

ALGORITMOS PARA ACHAR EQUILÍBRIO EM JOGOS BASEADOS EM  
GRAFOS

Daniel Levitan

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA  
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE  
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

---

Prof. Mário Roberto Folhadela Benevides, Ph.D.

---

Prof. Felipe Maia Galvão França, Ph.D.

---

Prof. Edward Hermann Hauesler, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2007

LEVITAN, DANIEL

Algoritmos para Achar Equilíbrio em Jogos Baseados em Grafos [Rio de Janeiro] 2007

X, 48 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2007)

Dissertação – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 - Algoritmos para busca de Equilíbrio de Nash

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*Perseverança e foco, qualidades indispensáveis para as pessoas que têm objetivos.*

# Agradecimentos

O mérito de qualquer homem nunca é alcançado sozinho, mas sim com o suporte de inúmeras pessoas. Grande parte deste suporte vem de minha família, sem a qual eu não alcançaria e conseguiria o que logrei até agora.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## ALGORITMOS PARA ACHAR EQUILÍBRIO EM JOGOS BASEADOS EM GRAFOS

Daniel Levitan

Setembro/2007

Orientador: Mário Roberto Folhadela Benevides

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Cada vez mais os diversos campos de conhecimento se integram, a computação têm uma relação íntima com a matemática e muito flerta com a economia. O problema de divisão de recursos, compartilhamento, busca de soluções ótimas tem sido abordado sob a ótica de vários conceitos, dentre eles a teoria dos jogos. Este trabalho busca algoritmos que encontrem o equilíbrio de *Nash* e também busca um modelo computacional que o represente. Algumas características particulares de cada algoritmo são estudadas, bem como representações convenientes.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## GRAPH BASED ALGORITHMS FOR FINDING NASH EQUILIBRIA

Daniel Levitan

September/2007

Advisor: Mário Roberto Folhadela Benevides

Department: Systems Engineering and Computer Science

Nowadays many subjects in many fields interact and integrate themselves. The relationship between computer science and mathematics is very close and many times computer science flirts with economy. The present work makes a link between the resource sharing, solving of best response problems and game theory. An algorithm and a new representation are presented in order to solve those kind of problems.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria dos Jogos</b>	<b>3</b>
2.1	Introdução . . . . .	3
2.1.1	Comportamento racional . . . . .	4
2.2	Jogos estratégicos . . . . .	5
2.2.1	Equilíbrio de Nash . . . . .	6
2.2.2	Equilíbrio misto . . . . .	7
2.3	Jogos extensivos . . . . .	9
2.3.1	Equilíbrio de Nash . . . . .	12
2.3.2	Equilíbrio de sub-jogo . . . . .	13
2.4	Jogos repetitivos . . . . .	14
2.4.1	Definições de jogos com horizonte infinito . . . . .	17
2.5	Jogos evolucionários . . . . .	18
2.5.1	Estratégia Estável Evolutivamente . . . . .	20
2.5.2	Modelo explícito . . . . .	21
2.6	Algoritmos existentes para a busca do equilíbrio de Nash . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Teoria dos Jogos e Produto de Grafos</b>	<b>25</b>
3.1	Produto de Grafos . . . . .	25
3.2	Jogadores e Jogos . . . . .	26
3.3	Descrição dos estados em um jogo . . . . .	26
3.3.1	Complexidade . . . . .	30

3.4	Transformação de um jogo na forma normal em um produto de grafos	31
3.5	A equivalência entre um Jogo na forma extensiva e um Grafo . . . .	33
3.5.1	Complexidade . . . . .	36
3.6	Exemplos de equivalência para jogos extensivos e estratégicos . . . .	37
3.6.1	A disputa de alimentos entre o Pombo e Águia . . . . .	37
3.6.2	A disputa por alimentos . . . . .	39
3.7	Representação simplificada para jogos estratégicos . . . . .	41
3.7.1	Complexidade . . . . .	43
3.7.2	Jogos extensivos . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>46</b>



# Lista de Figuras

2.1	Jogo na forma estratégica. . . . .	5
2.2	Bach ou Stravinsky. . . . .	6
2.3	Equilíbrio de Nash no jogo estratégico. . . . .	7
2.4	Equilíbrio misto no jogo estratégico. . . . .	8
2.5	Jogo na forma extensiva. . . . .	10
2.6	Jogo extensivo com informação imperfeita. . . . .	11
2.7	Equilíbrio de Nash em um jogo extensivo. . . . .	12
2.8	Jogo na forma extensiva para representar o equilíbrio de sub-jogo. .	14
2.9	Dilema do prisioneiro. . . . .	15
2.10	Dilema do prisioneiro, versão repetitiva. . . . .	16
2.11	Disputa animal por um recurso. . . . .	20
2.12	Dilema do prisioneiro. . . . .	22
3.1	Jogo na forma normal e sua representação através de estados. . . .	27
3.2	Direção de preferência do jogador linha. . . . .	28
3.3	Produto de grafos com pontos de interseção marcados. . . . .	28
3.4	(a) Produto de grafos representando todas as possíveis combinações de ordenação. (b) Subproduto de grafos, marcando apenas as or- denações que levam a uma saída do jogo . . . . .	30
3.5	Jogo na forma normal. . . . .	31
3.6	Representação alternativa para o jogo na forma normal. . . . .	31
3.7	(a)- Interseções marcadas no produto de grafos e (b) - Produto de grafos com arestas direcionadas. . . . .	32

3.8	Sumidouro no produto de grafos, equivalente ao equilíbrio de Nash.	32
3.9	Jogo na forma extensiva e seu equivalente.	34
3.10	A representação de um jogo em um grafo de produto.	34
3.11	Jogo Bach Stravinsky.	35
3.12	Jogo na forma extensiva.	36
3.13	Descrição alternativa para o jogo na forma extensiva.	36
3.14	(a)- Interseções marcadas no produto de grafos e (b) - Produto de grafos com arestas direcionadas.	37
3.15	Representação por grafo do jogo extensivo.	38
3.16	Jogo <i>Hawk-Dove</i> .	38
3.17	Representação intermediária.	39
3.18	Representação em grafos do jogo <i>Dove-Hawk</i> .	39
3.19	Representação extensiva do jogo Mico-Gorila.	40
3.20	Representação intermediária.	40
3.21	Representação em grafos.	41
3.22	Representação em grafo simplificado.	41
3.23	Representação em grafo simplificado do jogo estratégico.	43
3.24	Jogo com as predileções indicadas.	44
3.25	Jogo extensivo, representado na forma normal, com a primeira ação do Gorila.	45

# Capítulo 1

## Introdução

A integração entre diversas disciplinas de distintos campos de conhecimento vem ocorrendo de maneira recorrente. A computação tem uma relação íntima com a matemática e há muito flerta com a economia. Diversas teorias econômicas têm sido aplicadas a problemas de diversas áreas tais como relações sociais, biologia e computação.

Um caso notado que vem ganhando importância e relevância é a aplicação de teoria dos jogos para a solução de problemas na área da computação, sobretudo em problemas de distribuição e compartilhamento de recursos. Como tal relação vem sendo utilizada de maneira seguida, diversos algoritmos para a solução de um problema da teoria dos jogos foram desenvolvidos para encontrar o equilíbrio de Nash.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um algoritmo que encontre o equilíbrio de Nash, que seja representado de maneira inequívoca a partir de grafos. Para isto seguimos o seguinte roteiro.

No capítulo sobre teoria dos jogos, analisamos os principais tópicos relevantes neste assunto. Iniciamos introduzindo o conceito de teoria dos jogos, levantando a questão que na realidade ela é um conjunto de ferramentas analíticas para avaliar o comportamento de agentes que tem algum objeto em disputa. Os objetos em disputa inicialmente tratados pela teoria eram da ordem econômica. Algumas

características para avaliar o resultado destas disputas foram considerados, como por exemplo a racionalidade de um jogador.

Abordamos a visão clássica de teoria dos jogos, sua representação a partir de jogos estratégicos, onde se desenvolveu o conceito do equilíbrio de Nash. Verificamos uma variante, o equilíbrio misto e então abordamos a visão de um jogo na forma extensiva, que leva o tempo e a ordem de decisões em questão. Dentro desta análise abordamos jogos repetitivos, equilíbrios de sub-jogos e outros conceitos intrínsecos à esta apresentação.

Abordamos ainda um conceito mais recente de teoria dos jogos, chamados de jogos evolucionários, desenvolvidos inicialmente em estudos biológicos, mas que se mostrou muito bem adaptável a teorias sociais e também na economia.

Tendo revisto os principais conceitos deste conjunto de ferramentas, chamado de teoria dos jogos, abordamos a teoria dos grafos para poder realizar a ligação entre ambas e assim desenvolver uma representação nesta última que representasse um jogo descrito na primeira.

Revimos produtos de grafos pois este conceito reflete de maneira muito próxima a representação estratégica de um jogo. Desenvolvemos uma maneira de abrir o jogo estratégico para exprimir os estados de um jogo, e formalizamos os elementos de um jogo a partir dos conceitos da teoria de grafos. Desta maneira conseguimos chegar a uma representação de um grafo a partir de um jogo.

Depois de conseguir exprimir em termos de grafos, jogos estratégicos, são exibidos exemplos em ambas as formas, estratégica e extensiva. Um modelo simplificado de representação de jogos estratégicos é descrito.

# Capítulo 2

## Teoria dos Jogos

### 2.1 Introdução

Como definiu [9], a teoria dos jogos é um conjunto de ferramentas analíticas para auxiliar a compreensão do fenômeno que observamos quando dois tomadores de decisão interagem. A teoria dos jogos se baseia em duas premissas que são essenciais para sua validade.

A primeira diz que os jogadores são racionais no sentido de que sempre perseguem um objetivo bem definido. A segunda diz que as ações escolhidas para serem tomadas são baseadas no conhecimento ou expectativa do comportamento da outra parte envolvida no jogo.

Um jogo é a descrição de uma interação estratégica entre partes que têm suas ações restritas às possibilidades de realizá-las. Os jogos podem modelar quaisquer tipos de disputa ou eventos relacionados a disputas.

Algumas características dos jogos são utilizadas para classificá-los. Se uma ação de um grupo é tomada individualmente, este jogo é chamado de não-cooperativo; caso a ação seja tomada por um grupo de jogadores, é um jogo cooperativo. Quanto a realização do jogo, se a escolha de estratégia é feita uma única vez, e se os jogadores revelam suas ações simultaneamente, temos o jogo estratégico; por outro lado, se após a primeira ação de um jogador, o jogador que deve tomar sua ação

subsequente pode basear sua escolha na história do jogo até este ponto, este jogo é chamado de extensivo. Por fim, se em um jogo todos os jogadores conhecem as regras que regem aquela interação, e se ambos conhecem as predileções, ganhos e perdas de cada jogador, temos o jogo com informação perfeita, caso contrário, o jogo é dito com informação imperfeita.

### 2.1.1 Comportamento racional

Como dito anteriormente, um dos fundamentos da teoria dos jogos é a racionalidade dos jogadores. Isto implica dizer que um jogador sempre almeja o maior dos benefícios que ele pode adquirir de determinada interação.

Tal princípio tem origem na economia, onde está associado a uma função matemática chamada de função utilidade. A ***função utilidade*** é aquela que maximiza a satisfação de um consumidor. Por exemplo, se o consumidor espera consumir determinada quantidade de um produto, a função utilidade diz que quanto mais desse produto, melhor e ainda compara diversas possíveis escolhas em diversas faixas de renda, que é o limite de consumo para determinado consumidor. Portanto, em determinada faixa de renda, a função utilidade é aquela que atinge a maior quantidade daquele produto.

Podemos utilizar o mesmo conceito em computação. Por exemplo, a utilização de determinado recurso, digamos a impressora, pode ser vista como um bem a se consumir, e quanto mais tempo de utilização, maior a satisfação. Outro caso típico é a utilização de banda de rede de computadores, também vista como um recurso e onde muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos.

A racionalidade, portanto, implica que o jogador sempre busca a situação de maior conforto para ele, não aplicando o auto-flagelo como estratégia, pelo menos não globalmente. Para expressar numericamente as predileções de cada jogador, estes são associados a funções chamadas ***função ganho*** (*payoff*) que expressam valores que são possíveis de comparação.

## 2.2 Jogos estratégicos

Os jogos estratégicos modelam um tipo de tomada de decisão onde os jogadores que interagem escolhem sua estratégia uma única vez, e a levam a cabo até o final do jogo. A escolha pode não ser feita simultaneamente, porém o jogo é realizado de forma que ambas as escolhas seja reveladas simultaneamente.

Um jogo estratégico é aquele onde um grupo de  $N$  jogadores interagem num processo de tomada de decisão, no qual cada jogador  $i$  possui um conjunto  $A_i$  de possíveis ações e uma *relação de preferências* que norteia a escolha entre elas.

