en $[a,b]$.

Proposición 6.9. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si f es estrictamente monótona en $[a,b]$, entonces f es inyectiva.

6.4 Función inversa

Teorema 6.10: –Teorema de la inversa continua–
Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si f es estrictamente monótona en A, entonces f posee una inversa de $f(A)$ en A, además, la función
$$f^{-1}\colon f(A) \to A$$
es continua y estrictamente monótona en A.

Proposición 6.11. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona en A. Tomando la función $f^{-1}\colon f(A) \to A$ se tiene que:

- si f es estrictamente creciente, entonces f^{-1} es estrictamente creciente;
- si f es estrictamente decreciente, entonces f^{-1} es estrictamente decreciente.

6.5 Ejercicios

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$. Suponga que f, g son dos funciones tales que f es continua en $[a, b]$, g es continua en $[b, c]$ y que $f(b) = g(b)$. Muestre que la función

$$\begin{aligned} h\colon [a,c] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in [a,b] \\ g(x), & \text{si } x \in [b,c] \end{cases} \end{aligned}$$

   es continua en $[a, c]$.

2. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ y $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ el conjunto de los ceros de f.

   (a) Muestre que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ y $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, entonces $x \in S$.

   (b) Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ tal que $S = \mathbb{Q}$. Muestre que f es la función nula en $\mathbb{R}$, es decir, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

   (c) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Muestre que existen $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $a < \frac{m}{2^n} < b$.

   (d) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ tal que $S = \left\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Muestre que f es la función nula en $\mathbb{R}$.

3. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en x_0. muestre que las funciones

$$M(x) = \text{máx}\,\{f(x), g(x)\} \qquad \text{y} \qquad m(x) = \text{mín}\,\{f(x), g(x)\}$$

   son continuas en x_0.

4. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en (a, b). Encuentre todos los

valores de x tales que la función

$$\begin{aligned} h\colon\ (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in (a,b) \cap \mathbb{Q} \\ g(x), & \text{si } x \in (a,b) \cap \mathbb{I} \end{cases} \end{aligned}$$

sea continua en x.

5. **(Continuidad de la composición de funciones)** Sean $f\colon C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(C) \subseteq D$. Muestre, usando la caracterización de continuidad a través de sucesiones, que si f es continua en $c \in C$ y g es continua en $f(c) \in D$, entonces la composición $g \circ f\colon C \to \mathbb{R}$ es continua en C.

6. El objetivo de este ejercicio es mostrar que la noción de continuidad es ligeramente más general en cuanto a su aplicación que la noción de límite solamente.

   (a) **(Continuidad de una función en puntos aislados)** Se $f\colon\ \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. si x_0 no es un punto de acumulación del $\mathrm{Dom}(f)$, es decir, si x_0 es un punto aislado del $\mathrm{Dom}(f)$, entonces la definición de continuidad (versión $\varepsilon - \delta$) de f en x_0 es la misma que la dada en clase para cuando x_0 es un punto de acumulación del $\mathrm{Dom}(f)$.

   Por tanto, muestre que si $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un punto aislado, entonces f es continua en x_0.

   ● **Observación.** Esto nos permite concluir que toda función es automáticamente continua en los puntos aislados de su dominio.

   (b) Muestre o dé un contraejemplo a esta afirmación: Toda sucesión de números reales es una función continua.

7. Construya una función f definida en el intervalo abierto $(0,2)$ que verifique que:

   (a) Sea discontinua en $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ pero continua en el resto de puntos.

   (b) Sea continua en $(0,2)$ excepto en todos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

8. Usando la caracterización de ínfimo, muestre que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces f alcanza su mínimo, es decir, existe $x_m \in [a,b]$

tal que $f(x_m) = \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$.

9. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. muestre que el conjunto $f(I)$ es un intervalo.

   Sugerencia: Use la caracterización de intervalo: $I \subseteq \mathbb{R}$ si, y solo si para cualesquier $a, b \in I$, y $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < c < b$, entonces $c \in I$.

10. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que $f(x) > 0$ todo $x \in [a,b]$. Muestre que existe un número $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [a,b]$.

11. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continua en $[a,b]$. Muestre que el conjunto

$$E = \{x \in [a,b] : f(x) = g(x)\}$$

   posee la siguiente propiedad:

$$\text{Si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E \text{ tal que } x_n \to L, \text{ entonces } L \in E.$$

12. Sin hacer uso del teorema fundamental del álgebra, muestre que todo polinomio de grado impar, con coeficientes reales, tiene al menos una raíz real.

13. Sea

$$\begin{aligned} f\colon \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sup_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \left\{x^2, \cos(x)\right\}. \end{aligned}$$

   muestre que f alcanza su mínimo en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Además, muestre que el punto x_m donde f alcanza su mínimo es una solución para la ecuación $\cos(x) = x^2$.

14. Muestre que los teoremas del **valor intermedio** y de **Bolzano** son equivalentes.

15. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones.

    (a) Si f y g son crecientes en I, muestre que la función $f + g$ es creciente en I. si, además, f es estrictamente creciente en I, entonces muestre que $f + g$ es estrictamente creciente en I.

    (b) Muestre que las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x - 1$ son estrictamente crecientes en $[0,1]$, pero su producto fg no es creciente en $[0,1]$.

(c) Muestre que si f y g son crecientes positivas en I, entonces su producto fg es creciente en I.

16. Considere la función

$$\begin{aligned} f\colon\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1]. \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Muestre que $f$es inyectiva en $[0,1]$.

(b) Muestre que f es continua sólo en $x = \frac{1}{2}$.

(c) Halle la función inversa f^{-1}.

(d) ¿En qué puntos es continua f^{-1}?

17. Construya una función real definida en el intervalo $[0,1]$ que sea continua en $0, \frac{1}{2}, 1$, pero discontinua en el resto de puntos. justifique completamente que la función que propone cumple lo requerido.

18. (a) Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$ tal que $f(0) = f(1)$. Muestre que existe $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ tal que $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$.

