

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА Д.Н. ПРЯНИШНИКОВА»

С.В. Каштаева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

*Пермь
ИПЦ «Прокростъ»
2020*

УДК 330.322.013
ББК 65.263
С329

Рецензенты:

Д.В. Климов, кандидат экономических наук, доцент кафедры предпринимательства и экономической безопасности, ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»;

И.Ю. Загоруйко, доктор экономических наук, профессор кафедры менеджмента, ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ.

С 329 Каштаева, С.В.

Математическое моделирование : учебное пособие / С.В. Каштаева; Министерство сельского хозяйства Российской Федерации, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский аграрно-технологический университет имени академика Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокрость», 2020.– 112 с ; 21 см – Библиогр.: с.111-112. – 50 экз. – ISBN 978-5-94279-487-3 – Текст : непосредственный

В учебном пособии изложены методологические аспекты построения и применения математических моделей в теории и практике, представлены основы математического моделирования, модели математического программирования, линейного, нелинейного, динамического программирования, модели управления запасами, экономико-статистические модели и основы имитационного моделирования. Имеются вопросы и задания для самоконтроля по разделам и для подготовки к промежуточной аттестации.

Учебное пособие предназначено для обучающихся высших учебных заведений по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика, направленность (профиль) «Прикладная информатика в экономике», а также может быть использовано специалистами предприятий агропромышленного комплекса, преподавателями и аспирантами сельскохозяйственных вузов.

**УДК 330.322.013
ББК 65.263**

Утверждено в качестве учебного пособия Методическим советом ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ.

ISBN 978-5-94279-487-3

© ИПЦ «Прокрость», 2020
© Каштаева С.В., 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Список сокращений.....	4
ВВЕДЕНИЕ	5
РАЗДЕЛ 1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	8
1.1 Понятие и виды моделирования	8
1.2 Классификация экономико-математических моделей	14
1.3 Этапы математического моделирования	19
РАЗДЕЛ 2. МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	25
2.1 Математическое программирование и его разделы.....	25
2.2 Линейное программирование	29
2.3 Нелинейное программирование	37
РАЗДЕЛ 3. МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ	43
3.1 Динамическое программирование.....	43
3.2 Модели управления запасами.....	49
РАЗДЕЛ 4. ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	63
4.1 Трендовые модели.....	63
4.2 Регрессионные модели	66
4.3 Многофакторный корреляционный и регрессионный анализ.....	69
РАЗДЕЛ 5. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	74
5.1 Понятие имитационного моделирования.....	74
5.2 Классификация моделей имитационного моделирования	80
5.3 Метод Монте-Карло	82
5.4 Технологические этапы имитационного моделирования	84
5.5 Проведение компьютерного эксперимента.....	90
5.6 Инструментальные средства автоматизации моделирования	95
ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ.....	109
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	111

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ДП – динамическое программирование

ИМ – имитационное моделирование

ЛП – линейное программирование

НП – нелинейное программирование

ОУ – обслуживающее устройство

СМО – системы массового обслуживания

ТЗ – транспортная задача

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование социальных, экономических и производственных процессов и систем является одним из важнейших средств познания природы самых разнообразных систем. Математическое моделирование экономических процессов ориентировано на системное изучение экономики с помощью математических моделей микро- и макроуровней, а также в разрезе важнейших функциональных подсистем экономики.

В настоящее время использование математического моделирования в экономике стало особенно *актуальным*, так как деятельность предприятий осуществляется в условиях конкуренции, в которой успеха добиваются те, кто наиболее эффективно использует ресурсы, а также стала доступной вычислительная техника, которая дает возможность реализовывать алгоритмы вычислений любой сложности.

Для внедрения математического моделирования и информационных технологий в практическую деятельность нужны специалисты, которые, с одной стороны, достаточно глубоко разбираются в сущности экономических проблем и способны формализовать возникающие задачи, а с другой – профессионально владеют математическими методами и соответствующим программным обеспечением.

Цель издания учебного пособия – помочь обучающимся освоить современные математические модели для анализа и научного прогнозирования поведения экономических объектов в соответствии с учебной программой дисциплины «Математическое моделирование».

Изучение материала, представленного в данном учебном пособии, направлено на формирование компетенций, предусмотренных ФГОС ВО по направлению 09.03.03 Прикладная информатика.

В учебном пособии представлены и систематизированы сведения научно-практического и прикладного характера, изложенные в доступной и удобной форме, с точки зрения самостоятельного изучения и освоения учебной дисциплины «Математическое моделирование».

Учебное пособие обобщает существующие учебники и учебные пособия по дисциплине «Математическое моделирование» и отражает авторскую трактовку содержания дисциплины.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен овладеть теоретическими и практическими навыками математического моделирования для анализа социально-экономических задач и процессов, самостоятельного изучения литературы по математическому моделированию и практического использования полученных сведений для решения прикладных задач.

Степень новизны данного издания заключается в определении и систематизации видов моделирования, относящихся к математическому моделированию, которые имеют разноречивые трактовки в разных источниках. Особенности авторской концепции отражены в содержании данного учебного пособия.

Учебное пособие включает пять разделов.

В разделе 1 «Основы математического моделирования» освещены общие вопросы по математическому моделированию, классификации видов моделирования и экономико-математических моделей, этапы математического моделирования.

В разделе 2 «Модели математического программирования» отражены теоретические и практические основы, связанные с математическим программированием, рассмотрены различные постановки задач, математические модели и этапы моделирования в линейном программировании, а также постановка задачи

нелинейного программирования и метод множителей Лагранжа.

В разделе 3 «Модели оптимального управления» рассмотрены постановки, математические модели и методы решения задач динамического программирования и управления запасами.

В разделе 4 «Экономико-статистические модели» отражены теоретические и практические основы, связанные с построением и использованием экономико-статистических моделей, в частности, трендовых и регрессионных моделей, изложены основы многофакторного корреляционного и регрессионного анализа.

В разделе 5 «Имитационное моделирование» представлены основные понятия имитационного моделирования, технологические этапы, вопросы назначения и классификации языков моделирования и систем моделирования, планирования и проведения вычислительного эксперимента.

Дидактический аппарат представлен в учебном пособии в виде вопросов и заданий для самопроверки по разделам и в целом по дисциплине и позволит закрепить полученные знания.

Список литературы включает библиотечные фонды и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», которые применяются в образовательном процессе обучающихся и способствуют изучению дисциплины.