Podemos escrever então que um jogo estratégico é formado por:

- um conjunto finito  $N$  (o conjunto de jogadores)
- para cada jogador  $i \in N$  um conjunto não-vazio  $A_i$  (o conjunto de ações disponíveis para o jogador  $i$ )
- para cada jogador  $i \in N$  uma relação de preferência  $\succsim_i$  em  $A = \times_{j \in N} A_j$  (a relação de preferência para o jogador  $i$ )

Dessa forma podemos representar um jogo pela tupla  $\langle N, (A_i), \succsim_i \rangle$ .

Nem sempre o ponto de interesse será a escolha da ação mas sim a implicação dessa escolha. Dessa forma a relação de preferência passa a refletir a escolha entre as conseqüências, e então modelamos as funções e temos a possibilidade de descobrir a real preferência em função das conseqüências de determinada escolha.

A figura 2.1 mostra a disposição gráfica de um jogo envolvendo dois jogadores cada um com valores de função ganho (*payoff*) representados.

	L	R
T	(w1,w2)	(x1,x2)
B	(y1,y2)	(z1,z2)

Figura 2.1: Jogo na forma estratégica.

A seguir mostramos um exemplo chamado de Guerra dos Sexos[8], o jogo consiste em uma disputa entre duas pessoas para que juntas participem de uma mesma ação.

Supondo que duas pessoas gostem de música clássica, e que gostariam de juntas ir a um concerto. Apesar de quererem sair juntas, na cidade em que vivem, a obra de dois grandes compositores está sendo apresentada, são eles Bach e Stravinsky. Cada uma das pessoas gosta preferencialmente de um dos compositores, mas recordemo-nos, o principal interesse é que saiam juntas.

A figura 2.2 representa a predileção de cada um dos indivíduos, e em nosso caso representa o nosso jogo. A tônica deste tipo de jogo é que duas pessoas com interesses conflituosos querem coordenar seus comportamentos. O jogo possui dois equilíbrios de Nash: Bach e Bach, e Stravinsky e Stravinsky.

	Bach	Stravinsky
Bach	(2,1)	(0,0)
Stravinsky	(0,0)	(1,2)

Figura 2.2: Bach ou Stravinsky.

### 2.2.1 Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash[10] é um ponto do jogo no qual ambos os jogadores possuem a expectativa correta sobre o comportamento do outro e onde ele age racionalmente. Nenhum jogador tem interesse em mudar desse ponto pois não pode obter maiores ganhos com essa atitude. Visto que nenhuma das partes envolvidas no jogo têm motivação para mudar de posição, este configura um estado estável.

**Definição 2.1.** *O equilíbrio de Nash pode ser definido para um jogo  $\langle N, (A_i), \succsim_i \rangle$  como sendo o conjunto de ações  $a^* \in A$  com a propriedade de que para cada jogador  $i$*



$$(a_{-i}^*, a_i^*) \succsim_i (a_{-i}^*, a_i) \text{ para todo } a_i \in A_i.$$

Dessa forma um equilíbrio de Nash é na realidade um ponto em que para cada jogador, não existe estratégia melhor a ser tomada, porque qualquer mudança o levaria a algum estado onde a sua relação de preferência não seria respeitada.

Um exemplo disso pode ser visto na figura 2.3.

	L	R
T	3,3	0, <u>4</u>
B	<u>4</u> ,0	( <u>1</u> , <u>1</u> )

Figura 2.3: Equilíbrio de Nash no jogo estratégico.

### 2.2.2 Equilíbrio misto

A idéia ligada ao equilíbrio misto é apropriada para modelar estados estáveis onde as escolhas não são determinísticas porém probabilísticas. Dessa forma, a escolha de adoção de uma estratégia não depende mais de uma relação de preferência e sim de uma função de preferência que realiza uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de ações originais.

O jogo estratégico a qual nos referimos passa a ter a forma  $\langle N, (A_i), u(i) \rangle$  e representamos a distribuição de probabilidade sobre o conjunto  $A_i$  como  $\Delta(A_i)$ . A escolha de qualquer ação dentro do conjunto  $\Delta(A_i)$  é uma estratégia mista pois envolve uma probabilidade associada a ação escolhida.

A prova de que todo jogo estratégico finito possui um equilíbrio misto é devido a Nash em 1950[10]. Reproduzimos a prova como fez [5].

Vamos supor que  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  seja uma escolha de estratégia mista para um jogo com  $n$  jogadores. Para cada jogador  $i = 1, \dots, n$ , vamos dizer que  $\sigma_{-i}$  representa a estratégia utilizada por todos os outros jogadores que não  $i$ . O *teorema fundamental do equilíbrio misto de Nash* diz que  $\sigma$  é um equilíbrio de Nash se e somente se, para cada jogador  $i = 1, \dots, n$  com o conjunto de estratégia pura  $S_i$ ,

- se  $s, s' \in S_i$  ocorre com probabilidade positiva em  $\sigma_i$ , então os ganhos atribuídos a  $s$  e a  $s'$ , quando jogados contra  $\sigma_{-i}$ , são iguais;
- se  $s$  ocorre com probabilidade positiva em  $\sigma_i$  e  $s'$  ocorre com probabilidade zero em  $\sigma_i$ , então o ganho de  $s'$  é menor ou igual ao ganho de  $s$ , quando jogado contra  $\sigma_{-i}$ .

A prova do teorema fundamental segue: Suponha que  $\sigma$  seja a estratégia mista do jogador num equilíbrio de Nash que utilize  $s$  com probabilidade  $p > 0$  e  $s'$  com probabilidade  $p' > 0$ . Se  $s$  possui um ganho maior que  $s'$  quando jogado contra  $\sigma_{-i}$ , então a estratégia mista de  $i$ , que utiliza  $s$  com probabilidade  $(p + p')$ , não utiliza  $s'$ , e associa as mesmas probabilidades às outras estratégias puras como faz  $\sigma$ , possui um ganho maior que  $\sigma$ , então  $\sigma$  não é uma melhor resposta a  $\sigma_{-i}$ . Essa contradição, que prova a assertiva.

Suponhamos a figura 2.4. Ela nos mostra uma matriz de ganhos representada por letras. Supondo que o jogador coluna utilize a estratégia  $\sigma = \alpha U + (1 - \alpha)D$ , ou seja, joga  $U$  com probabilidade  $\alpha$ .

	U	D
L	a1, a2	b1, b2
R	c1, c2	d1, d2

Figura 2.4: Equilíbrio misto no jogo estratégico.

Se o jogador linha utiliza tanto a estratégia  $L$  quanto  $R$ , então o jogador coluna deve obter o mesmo ganho jogando tal estratégia contra qualquer uma das estratégias das quais se possa utilizar o jogador linha.

O ganho jogando  $\sigma$  contra  $L$  é  $\alpha a_1 + (1 - \alpha)b_1$ . Já o ganho jogando  $\sigma$  contra  $R$  é  $\alpha c_1 + (1 - \alpha)d_1$ .

Igualando as equações acima obtemos:

$$\alpha = \frac{d_1 - b_1}{d_1 - b_1 + a_1 - c_1}$$

Analisando o jogo BoS (Bach ou Stravinsky) de acordo com a análise feita anteriormente, podemos observar abaixo o comportamento de cada jogador:

Quando o jogador coluna joga contra o jogador linha e este por sua vez joga B (Bach), temos que  $\sigma = 2\alpha_{linha(contraBach)} + 0\alpha_{linha(contraBach)}$ . Quando o jogador coluna joga contra o jogador linha e este por sua vez joga S (Stravinsky), temos que  $\sigma = 0\alpha_{linha(contraStravinsky)} + 1(1 - \alpha_{linha(contraStravinsky)})$

Como o ganho deve ser o mesmo contra cada linha, portanto, ao se igualar os ganhos, temos  $\alpha_{linha(contraBach)} = 1/3$ .

## 2.3 Jogos extensivos

Nas seção anterior estudamos os jogos estratégicos, que possuíam como característica fundamental a simultaneidade de execução do jogo depois de previamente escolhidas as estratégias. Os jogos extensivos levam em consideração a ordem na qual as escolhas são feitas. Outro ponto importante nos jogos estratégicos é que o jogador pode rever seu plano de ação em qualquer momento do jogo no qual ele tenha de realizar escolhas.

O jogo estratégico é portanto uma descrição detalhada da estrutura seqüencial de uma interação ao longo do tempo. Para expor com precisão o fato da temporalidade, os jogos extensivos são representados por estruturas chamadas árvores. Nessas estruturas, cada nó representa um ponto de decisão onde cada jogador tem a possibilidade de escolher uma ação dentre aquelas possíveis para o nó em questão.

Tal como fizemos com os jogos estratégicos, enumerando seus componentes, podemos fazer o mesmo para jogos extensivos e seus componentes são:

- Um conjunto  $N$  (o conjunto de jogadores).
- Um conjunto  $H$  de seqüências (finitas ou infinitas) que satisfazem as três propriedades seguintes:
  - A seqüência  $\emptyset$  é um membro de  $H$ .

- Se  $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$  (onde  $K$  pode ser infinito) e  $L < K$  então  $(a^k)_{k=1,\dots,L} \in H$ .
- Se uma seqüência infinita  $(a^k)_{k=1,\dots}$  satisfaz  $(a^k)_{k=1,\dots,L} \in H$  para todo inteiro positivo  $L$  então  $(a^k)_{k=1,\dots} \in H$ . (Cada membro de  $H$  é uma história; cada componente da história é uma ação tomada por um jogador). Uma história  $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$  é terminal se é infinita ou se não existe um  $a^{K+1}$  tal que  $(a^k)_{k=1,\dots,K+1} \in H$ . O conjunto de histórias terminais é chamado  $Z$ .
- Uma função  $P$  que associa cada história não-terminal (cada membro de  $H \setminus Z$ ) a um membro de  $N$ . ( $P$  é a função do jogador,  $P(h)$  sendo o jogador que escolhe uma ação após uma história  $h$ ).
- Para cada jogador  $i \in N$  uma relação de preferência  $\succsim_i$  em  $Z$  (a relação de preferência do jogador  $i$ )

Do acima exposto vemos que um jogo em sua forma extensiva é representado pela tupla  $\langle N, H, P, \succsim_i \rangle$ .

A figura 2.5 representa um jogo extensivo típico. Podemos ainda nos referir a alguns elementos típicos dessa representação de jogo. Os nós terminais, ou nós folhas, são os que exibem os ganhos auferidos por cada jogador quando a situação de interação termina.

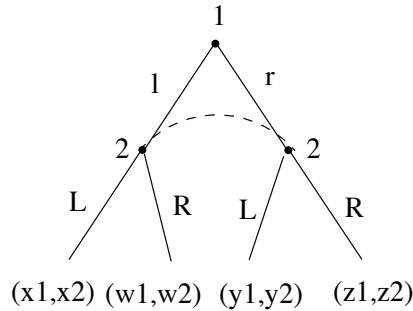


Figura 2.5: Jogo na forma extensiva.

Existem duas classificações para os jogos extensivos. A primeira é chamada de jogo com informação perfeita, e refere-se ao jogo no qual os jogadores são completamente informados sobre as ações passadas que sucederam no jogo. A outra classe diz respeito aos jogos nos quais os jogadores não sabem o que passou anteriormente no jogo.

Na figura 2.5 existe uma linha tracejada, esta linha representa exatamente o ponto onde a informação do jogador não é precisa sobre o passado, ou seja, o jogador está num jogo com informação imperfeita. O nome que se dá a linha tracejada é *information set*.

A figura 2.6 nos descreve um jogo extensivo com informação imperfeita. A dinâmica do jogo ocorre como descrita a seguir. O jogador 1 realiza a primeira jogada, escolhendo entre  $R$  e  $L$ . Se o jogador escolhe  $R$ , o jogo termina. Se a opção  $L$  é escolhida, é a vez do jogador 2.

O jogador 2 conhece a escolha feita por 1 e sabe que a opção  $L$  foi a ação tomada, então o jogador 2 pode escolher entre  $A$  e  $B$ . Qualquer que seja a escolha de 2, será a vez de 1. Acontece que nessa nova escolha, o jogador 1 não está informado sobre que decisão o jogador 2 tomou.

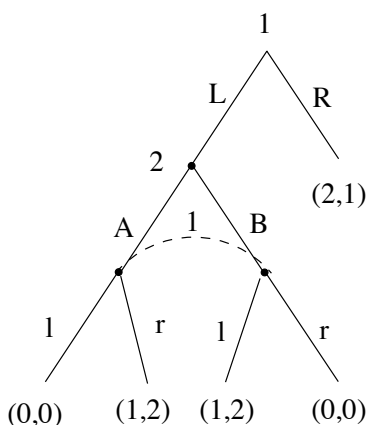


Figura 2.6: Jogo extensivo com informação imperfeita.

Considerando a figura 2.6. Imaginemos que não houvesse a linha pontilhada, isto é, o jogador 1 tem conhecimento da ação tomada por 2. Estamos diante de

um jogo com informação perfeita, isto é, 2 conhece as ações de 1 e 1 conhece as ações de 2.