Sugerencia: Considere $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

(b) Usando $(3a)$ argumente por qué existen, en cualquier momento, puntos antipodales sobre la línea ecuatorial de la tierra que tienen la misma temperatura.

Punto antipodal: Sea P un punto en la superficie de una esfera. El punto antipodal de P es el punto Q que es diametralmente opuesto a este, de modo que una línea trazada desde P a Q pasa a través del centro de la esfera y forma un diámetro verdadero.

Sugerencia: Considerar que la temperatura en una ubicación específica como función del tiempo será una función continua debido a que la temperatura no puede tener saltos extremos como función del tiempo.

19. (a) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ y periódica con período $p > 0$. Muestre que f alcanza su máximo y su mínimo.

Recuerde que una función F se dice periódica con período p si $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Use el siguiente hecho sin demostrarlo: Para todo $x \in \mathbb{R}$ y para cualquier $t > 0$, existe $m = m(x,t) \in \mathbb{Z}$ tal que $mt \leq x < (m+1)t$.

(b) Dé un ejemplo de una función que verifique la afirmación del literal (a).

20. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b) = 0$. Muestre que

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x_0 \in (a,b))(f'(x_0) = Kf(x_0))$$

Hint: Estudie la función $g(x) = f(x)e^{-Kx}$.

7 DERIVADAS

Gottfried Leibniz 1646-1716
Fue uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII, y se le reconoce como el «último genio universal», esto es, la última persona que pudo formarse suficientemente en todos los campos del conocimiento; después ya solo hubo especialistas. Realizó profundas e importantes contribuciones en las áreas de metafísica, epistemología, lógica, filosofía de la religión, así como en la matemática, física, geología, jurisprudencia e historia.

7.1 DERIVADA

En esta sección consideraremos $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 7.1
Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $c \in A \cap A'$. Se dice que f *es derivable o diferenciable en c* si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

En este caso, a este límite se lo llama *la derivada de f en c* y se lo denota por $f'(c)$.

En $\mathbb{R}$, los conceptos de derivable y diferenciable son equivalentes. Esto no se conserva en otro tipo de espacios.

● **Observación.** Consideremos el conjunto

$$B = \{h \in \mathbb{R} : c + h \in A\} \setminus \{0\}$$

y definamos la función

$$\begin{aligned} g \colon B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \frac{f(c+h) - f(c)}{h}. \end{aligned}$$

Si $c \in A$, esta función está bien definida, además, si $c \in A'$ se tiene que $0 \in B'$, por lo tanto, está bien definido el límite de g es 0.

● **Observación.** Una forma alternativa para la definición de derivada es considerar el límite

$$\lim_{x \to c} \frac{f(c) - f(x)}{c - x}.$$

Otras notaciones para la derivada de una función f en un punto c son:

$$\frac{df}{dx}(c); \qquad \text{y} \qquad Df(c).$$

La idea gráfica de la definición de derivada es encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado. Para esto, primero determinamos la pendiente de una recta secante. Esto lo podemos ver ilustrado en la Figura 7.1.

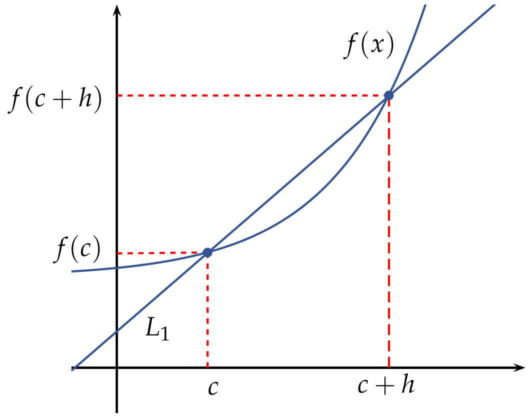


Figura 7.1: Recta secante entre dos puntos de la curva f

Notemos que, cuando $h \to 0$, la recta secante L_1 se convierte en una recta tangente a la curva de la función f en el punto $(f, f(c))$.

Teorema 7.1

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A \cap A'$. Si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.

Observación. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in A \cap A'$, entonces la continuidad de f en c es una condición necesaria para que f sea diferenciable en c.

Definición 7.2

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f *es diferenciable o derivable* si f es diferenciable o derivable en todo punto de A.

Proposición 7.2. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $c \in A \cap A'$. Se tiene que:

- $(\alpha f)(c) = \alpha f(c)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$;
- $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{(g(c))^2}$, para $g(c) \neq 0$.

Corolario 7.3. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $c \in A \cap A'$. Se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)'(c) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(c).$$

Corolario 7.4. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $c \in A \cap A'$. Se tiene que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(c) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i'(c) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} f_j(x_0) \right).$$

Ejemplo 7.1. Consideremos $f_1, f_2, f_3\colon A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $c \in A \cap A'$. Así,

- para $n = 2$, se tiene que

$$(f_1\, f_2)'(x) = f_1'(x)\, f_2(x) + f_1(x)\, f_2'(x);$$

- para $n = 3$, se tiene que

$$(f_1\, f_2\, f_3)'(x) = f_1'(x)\, f_2(x)\, f_3(x) + f_1(x)\, f_2'(x)\, f_3(x) + f_1(x)\, f_2(x) + f_3'(x).$$

Proposición 7.5. –Caracterización de diferenciabilidad por sucesiones–
Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in A \cap A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$f'(c) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que converge a c, se tiene que

$$\left(\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge a $f'(c) = L$.

Definición 7.3
Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función derivable en A. Se define la función derivada como

$$\begin{aligned} f'\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

7.2 Regla de la cadena

En esta sección se considerarán $I, J \subseteq \mathbb{R}$ con I y J intervalos abiertos.

Teorema 7.6: –Teorema de Carathédory–
Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $c \in I$. Se tiene que f es diferenciable en c si y solo si existe una función $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ continua en c tal que

$$f(x) - f(c) = \phi(x)(x - c)$$

para todo $x \in I$. Además, en este caso, se tiene que

$$f'(c) = \phi(c).$$

● **Observación.** El valor $\phi(x)$ representa la pendiente de las rectas secantes que unen los puntos $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$.