РАЗДЕЛ 1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1 ПОНЯТИЕ И ВИДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование можно рассматривать как замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом, именуемым моделью и обеспечивающим близкое к оригиналу поведение в рамках некоторых допущений и приемлемых погрешностей. Моделирование обычно выполняется с целью познания свойств оригинала путем исследования его модели, а не самого объекта. Разумеется, моделирование оправдано в том случае, когда оно проще создания самого оригинала или когда последний по каким-то причинам лучше вообще не создавать.

Под *моделью* понимается физический или абстрактный объект, свойства которого в определенном смысле сходны со свойствами исследуемого объекта. При этом требования к модели определяются решаемой задачей и имеющимися средствами. Существует ряд общих требований к моделям:

- адекватность – достаточно точное отображение свойств объекта;
- полнота – предоставление получателю всей необходимой информации об объекте;
- гибкость – возможность воспроизведения различных ситуаций во всем диапазоне изменения условий и параметров;
- трудоемкость разработки должна быть приемлемой для имеющегося времени и программных средств.

Моделирование – это процесс построения модели объекта и исследования его свойств путем исследования модели.

Виды моделирования

На рисунке 1 представлена классификация видов моделирования.

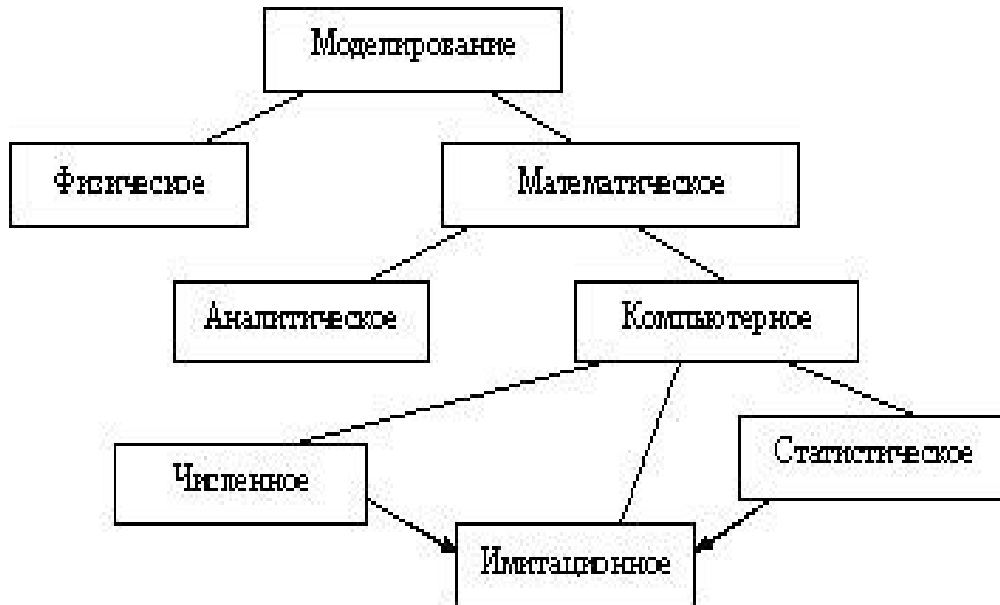


Рисунок 1. Классификация видов моделирования

При *физическом моделировании* используется сама система или подобная ей.

Математическое моделирование—это процесс установления соответствия реальной системе S математической модели M и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики реальной системы.

При *аналитическом моделировании* процессы функционирования элементов записываются в виде математических соотношений (алгебраических, интегральных, дифференциальных, логических и т.д.).

Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

- а) *аналитическим* (устанавливаются явные зависимости, получаются, в основном, аналитические решения);
- б) *численным* (получаются приближенные решения);

в) *качественным* (в явном виде можно найти некоторые свойства решения).

Многие современные системы компьютерного моделирования, например, системы символьной математики Maple, Mathematica или среда MATLAB, способны в значительной мере автоматизировать решение сложных задач аналитического моделирования.

К *компьютерному моделированию* относится математическое моделирование, которое формулируется в виде алгоритма (программы для компьютеров), что позволяет проводить над ней вычислительные эксперименты.

При *численном моделировании* используются методы вычислительной математики (отличается от численного аналитического тем, что возможно задание различных параметров модели).

Численное моделирование позволяет получить необходимые количественные данные о поведении систем или устройств каким-либо подходящим численным методом, таким как методы Эйлера или Рунге-Кутты. На практике моделирование нелинейных систем и устройств с использованием численных методов оказывается намного более эффективным, чем аналитическое моделирование отдельных частных линейных систем или устройств. Например, для решения дифференциального уравнения или систем дифференциальных уравнений в более сложных случаях решение в аналитическом виде не получается, но по данным численного моделирования можно получить достаточно полные данные о поведении моделируемых систем и устройств, а также построить графики описывающих это поведение зависимостей.

Статистическое моделирование заключается в обработке данных о системе (модели) с целью получения статистических

характеристик системы. Оно представляет собой машинное воспроизведение функционирования вероятностных моделей, либо исследование детерминированных процессов, заданных в виде математических моделей с логическими элементами с помощью статистических испытаний на компьютере (метод Монте-Карло). При этом осуществляется случайное задание исходных данных с известными законами распределения и, как следствие, вероятностное оценивание характеристик исследуемых процессоров.

Имитационное моделирование – это воспроизведение на компьютере (имитация) процесса функционирования исследуемой системы, соблюдая логическую и временную последовательность протекания процессов, что позволяет узнать данные о состоянии системы или отдельных ее элементов в определенные моменты времени.

Применение *математического моделирования* позволяет исследовать объекты, реальные эксперименты над которыми затруднены или невозможны (дорого, опасно для здоровья, однократные процессы, невозможные из-за физических или временных ограничений – находятся далеко, еще или уже не существуют и т.п.).

Общая цель моделирования может быть сформулирована следующим образом: это определение значений выбранного показателя эффективности для различных вариантов реализации проектируемой системы. При разработке конкретной модели цель моделирования должна уточняться с учетом используемого критерия эффективности. Для критерия пригодности модель должна обеспечивать расчет значений плана эксперимента для всего множества допустимых стратегий. При использовании критерия оптимальности модель должна позволять непосредственно определять параметры исследуемого

объекта, дающие экстремальное значение показателя эффективности.

Таким образом, цель моделирования определяется как целью исследуемой операции, так и планируемым способом использования результатов исследования. Например, проблемная ситуация, требующая принятия решения, формулируется следующим образом: найти вариант производственной программы предприятия, который приносил бы максимальную прибыль при соблюдении требований по использованию ресурсов и по выпуску отдельных видов продукции. В этом случае целью моделирования является отыскание параметров производственной программы, обеспечивающих максимальное значение показателя эффективности, в роли которого выступает прибыль.