### 2.3.1 Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash no jogo extensivo possui as mesmas características que no jogo estratégico, continua sendo a estratégia que não leva nenhum dos jogadores a realizar mudanças de posicionamento. Porém, no caso dos jogos extensivos, a comparação entre as posições se dá por meio de comparações da função saída ( $O(s)$ ), que é quem dá o valor numérico dos ganhos.

O equilíbrio de Nash do jogo extensivo,  $\langle N, H, P, \succsim_i \rangle$ , com informação perfeita é a estratégia  $s^*$  onde para cada jogador  $i \in N$  temos

$$O(s_{-i}^*, s_i^*) \succsim_i O(s_{-i}, s_i) \text{ para toda estratégia } s_i \text{ do jogador } i$$

Tomemos a figura 2.7. Esse jogo possui dois equilíbrios de Nash, são eles,  $(A, R)$  e  $(B, L)$ , com ganhos  $(2, 1)$  e  $(1, 2)$ , respectivamente. A estratégia  $(B, L)$  é um equilíbrio de Nash, porque dado que o jogador 2 escolhe jogar  $L$ , o jogador 1 prefere jogar  $B$ , ganhando o *payoff* de 1, à jogar  $A$  e ganhar o *payoff* de 0. E ainda, dado que o jogador 1 escolhe  $B$ , o jogador 2 escolhe  $L$  já que essa escolha não influencia o resultado do jogador 2, a escolha é  $L$ , tendo em vista que sua escolha não faz diferença.

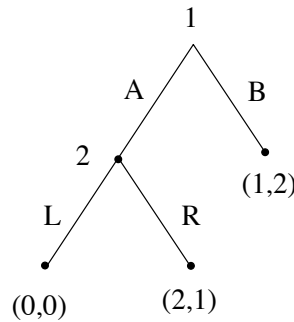


Figura 2.7: Equilíbrio de Nash em um jogo extensivo.

O outro equilíbrio é aquele em que o jogador 1 elege  $A$ , e para o jogador 2, o maior ganho obtido é quando se escolhe  $R$  como resposta a essa premissa.

O primeiro equilíbrio traz um trato no qual o jogador 2 escolhe  $L$  se o jogador escolher  $A$ . Este trato não é crível porque o jogador 2 não tem como garantir seu compromisso. Dessa maneira, se o jogador 1 escolher  $A$ , ele pode estar seguro que o jogador 2 irá escolher  $R$ , que lhe dá maior ganho.

### 2.3.2 Equilíbrio de sub-jogo

Antes de abordarmos o equilíbrio de sub-jogo, é necessário que definamos um sub-jogo. O sub-jogo pode ser definido como um pedaço de um jogo extensivo e que tem como ponto inicial um nó deste mesmo jogo do qual ele faz parte. É portanto o jogo extensivo a partir de determinado ponto na árvore de um jogo extensivo.

Matematicamente pode ser definido como  $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (\succsim_i|_h) \rangle$ , que é a representação do jogo extensivo que segue após o último ponto da história  $h$ .

O equilíbrio deste sub-jogo é alcançado quando utilizada uma estratégia  $s^*$ , tal que para cada jogador  $i \in N$  e para toda história não-terminal  $h \in H \setminus Z$  para cada  $P(h) = i$  temos:

$$O_h(s_{-i}^*|_h, s_i^*|_h) \succsim_i|_h O_h(s_{-i}^*|_h, s_i)$$

O equilíbrio de sub-jogo elimina dos pontos descobertos como sendo equilíbrio de Nash aqueles que equivalem a tratos não críveis. O exemplo a seguir ilustra o ponto em questão.

Seja o jogo representado pela figura 2.8. Os equilíbrios de Nash deste jogo são  $(A, R)$  e  $(B, L)$ . O equilíbrio  $(B, L)$  é sustentado por um trato incrível, pois diz que o jogador 2 escolheria a estratégia  $L$  independentemente da escolha do jogador 1. Porém, se o jogador 1 escolhe  $A$ , seria ferir o princípio de racionalidade, o jogador 2 escolhe  $L$ . Assim ele obtém o maior ganho.

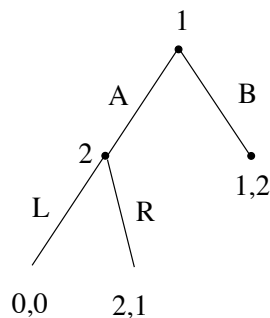


Figura 2.8: Jogo na forma extensiva para representar o equilíbrio de sub-jogo.

A definição mais contundente de equilíbrio de sub-jogo diz que o mesmo é um perfil de estratégia  $s^*$  em  $\Gamma$  onde para cada história  $h$  o perfil estratégico  $s^*|_h$  é um equilíbrio de Nash do sub-jogo  $\Gamma(h)$ .

O equilíbrio de sub-jogo é muito utilizado na resolução de problemas econômicos conhecido como jogo de Stackelberg [4]. Nesse tipo de jogo, um líder escolhe, por exemplo, o preço e a quantidade de produtos a produzir em sua fábrica e então o seguidor fixa seu preço e quantidade de produção a partir das escolhas do primeiro.

## 2.4 Jogos repetitivos

Os modelo de jogos repetitivos são oportunos para representar as interações de longo prazo. O modelo se utiliza do comportamento dos jogadores ao longo do tempo para tomarem ações futuras.

Os jogos repetitivos, como era de se esperar, possuem equilíbrios que somente são sustentáveis no longo prazo. No dilema do prisioneiro aparece o equilíbrio de Nash que é a não cooperação entre ambas as partes. No jogo repetitivo, a combinação de cooperação entre ambos, aparece como um equilíbrio desde que ambos os lados acreditem que quebrar essa cooperação em qualquer período irá cessar em definitivo a cooperação.

Esse fato mostra que escolhas mútuas são atingidas pela teoria e aparece então a norma social. Esta é uma norma que sustenta o resultado de equilíbrio mútuo,



e diz que o equilíbrio é sustentado por uma punição que supostamente ocorre ao se infringir o acordo de cooperação.

Outro ponto de interesse é a comparação entre jogos repetitivos de horizonte infinito e de horizonte finito. A mesma interação possui resultados distintos quando o jogo é modelado com ambas as definições de tempo.

Uma interação que é vista por um observador externo não precisa necessariamente ser modelada como este observador vê a situação, mas sim como os tomadores de ação a vêem. Se uma situação possui horizonte finito, não necessariamente este é o melhor modelo para descrever esta situação. Basta que os jogadores após cada jogada percebam o horizonte de tempo como infinito para que o modelo utilizado seja o de horizonte de tempo infinito.

O comportamento humano tende a ser cooperativo em horizontes de tempo finito e por outro lado tende a ser oportunista quando o horizonte de tempo se aproxima do fim. Políticos normalmente adotam o perfil oportunista próximo ao fim de mandatos enquanto que muitas religiões fazem uso do horizonte infinito (vida após a morte) para segurar fiéis em suas doutrinas.

Um jogo muito famoso quando se estuda teoria dos jogos chama-se Dilema do Prisioneiro. O jogo na forma normal é visto na figura 2.9.

	Confessar	Não confessar
Confessar	(3,3)	(0,4)
Não confessar	(4,0)	(1,1)

Figura 2.9: Dilema do prisioneiro.

O jogo pode ser descrito da seguinte maneira. Dois suspeitos de um crime são postos em celas separadas e serão levados a julgamento. Se no julgamento ambos confessarem o crime, cada um terá como sentença três anos de prisão. Se somente um deles confessar o crime, ele será libertado e será utilizado como testemunha

contra o seu comparsa que será condenado a quatro anos. Se nenhum dos dois confessar, ambos serão condenados a um ano por outros motivos.

Este é o exemplo típico de um jogo que existe um ganho por cooperação. O melhor conjunto de *payoff* é que ambos não confessem o crime, porém ambos tem um incentivo para não serem condenados. Ao se analisar o jogo em somente uma rodada, a predileção de ambos é confessar o crime a não confessar, e o equilíbrio de Nash no caso é *(confessar, confessar)*.

A idéia por trás dos jogos repetitivos é que se o jogo é realizado em forma repetitiva, a saída desejável, vinda da cooperação é uma solução estável, tendo em vista que cada jogador não irá deixar de cooperar o que o levaria a ter perdas nas jogadas subsequentes.

Vamos supor, então, que os números do jogo não representem mais anos, porém unidades monetárias. Dessa maneira, cada jogada, ou estágio, do jogo repetitivo confere a cada jogador mais dinheiro. Suponhamos ainda, que exista um fator de desconto,  $\delta$ , onde  $0 < \delta < 1$  e que pode ser representado como  $\delta = \frac{1}{1-\rho}$ , onde  $\rho$  é uma taxa de desconto. A cada rodada, o valor recebido é decrescido de  $\delta$ .

Os valores que representarão nosso jogo foram modificados para satisfazer a condição abaixo descrita. O jogo pode ser visto na figura 2.10.

	Cooperar	Não cooperar
Cooperar	(3,3)	(0,4)
Não cooperar	(4,0)	(1,1)

Figura 2.10: Dilema do prisioneiro, versão repetitiva.

A estratégia utilizada para o jogo é a seguinte, os jogadores cooperarão até que um deles não coopere mais e aí não receba mais incentivo.

Os jogadores utilizarão sua estratégia da seguinte maneira, eles cooperarão, recebendo os ganhos, até que um não mais coopere e o outro jogador responda não cooperando mais. Dessa maneira ambos terão seus ganhos até o momento. Ou

ainda, na primeira rodada, um jogador não coopera inicialmente, recebe 4 e não mais. O jogo mantém o equilíbrio se  $\frac{1}{1-\delta} \geq 4$ , ou  $\delta \geq 3/4$

### 2.4.1 Definições de jogos com horizonte infinito

O jogo repetitivo de horizonte infinito representa a interação repetitiva do jogo  $J$ , sucessivamente, no qual os jogadores sempre possuem o conhecimento do que foi jogado até aquele ponto da partida.

Seja o jogo  $J = \langle N, (A_i), \succ_{\sim_i} \rangle$  estratégico, onde  $A = \times_i \in N A_i$ . Um jogo repetitivo de horizonte infinito  $J$  é um jogo extensivo com informação perfeita e ações simultâneas  $\langle N, H, P, \succ_{\sim_i}^* \rangle$  nas quais

- $H = \{\oslash\} \cup (\cup_{t=1}^{\infty} A^t)$  (onde  $\oslash$  é a história inicial)
- $P(h) = N$  para cada história não-terminal  $h \in H$
- $\succ_{\sim_i}^{\infty}$  é a relação de preferência no conjunto  $A^{\infty}$  de seqüências infinitas  $(a^t)_{t=1}^{\infty}$  de perfis de ações em  $J$  que estendem a relação de preferência  $\succ_{\sim_i}$  para satisfazer as seguintes condições de separabilidade:

Se  $(a^t) \in A^{\infty}$ ,  $a \in A, a' \in A$ , e  $a \succ_{\sim_i} a'$  então

$$(a^1, \dots, a^{t-1}, a, a^{t+1}, \dots) \succ_{\sim_i}^{\infty} (a^1, \dots, a^{t-1}, a', a^{t+1}, \dots)$$

para todos os valores de  $t$ .

A escolha de uma estratégia na qual uma ação é escolhida em detrimento de outro é assumida como reflexo de uma função de utilidade que inclui aquela ação em questão. Ou seja, a preferência a seguir,  $(a^t) \succ_{\sim_i}^{\infty} (b^t)$  é reflexo da predileção de  $(u_i(a^t))$  por  $(u_i(b^t))$ , no jogo  $J$ .

A seguir serão expostas três formas de predileção de relações de preferência:

- **Desconto:** Há um número  $\delta \in (0, 1)$  (o fator de desconto) tal que a seqüência  $(v_i^t)$  de números reais é pelo menos tão boa quanto a seqüência  $(w_i^t)$  se e somente se  $\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} (v_i^t - w_i^t) \geq 0$

De acordo com esse modelo, a cada período de tempo o valor da sequência  $(v_i^t)$  é diminuído por um valor  $\delta$ . A medida que o jogo evolui podemos obter o valor da função utilidade por  $\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} v_i^t$ . Tendo em vista que os valores de *payoff* estão compreendidos em uma faixa limitada a soma é bem-definida. O ganho portanto diminui com o passar do tempo.

Existem outros dois critérios que podem ser levados em conta que são simétricos. São eles o limite das médias e o sobrepujamento(*overtaking*).

- **Limite das médias:** A sequência  $(v_i^t)$  de números reais é preferida à sequência  $(w_i^t)$  se e somente se  $\liminf \sum_{t=1}^T (v_i^t - w_i^t) / T > 0$  (isto é, se e somente se existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\sum_{t=1}^T (v_i^t - w_i^t) / T > \epsilon$  para todos menos um número finito de períodos  $T$ ).