Teorema 7.7: –Regla de la Cadena–

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(I) \subseteq J$ con $c \in I$. Si f es diferenciable en c y g es diferenciable en $f(c)$, entonces la composición $g \circ f$ es diferenciable en c y

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

7.3 Función Inversa

Un hecho interesante, sobre el cual se fundamenta la importancia de esta sección, es el establecer un método alternativo para determinar la derivada de la inversa de una función.

De secciones anteriores, sabemos que el Teorema de la inversa continua garantiza la existencia de la inversa de una función sobre un intervalo. Así, nuestro interés se centra en el determinar condiciones suficientes para la existencia de la derivada.

A lo largo de este resumen se considerará $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto.

Teorema 7.8

Sean $f\colon I \to J$ una función estrictamente monótona, continua y sobreyectiva, $f^{-1}\colon J \to I$ la función inversa de f y $c \in J$. Se tiene que si f es diferenciable en $f^{-1}(c)$ y $f'(f^{-1}(c)) \neq 0$, entonces f^{-1} es diferenciable en c y

$$(f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}.$$

⚠ Si $f'(c) = 0$, entonces f^{-1} no es diferenciable en $f(c)$.

Ejemplo 7.2. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

de donde, la inversa de f es

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

Dado que f es diferenciable y para todo $x \in \mathbb{R}^*$ se tiene que

$$f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt[3]{x}) = 3(\sqrt[3]{x})^2 \neq 0,$$

entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^*$ tenemos que

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.$$

7.4 Teorema del Valor Intermedio

En esta sección consideraremos $A \subseteq \mathbb{R}$.

7.4.1 Máximos y mínimos

Definición 7.4: –Máximo Relativo–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que f *tiene un máximo relativo en* c si existe una vecindad $V_\delta(c)$ tal que

$$f(c) \geq f(x)$$

para todo $x \in V_\delta(c) \cap A$.

Definición 7.5: –Mínimo Relativo–

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que f *tiene un mínimo relativo en* c si existe una vecindad $V_\delta(c)$ tal que

$$f(c) \leq f(x)$$

para todo $x \in V_\delta(c) \cap A$.

Definición 7.6

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que f *tiene un extremo relativo* en c si f tiene un máximo o un mínimo relativo en c.

Teorema 7.9

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$ un punto interior de A. Se tiene que si f tiene un extremo relativo en c y la derivada de f en c existe, entonces

$$f'(c) = 0.$$

Corolario 7.10. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua y $c \in A$. Se tiene que si f tiene un extremo relativo en c, entonces la derivada de f en c no existe o es igual a 0.

De aquí, tomaremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

7.4.2 Teorema de Rolle

Teorema 7.11: –Teorema de Rolle–
Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$. Se tiene que si $f(a) = f(b) = 0$, entonces existe al menos un $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

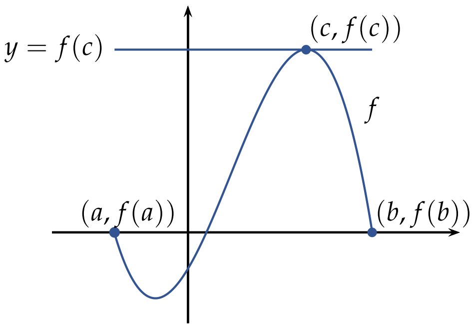


Figura 7.2: Ilustración del Teorema de Rolle.

7.4.3 Teorema del Valor Medio

Teorema 7.12: –Teorema del Valor Medio–
Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si f es diferenciable en $]a,b[$, entonces existe al menos un $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

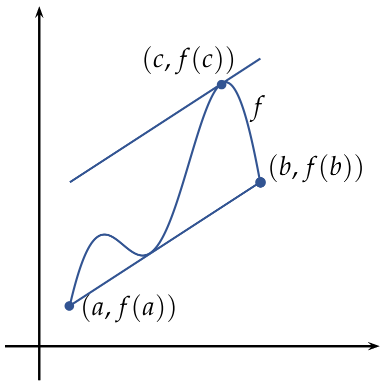


Figura 7.3: Ilustración del Teorema del Valor Medio.

Proposición 7.13. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $]a,b[$. Se tiene que si $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a,b[$, entonces f es la función constante.

Teorema 7.14: –Criterio de la primera derivada–

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I. Se tiene que

- f es creciente en I si y solo si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$;
- f es decreciente en I si y solo si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

7.5 Teorema del Valor Intermedio de Cauchy

Teorema 7.15: –Teorema del Valor Intermedio de Cauchy–

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Se tiene que si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a,b[$, entonces existe un $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

7.6 Ejercicios

1. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Usando la definición $\varepsilon - \delta$, muestre que si f es diferenciable en $x_0 \in I$, entonces f es continua en x_0.

2. Demuestre el corolario 7.4

3. Considere
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases} \end{aligned}$$
Muestre que f es diferenciable únicamente en $x = 0$. Además, halle $f'(0)$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(0) = 0$ y $f(x) \geq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que f no es diferenciable en $x = 0$. ¿Qué pasa si $f(x) \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

5. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$

   (a) Muestre que existe una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en x_0 que verifica que para todo $x \in \mathbb{R}$
   $$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x_0) + f(x)(x - x_0)$$
   y $f(x_0) = \cos(x_0)$.

   (b) Usando lo anterior, muestre que
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

6. Considere la función
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   (a) Muestre que f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y halle su derivada.

   Sugerencia: Haga uso de las reglas de la cadena y del producto para probar la diferenciablidad en todo $x \neq 0$. Puede asumir conocido que $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$.

   (b) Muestre que f' no es continua en $x = 0$.

7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en x_0, donde x_0 es un cero de f. Muestre que
$$|f| \text{ es diferenciable en } x_0 \Longleftrightarrow x_0 \text{ es un cero de } f'.$$

8. Considere la función

$$\begin{aligned} \arccos\colon [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\longmapsto \arccos(x). \end{aligned}$$

Usando el teorema de la función inversa, muestre que la función $\arccos(x)$ es diferenciable en $]-1,1[$ y su derivada está dada por

$$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para todo $x \in]-1,1[$. Además, muestre que $\arccos(x)$ no es diferenciable en $x=-1$ y $x=1$.

9. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in]a,b[$ un punto de extremo local de f. Si f es diferenciable en x_0, entonces muestre que $f'(x_0) = 0$.

Observación. Recuerde que x_0 es un punto extremo local (máximo o mínimo local) de f si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap]a,b[\quad \textbf{(mínimo local)}$$

o

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap]a,b[\quad \textbf{(máximo local).}$$

10. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a,b[$, entonces muestre que f es una función constante en $[a,b]$.

11. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que existe $0 < \lambda < 1$ que verifica que para todo $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \lambda$. Muestre que la ecuación $f(x) = x$ posee una única solución, es decir, muestre que existe un único $u \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = u$.

Sugerencia: Para demostrar la existencia de $u \in \mathbb{R}$, considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ cualquiera fijo. Muestre que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y luego use la continuidad de f para concluir lo requerido.

12. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables en I. Suponga que $a, b \in I$ satisfacen que $a < b$ y $f(a) = f(b) = 0$.

Muestre que existe $x \in]a, b[$ tal que

$$f'(x) + f(x)g'(x) = 0.$$

Sugerencia: Considere la función $h(x) = f(x)e^{g(x)}$.

13. Use el teorema del valor medio para probar que $\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x - 1$ para todo $x > 1$.

    Sugerencia: Use que $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

14. **(Teorema de Cauchy del valor medio)** Sea $f, b\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y diferenciables en $]a, b[$. Si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, entonces muestre que existe $x_0 \in]a, b[$ tal que

    $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

    Sugerencia: Considere la función $h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)]$ y muestre primero que h está bien definida.

15. Usando el teorema del valor intermedio para funciones continuas y el teorema de Role, muestre que la gráfica de la función $f(x) = x^3 + \pi x + r$, donde $r \in \mathbb{R}$ es cualquier valor fijo, corta el eje x exactamente una vez.

    Sugerencia: Muestre primero que al menos corta una vez el eje x, y luego demuestre que sólo corta una vez.

16. Compruebe que las hipótesis del teorema del valor medio se verifican para la función

    $$\begin{aligned} f\colon [0, \tfrac{\pi}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}(x)}. \end{aligned}$$

    Además, halle un valor x_0 que satisface la conclusión del teorema del valor medio.

17. Considere la ecuación $x^3 + e^x = 0$.

    (a) Muestre que la ecuación dada posee al menos una raíz real.

    (b) Usando el teorema de Rolle, muestre que dicha raíz es única.

18. El objetivo del siguiente ejercicio es mostrar que se cumple el teorema del valor intermedio para funciones diferenciables.

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $]a,b[$ y $\alpha,\beta \in]a,b[$ tales que $\alpha < \beta$.

(a) Muestre que existen dos funciones $\phi,\psi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ continuas en $[\alpha,\beta]$ tales que $\phi(\alpha) = f'(\alpha)$, $\psi(\beta) = f'(\beta)$ y para todo $x \in [\alpha,\beta]$,

$$f(x) = f(\alpha) + \phi(x)(x-\alpha) \qquad \text{y} \qquad f(x) = f(\beta) + \psi(x)(x-\beta).$$

(b) Si λ es cualquier real estrictamente entre $f'(\alpha)$ y $f'(\beta)$, con $f'(\alpha) \neq f'(\beta)$, entonces muestre que existe $x_0 \in]\alpha,\beta[$ tal que $f'(x_0) = \lambda$.

Sugerencia: Trate de usar los teoremas del valor intermedio y del valor medio para derivadas de forma adecuada.

8 Integrales

Bernhard Riemann 1826-1866
Fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

8.1 Particiones y Etiquetas

A lo largo de este resumen se considerará $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto.

Definición 8.1: –Partición–
Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado. Se define la *partición* de I como el conjunto

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\},$$

donde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_2 = b.$$

Notemos que, con la definición anterior, la partición $\mathcal{P}$ divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos cerrados sin superposición entre cada uno de ellos, definidos de la siguiente manera:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

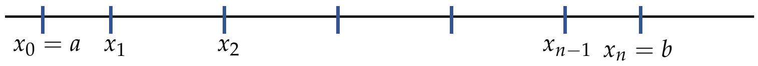


Figura 8.1: Partición del intervalo $[a, b]$

Definición 8.2

Sean $[a, b]$ un intervalo y $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$. Se dicen subintervalos de la partición $\mathcal{P}$ a los conjuntos

$$I_k = [x_{k-1}, x_k],$$

con $k = 1, \ldots, n$.

Definición 8.3: –Norma–

Sean $[a, b]$ un intervalo y $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$. Se define la *norma* de $\mathcal{P}$ como

$$\|\mathcal{P}\| = \text{máx}\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

● **Observación.** La norma de una partición $\mathcal{P}$ de un intervalo I es la longitud del intervalo más largo de la partición.

Definición 8.4: –Conjunto de etiquetas–

Sean $[a, b]$ un intervalo y $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$. Se define el conjunto de etiquetas de la partición $\mathcal{P}$ como

$$C = \{c \in I_k : k = 1, \ldots, n\}.$$

Definición 8.5

Sean $[a, b]$ un intervalo, $\mathcal{P}$ una partición y C el conjunto de etiquetas de $[a, b]$. Se define como una partición etiquetada al conjunto de pares ordenados

$$\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], c)\}_{i=1}^{n}.$$

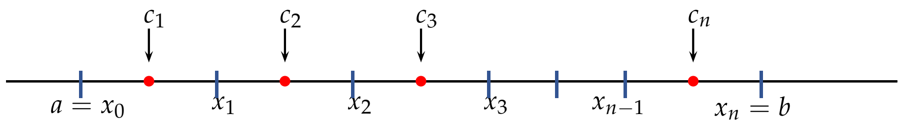


Figura 8.2: Partición etiquetada de $[a, b]$

Teorema 8.1

Sean $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Se tiene que

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k;$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ca_k = c\sum_{k=0}^{n} a_k;$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c = (n+1)c.$