Критерии принятия решений позволяют выбрать наиболее эффективные параметры системы. Обычно этот процесс называется оптимизацией.

Определение математической модели

Пусть $T=[t_0, t_1]$ – временной интервал моделирования системы S (интервал модельного времени).

Построение модели начинается с определения параметров и переменных, определяющих процесс функционирования системы.

Параметры системы $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$ – характеристики системы, остающиеся постоянными на всем интервале T .

Переменные бывают зависимыми и независимыми.

К независимым переменным относятся:

- входные воздействия (в том числе управляющие) $u(t)$;
- воздействия внешней среды (контролируемые – неконтролируемые, наблюдаемые – ненаблюдаемые, детерминированные – случайные) $v(t)$;

– состояния системы $x(t)$. Отличаются от Θ тем, что характеризуют свойства системы, изменяющиеся во времени. X – пространство состояний или фазовое пространство.

К зависимым переменным относятся выходные характеристики (сигналы) $y(t)$.

Общая схема математической модели функционирования системы представлена на рисунке 2.

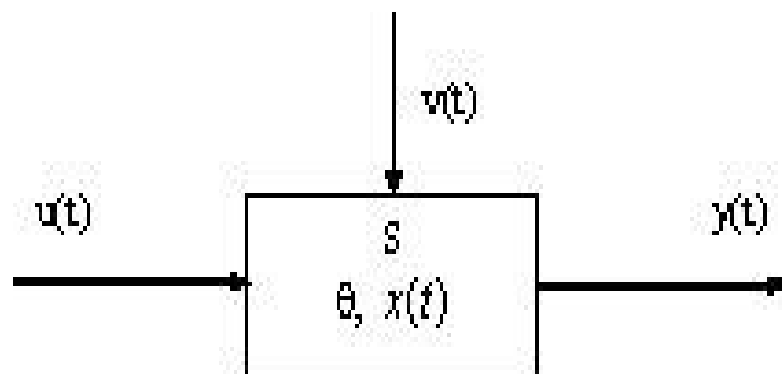


Рисунок 2. Схема математической модели функционирования системы

Множество переменных u, v, Θ, x, y вместе с законами функционирования

$$x(t)=\dots,$$

$$y(t)=\dots$$

называется *математической моделью* системы.

Если t непрерывно, то модель называется *непрерывной*, иначе – *дискретной*.

Если модель не содержит случайных элементов, то она называется *детерминированной*, в противном случае – *вероятностной*.

Если математическое описание модели слишком сложное, то используются *агрегативные модели*. Сущность агрегативной модели заключается в разбиении системы на конечное число взаимосвязанных частей (подсистем), каждая из которых допускает стандартное математическое описание. Эти подсистемы называются *агрегатами*.

1.2 КЛАССИФИКАЦИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Для описания социально-экономических систем и процессов используются *экономико-математические методы* – комплекс научных дисциплин на стыке экономики с математикой и кибернетикой (наукой, изучающей процессы управления в технических, биологических и социальных системах).

Суть *экономико-математического моделирования* заключается в описании социально-экономических систем и процессов в виде экономико-математических моделей. Экономико-математические методы следует понимать как инструмент, а экономико-математические модели – как продукт процесса экономико-математического моделирования.

Основные задачи экономико-математического моделирования:

- анализ экономических объектов и процессов;
- экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов;
- выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Экономико-математические методы включают в себя аналитические, численные и экспериментальные методы принятия решений.

Классификация экономико-математических моделей

По общему целевому назначению:

- *теоретико-аналитические* – для изучения общих свойств и закономерностей процессов;
- *прикладные* – для решения конкретных задач анализа, прогнозирования и управления.

По степени агрегирования объектов моделирования:

– *микроэкономические* – описывают поведение отдельных экономических звеньев (предприятия и фирмы) в рыночной среде;

– *одно-, двух-, многосекторные* – описывают взаимодействие структурных и функциональных элементов экономики;

– *макроэкономические* – рассматривают экономику как единое целое, связывая укрупненные материальные и финансовые показатели: внутренний национальный продукт, потребление, инвестиции, занятость и т.д.;

– *глобальные* – описывают закономерности мирового (глобального) масштаба.

По предназначению(по цели создания и применения):

– *балансовые* – отражают требование соответствия наличия ресурсов и их использования;

– *эконометрические (трендовые)* – предназначены для анализа и прогнозирования процессов с использованием статистической информации. Представляют собой системы регрессионных уравнений и отражают развитие системы через тренд (длительную тенденцию) ее основных показателей;

– *оптимизационные* – позволяют найти наилучший вариант решения из множества альтернативных;

– *сетевые* – используются в управлении проектами с целью минимизации временных сроков их выполнения и стоимости работ. Отображают комплекс работ (операций) и событий, их взаимосвязь во времени и издержки;

– *модели систем массового обслуживания* – создаются для минимизации затрат времени на ожидание в очереди и времени простоев каналов обслуживания;

– *имитационные* – используют машинную имитацию изучаемых систем и процессов, а также экспертные системы. *Имитационное моделирование* – вид компьютерного моделирования, для которого характерно воспроизведение на ЭВМ (имитация) процесса функционирования исследуемой сложной

системы; при этом имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической последовательности протекания во времени, что позволяет узнать данные о состоянии системы и отдельных ее элементов в определенные моменты времени.

По типу используемой информации:

- *аналитические* модели, построенные на априорной информации;
- *идентифицируемые* модели, построенные на апостериорной информации.

По учету фактора времени:

- *статические (структурные)* – описывают все зависимости в статике, в какой-то один момент времени (отображают состав и структуру системы);
- *динамические (функциональные)* – описывают функционирование системы во времени.
- *структурно-функциональные* – отображают структурные и функциональные особенности организации системы.

По учету фактора неопределенности:

- *детерминированные* – используют в описании только неслучайные величины, а результаты на выходе однозначно определяются управляющими входными воздействиями;
- *стохастические (вероятностные)* – используют в описании случайные величины, из-за действия случайных факторов на выходе могут получаться различные результаты.

По типу используемого математического аппарата (по характеристике включенных в модель математических объектов): *матричные, линейного и нелинейного программирования, корреляционно-регрессионные, теории массового обслуживания, сетевого планирования и управления, теории игр* и т.д.