Esse critério traduz a estratégia do jogador que está disposto a sacrifícios no curto prazo em detrimento de um ganho maior (média) no longo prazo. Um jogador que preferisse utilizar esta técnica escolheria a sequência  $(0, \dots, 0, 2, 2, \dots)$  à sequência constante  $(1, 1, \dots)$ , independente da posição que o dois apareça pela primeira vez.

- **Sobrepujamento (*overtaking*):** A sequência  $(v_i^t)$  de números reais é preferida à sequência  $(w_i^t)$  se e somente se  $\liminf \sum_{t=1}^T (v_i^t - w_i^t) > 0$ .

Como o critério anterior, este critério enfatiza as jogadas de longo prazo porém é sensível a mudanças.

## 2.5 Jogos evolucionários

A teoria dos jogos evolucionários surgiu como uma aplicação da teoria dos jogos a contextos da disciplina de biologia. A teoria neste contexto é utilizada para visualizar as relações como uma adaptação de indivíduos levando a uma evolução da espécie.

A teoria ainda é aplicada a vários outros conceitos como a relação e interação humana, neste caso a evolução pode ser um comportamento social, por isso filósofos e antropólogos a utilizam.

A nova maneira de encarar a teoria acrescenta um fator dinâmico, que faltava à teoria original. Ou seja, esta maneira de enxergar a teoria dos jogos volta a ser utilizada por economista e ainda por pessoas da área de computação, tendo em vista que nesta última, grande parte das interações ocorrem ao longo do tempo.

A primeira vez que aparece a teoria evolucionária dos jogos foi quando R. A. Fisher analisou a proporção de 1 : 1 entre machos e fêmeas em diversas espécies. O questionamento enfrentado por Fisher foi o seguinte: Porque a taxa de indivíduos machos e fêmeas em grande parte das espécies é aproximadamente igual se a maior partes dos machos nunca formam casais ?

Esse excesso de indivíduos machos parecia ser um fardo para a espécie. Fisher notou após estudos que o número de netos em uma espécie depende da proporção entre machos e fêmeas em uma comunidade. Então, se uma comunidade possui mais machos, o coeficiente de adaptação individual das fêmeas aumenta, e vice-versa. Este fato introduz um elemento novo na dinâmica de interação e demonstra a evolução.

Apesar de ser completamente aplicável a teoria dos jogos neste contexto, Fisher não o fez. A primeira pessoa a aplicar esta forma a conceitos biológicos foi R. C. Lewontin. Logo depois Maynard Smith introduziu o conceito de Estratégia Estável Evolutivamente.

Existem duas maneiras de se estudar a teoria evolucionária dos jogos. A primeira vem do trabalho acima citado, através do conceito da Estratégia Estável Evolutivamente. A segunda constrói um modelo explícito do processo pelo qual a frequência de estratégias muda na população e estuda as propriedades da dinâmica da evolução neste modelo.

### 2.5.1 Estratégia Estável Evolutivamente

Recordemo-nos do exemplo anteriormente comentado, a interação entre duas aves que disputam um recurso  $V$ , uma melhora no processo Darwiniano por exemplo. Existem duas estratégias a serem seguidas:

**Águia:** Iniciar comportamento agressivo, não parando até sofrer alguma lesão ou até o oponente recuar. **Pombo:** Recuar imediatamente se o oponente adota o comportamento agressivo.

A figura 2.11 nos mostra a matriz de ganho variando de acordo com o comportamento.

	Águia	Pombo
Águia	$1/2(V-C)$	$V$
Pombo	$0$	$V/2$

Figura 2.11: Disputa animal por um recurso.

Se levarmos em consideração que caso ambos os indivíduos iniciem a disputa com um comportamento agressivo, o conflito deve terminar com ambos os indivíduos machucados. O custo do conflito reduz a adaptação individual de um valor  $C$ . Quando alguém com o comportamento Águia se defronta com alguém de comportamento Pombo, o segundo recua imediatamente e o primeiro obtém todo o recurso. Quando ambos os indivíduos com comportamento Pombo se encontram, dividem igualmente o recurso.

Para que a estratégia seja estável evolutivamente, ela precisa ter a propriedade de que se quase todos os membros da população utilizar esta estratégia, nenhum mutante (indivíduos que adotem uma estratégia diferente desta) pode invadí-la com sucesso. Suponhamos que  $\Delta F(s_1, s_2)$  represente a mudança de aptidão de um indivíduo utilizando a estratégia  $s_1$  contra um indivíduo utilizando a estratégia  $s_2$ . E ainda seja  $F(s)$  a adaptabilidade total de um indivíduo utilizando a estratégia  $s$ .

Suponhamos ainda que cada indivíduo na população possua uma aptidão inicial, digamos  $F_0$ . Se  $\sigma$  é uma estratégia estável evolutivamente e  $\mu$  um mutante tentando invadir uma população temos:

$$F(\sigma) = F_0 + (1 - p) \Delta F(\sigma, \sigma) + p \Delta F(\sigma, \mu)$$

$$F(\mu) = F_0 + (1 - p) \Delta F(\mu, \sigma) + p \Delta F(\mu, \mu)$$

onde  $p$  é a proporção da população seguindo a estratégia mutante  $\mu$  (caso contrário  $\mu$  invadiria a população).

Se  $\sigma$  é estável evolutivamente, a adaptabilidade de um indivíduo utilizando a estratégia  $\sigma$  deve ser maior que a de um indivíduo seguindo  $\mu$ . Ou seja,  $F(\sigma) > F(\mu)$ . Tendo em vista que  $p$  é muito próximo a zero, podemos admitir que:

$$\Delta F(\sigma, \sigma) > \Delta F(\mu, \sigma)$$

ou que

$$\Delta F(\sigma, \sigma) = \Delta F(\mu, \sigma) \text{ e } \Delta F(\sigma, \mu) > \Delta F(\mu, \mu)$$

Podemos do acima exposto dizer que a estratégia  $\sigma$  é uma estratégia estável evolutivamente se uma das duas condições é válida: (1)  $\sigma$  se sai melhor numa disputa contra  $\sigma$  do que qualquer outra estratégia, ou (2) algum mutante se sai tão bem numa disputa contra  $\sigma$  como  $\sigma$ , porém  $\sigma$  se sobressai numa disputa contra tal mutante do que outro mutante.

No jogo Águia-Pombo, a estratégia Pombo não é evolutivamente estável tendo em vista que esta pode ser invadida por um mutante Águia. Se  $V$ , o valor recebido por se portar como Águia, for maior que  $C$ , então esta é uma estratégia estável evolutivamente.

### 2.5.2 Modelo explícito

Como um exemplo da segunda maneira de se chegar a definição de estabilidade evolutiva utilizaremos o Dilema do Prisioneiro. Como anteriormente existem duas ações permitidas, cooperar ou não-cooperar.

Essa é uma matriz genérica do jogo em questão:

Onde  $T > R > P > S$  e  $T' > R' > P' > S'$ .

	Cooperar	Não cooperar
Cooperar	(R,R')	(S,T')
Não cooperar	(T,S')	(P,P')

Figura 2.12: Dilema do prisioneiro.

Como uma população de indivíduos que jogam seguidamente o dilema do prisioneiro iria evoluir ?

Antes de mais nada devemos fazer algumas considerações sobre a população. A primeira delas é que a população é muito grande e iremos acompanhá-la através das proporções de pessoas que seguem a estratégia cooperar e da parte que segue a estratégia não-cooperar. Seja  $p_c$  e  $p_{nc}$  essas proporções.

Devemos ainda considerar  $W_c$  a adaptabilidade média dos que cooperam e  $W_{nc}$  a dos que não cooperam, e ainda  $\bar{W}$  a média de toda a população. As três variáveis acima se relacionam da seguinte maneira:

$$W_c = F_0 + p_c \Delta F(C, C) + p_{nc} \Delta F(C, D)$$

$$W_{nc} = F_0 + p_c \Delta F(D, C) + p_{nc} \Delta F(D, D)$$

$$\bar{W} = p_c W_c + p_{nc} W_{nc}$$

A segunda premissa é que a população da geração seguinte se relaciona a população corrente da seguinte maneira:

$$p'_c = \frac{p_c W_c}{\bar{W}} \text{ e}$$

$$p'_{nc} = \frac{p_{nc} W_{nc}}{\bar{W}}$$

Podemos reescrever estas expressões da seguinte maneira:

$$p'_c - p_c = \frac{p_c (W_c - \bar{W})}{\bar{W}} \text{ e}$$

$$p'_{nc} - p_{nc} = \frac{p_{nc} (W_{nc} - \bar{W})}{\bar{W}}$$

Considerando que a mudança na frequência das estratégias é pequena entre uma geração e outra, podemos escrevê-las na forma de equação diferencial:

$$\frac{dp_c}{dt} = \frac{p_c (W_c - \bar{W})}{\bar{W}} \text{ e}$$

$$\frac{dp_{nc}}{dt} = \frac{p_{nc} (W_{nc} - \bar{W})}{\bar{W}}$$



Essas equações nos fornece uma dinâmica contínua para a teoria dos jogos evolucionária, e são conhecidas como replicadores dinâmicos.

Para o caso do dilema do prisioneiro podemos escrevê-los da seguinte maneira:

$$W_c = F_0 + p_c \Delta F(C, C) + p_{nc} \Delta F(C, D)$$

$$W_c = F_0 + p_c R + p_{nc} S$$

e

$$W_{nc} = F_0 + p_c \Delta F(D, C) + p_{nc} \Delta F(D, D)$$

$$W_{nc} = F_0 + p_c T + p_{nc} P$$

Desde que  $T > R$  e  $P > S$ , segue que  $W_{nc} > W_c$  e então  $W_{nc} > \bar{W} > W_c$ . Isso significa que

$$\frac{W_{nc} - \bar{W}}{\bar{W}} > 0 \text{ e}$$

$$\frac{W_c - \bar{W}}{\bar{W}} < 0$$

Dessa maneira, a estratégia da geração seguinte será

$$p'_d = p_d \frac{W_{nc} - \bar{W}}{\bar{W}}$$

$$p'_c = p_c \frac{W_c - \bar{W}}{\bar{W}}$$

Podemos notar que com o tempo a estratégia cooperar tende a desaparecer.

## 2.6 Algoritmos existentes para a busca do equilíbrio de Nash

Inúmeros autores concordam que o equilíbrio de Nash é um problema do tipo NP-difícil, [2] trata de provar esse conceito. Por este motivo, inúmeros autores buscam relaxar ou modificar alguma condição, ou até mesmo restringir a busca a determinados tipos de jogos para reduzir a complexidade dos algoritmos de busca.

Em [3], os autores se dedicam a estudar jogos que possuam equilíbrios de Nash puros, evitando, desta maneira, os mistos e buscam soluções em tempos polinomiais. De fato este autor realiza seus estudos em jogos de congestão (*congestion game*) e avalia que no caso de jogos simétricos, existe um algoritmo polinomial. Qualquer desvio das condições fixadas leva a um jogo NP-difícil.

[1] consegue mostrar que jogos bimatriz 0,1 podem ser reduzidos a NP-completo, enquanto que [12] mostra que algoritmos quasi-polinomiais se mostram eficientes para calcular o equilíbrio de Nash aproximado para o mesmo jogo. [11] utiliza algoritmos numéricos para buscar a resolução de tais jogos, embora sem muito sucesso.

De um modo geral, diversos autores caminharam pela seara da teoria dos jogos, tentaram buscar soluções polinomiais, porém, sem relaxar nenhuma condição ou modificar ligeiramente o jogo em questão, o problema de se encontrar o equilíbrio de Nash é um problema do tipo NP-difícil.

# Capítulo 3

## Teoria dos Jogos e Produto de Grafos

Nesse capítulo é descrita a relação traçada entre a teoria dos grafos e a teoria dos jogos. Nele é exibida a construção de um grafo a partir de um jogo. Os conceitos de grafos são abordados dentro do modelo proposto na teoria dos jogos.

### 3.1 Produto de Grafos

Um grafo é um par  $G = (V, E)$ , onde  $V$  representa o conjunto de vértices do grafo e  $E$  representa o conjunto de arestas, onde  $E \subseteq V \times V$ , i.e., os elementos de  $E$  são pares ordenados de elementos de  $V$ .

A maneira convencional de representar um grafo é desenhando os vértices com círculos ou pontos e ligar os vértices por setas para representar as arestas. A informação relevante desta representação é, na verdade, quais são os vértices que estão ligados, ou conectados.

#### Produto de Dois Grafos

Dados dois grafos,  $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$  e  $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ , o produto cartesiano dos grafos é definido como  $G_{1 \times 2} = \langle V_{1 \times 2}, E_{1 \times 2} \rangle$ , onde

- (i)  $V_{1 \times 2}$  é o produto cartesiano  $V_1 \times V_2$

- (ii) Uma aresta  $\langle (x, y), (u, v) \rangle \in E_{1 \times 2}$  sse
- i)  $y = v$  e  $\langle x, u \rangle \in E_1$  ou
  - ii)  $x = u$  e  $\langle y, v \rangle \in E_2$ .