Proposición 8.2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}^+$.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$

8.2 Integral de Riemann

Es importante recalcar que existe otras formas de definir el concepto de integral de una función, por lo que se hace necesario, en general, indicar el tipo de integral al cual se hace referencia. En secciones posteriores definiremos la integral de Darboux como una forma alternativa equivalente a la integral de Riemann

Definición 8.6

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se llama suma de Riemannn de f, relativa a la partición $\mathcal{P}$ y correspondiente al conjunto de etiquetas C a

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

notada por

$$s(f, P, C) \quad \text{o} \quad s(f, \dot{P}).$$

Definición 8.7

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ un función e $I \in \mathbb{R}$, se dice que el número I es *la integral de f sobre $[a,b]$*, denotado por

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición P que cumple con $|P| < \delta$ y todo conjunto de etiquetas C de P, se tiene que

$$|S(f, P, C) - I| \leq \epsilon.$$

De existir el número I, se dice que f *es integrable según Riemann*.

8.2.1 Teoremas de Integración

Proposición 8.3. Sea $c \in \mathbb{R}$. La función

$$\begin{aligned} f\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$$

es integrable y

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Proposición 8.4. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f es integrable.

Proposición 8.5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es acotada y discontinua en un número finito de puntos, entonces f es integrable.

Proposición 8.6. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $f+g$ es integrable y
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$
- λf es integrable y
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx;$$
- si $f(x) \le g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Corolario 8.7. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable tal que para todo $x \in [a,b]$, se tiene que
$$f(x) \ge 0,$$
entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

A partir de este punto, consideramos $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $[a,b] \subseteq A$.

Definición 8.8

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$. Se define
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Proposición 8.8. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$. Se tiene que f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, además
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

8.2.2 Teorema del valor medio

Teorema 8.9: –Teorema del valor medio para funciones integrables–

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Se tiene que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definición 8.9

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se define *el área bajo la gráfica de f entre las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$* por el número

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por tanto, $A \geq 0$.

8.2.3 Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 8.10: –Primer Teorema Fundamental del Cálculo–

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Definamos la función

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Se tiene que F es continua en $[a,b]$ y es derivable en $]a,b[$. Además, se verifica que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in]a,b[$.

Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in]a,b[$.

8.2.4 Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$.

Teorema 8.11: –Segundo Teorema Fundamental del Cálculo–

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in \,]a,b[$. Se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in \,]a,b[$.

Para $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $]a,b[$, se tiene que

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

para todo $x \in \,]a,b[$.

Definición 8.10: –Primitiva–

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se llama *primitiva* de f a cualquier función $F\colon I \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

Con esto, se tiene que dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Una notación habitual para el lado derecho de la igualdad es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

(El punto que aparece al final de la línea es el "punto final" de la oración; no es parte de la representación de $F(b) - F(a)$.

Teorema 8.12

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f tiene una primitiva.

Proposición 8.13. Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $F\colon I \to \mathbb{R}$ una primitiva de f, para todo $c \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} G\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) + c \end{aligned}$$

también es una primitiva de f.

Proposición 8.14. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ dos primitivas de f. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + c$$

para todo $x \in I$.

8.2.5 Técnicas de integración

Teorema 8.15: –Cambio de variable–

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función con primitiva y $g\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\operatorname{img}(g) \subseteq I$. Se tiene que

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du,$$

para $x \in I$, donde se toma $u = g(x)$.

Teorema 8.16: –Integración por partes–

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones derivables. Se tiene que

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

para $x \in I$.

8.3 Integral de Darboux

8.3.1 Sumas superiores e inferiores

Definición 8.11

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$. Se definen

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \qquad \text{y} \qquad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Definición 8.12: –Suma inferior–

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$. Se define la *suma inferior* de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ por

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

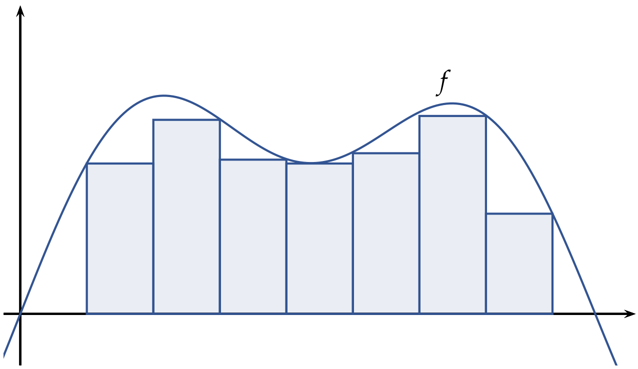


Figura 8.3: Suma inferior de la función f

Definición 8.13: –Suma superior–

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$. Se define la *suma superior* de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ por

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

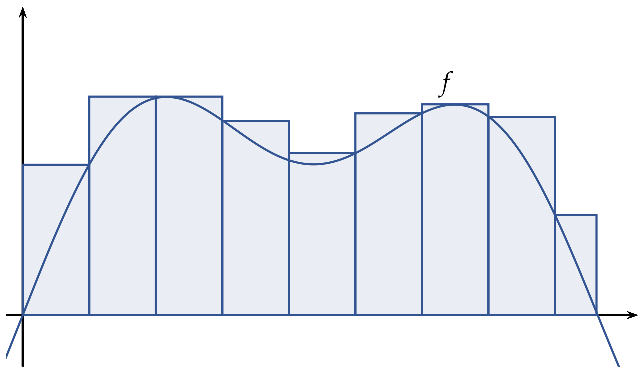


Figura 8.4: Suma superior de la función f

Lema 8.17. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathcal{P}$ cualquier partición de $[a,b]$, entonces

$$L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}).$$

Definición 8.14: –Refinamiento de una partición–

Sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ particiones de $[a,b]$. Se dice que $\mathcal{Q}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$ si $\mathcal{Q}$ es una partición de $[a,b]$ y $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

Lema 8.18. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones de $[a,b]$. Si $\mathcal{Q}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$, entonces

$$L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{Q}) \qquad \text{y} \qquad U(f,\mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{P}).$$

Lema 8.19. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dos particiones cualesquiera de $[a,b]$, entonces

$$L(f,\mathcal{P}_1) \leq U(f,\mathcal{P}_2)$$

8.3.2 Integrales superiores e inferiores

Para esta sección notaremos $\mathscr{P}(I)$ al conjunto de todas las particiones de un intervalo I.