По типу подхода к изучаемым системам:

- *дескриптивные (описательные)* – предназначены для

описания или для прогноза явлений и процессов (например, балансовые или трендовые модели);

- *нормативные* – предназначены для определения оптимальной структуры и оптимального поведения в соответствии с установленными критериями (например, все оптимизационные модели).

По степени достоверности исходных данных о моделируемой системе:

- *с априорно известными параметрами*;
- *с неизвестными параметрами*.

По режиму функционирования моделируемой системы:

- *стационарные*, в которых характеристики не меняются со временем;

- *нестационарные*, в которых характеристики изменяются со временем.

Модели также бывают:

- *феноменологические и абстрактные*;
- *активные и пассивные*;
- *с распределенными и сосредоточенными параметрами*.

Феноменологические модели передают только внешнее подобие процесса и не соответствуют внутреннему строению системы.

Абстрактная модель воспроизводит систему с точки зрения ее внутреннего устройства, копирует ее более точно. У нее больше возможностей и шире класс решаемых задач.

Пассивные модели только выдают ответы на вопросы пользователя. *Активные модели*, кроме того, взаимодействуют с пользователем и сами активируют диалог, меняют его линию, имеют собственные цели.

Между классами систем и моделей необязательно существует однозначное соответствие. Например, дискретные системы могут быть представлены в виде непрерывных моделей,

а детерминированные системы – в виде вероятностных моделей, и наоборот.

Для принятия обоснованного решения необходимо иметь и обработать большое количество информации, что, как правило, связано с большими материальными потерями. В настоящее время недостаточно знать путь, ведущий к достижению цели. Необходимо из всех возможных вариантов выбрать наиболее экономичный, который наилучшим образом соответствует поставленной задаче.

Решение *оптимизационной задачи* заключается в выборе наилучшего (оптимального) варианта из множества возможных по какому-либо признаку – критерию оптимальности.

Признаки оптимизационной модели:

1) наличие признака оптимальности (специального показателя выгодности или критерия оптимальности), который называется целевой функцией. Типичные критерии оптимальности: максимум дохода, прибыли, валовой продукт, производительность, эффективность. В таких случаях выгодно, чтобы показатель оптимальности был для выбранного варианта решения максимальным. Другая группа критериев – это минимум издержек, себестоимости, капиталовложений, трудоемкости, то есть в этих случаях критерий должен быть минимальным;

2) наличие системы ограничений, то есть условий, которые описывают множество возможных вариантов (решений), из которых выбирается оптимальный. Множество возможных решений всегда ограничено (ресурсами сырья, наличием рабочей силы, количеством и качеством оборудования и т.п.). Поэтому каждое из рассматриваемых решений должно быть допустимым, т.е. удовлетворять имеющимся ограничениям.

Все оптимизационные задачи можно разделить на два класса:

1) *задачи математического программирования (статические)*;

2) задачи оптимального управления (динамические).

Различие между ними в том, что в задаче математического программирования необходимо найти оптимальное число (в общем случае вектор), а в задаче оптимального управления – оптимальную функцию. С формально-математической точки зрения это различие существенное, но в прикладном плане оно зачастую весьма условное. Во-первых, потому, что к задачам математического программирования сводится большинство реальных задач планирования и управления, во-вторых, многие задачи оптимального управления могут быть сведены к задачам математического программирования при условии дискретизации временной характеристики.

1.3 ЭТАПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Процесс моделирования в самом общем виде состоит из трех стадий перехода:

- формализация (переход от реального объекта к модели),
- моделирование (изучение, исследование и преобразование модели),
- интерпретация (перевод результатов моделирования из виртуальной, модельной области в реальную область) (рисунок 3).

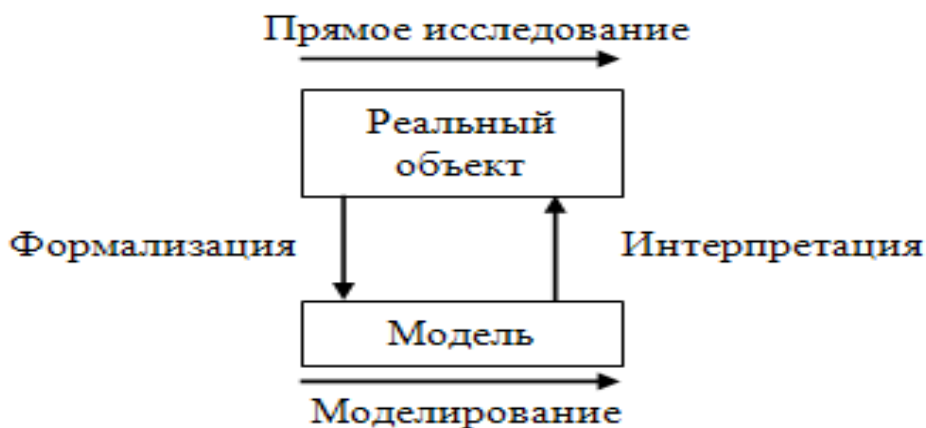


Рисунок 3. Основные стадии моделирования

1-я стадия (формализации) включает:

- 1) формирование предмета и цели исследования;
- 2) выделение элементов, соответствующих цели исследования, и их наиболее важных характеристик;
- 3) вербальное (словесное) описание взаимосвязей между элементами;

4) на этих этапах используются методы неформального синтеза: проводятся интервью, статистические опросы, ставятся цели, используются планы, генерируются и подвергаются экспертизе идеи. Для генерации идей используются такие методы, как морфологический анализ, генетические алгоритмы, алгоритм изобретений, мозговой штурм, эволюционный поиск и др. Источниками информации являются: наблюдения, умозаключения, опыты, эксперименты. При экспертизе идей применяются критерий «Хи-квадрат», коэффициенты согласованности и объективности с использованием методов Дельфы, медианы Кемени, альтернативы Кондорсе, принципа Борда и др.;

5) функциональное моделирование, т.е. введение символических обозначений для характеристик, установление общих закономерностей и количественных зависимостей. При функциональном моделировании для классификации элементов используются кластерный или многофакторный анализ, для установления общих закономерностей и зависимостей используются дисперсионный и корреляционно-регрессионный анализ;

6) выбор типа математической модели (алгебраическая линейная или нелинейная, дифференциальная и т.д.), вида модели (структуры, таблицы, векторы, матрицы, размерности и т.д.), приемов и методов моделирования (какие преобразования используются, например, Чебышева, Лапласа, симплексный, разностный и т.д.), формирование взаимосвязей между элементами с использованием математического аппарата.