### Produto de $N$ Grafos

Dados  $n$  grafos,  $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle \cdots G_n = \langle V_n, E_n \rangle$ , o produto cartesiano dos grafos é definido como  $G_{1 \times 2 \cdots n} = \langle V_{1 \times 2 \cdots n}, E_{1 \times 2 \cdots n} \rangle$ , onde

- (i)  $V_{1 \times 2 \cdots n}$  é o produto cartesiano  $V_1 \times V_2 \cdots \times V_n$
- (ii) Uma aresta  $\langle (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, y_i, \cdots, x_n) \rangle \in E_{1 \times 2 \cdots n}$  sse  $\langle x_i, y_i \rangle \in E_i$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ .

## 3.2 Jogadores e Jogos

Um diagrama de transição é um par  $\langle S, R_a \rangle$  onde  $S$  é o conjunto de estados e  $R_a$  é uma família de relações uma para cada ação  $a$ . Em um grafo, o conjunto de estados é definido por um conjunto de pontos, digamos  $V_{jogador}$  e a relação de preferência representada pelas arestas rotuladas, no caso  $Ea_{jogador}$ . O conjunto de transição pode ser representado pela tupla  $\langle V, Ea \rangle$ .

**Jogador** Um jogador  $i$  é uma tupla  $\langle (V_i, Ea_i), \succ_{\sim_i} \rangle$  onde  $\langle V_i, Ea_i \rangle$  é um diagrama de transição e  $\succ_{\sim_i}$  é uma relação de preferência sobre o conjunto de estados  $V_i$  do diagrama de transição.

**Jogo** Seja  $N$  o número de jogadores e  $J_p = \langle (V_i, Ea_i), \succ_{\sim_i} \rangle$  os jogadores, um para cada  $i \in N$ . Um jogo é definido como um subproduto dos grafos  $\langle V_i, E_i \rangle$ .

## 3.3 Descrição dos estados em um jogo

Consideremos inicialmente o jogo da figura 3.1-a, este jogo possui duas representações de interesse neste estudo. A primeira representação é tradicional em teoria dos jogos, enquanto a segunda será utilizada para que formemos os grafos onde relacionaremos a equivalência entre Equilíbrios de Nash e Sumidouros.

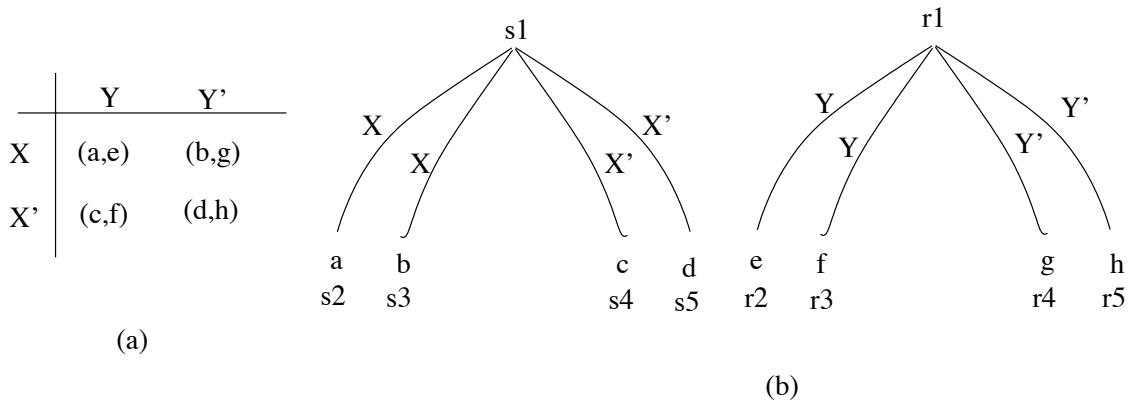


Figura 3.1: Jogo na forma normal e sua representação através de estados.

Uma descrição alternativa pode ser vista na figura 3.1-b. A cada decisão tomada por um jogador, equivale um estado. Dessa forma a escolha da jogada  $X$  com *payoff* (ganho) de  $a$  equivale ao estado  $s_2$ .

Ainda de acordo com a figura 1-a, podemos notar que um jogador tem um conjunto de possíveis ações em somente uma direção (mas em qualquer sentido), dada uma determinada escolha de seu oponente. Sendo assim, o jogador linha <sup>1</sup> pode movimentar-se verticalmente dada qualquer jogada do jogador coluna.

A figura 2 exemplifica esta situação, onde o jogador coluna optou pela ação  $Y$ , restando ao jogador linha escolher entre  $X$  e  $X'$ .

No exemplo acima podemos enumerar as características de um jogo na forma normal. O conjunto de jogadores,  $N$ , possui o tamanho 2. *linha* e *coluna* são estes jogadores.

Cada jogador possui também seu conjunto de ações. O jogador *linha*, por exemplo, pode optar pelas estratégias ( $X$  ou  $X'$ ) enquanto que o jogador *coluna* por optar por ( $Y$  ou  $Y'$ ).

Já as relações de preferência são designadas de acordo com o valor dos elementos  $(a, b, c, \dots)$ . No caso que o jogador *linha* opte por  $a$  e não por  $c$ , teremos  $a \succ_i c$ .

---

<sup>1</sup>Os nomes jogador linha e jogador coluna indicam as ações que cada um dos jogadores podem tomar. O jogador linha pode movimentar-se entre as linhas e o jogador coluna, como sugere o nome, entre as colunas.

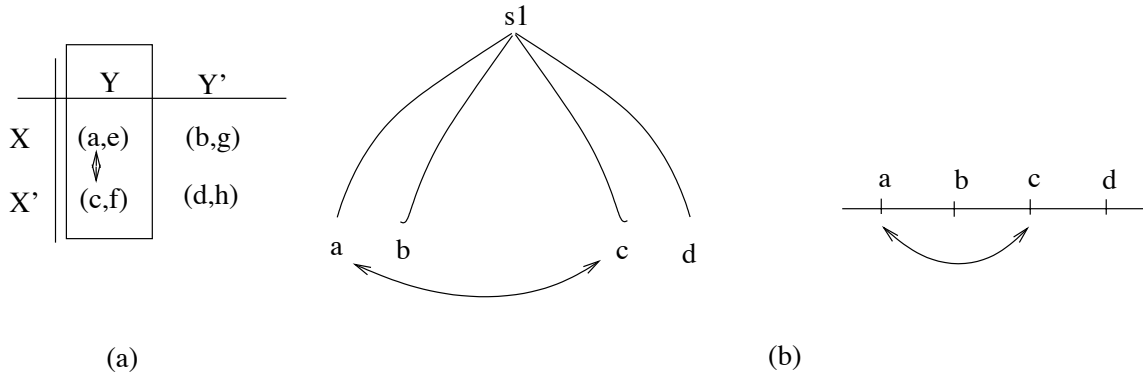


Figura 3.2: Direção de preferência do jogador linha.

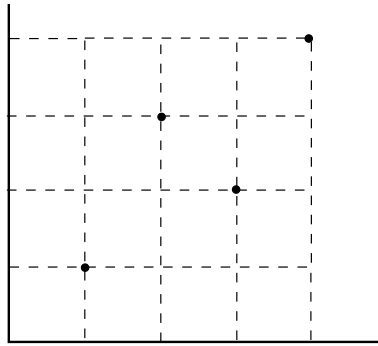


Figura 3.3: Produto de grafos com pontos de interseção marcados.

- $N = 2$
- $A_1 = (X, X')$  e  $A_2 = (Y, Y')$

A seta na direção vertical mostra as duas possibilidades de movimentação para o jogador linha. Ele pode escolher obter *payoff*  $a$  ou  $c$ , e esta escolha será determinada pela escolha do maior valor (no caso de se tentar maximizar esse valor).

A entrada para este algoritmo, como mencionado anteriormente é um jogo na forma normal, digamos  $\langle N, (A_i), \succsim_i \rangle$ . A figura 2.1 representa um jogo em sua forma normal. A seguir descrevemos um algoritmo simples para obter o produto de um grafo e descobrir o equilíbrio de Nash a partir de um jogo na forma normal.

- 1º passo - Decrever o jogo através de sua representação alternativa, tal como na figura 3.1-b

- 2º passo - Definir as direções de preferência, como na figura 3.2
- 3º passo - A partir da representação alternativa, obter o produto de grafos equivalentes tal como na figura 3.3
- 4º passo - Já de posse do grafo, inserir as arestas com orientação, como na figura 3.10
- 5º passo - Como resultado do produto de grafos ordenados, somos capazes de identificar o sumidouro que equivale ao equilíbrio de Nash.

O passo três apenas marcar os pontos que são as possíveis saídas obtidas no jogo. O passo quatro é composto de duas partes. A primeira movimentação que realizamos é rebater todas as setas que indicam a ordenação para todos os pontos do produto de grafos. Depois devemos manter somente as setas que entrem ou saiam dos pontos pertencentes ao jogo, ou seja, as tuplas que são saídas do jogo. Isto é, obter o subproduto através da eliminação das setas que não indicam relação alguma com as possíveis saídas do jogo.

A figura 3.4 mostra justamente os dois passos intermediários do passo 4. A figura 3.4-a mostra todas as possíveis combinações de ordenação enquanto que a figura 3.4-b mostra apenas aquelas que nos revelam possíveis saídas.

Depois, no passo 5 verificamos se existem duas arestas direcionadas para o mesmo ponto, no caso de dois jogadores, e este ponto representa um equilíbrio de Nash.

O resultado obtido do grafo acima, evidenciado no passo de número 5, é o equilíbrio de Nash, obtido não a partir da representação normal porém do produto de grafos obtido através de sua transformação.

O exemplo a seguir mostra a transformação de um jogo na forma normal em um produto de grafo e mostra que o equilíbrio de Nash equivale ao sumidouro obtido por tal produto.

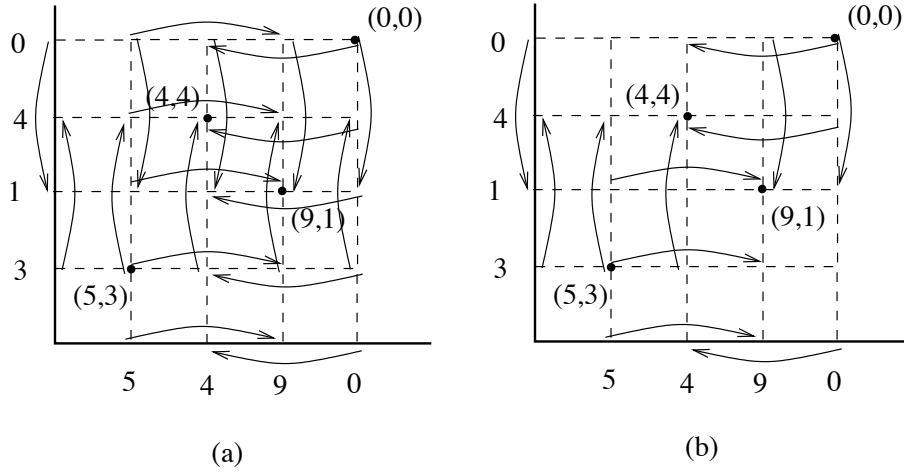


Figura 3.4: (a) Produto de grafos representando todas as possíveis combinações de ordenação. (b) Subproduto de grafos, marcando apenas as ordenações que levam a uma saída do jogo

### 3.3.1 Complexidade

Dado um Jogo estrategico  $J = \langle A_1, A_2, \preceq_1, \preceq_2 \rangle$ , onde  $A_i$  e o conjunto de acoes do jogador  $i$  e  $\preceq_i$  a relacao de preferencia do jogador  $i$ ,  $\preceq_i \subseteq A_1 \times A_2$ .

- (i) Obter jogador no formato nosso:  $J_1 = \langle A_1 \times A_2, \preceq_1 \rangle$  e  $J_2 = \langle A_1 \times A_2, \preceq_2 \rangle$ .

Complexidade:  $\mathcal{O}(|A_1| \times |A_2|)$

- (ii) Obter jogo  $J_1 \times J_2 = \langle (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2), \preceq_1, \preceq_2 \rangle$

Complexidade:  $\mathcal{O}((|A_1| \times |A_2|)^2 + |\preceq_1| + |\preceq_2|)$

- (iii) Achar os sumidouros em  $J_1 \times J_2$  e fazer uma busca no grafo  $J_1 \times J_2$ .

Complexidade:  $\mathcal{O}((|A_1| \times |A_2|)^2 + |\preceq_1| + |\preceq_2|)$



### 3.4 Transformação de um jogo na forma normal em um produto de grafos

Seja o jogo descrito na figura 3.5, representado em sua forma normal. Iremos aplicar o algoritmo descrito na seção anterior para a obtenção do sumidouro e consequentemente do equilíbrio de Nash.

	A	B
a	5,3	4,4
b	9,1	0,0

Figura 3.5: Jogo na forma normal.