Definición 8.15

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se define la *integral inferior de f en*

$[a, b]$ como

$$L(f) = \sup \{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\},$$

y la *integral superior de f en $[a, b]$* como

$$U(f) = \text{ínf} \{U(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P}\mathscr{P}(I)\}.$$

Teorema 8.20

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, entonces existen las integrales inferior $L(f)$ y superior $U(f)$ y

$$L(f) \leq U(f).$$

8.3.3 Integral de Darboux

Definición 8.16

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es *Darboux integrable* en $[a, b]$ si

$$L(f) = U(f),$$

y en este caso, se tiene que

$$\int_a^b f(x)\, dx = L(f) = U(f).$$

Teorema 8.21: –Caracterización de integrabilidad–

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se tiene que f es Darboux integrable en $[a, b]$, notado por

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, que depende de ε, tal que

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Corolario 8.22. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $(\mathcal{P})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} (U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n)) = 0,$$

entonces f es Darboux integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} U(f,\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to+\infty} L(f,\mathcal{P}_n).$$

Teorema 8.23

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua o monótona en $[a,b]$, entonces f es Darboux integrable en $[a,b]$.

Teorema 8.24: –Teorema de Equivalencia–

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, entonces f es Darboux integrable si y solo si f es Riemann integrable.

8.4 Ejercicios

1. Sea

$$\begin{aligned} f\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x+1 & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases} \end{aligned}$$

   Usando la caracterización de Darboux integrabilidad, muestre que f es Darboux integrable en $[0,2]$.

2. Considere la función

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \vee x = 1, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } p \ge 0 \quad \text{y} \quad q > 0, \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases} \end{aligned}$$

   donde p, q dos números naturales y $m.c.d.(p,q) = 1$

   (a) Sea $\varepsilon > 0$ y se define $\varepsilon^* = \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon\right\}$. Muestre que existe un número finito de racionales $x \in [0,1]$ tales que $f(x) \ge \frac{\varepsilon^*}{2}$. Denote a dichos racionales por $\{r_0, r_1, \ldots, r_n\}$, donde $r_0 = 0$ y $r_n = 1$.

   (b) Defina la partición $Q = \{x_0, \ldots, x_{2n+1}\}$ donde

$$x_0 = 0,\ \ x_{2n+1}, x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n+1}$$

$$x_1 < r_1, \text{ con } x_1 < \frac{\varepsilon^*}{2(n+1))}$$

$$x_2 < r_2 < x_3, \text{ con } x_3 - x_2 < \frac{\varepsilon^*}{2(n+1)}$$

$$\ldots$$

$$x_{2n-2} < r_{n-1} < x_{2n-1}, \text{ con } x_{2n-1} - x_{2n-2} < \frac{\varepsilon^*}{2(n+1)}$$

$$x_{2n} < \text{ con } 1 - x_{2n} < \frac{\varepsilon^*}{2(n+1)}.$$

Muestre que $U(f, Q) < \varepsilon^*$.

(c) Muestre que $L(f, Q) = 0$.

(d) Usando () y (c), muestre que f es de Darboux integrable.

(e) Halle el valor de $\int_0^1 f(x)dx$.

3. Sea $\phi\colon [a, b] \to [c, d]$ una función diferenciable con derivada en $]a, b[$ y verifica que $\phi(a) = c$ y $\phi(b) = d$. Además, sea $f\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ continua en $[c, d]$.

   (a) Muestre que las funciones f y $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ son Darboux integrables.

   (b) Se define la función

   $$\begin{aligned} G\colon\ [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\, dt. \end{aligned}$$

   Muestre que G es diferenciable en $]a, b[$ y que para todo $x \in]a, b[$

   $$G'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x).$$

   (c) Se define la función

   $$\begin{aligned} F\colon\ [c,d] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto F(x) = \int_c^x f(t)\, dt. \end{aligned}$$

   Muestre que $F \circ \phi$ es diferenciable en $]a, b[$ y que para todo $x \in]a, b[$

   $$(F \circ \phi)'(x) = G'(x).$$

   (d) Use el literal (c) para mostrar que $F \circ \phi = G$ en $]a, b[$.

(e) Use el literal (d) para mostrar que

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx.$$

4. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente en $[a,b]$.

   (a) Muestre que f es Darboux integrable en $[a,b]$.

   (b) Considere la función

   $$\begin{aligned} g\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = f(a)(x-a) + f(b)(b-x). \end{aligned}$$

   Muestre que g es continua en $[a,b]$.

   (c) Muestre que
   $$g(b) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq g(a).$$

   (d) Muestre que existe $c \in [a,b]$ tal que

   $$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)(c-a) + f(b)(b-c).$$

5. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ y $\phi_1, \phi_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $\mathbb{R}$. Muestre que la función

   $$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(t)\,dt \end{aligned}$$

   es diferenciable en $\mathbb{R}$. Además, obtenga una fórmula para $g'(x)$

6. Considere la función

   $$\begin{aligned} f\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

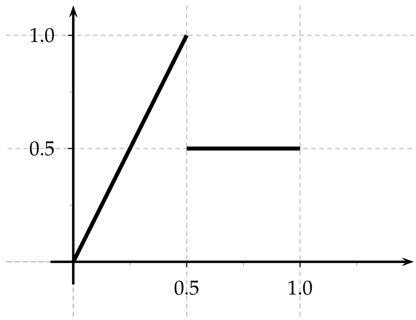
   (a) Esboce una gráfica para f.

   (b) Demuestre que f es Darboux integrable en $[0,2]$.

   Sugerencia: Trate de **NO** usar las identidades para $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$. De esta forma se agilizará la resolución del ejercicio.

7. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que para todo $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$. Muestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

8. Usando la caracterización de una función Darboux integrable, muestre que la función dada en la figura es Rienmann integrable en $[0,1]$:

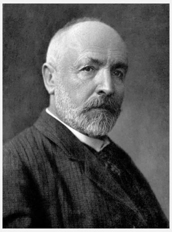


Además, halle el valor de la integral sin usar el teorema fundamental del cálculo.

9 Series y Sucesiones de Funciones

9.1 Definiciones fundamentales

10 Introducción a la Topología



Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

10.1 Definiciones fundamentales

En este primera sección estudiaremos dos tipos de conjuntos fundamentales: abiertos y cerrados. Para su estudio vamos a recordar una de las definiciones introducidas durante el capítulo 5.

Definición 10.1: –Vecindad–

Sean $a \in \mathbb{R}$ un número real y $\delta \in \mathbb{R}^{+}$. Una *vecindad* o un *entorno* de radio δ de a es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x - a| < \delta.$$

Esto lo notamos por

$$V_{\delta}(a).$$

Definición 10.2: –Conjunto Abierto–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que G es un conjunto *abierto* si para cada $x \in A$existe una vecindad $V_{\delta}(x)$ tal que

$$V \subseteq A.$$

Definición 10.3: –Conjunto Cerrado–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que A es un conjunto *cerrado* si su complemento A^{C} es un conjunto abierto.

Es importante notar que, los conceptos de conjunto abierto y cerrado no son antónimos. Es decir, existen conjuntos que no pueden ser abiertos ni cerrados.

Proposición 10.1. Toda unión finita o infinita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, es decir, si

$$\{A_i\}_{i \in J}$$

con J un conjunto, es una familia de conjuntos abiertos (es decir, A_i es abierto para todo $i \in J$), entonces

$$\bigcup_{i \in J} A_i$$

es un conjunto abierto.

Proposición 10.2. Toda intersección finita de conjuntos abiertos es con conjunto abierto, es decir, si

$$\{A_i\}_{i \in J}$$

con J un conjunto finito, es una familia de conjuntos abiertos (es decir, A_i

es abierto para todo $i \in J$), entonces

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

es un conjunto abierto.

Ejemplo 10.1. Consideremos la siguiente familia de bolas

$$B_{\frac{1}{k}}(0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < \frac{1}{k} \right\}$$

Notemos que, la unión generalizada de la familia de bolas antes mencionada

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}(o)$$

es un conjunto abierto. Sin embargo, notemos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}(0) = \{0\}$$

no es un conjunto abierto.

Así, podemos formalizar los siguientes resultados en base a los ejemplos anteriores.

Proposición 10.3. Toda unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, es decir, si

$$\{A_i\}_{i\in J}$$

con J un conjunto, es una familia de conjuntos cerrados (es decir, A_i es cerrados para todo $i \in J$), entonces

$$\bigcup_{i\in J} A_i$$

es un conjunto cerrado.

Proposición 10.4. Toda intersección finita de conjuntos cerrados es con conjunto abierto, es decir, si

$$\{A_i\}_{i\in J}$$

con J un conjunto finito, es una familia de conjuntos cerrados (es decir, A_i

es abierto para todo $i \in J$), entonces

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

es un conjunto abierto.

Proposición 10.5. Sea $\{A_i\}_{i \in J}$ una familia de conjuntos, con J un conjunto infinito, entonces se tiene que:

- la intersección infinita de una familia de conjuntos abiertos no es necesariamente un conjunto abierto, (es decir, A_i es cerrado para todo $i \in J$), entonces
$$\bigcap_{i \in J} A_i$$
no necesariamente es un conjunto abierto;

- la unión infinita de una familia de conjuntos cerrados no es necesariamente un conjunto cerrado, (es decir, A_i es cerrado para todo $i \in J$), entonces
$$\bigcup_{i \in J} A_i$$
no necesariamente es un conjunto cerrado.

Teorema 10.6: –Caracterización de conjuntos cerrados–

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de A, entonces se tiene que A es un conjunto cerrado si y solo si

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L,$$

con $L \in A$.

Proposición 10.7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se tiene que A es cerrado si y solo si todos los puntos de acumulación de A son elementos de A.

Teorema 10.8

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto, entonces A es abierto si y solo si es la unión contable de conjuntos abiertos disjuntos.

10.1.1 Conjunto de Cantor

La construcción del conjunto de Cantor es muy intuitiva si la vemos de la siguiente manera: Consideremos un intervalo cerrado $[0,1]$, si a este lo dividimos en tres partes iguales y retiramos intervalo abierto intermedio, obtendríamos que:

$$\mathbb{F}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Si repetimos el proceso con los nuevos intervalos, obtendríamos que

$$\mathbb{F}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Es interesante notar que los intervalos van creciendo en forma exponencial en función de 2^k con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, así se tiene que

$$\begin{array}{c|c} \mathbb{F}_1 & 2^0 = 1 \\ \mathbb{F}_2 & 2^1 = 2 \\ \mathbb{F}_3 & 2^2 = 4 \end{array}$$

Por otra parte, si hacemos algunos cálculos podemos encontrar una formula para calcular cada uno de los intervalos, esta se encuentra dada por:

$$\left[\frac{k}{3^2}, \frac{k+1}{3^2}\right].$$

Definición 10.4: –Conjunto de Cantor–

El conjunto de cantor, notado por $\mathcal{C}$, es la intersección de los conjuntos $\mathbb{F}_n$ con $n \in \mathbb{N}$.

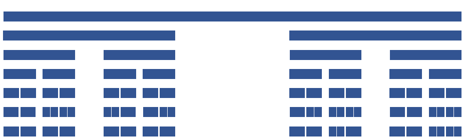


Figura 10.1: Conjunto de Cantor

Algo interesante sobre este conjunto es que al ser la intersección finita de conjuntos cerrados, por el teorema , el conjunto de Cantor también es cerrado. A continuación vamos a enumerar algunas propiedades interesantes del conjunto

a) La longitud total de los intervalos retirados del conjunto es igual a 1.