Математическая формализация проблемы – это половина успеха на пути ее решения. В то же время умение ее формали-

зации требует особой методологии рассмотрения ситуации. Трудность состоит в том, чтобы избежать ненужной детализации, сохранить значимые условия и сформулировать задачу в виде одной из типовых моделей.

2-я стадия (моделирования) включает:

1) проведение расчетов;

2) решение задачи анализа (исследование) – получение ответов на вопросы «что?, где?, когда?, почему?, что будет, если?». На этом этапе определяются характеристики системы, дополнительные условия, коэффициенты, прогнозные значения, исследуются устойчивость, чувствительность, наблюдаемость, управляемость и т.д.;

3) решение задачи синтеза (оптимизации). На этом этапе вносятся вид целевого показателя, независимые переменные, ограничения, возмущения, выбирается метод синтеза (вид программирования), определяются системные характеристики (показатели эффективности, область решений, наилучшие решения и параметры и т.д.). Для нахождения оптимального решения в зависимости от структуры задачи применяют те или иные методы теории оптимальных решений, называемые также методами математического программирования.

3-я стадия включает реализацию способов *интерпретации* (истолкование, объяснение, перевод на более понятный естественный язык):

1) визуализация моделей и результатов моделирования, т.е. графическое отображение, использование блок-схем (чертежей, электрических схем, логических схем, графиков, таблиц, манипуляторов);

2) создание интерактивных моделей (позволяющих менять условия, параметры «на ходу» и наблюдать изменение модели);

3) статистические выводы, агрегирование информации, сглаживание и фильтрация результатов, создание программы

действий, экспертных систем и информационно-советующих систем и т.д.

Процесс моделирования циклический и имеет спиралевидный характер, то есть возможность возвращения с каждого этапа на более ранний этап (или более ранние) при обнаружении ошибки. Спираль имеет достаточно сложный вид и дополнительные внутренние связи. На рисунке 4 представлены основные этапы построения модели.

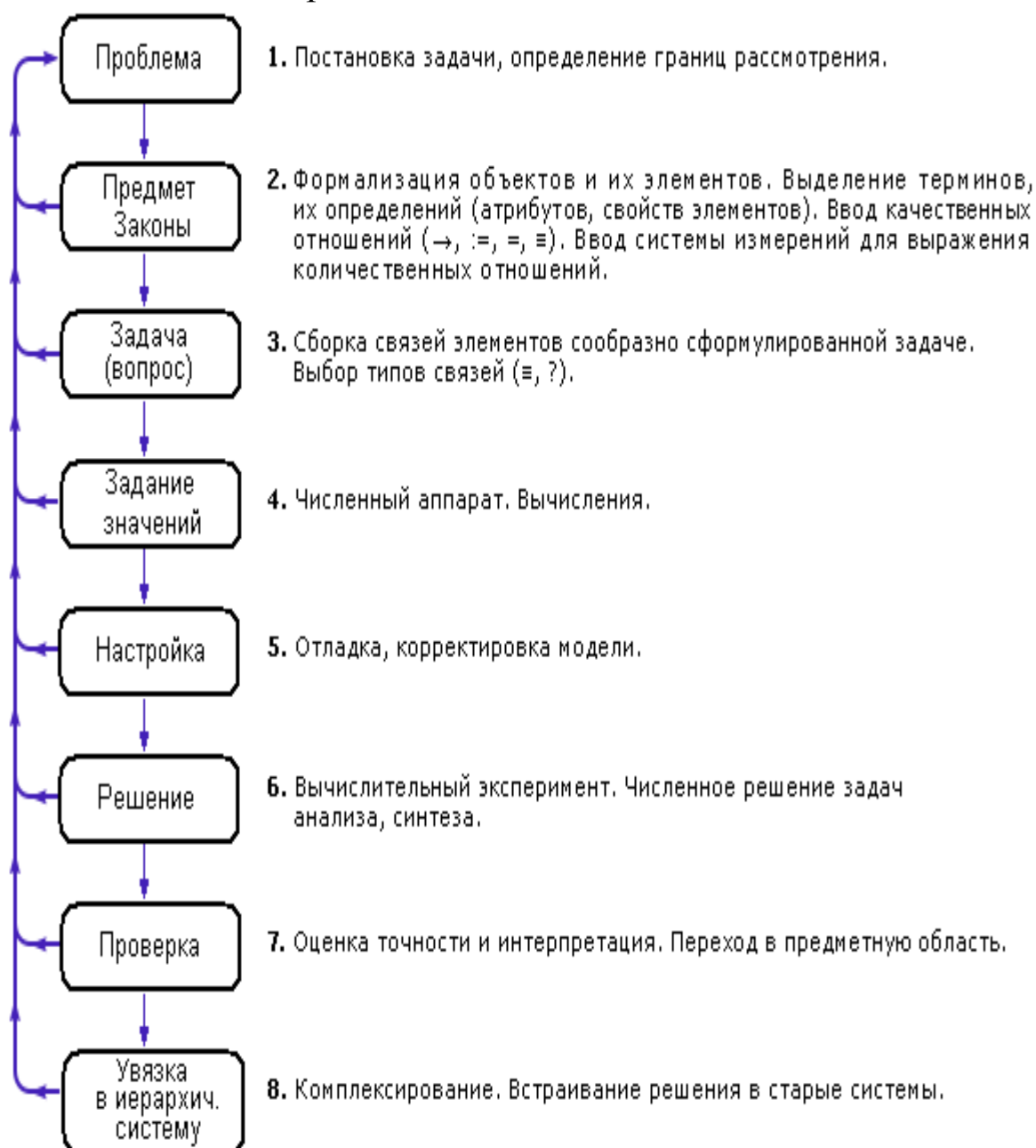


Рисунок 4. Этапы построения модели

Первые этапы решают менее формализованные задачи, последующие — все более формальные. Соответственно, методы первых этапов менее формализованы, а методы последующих — более формальные, мощные. Это означает, что самые трудные и ответственные этапы — первые, где требуется больше интуитивных решений.

На первых этапах создаются концептуальные (содержательные) модели, которые описывают наиболее существенные особенности структурно-функциональной организации системы. Ошибка на более ранних этапах больше сказывается на дальнейших решениях, возвращаться и переделывать приходится гораздо больше, чем на последних этапах. Поэтому к первым этапам проявляется повышенное внимание.