O jogo possui como equilíbrio de Nash os pontos (4,4) e (9,1), obtido pela predileção de cada jogador em obter o maior ganho. O primeiro passo do algoritmo nos diz para descrever o jogo através de sua representação alternativa, o que pode ser visto na figura 3.6. Nesta forma notamos claramente a relação de preferências entre as possíveis escolhas de cada jogador.

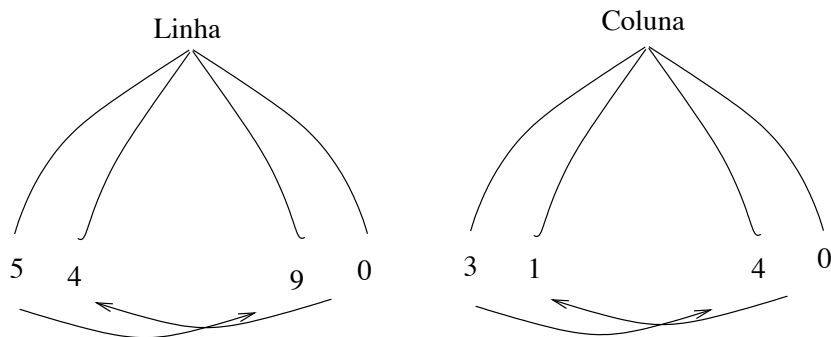


Figura 3.6: Representação alternativa para o jogo na forma normal.

A partir desta representação podemos marcar os pontos de interseção no produto de grafos, como visto na figura 3.7-a. De posse deste grafo, devemos orientar as arestas que ligam os pontos envolvidos no jogo (figura 3.7-b), e assim conseguimos obter o sumidouro, que equivale ao equilíbrio de Nash (figura 3.8).

Na figura 3.8 podemos observar o sumidouro, indicado nos pontos circundados. Os pontos recebem duas arestas orientadas, e por se tratar de um jogo com  $N = 2$ , isto indica um sumidouro ou equilíbrio de Nash.

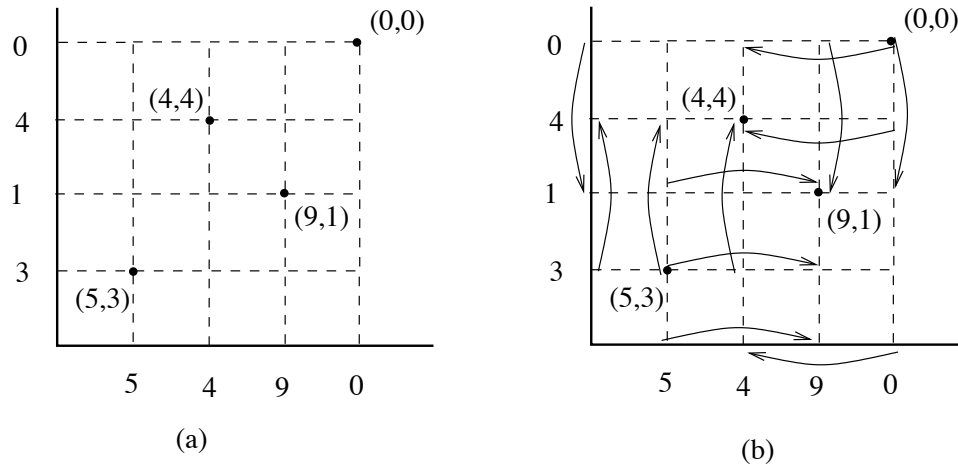


Figura 3.7: (a)- Interseções marcadas no produto de grafos e (b) - Produto de grafos com arestas direcionadas.

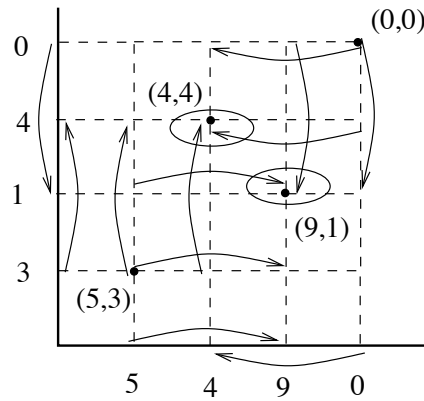


Figura 3.8: Sumidouro no produto de grafos, equivalente ao equilíbrio de Nash.

### 3.5 A equivalência entre um Jogo na forma extensiva e um Grafo

Tal como para jogos na forma estratégica, os jogos na forma extensiva podem ser transformados em um produto de grafos para assim encontrarmos o equilíbrio de Nash. A seguir, mostramos o algoritmo que nos leva a tal resultado.

Seja um jogo extensivo representado pela tupla  $\langle N, H, P, \succsim_i \rangle$ , esta será a entrada para o nosso algoritmo. Tal como no exemplo anterior, o passo fundamental é a representação do jogo em sua forma alternativa.

- 1º passo - Descrever o jogo através de sua representação alternativa, tal como na figura 3.9-b
- 2º passo - Definir as direções de preferência, como na figura 3.13
- 3º passo - A partir da representação alternativa, obter o produto de grafos equivalentes tal como na figura 3.3
- 4º passo - Já de posse do grafo, inserir as arestas com orientação, como na figura 3.14
- 5º passo - Como resultado do produto de grafos ordenados, somos capazes de identificar o sumidouro que equivale ao equilíbrio de Nash.

No exemplo da seção anterior conseguimos descrever um jogo através de um produto de grafos, para isto utilizamos um algoritmo. No produto de grafos fomos capazes de encontrar um sumidouro e mostramos que este ponto equivalia ao equilíbrio de Nash. Nesta seção demonstraremos como esta equivalência ocorreu e porque é válida.

Se um jogo na Forma Normal possui um equilíbrio de Nash, ele possui um par de arestas direcionadas como visto na figura 3.10 (porém somente direcionada a um vértice), que apontam para o mesmo ponto no produto de grafos. As arestas indicam a predileção por movimentação de jogadas, ou seja, mostra o ponto para

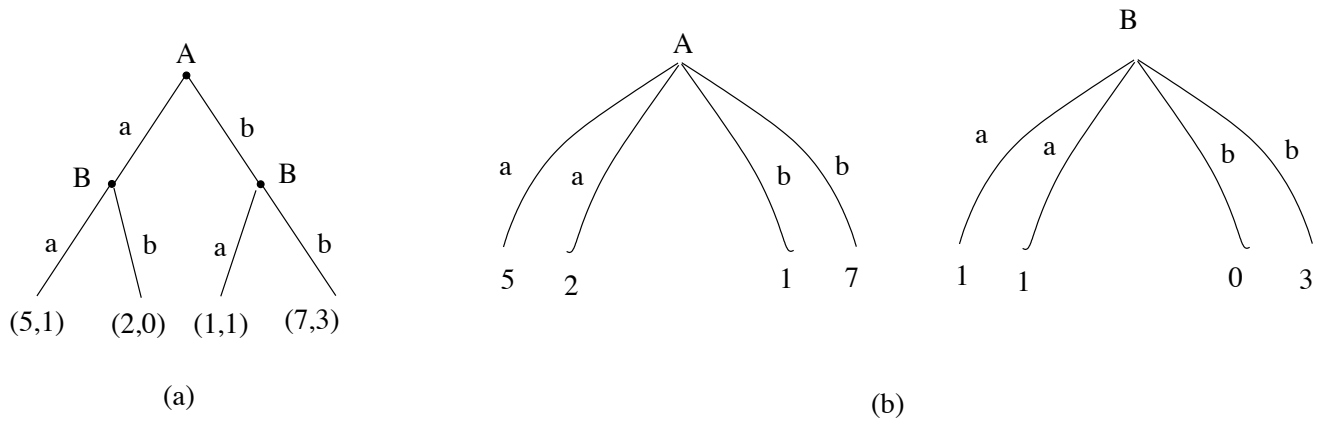


Figura 3.9: Jogo na forma extensiva e seu equivalente.

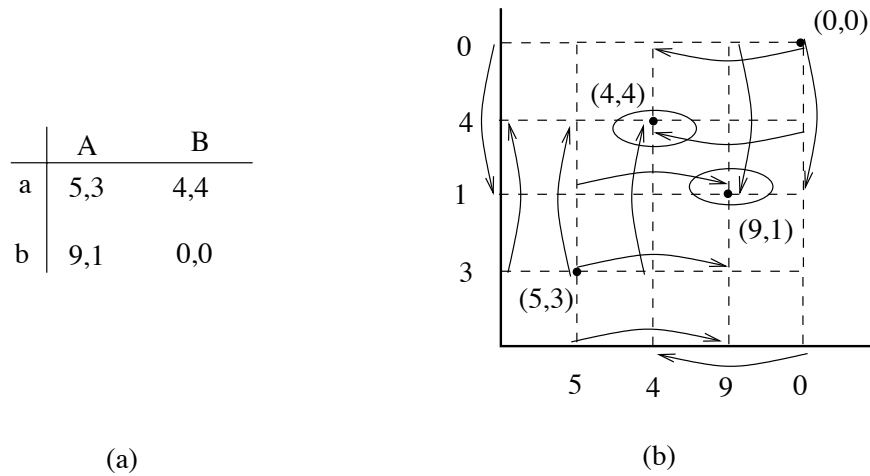


Figura 3.10: A representação de um jogo em um grafo de produto.

onde um jogador prefere se deslocar. Já que neste ponto ambos os jogadores não tem vontade de se deslocar unilateralmente, aquele é um equilíbrio de Nash.

Por outro lado, se um produto de grafos possui arestas chegando em um ponto, como essas arestas representam a predileção de escolha de pontos num jogo na Forma Normal, o ponto indicado pelo produto, é também o ponto escolhido pelos jogadores para ficarem, sem que haja um motivo para unilateralmente algum jogador se desviar desse ponto.

Na figura 3.11, que mostra um exemplo de correspondência dessa predileção, vemos o jogo em sua forma normal, a sua correspondência é vista na figura 3.11-b. Esse jogo possui dois equilíbrios de Nash que são os pontos  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$ . As arestas direcionadas na figura 3.11-b indica a predileção de escolhas dos pontos. Dessa forma vemos no grafo que os pontos  $(s_2, r_2)$  e  $(s_5, r_5)$  são sumidouros, e portanto equilíbrios de Nash.

O jogo na forma normal nos indica como serão as escolhas de orientação de arestas no produto de grafos. O sumidouros que surgem nos produtos de grafos nos indicam os equilíbrios de Nash.

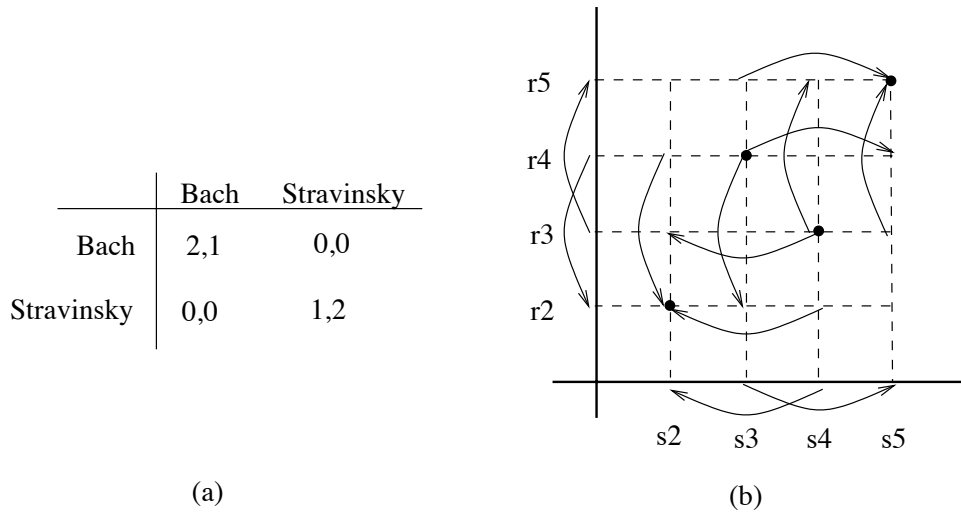


Figura 3.11: Jogo Bach Stravinsky.

Seja o jogo descrito na figura 3.12, representado na forma extensiva. Assim como fizemos para o jogo na forma normal, iremos aplicar o algoritmo descrito previamente para a obtenção de seu equivalente em forma de produto de grafos e assim obter o sumidouro, que deve equivaler ao equilíbrio de Nash.

O jogo possui o equilíbrio de Nash nos pontos  $(5, 1)$  e  $(7, 3)$ , pontos onde os jogadores obtém o maior retorno. Seguindo o algoritmo descrito anteriormente, devemos buscar a descrição do jogo na forma alternativa. Dita descrição pode ser vista na figura 3.13.

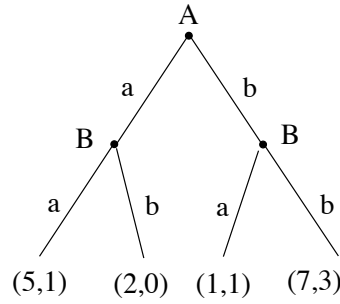


Figura 3.12: Jogo na forma extensiva.

