Taller #12 Métodos Computacionales

Daniel Lozano Gómez
d.lozano343@uniandes.edu.co

September 2018

1. Parte #2: Monte Carlo para la ecuación de Euler

En el siguiente taller se utilizará el método de Monte Carlo (MC) para estimar los parámetros de una función $f(x)$ que cumple la siguiente ecuacion diferencial de segundo orden (SODE por sus siglas en ingles),

$$2x^2\frac{d^2}{dx^2}f(x) + bx\frac{d}{dx}f(x) + cf(x) = 0 \text{ para } x \in [1, 10] \tag{1}$$

con las condiciones iniciales dadas por $f(1) = 0$ y $\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\Big|_{x=1} = 1$ y los parámetros desconocidos b y c. Suponga ahora que se tienen unas mediciones experimentales que le son dadas.

1. (5 Puntos) Separe los puntos por comentarios y comente su código, si el código no está bien comentado se restaran 10 puntos de su nota final.
2. (15 Puntos) Lea el archivo de datos proporcionado y grafique en un grafica tipo dispersión (scatter). Defina la función de χ^2 utilizada para calcular la probabilidad de estos parámetros definida como:
$$P(a, b) \propto \exp(-\chi^2(a, b)) \tag{2}$$
3. (30 Puntos) Defina una función que solucione una ecuación diferencial de segundo orden en python, para ello usted utilizara el método de Euler y la ayuda provista. Esta función debe obtener como argumentos: un arreglo en x, un arreglo en y, un paso dx y los parámetros b y c.
4. (10 Puntos) Defina como primeros valores de los parámetros $(b, c) = (3{,}5, -17)$ y calcule el χ^2 de estos parámetros, estos valores son el primer paso de la busqueda de los mejores valores, se recomienda usar arreglos de 200 posiciones para que el cálculo no sea tan pesado.
5. (40 Puntos) Encuentre cuales son los mejores parámetros que definen a los datos dados, para ello usted debe realizar una caminata MC de 2000 pasos. Una vez realizada la caminata su programa debe mostrar en un scatter plot los puntos de esa caminata aleatoria y la grafica de la función $f(x)$ que usted obtiene con los mejores parámetros y la proporcionada por datos.

ADVERTENCIA: Puede utilizar únicamente el código que entrego en la Parte 1 como ayuda, si desea basarse en códigos externos debe referenciarlos y comentar cada paso de su trabajo.

AYUDA: Para solucionar la ecuación diferencial de segundo orden (SODE) utilizando Rungekutta es necesario hacer la separación de la derivada y la solución, es decir, si tenemos una SODE de la siguiente manera

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F_2\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

Podemos solucionarla si identificamos la primera derivada con una función diferente y_p tal que se puede reescribir la función anterior de la siguiente manera

$$\frac{dy_p}{dt} = F_2(t, y, y_p).$$

Usando la misma definición es obvio que la derivada de la función solución es igual a y_p, por lo tanto se tienen ahora dos ecuaciones diferenciales acopladas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{dy_p}{dt} &= F_2(t, y, y_p) \\ \frac{dy}{dt} &= F_1(t, y, y_p) = y_p\end{aligned}$$

Use esta interpretación para solucionar la ecuación por medio del método de Euler. Al usar este método junto a la cadena de Markov (MCMC), se deberian obtener unos resultados como los siguientes.

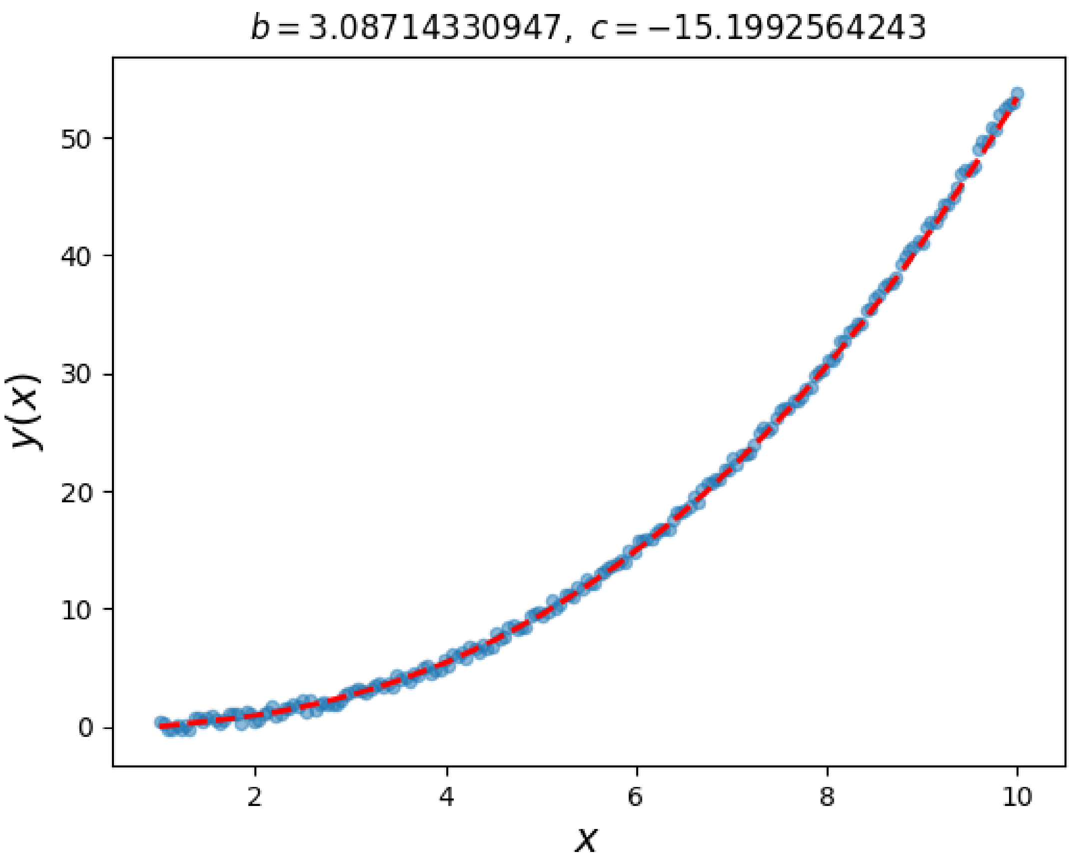

Figura 1: Solución por MCMC