Поскольку формальные методы легко автоматизируются, то последние этапы (4 – 7) поддержаны программными продуктами и легко доступны конечным пользователям. На них создаются программные (алгоритмические, компьютерные) модели— программы для компьютера, позволяющие представить систему посредством имитации или графического отображения математических зависимостей, описывающих систему.

В сложных системах модель лишь частично отражает реальный процесс, поэтому необходима проверка степени соответствия (адекватности) модели и реального процесса. Проверка и корректировка модели, а также реализация найденного решения на практике выполняются на 5-м и 7-м этапах. Проверку производят сравнением предсказанного поведения с фактическим при изменении значений внешних неуправляемых воздействий.

Корректировка может потребовать дополнительных исследований объекта, уточнения структуры модели, изменения переменных. Тогда этапы моделирования повторяются, пока не

будет достигнуто удовлетворительное соответствие между выходами объекта и модели. При этом цикл имеет вид спирали модернизации модели – с каждым повтором модель становится лучше, более детальной, а уровень ее описания – точнее.

Внедрение полученного решения на 8-м этапе можно рассматривать как самостоятельную задачу, применив к ней системный подход и анализ.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение модели и моделирования.
2. Приведите классификацию видов моделирования.
3. Дайте определения различных видов моделирования.
4. Дайте определение математической модели.
5. Дайте определение экономико-математической модели.
6. Приведите классификацию экономико-математических моделей.
7. Охарактеризуйте основные стадии моделирования.
8. Приведите и охарактеризуйте основные этапы построения модели.

РАЗДЕЛ 2. МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЕГО РАЗДЕЛЫ

Все экономические задачи, решаемые с применением математического программирования, отличаются альтернативностью решения и определенными ограничивающими условиями. Решить такую задачу – значит выбрать из всех допустимо возможных (альтернативных) вариантов лучший, оптимальный. Важность и ценность использования в экономике метода математического программирования состоят в том, что оптимальный вариант выбирается из достаточно значительного количества альтернативных вариантов.

Задачи математического программирования классифицируются в зависимости от вида *целевой функции* и свойств допустимой *области ограничений*.

К ним относятся задачи: нелинейного программирования, линейного программирования, целочисленного программирования, дробно-линейного программирования, параметрического программирования, сепарабельного программирования, квадратичного программирования, стохастического программирования, геометрического программирования и другие.

Если целевая функция и ограничения (уравнения и неравенства) – линейные, то получим *задачу линейного программирования*.

Линейное программирование (далее – ЛП) рассматривают как самостоятельный раздел математического программирования ввиду его особой роли в экономической теории и практике. Для решения задачи ЛП разрабатываются специфические алгоритмы, основанные на комбинаторике, графах и т.д. Существует много эффективных методов решения задач

ЛП:геометрический метод, симплекс-метод и его модификации, методы распределительного типа и др.

В настоящее время существует много модификаций симплекс-метода, позволяющих существенно сократить время счета, сделать алгоритм нечувствительным к вырожденности опорных планов, повысить размерность решаемых задач, решать так называемые блочные задачи и т.д. Несмотря на обилие этих модификаций, продолжают появляться новые его варианты.

Кроме того, существуют способы и приемы, позволяющие расширить область применения методов решения задач ЛП. Например, некоторые нелинейные задачи могут быть преобразованы и решены методами, используемыми для задач ЛП.

Важную роль в классе задач ЛП играют *задачи целочисленного программирования*, в которых на переменные накладывается условие целочисленности. Это связано с физической неделимостью многих объектов расчета. Простое округление до целых чисел здесь не помогает – план может получиться не оптимальным. Поэтому приходится использовать специальные алгоритмы решения, к наиболее известным из которых относятся алгоритмы Гомори, основанные на так называемой идее отсечения.

Интерес к целочисленному программированию обусловлен еще и тем, что многие нелинейные невыпуклые задачи могут быть сведены к задачам ЛП с дополнительным требованием целочисленности. Теория целочисленного программирования используется также для разработки методов решения комбинаторных задач, например, для составления расписаний.

Частным случаем задачи целочисленного программирования являются *задачи булевого программирования*, где переменные x_j принимают всего два значения – 0 и 1. Наиболее известные из этих задач – это задача о назначениях (какого работника на какую работу поставить), задача выбора маршрута

(задача коммивояжера, задача почтальона), задача о максимальном паросочетании и т.д.

Многие задачи исследования операций, такие как распределение ресурсов, сетевого планирования, календарного планирования описываются математическими моделями *дискретного программирования*.

Дискретное программирование – это раздел математического программирования, в котором на экстремальные задачи налагается условие дискретности переменных при конечной области допустимых значений. Если вводим ограничения x_j – целые числа, то приходим к задачам целочисленного программирования, которые являются частным случаем дискретного программирования. В задачах дискретного программирования область допустимых решений является невыпуклой и несвязной, поэтому отыскание решения в таких задачах сопряжено со значительными трудностями. В частности, невозможно применение стандартных приемов, используемых при замене дискретной задачи ее непрерывным аналогом, состоящих в дальнейшем округлении найденного решения до ближайшего целочисленного.

Задачи геометрического программирования – задачи наиболее плотного расположения некоторых объектов в заданной двумерной или трехмерной области. Такие задачи встречаются в задачах раскроя материала для производства каких-то изделий и т.п. Имеющиеся здесь алгоритмы в основном ориентированы на сокращение перебора вариантов с поиском локальных минимумов.

В задаче *стохастического линейного программирования* коэффициенты c_j целевой функции, коэффициенты a_{ij} в матрице коэффициентов, коэффициенты ограничений b_i – являются случайными величинами. В этом случае сама целевая функция становится случайной величиной, и ограничения типа неравенств могут выполняться лишь с некоторой вероятностью.

Приходится менять постановку самих задач с учетом этих эффектов и разрабатывать совершенно новые методы их решения.

Задача о выборе траектории, задача последовательного принятия решения, задача об использовании рабочей силы, задача управления запасами – классические задачи динамического программирования.

Несмотря на разнообразие, все методы решения задач математического программирования имеют некоторые общие черты. Во-первых, практически все они являются численными, то есть представляют собой алгоритмы, ориентированные на компьютерную реализацию. Во-вторых, любой алгоритм является реализацией одного из трех принципов:

- последовательное приближение;
- последовательный анализ вариантов;
- случайный поиск.