Demostración. Para esta primera propiedad, notemos que las longitudes retiradas en cada iteración son iguales a:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$$

Luego, si llamamos S a la suma de las longitudes retiradas, se tiene que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots \\ &= \frac{2^n}{3^{n+1}} \quad \text{para } n = \{0, 1, 2, \ldots\} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Por otra parte, notemos que la medida de cada uno de los intervalos está dada por:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

de donde, es fácil ver que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Así, podemos decir que la “medida” del conjunto de cantor es cero o que es de “medida nula”[1]

b) El conjunto no contiene ningún subconjunto abierto no vació.

Demostración. Supongamos que existe un abierto no vació $F = (a, b)$, de donde como $F \subseteq \mathbb{F}$ para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$0 < b - a < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

para $n \in \mathbb{N}$. Particularmente, se tiene que cuando $n \to +\infty$

$$b - a = 0$$

[1]Medida de Lebesgue

es decir, el conjunto F es vacío lo que contradice nuestra hipótesis inicial. $\square$

c) El conjunto de Cantor es infinito.

10.2 Conjuntos compactos

Definición 10.5: –Recubrimiento abierto–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se llama *recubrimiento abierto* de A a la familia de conjuntos abiertos $G = \{G_i\}_{i \in J}$ tal que su unión contiene al conjunto A, es decir,

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$$

Observación. Consideremos una subfamilia $G' = \{G'_i\}_{i \in J}$ de G tal que la unión de G' también sea un recubrimiento abierto de A, entonces G' es un *subrecubrimiento* de G. Más aún, si J es un conjunto finito, a G' se lo denominará *subrecubrimiento finito* de G.

Definición 10.6: –Conjunto compacto–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que A es compacto si para todo recubrimiento abierto de A, este posee un recubrimiento finito.

Teorema 10.9

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Si A es compacto, entonces A es cerrado y acotado.

Teorema 10.10: –Teorema de Heine-Borel–

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto, se tiene que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- A es compacto;
- A es cerrado y acotado;

Teorema 10.11

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de A, entonces se tiene que A es compacto si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe una subsucesión tal que

$$\lim_{k\to+\infty}(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = L,$$

con $L \in A$.

10.3 Continuidad

10.4 Espacios métricos

10.5 Espacios de Lebesgue

Anexos

Propiedades básicas de los Conectores Lógicos

Doble negación

$$\neg\neg p \Longleftrightarrow p.$$

Leyes de idempotencia

$$(p \vee p) \Longleftrightarrow p$$
$$(p \wedge p) \Longleftrightarrow p.$$

Leyes asociativas

$$(p \wedge (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r))$$
$$(p \vee (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \vee r)).$$

Leyes conmutativas

$$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$$
$$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p).$$

Leyes distributivas

$$((p \wedge q) \vee r) \Longleftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$$
$$((p \vee q) \wedge r) \Longleftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)).$$

Leyes de DeMorgan

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$
$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

Caracterización del condicional

$$(p \Rightarrow q) \iff (\neg p \vee q).$$

Transitividad del condicional

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \implies (p \Rightarrow r).$$

Caracterización del bicondicional

$$(p \Leftrightarrow q) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)).$$

Negación en un bicondicional

$$(p \Leftrightarrow q) \iff (\neg p \Leftrightarrow \neg q).$$

Principio del tercero excluido

$$p \vee \neg p.$$

Axiomas de los números reales

Axioma Fundamental

Existe un conjunto llamado el CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES, denotado por $\mathbb{R}$, que satisface los cuatro tipos de axiomas: de igualdad, de cuerpo, de orden y de completitud.

Axiomas de igualdad

Para los elementos x, y, z de $\mathbb{R}$, existe una relación llamada de IGUALDAD, denotada por "$=$", que cumple las siguientes propiedades:

I1. $x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

I2. Si $x = y$, entonces $y = x$.

I3. Si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.

I4. Si $P(x)$ es una proposición verdadera, y $x = y$, entonces $P(y)$ también es verdadera.

Axiomas de cuerpo

En el conjunto $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones internas (binarias), llamadas ADICIÓN y MULTIPLICACIÓN, denotadas por $x+y$ y $x \cdot y$ respectivamente, que cumple las siguientes propiedades:

A1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

A2. $x+y = y+x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

A3. Existe un elemento de $\mathbb{R}$, denotado por 0, tal que $x+0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A4. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x+y = 0$. A este elemento lo notaremos $-x$.

M1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

M2. $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

M3. Existe un elemento de $\mathbb{R}$, denotado por 1, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

M4. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$. A este elemento lo notaremos x^{-1}.

D1. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

D2. $0 \neq 1$.

Axiomas de orden

Existe un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$, llamado el conjunto de los NÚMEROS REALES POSITIVOS, que cumple las siguientes propiedades:

O1. La suma y producto de números reales positivos son números reales positivos. Es decir, si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x+y \in \mathbb{R}^+$ y $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

O2. Dado $x \in \mathbb{R}$, se verifica una, y solo una de las siguientes tres alternativas:

- $x = 0$,
- $x \in \mathbb{R}^+$,
- $-x \in \mathbb{R}^+$.

Axiomas de completitud

C1. Todo conjunto no vacío y acotado superiormente $X \subseteq \mathbb{R}$ posee *supremo*.

Bibliografía

[1] Robert G. Bartle; Donal R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[2] Jacques Douchet. *Analyse recueil d'exercices et aide-mémorie*. Vol. 1. Presses polythechniques et universitaires romandes, 2003.

[3] Elon Lages Lima. *Análise Real*. Vol. 2. IMPA, 2013.

[4] Juan L. Varona. *Recorridos por la Teoría de Números*. Ediciones Electolibris S.L., 2014.

[5] Charles C. Pinter. *Set Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1971.

[6] Titu Andreescu. *Putnam and Beyond*. Springer, 2007.

[7] E. Hairer; G. Wanner. *Analysis by Its History*. Springer, 2008.

[8] Ajit Kumar; S. Kumaresan. *A basic course in real analisys*. CRC Press, 2014.

Índice alfabético

Esta página ha sido dejada intencionalmente en blanco.