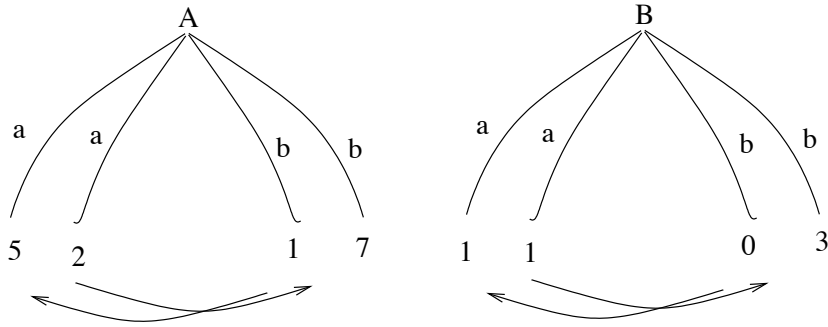


Figura 3.13: Descrição alternativa para o jogo na forma extensiva.

Como fizemos no exemplo anterior, marcamos os pontos de interseção no produto de grafos (figura3.14-a) obtidos a partir da representação alternativa (figura3.14-b) correspondente ao jogo em questão.

Depois de marcar os pontos, inserimos as arestas com direção para assim obter o produto de grafos com o sumidouro marcado (figura3.15).

### 3.5.1 Complexidade

Dado um Jogo estrategico  $J = \langle A_1, A_2, \preceq_1, \preceq_2 \rangle$ , onde  $A_i$  e o conjunto de acoes do jogador  $i$  e  $\preceq_i$  a relacao de preferencia do jogador  $i$ ,  $\preceq_i \subseteq A_1 \times A_2$ .

- (i) Obter jogador no formato nosso:  $J_1 = \langle A_1 \times A_2, \preceq_1 \rangle$  e  $J_2 = \langle A_1 \times A_2, \preceq_2 \rangle$ .

Complexidade:  $\mathcal{O}(|A_1| \times |A_2|)$

- (ii) Obter jogo  $J_1 \times J_2 = \langle (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2), \preceq_1, \preceq_2 \rangle$

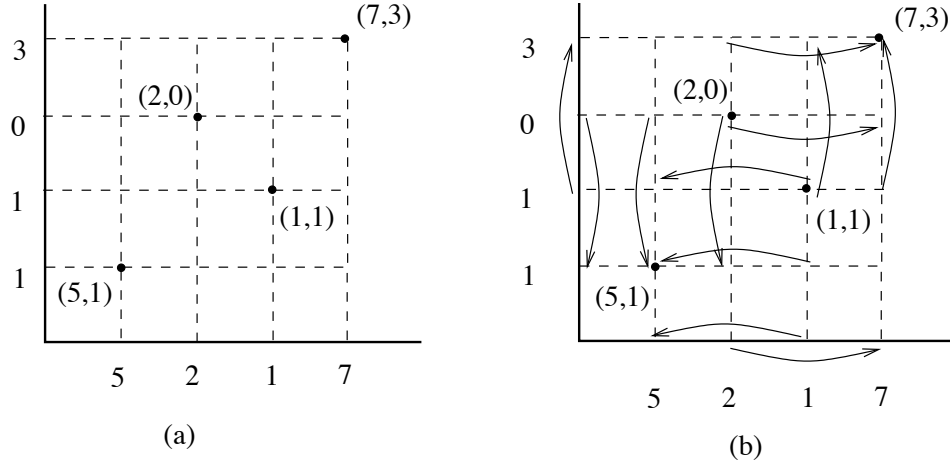


Figura 3.14: (a)- Interseções marcadas no produto de grafos e (b) - Produto de grafos com arestas direcionadas.

Complexidade:  $\mathcal{O}(|A_1| \times |A_2| + |\preceq_1| + |\preceq_2|)$

(iii) Achar os sumidouros em  $J_1 \times J_2$  e fazer uma busca no grafo  $J_1 \times J_2$ .

Complexidade:  $\mathcal{O}(|A_1| \times |A_2| + |\preceq_1| + |\preceq_2|)$

## 3.6 Exemplos de equivalência para jogos extensivos e estratégicos

Abaixo encontramos dois exemplos clássicos, um para cada tipo de jogo. No primeiro exemplo, o jogo *Dove-Hawk*, que é um jogo extensivo conhecido, nele vemos a equivalência do jogo em forma de um grafo. Já o segundo exemplo, *Mico-Gorila*, nos traz um jogo clássico estratégico, e constuímos o grafo a partir do mesmo.

### 3.6.1 A disputa de alimentos entre o Pombo e Águia

O jogo que utilizaremos como exemplo para a transformação de um jogo na forma estratégica para a forma em grafos chama-se em inglês *Hawk-Dove*.

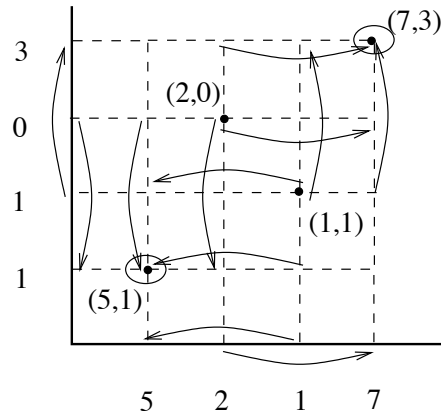


Figura 3.15: Representação por grafo do jogo extensivo.

Este jogo, que numa tradução livre pode ser chamado de Pomba-Águia, é utilizado para introduzir o conceito de jogos evolutivos. Mas aqui limitar-nos-emos a utilizar as espécies de comportamento que dois animais podem exercer quando buscam alimentos.

O jogo estratégico pode ser representado pela seguinte figura 3.16. A essa representação na forma normal temos a representação da figura 3.17 introduzida anteriormente.

	Dove	Hawk
Dove	3,3	<u>1,4</u>
Hawk	<u>4,1</u>	0,0

Figura 3.16: Jogo *Hawk-Dove*.

Que nos leva a representação em grafos exibida na figura 3.18. Os dois pontos assinalados, que correspondem às coordenadas  $(4,1)$  e  $(1,4)$ , são equilíbrios de Nash.



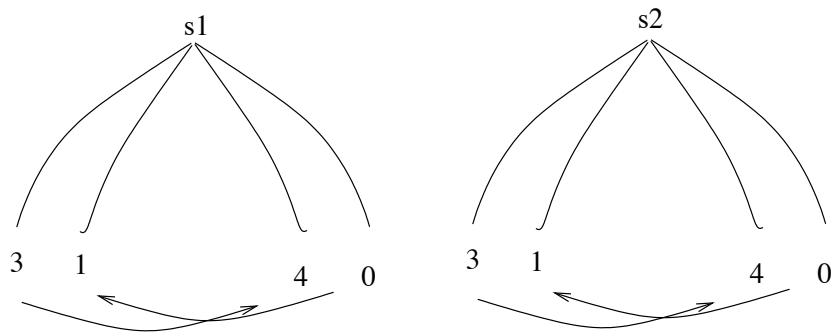


Figura 3.17: Representação intermediária.

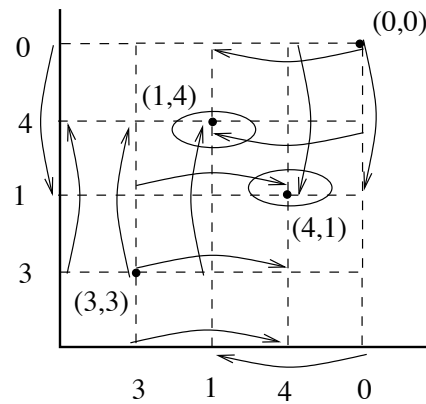


Figura 3.18: Representação em grafos do jogo *Dove-Hawk*.

### 3.6.2 A disputa por alimentos

O próximo jogo, um jogo extensivo, será utilizado para demonstrar a aplicação da mesma representação para jogos extensivos.

O jogo em questão representa novamente uma disputa na natureza, é o jogo entre o Mico e o Gorila.

Supondo que parte da dieta destes animais é composta por uma fruta que fica no topo de uma árvore, e por capricho da natureza, tal fruta só nasce em um exemplar por árvore.

Para que os símios possam obter esta fruta, ao menos um deles necessariamente, necessita subir na árvore, fazer balançar o galho para que a fruta caia.

Estudos mostram que uma destas frutas fornece  $10Kcal$  de energia. Para o Gorila subir a árvore, balançar o galho e voltar ao solo, gasta  $2Kcal$ . Para o Mico este valor é irrelevante.

Se ambos os macacos sobem na árvore, descem e comem a fruto, o Gorila consegue  $7Kcal$  enquanto que o Mico apenas  $3Kcal$ .

Se somente o Gorila sobe a árvore, enquanto em solo o Mico começa a comer a fruta, consegue  $4Kcal$ . Se o Mico sobe, o Gorila, por sua vez, obtém  $9Kcal$ .

Se por exemplo, o gorila começa a movimentação teremos o jogo extensivo da figura 3.19. A este jogo corresponde a forma intermediária da figura 3.20 e por fim sua representação em grafos encontra-se na figura 3.21. Os pontos marcados representam os equilíbrios de Nash deste jogo.

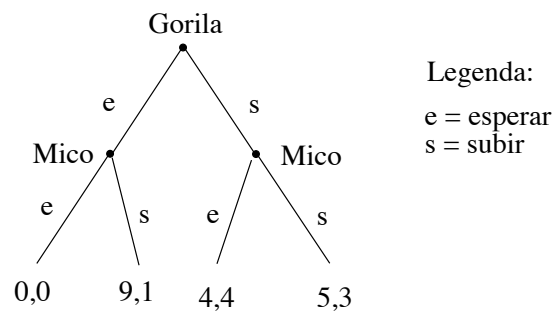


Figura 3.19: Representação extensiva do jogo Mico-Gorila.

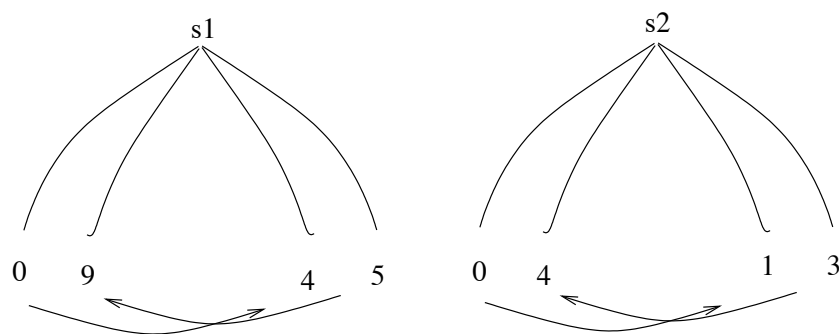


Figura 3.20: Representação intermediária.

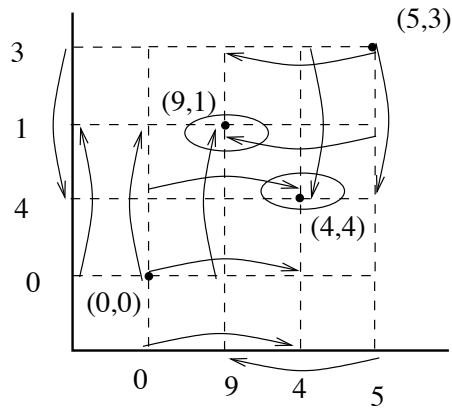


Figura 3.21: Representação em grafos.

### 3.7 Representação simplificada para jogos estratégicos

Uma versão simplificada da representação pode ser vista na figura 3.22-A, onde nosso estado de grafos é reduzido de maneira significativa. Neste modelo aparecem quatro vértices ligados por 8 linhas (o jogador linha é representado por setas cheias enquanto que o jogador coluna é representado por setas pontilhadas).

A direção das setas indica o sentido de predileção de cada jogador. As arestas deste grafo representam as entradas de um jogo normal, e por conseqüência os possíveis estados de um jogo.

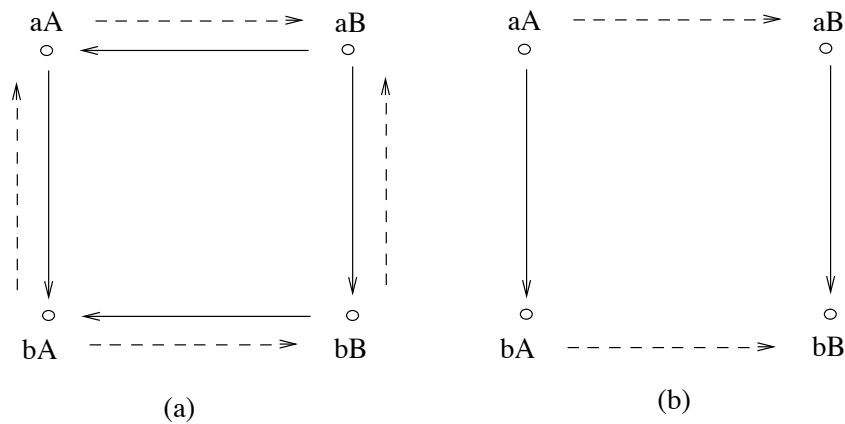


Figura 3.22: Representação em grafo simplificado.