Большинство методов оптимизации основаны на *принципе последовательного приближения*: в некоторой точке пространства переменных определяется допустимое направление возрастания (или убывания) целевой функции и делается шаг в этом направлении. Затем анализируется результат, т.е. проверяется, не является ли новая точка искомым решением. Если нет, то вся процедура повторяется вновь. По этому принципу построены, например, градиентные методы и симплексный метод. Как правило, методы этой группы очень эффективны. Недостаток этих методов состоит в том, что они могут найти только локальный экстремум. Если задача невыпуклая (многоэкстремальная), то нет гарантии, что найденное таким способом решение является действительно оптимальным.

Принцип *последовательного анализа вариантов* используется в таких методах, как динамическое программирование, метод ветвей и границ. Принцип заключается в построении правил отбраковки подмножеств допустимых вариантов, среди которых не может содержаться оптимального решения. Недо-

статком использования принципа является то, что данная процедура существенно учитывает специфику задачи, поэтому здесь трудно разработать стандартные алгоритмы для решения широкого круга прикладных задач. Однако эти методы могут быть использованы для решения невыпуклых и комбинаторных задач.

Суть *случайного поиска*: формируется некоторый случайный вариант решения (для этого используются компьютерные программы, генерирующие псевдослучайные числа) и вычисляется соответствующее значение целевой функции. Новый вариант сравнивается с лучшим из ранее достигнутых. Если сравнение выполнено в пользу нового варианта, то он запоминается вместо того, который был раньше, и процедура повторяется. Эффективность метода определяется скоростью, с которой компьютер генерирует и оценивает варианты. Сама процедура генерирования вариантов не является случайной, а носит лишь элемент случайности. Гарантии нахождения оптимума нет. Поэтому эти методы применяют лишь тогда, когда нет более надежных и эффективных методов.

2.2 ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование позволяет найти экстремальные (наибольшие и наименьшие) значения линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Эта линейная функция называется целевой, а ограничения, которые математически записываются в виде уравнений или неравенств, называются системой ограничений.

Модели линейного программирования используются при решении следующих задач:

- планирование товарооборота;
- построение торговой сети;
- распределение сотрудников по операциям;

- распределение ресурсов;
- организация рациональных перевозок (транспортная задача);
- организация рациональных закупок продуктов (задача о диете);
- оптимальное производство продукции;
- задача о раскрое материала и др.

Задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии (задача об оптимальном ассортименте)

Предположим, что предприятие выпускает n различных изделий. Для их производства требуются m различных видов ресурсов (сырья, вспомогательных материалов, рабочего и машинного времени). Эти ресурсы ограничены и составляют в планируемый период b_1, b_2, \dots, b_m условных единиц. Известны также технологические коэффициенты a_{ij} , которые указывают, сколько единиц i -го ресурса требуется для производства изделия j -го вида ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Пусть прибыль, получаемая предприятием при реализации единицы изделия j -го вида, равна c_j . В планируемый период все показатели a_{ij}, b_i, c_j предполагаются постоянными.

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого прибыль предприятия была бы наибольшей. Другими словами требуется составить оптимальный план работы предприятия $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. найти такие значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n (объем выпуска продукции каждого вида), чтобы обеспечить предприятию получение максимальной прибыли от реализации всей продукции и чтобы на ее производство хватило имеющихся в распоряжении ресурсов.

Экономико-математическая модель задачи:

$$f(\bar{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}.$$

Целевая функция представляет собой суммарную прибыль от реализации объема выпускаемой продукции всех видов. В данной модели оптимизация плана возможна за счет выбора наиболее выгодных видов продукции.

Ограничения означают, что для любого из ресурсов его суммарный расход на производство всех видов продукции не превосходит его запасы.

При составлении плана производства приходится учитывать не только ограниченность ресурсов, но и директивные задания по выпуску продукции T_j (госзаказы или уже заключенные договоры по отдельным видам продукции). В таком случае модель дополнится ограничением вида $x_j \geq T_j$.

Задача о смесях (рационе, диете)

К группе задач о смесях относят задачи по отысканию наиболее дешевого набора из определенных исходных материалов, обеспечивающих получение смеси с заданными свойствами. Получаемые смеси должны иметь в своем составе n различных компонентов в определенных количествах, а сами компоненты являются составными частями m исходных материалов.

Введем следующие обозначения: x_j – количество материала j -го вида, входящего в смесь; c_j – цена материала j -го вида; b_i – минимально необходимое содержание i -го компонента в смеси. Коэффициенты a_{ij} показывают удельный вес j -го компонента в единице j -го материала.

Экономико-математическая модель задачи:

$$f(\bar{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}.$$

Целевая функция представляет собой суммарную стоимость смеси. Функциональные ограничения являются ограничениями по содержанию компонентов в смеси: смесь должна содержать компоненты в объемах, не менее указанных.

Транспортная задача

Модель транспортной задачи позволяет разработать оптимальный маршрут перевозки однородного продукта от производителей к потребителям; при этом имеется баланс между суммарным спросом потребителей и возможностями поставщиков по их удовлетворению. Причем потребителям безразлично, из каких пунктов производства будет поступать продукция, лишь бы их заявки были полностью удовлетворены. Так как от схемы прикрепления потребителей к поставщикам существенно зависит объем транспортной работы, возникает задача о наиболее рациональном прикреплении, правильном направлении перевозок грузов, при котором потребности полностью удовлетворяются, вся продукция от поставщиков вывозится, а затраты на транспортировку минимальны.

Постановка транспортной задачи

Транспортная задача (далее – ТЗ) возникает при планировании рациональных перевозок грузов.

Имеются m пунктов отправления однородного груза A_1, A_2, \dots, A_m (поставщики) и n пунктов назначения того же груза B_1, B_2, \dots, B_n (потребители). Предполагается, что из любого пункта A_i ($i = \overline{1, m}$) груз может быть доставлен в любой пункт B_j ($j = \overline{1, n}$). Известны объемы (запасы) груза поставщиков ($a_i > 0$),

потребности в грузе (спрос) потребителей ($b_j > 0$), стоимость (тариф) перевозки единицы груза из каждого пункта отправления в любой пункт назначения ($c_{ij} \geq 0$).

Требуется определить оптимальный план перевозок груза из пунктов A_i в пункты B_j так, чтобы:

- 1) вывезти весь груз от отправителей A_i ;
- 2) удовлетворить потребность в грузе (спрос) каждого потребителя B_j ;
- 3) транспортные расходы были минимальными.

Допустимый план перевозок – решение задачи в виде неотрицательной матрицы:

$$X = \|x_{ij}\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где x_{ij} – количество груза, перевозимого из точки A_i (от i -го поставщика) в точку B_j (к j -му потребителю).