O grafo obtido na figura 3.22-B advém da eliminação das setas cheias horizontais, que representam as predileções do jogador linha (mas que pelo sentido das setas o mantém no mesmo ponto do grafo) e as setas pontilhadas verticais, obtemos o grafo que nos indica os equilíbrios de Nash, que em nosso caso correspondem aos sumidouros.

Os dois enunciados a seguir mostram a correspondência entre pontos específicos de um jogo e o grafo simplificado.

Seja  $Je = \langle N, (A_i), \succsim_i \rangle$  um jogo na Forma Normal e  $Jp = \langle N, (E_i, V_{ai}), E_i \rangle$  o jogo obtido pelo nosso método,  $Je$  tem um equilíbrio de Nash sse seu correspondente na forma de Produto de Grafos  $Jp$  possui um sumidouro.

Se um jogo na Forma Normal possui um equilíbrio de Nash, ele possui um par de arestas direcionadas como visto na figura 3.22-B (porém somente direcionada a um vértice), que apontam para o mesmo ponto no *grafo simplificado*. As arestas indicam a predileção por movimentação de jogadas, ou seja, mostra o ponto para onde um jogador prefere se deslocar. Já que neste ponto ambos os jogadores não tem ganho para se deslocar unilateralmente, aquele é um equilíbrio de Nash.

Por outro lado, se um *grafo simplificado* possui arestas chegando em um ponto, e como essas arestas representam a predileção de escolha de pontos num jogo na Forma Normal, o ponto indicado pelo *grafo*, é também o ponto escolhido pelos jogadores para permanecerem, sem que haja um motivo para unilateralmente algum jogador se desviar desse ponto.

Como fizemos para a representação anterior, aqui precisamos seguir alguns passos para a obtenção do algoritmo simplificado. Abaixo descrevemos o algoritmo para obter o equilíbrio de Nash:

- 1º passo - Descrever o jogo através de quatro vértices (para o caso de dois jogadores), representando os pontos
- 2º passo - Inserir as arestas direcionais
- 3º passo - Eliminar as setas que não correspondem ao jogador em cada direção

- 4º passo - Os vértices que possuem duas arestas direcionais apontado para ele é identificado como equilíbrio de Nash

O exemplo a seguir mostra a obtenção do equilíbrio de Nash num jogo da forma estratégica.

Seja o jogo estratégico descrito na figura 3.5. Este jogo, como já foi mencionado anteriormente, possui dois equilíbrios de Nash, os pontos  $(9, 1)$  e  $(4, 4)$ . Ele pode ser representado pela figura 3.23. Um ponto importante é determinar a direção de cada seta de acordo com as predileções.

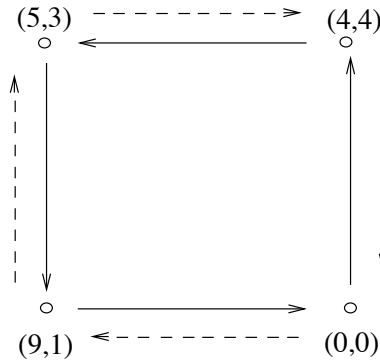


Figura 3.23: Representação em grafo simplificado do jogo estratégico.

O passo seguinte nos diz para eliminarmos as arestas que não representam a escolha do jogador em determinada direção. Eliminando as arestas horizontais, descobrimos a predileção do jogador coluna, e eliminando as arestas verticais, descobrimos a predileção do jogador linha, tal como vemos na figura 3.24. O resultado desta eliminação nos evidencia o equilíbrio de Nash.

### 3.7.1 Complexidade

Dado um Jogo estratégico  $J = \langle A_1, A_2, \preceq_1, \preceq_2 \rangle$ , onde  $A_i$  é o conjunto de ações do jogador  $i$  e  $\preceq_i$  a relação de preferência do jogador  $i$ ,  $\preceq_i \subseteq A_1 \times A_2$ .

- (i) Obter jogador no nosso formato:  $J_1 = \langle A_1 \times A_2, \preceq_1 \rangle$  e  $J_2 = \langle A_1 \times A_2, \preceq_2 \rangle$ .

Complexidade:  $\mathcal{O}(|A_1| \times |A_2|)$

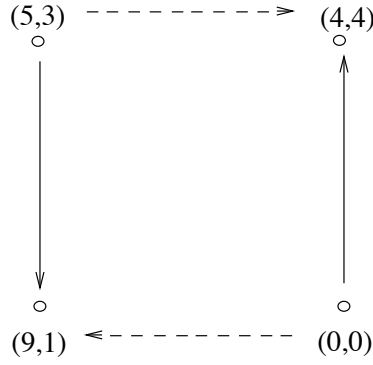


Figura 3.24: Jogo com as predileções indicadas.

(ii) Obter jogo  $J_1 \times J_2 = \langle (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2), \preceq_1, \preceq_2 \rangle$

Complexidade:  $\mathcal{O}(|A_1| \times |A_2| + |\preceq_1| + |\preceq_2|)$

(iii) Achar os sumidouros em  $J_1 \times J_2$  e fazer uma busca no grafo  $J_1 \times J_2$ .

Complexidade:  $\mathcal{O}(|A_1| \times |A_2| + |\preceq_1| + |\preceq_2|)$

### 3.7.2 Jogos extensivos

Imaginemos o mesmo jogo, Gorila e Mico, abordado na seção anterior. Tal jogo possui três representações normais, a primeira quando o gorila é responsável pela primeira movimentação, a segunda onde o mico é responsável pela primeira movimentação e a terceira quando o jogo ocorre simultaneamente, tal como no jogo estratégico.

Neste jogo aparece o conceito de *information set*, um ponto no jogo onde ambos os jogadores não tem conhecimento do ponto que estão (é justamente o ponto onde ocorre uma representação onde os pontos em questão se ligam por uma linha pontilhada).

O único caso que pode ser feita a mesma simplificação da mesma maneira que foi realizada para jogos estratégicos é no último caso, tendo em vista que a representação estatégica equivale a representação normal.

Nos outros dois casos, uma simplificação levaria a perda de informação, tendo em vista que as ações tomadas pelos jogadores se baseiam na decisão que seu oponente realizou previamente e pode ser vista a partir de sua representação estatística.

Por exemplo, na figura 3.25, vemos que diferentemente do jogo estratégico, o jogo extensivo contempla todas as situações possíveis. O Mico possui quatro respostas à ação do Gorila, representadas na figura, sendo elas: subir, independentemente da ação que tome o Gorila; fazer o mesmo que o Gorila; fazer exatamente o oposto ao que faz o Gorila e por fim esperar independentemente do que faça o Gorila.

O jogo estratégico não possui estas quatro opções, tendo em vista que as ações são tomadas simultaneamente e a ação do Mico não é baseada na ação tomada previamente pelo seu oponente, o Gorila.

		Mico				Legenda:
		ss	se	es	ee	
Gorila	e	9,1	9,1	0,0	0,0	e = esperar
	s	5,3	4,4	5,3	4,4	s = subir

Figura 3.25: Jogo extensivo, representado na forma normal, com a primeira ação do Gorila.

O jogo nos mostra portanto quatro estados, sendo conceitualmente cada um deles distintos do outro, uma simplificação neste jogo, necessariamente provocaria perda de informação, motivo pelo qual o método simplificado não pode ser usado, tendo em vista que ele poderia algum dos ramos da árvore, levando assim a um grafo incompleto.

# Capítulo 4

## Conclusão

Há muito, a teoria dos jogos vem sendo alvo de estudos avançados para a resolução de problemas, principalmente quando o assunto em questão é economia. Recentemente, Halpern [6] escreveu um artigo sugerindo uma maior conversação e interação entre os estudiosos de jogos e de computação. Em seu artigo Halpern sugere que há muito trabalho por ser desenvolvido, e provando estar certo, muitos autores se empenharam em aplicar a teoria dos jogos a problemas da computação, criando a Teoria dos Jogos computacional. Diversos autores trabalham tentando descobrir algoritmos para obter a ordem de custo para se achar o equilíbrio de Nash, inúmeros métodos foram sugeridos, dentre eles podemos citar os autores Koller [7], e mais.

O trabalho em questão aborda justamente esta conversação entre duas disciplinas, a computação e a economia. A teoria dos grafos foi utilizada como maneira de representar um jogo, e assim poder buscar a solução do mesmo, o equilíbrio de Nash.

Num primeiro momento estudamos as diversas representações que a teoria dos jogos possui. Começamos pela maneira tradicional, jogos estratégicos, verificamos uma possível relação entre a teoria dos jogos e o produto de grafos. Para conseguir representá-los, utilizamo-nos de uma matriz (quadrada para o caso de dois jogadores) que possuíam arestas ordenadas.



Tais arestas tinham o sentido determinado pela relação de preferência de cada jogador. Uma representação intermediária, que representa todas as possibilidades que um jogador pode exercer, foi desenvolvida, como passo prévio para o produto de grafos.

Depois de explorar e desenvolver a representação para jogos estratégicos, começamos a estudar os jogos extensivos, este de grande interesse por representarem situações facilmente exemplificadas no cotidiano, como por exemplo a disputa por alimentos. Este tipo de jogo possui uma representação mais contundente porque tem o campo de escolhas limitado pela relação de causalidade entre ação e *payoff*.

Por esta característica fomos capazes de simplificar a representação em jogos de duas pessoas para uma forma simplificada, representada por um quadrado com somente os pontos representativos dos possíveis resultados exibidos.

Em ambas as representações pudemos mostrar de maneira inequívoca diversos exemplos de teoria dos jogos, muito deles bastante conhecidos. A representação nos permite visualizar de maneira gráfica a ordem de predileção dos jogadores e nos permite tratar de maneira computacional qualquer jogo.

Apresentamos um algoritmo capaz de realizar a transformação de um jogo na forma estratégica ou na forma extensiva para um produto de grafos. Este nos indicava um sumidouro, equivalente a um equilíbrio de Nash. Mostramos ainda uma maneira simplificada de busca de equilíbrio de Nash para jogos estratégicos, e mostramos que tal método não pode ser aplicado a jogos extensivos.

#### Trabalhos futuros

Sugerimos como trabalho futuro a comparação estatística do método aqui apresentado com os métodos derivados da teoria evolutiva dos jogos. Dessa forma poderíamos num passo seguinte, incorporar as idéias de equilíbrio misto dos jogos e da teoria evolutiva dos jogos aos grafos, obtendo precisão em jogos que não possuam um equilíbrio puro de Nash. Dessa forma poderíamos ainda descobrir uma forma de representar equilíbrios que não sejam puros no grafos, estendendo o escopo de atuação dessa representação a quaisquer tipos de jogos.

Mais, a representação por meio de grafos poderia simplificar e tornar computacionalmente viável a avaliação de situações de ordens maiores de dimensão, e dessa forma a teoria dos grafos poderia ser utilizada na microeconomia para avaliar a comparação entre os diversos objetos de uma cesta de compras, por exemplo, ou de insumos para a produção industrial.

# Referências Bibliograficas

- [1] CODENOTTI, B., STEFANKOVIC, D., “On the Computational Complexity of Nash Equilibria for 0,1 Bimatrix Games”,
- [2] CONITZER, V., SANDHOLM, T., “Complexity results about Nash Equilibria”, *In proc. of IJCAI*, pp. 765–771, 2003.
- [3] ET AL., P., “The Complexity of Pure Nash Equilibria”,
- [4] GIBBONS, R., *Game Theory for Applied Economists*. reprint edition ed. Princeton University Press, 1992.
- [5] GINTIS, H., *Game Theory Evolving*. first edition ed. Princeton University Press, 2000.
- [6] HALPERN, J. Y., “A computer scientist looks at game theory”,
- [7] KOLLER, D., MEGIDDO, N., “The Complexity of Two-Person Zero-Sum Games in Extensive Form”,
- [8] LUCE, R. D., RAIFFA, H., *Games and decisions: Introduction and critical survey*. first ed. John Wiley and Sons, Inc., 1957.
- [9] MARTIN J. OSBORNE, A. R., *A Course in Game Theory*. first ed. The MIT Press, 1994.
- [10] NASH, J. F., “Equilibrium points in n-person games”, *In proc. of National Academy of Sciences*, v. 36, pp. 48–49, 1950.

- [11] ORLOV, A. V., STREKALOVSKII, A. S., “Seeking the Equilibrium Situations in Bimatrix Games”,
- [12] R.J. LIPTON, E. MARKAKIS, A. M., “Playing large games using simple strategies”, *ACM Conference on Electronic Commerce*, pp. 36–41, 2003.