Математическая модель транспортной задачи

Найти матрицу X , удовлетворяющую условиям ограничений и доставляющую минимум целевой функции Z (транспортных расходов):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

Модель транспортной задачи относится к задаче ЛП и может быть решена симплексным методом. Однако для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самый распространенный метод решения – метод потенциалов

Этапы моделирования в линейном программировании

Последовательность моделирования в линейном программировании представляет собой итеративную процедуру, которая предусматривает и позволяет провести коррекцию после каждого этапа и вернуться к любому из предшествующих.

1 этап. Постановка задачи и обоснование критерия оптимальности

Здесь необходимо определить оптимальный план, рассматриваемого социально-экономического процесса (производственного процесса), который приносил бы заданный эффект.

Эффект, с точки зрения которого рассматривается задача, является критерием оптимальности, который имеет экстремальное значение в оптимальном плане.

При различных критериях оптимальности с одинаковой системой ограничений могут быть получены разные оптимальные планы.

2 этап. Выбор переменных и ограничений задачи

Переменные – это виды деятельности, размеры которых нужно найти в ходе решения задачи. Состав переменных определяется моделируемым процессом.

Классификация переменных:

- 1) основные (искомые виды деятельности);
- 2) дополнительные – переменные, которые добавляются в модель при переходе от неканонического вида модели к каноническому, что обусловлено требованиями применения для решения данных задач методов линейного программирования.

Введенные дополнительные переменные означают или сверхплановое производство продукции или излишек (перебор по отношению к минимуму по заданной границе).

Количество дополнительных переменных равно суммарному количеству ограничений модели в каноническом виде;

- 3) вспомогательные – включаются в модель для того, чтобы определить величины некоторых производных показателей

(например: объем трудовых ресурсов, объем материально-денежных ресурсов, земельных и т.п.) необходимых для реализации оптимального плана.

При выборе ограничения нужно руководствоваться следующим: в модели в виде ограничений нужно отразить все существенные условия моделируемого процесса, которые могут влиять на состав и размеры определяемых видов деятельности предприятия.

3 этап. Разработка структурной модели

Структурная модель - это модель в общем виде, т.е. в виде системы ограничений и целевой функции. Модель включает в себя следующие компоненты:

Технико-экономические коэффициенты при переменных (a_{ij})

В системе ограничений коэффициенты при переменных называются технико-экономическими коэффициентами. Они делятся на нормативные, коэффициенты пропорциональности и коэффициенты связей.

Нормативные коэффициенты, могут выражать, например нормы затрат i -го вида ресурса на единицу j -ой переменной.

Коэффициенты пропорциональности появляются в ограничениях по соотношениям отраслей после их преобразования.

Коэффициенты связи появляются в ограничениях пропорциональной связи.

Объемы правой части ограничений (b_i)

Объемы являются константами, равными какому-либо численному значению, в том числе нулю. Ими могут быть объемы производственных ресурсов, производства продукции и т.д.

Коэффициенты целевой функции (c_j)

Выражают экономический эффект в расчете на единицу переменной. Целевая функция – это математическое выражение критерия оптимальности.

4 этап. Сбор и подготовка исходной информации для модели

На этом этапе собирается и обрабатывается та информация, которая определена в качестве исходной на предыдущем этапе. Это технико-экономические коэффициенты при переменных, объемы ограничения, экономический эффект от каждой переменной. Исходной информацией для составления модели служит информация из отчетов, бизнес-планов и т.д.

5 этап. Построение числовой (в том числе в табличном виде) модели

Числовой моделью называют модель, в которой аналитические символы структурной модели заменены конкретными числовыми значениями.

Числовая модель может быть составлена в развернутом виде и в табличном (в виде матрицы задачи). В таблице 1 представлена матрица задачи ЛП.

Таблица 1

Матрица задачи линейного программирования

Переменные	X1	X2	...	X _j	...	X _m	Тип и объем ограничения
Ограничения							
1	a ₁₁	a ₁₂	...	a _{1j}	...	a _{1m}	≤ b ₁
2	a ₂₁	a ₂₂	...	a _{2j}	...	a _{2m}	≤ b ₂
...
i	a _{i1}	a _{i2}	...	a _{ij}	...	a _{im}	≤ b _i
...
n	a _{n1}	a _{n2}	...	a _{nj}	...	a _{nm}	≤ b _n
F	C ₁	C ₂	...	C _j	...	C _m	max

6 этап. Решение задач на компьютере или вручную

Этот этап включает разработку алгоритмов численного решения задачи, подготовку программы на компьютере и непосредственное решение. Для решения на компьютере необходима программа для решения задач соответствующего типа.

7 этап. Анализ полученного результата

На этом этапе решается вопрос правильности и полноты результатов, применимости их как в практической деятельности, так и в целях усовершенствования модели. Поэтому должна быть проведена проверка адекватности модели, т.е. выявления (с известной долей вероятности) соответствия модели реальному объекту по тем свойствам, которые считаются существенными для исследования. Проверку адекватности осложняет трудность измерения экономических величин. Однако без таковой проверки применение результатов моделирования может не только оказаться мало полезным, но и принести вред.

8 этап. Корректировка модели, оптимального плана. Вариантные расчеты (при необходимости)

Перечисленные этапы находятся в тесной взаимосвязи, в частности, могут иметь место возвратные связи этапов. Так на этапе построения модели может выясниться, что постановка задачи или противоречива, или приводит к слишком сложной математической модели; в этом случае исходная постановка должна быть скорректирована. Наиболее часто необходимость возврата возникает на этапе подготовки исходной информации.

Вариантные расчеты могут осуществляться путем изменения численной величины конкретных показателей, а также при варьировании элементов самой структуры модели.

2.3 НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Во многих экономических моделях зависимости между постоянными и переменными факторами лишь в первом приближении можно считать линейными, более детальное рассмотрение позволяет обнаружить их нелинейность. Как правило, такие показатели, как прибыль, себестоимость, капитальные затраты на производство и др., в действительности, зависят от объема производства, расхода ресурсов и т.п. нелинейно.

В этом случае возникает задача нелинейного программирования (далее – НП).

В общем виде задача НП состоит в определении максимального (минимального) значения $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}), \quad (2.6)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}),$$

где f и g_i – некоторые известные функции n переменных;
 b_i – заданные числа.

Имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, координаты которой удовлетворяют соотношению (2.6), причем для всякой другой точки, отвечающей условиям (2.6), выполняется соотношение:

$$F^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.7)$$

Если f и g_i – линейные функции, то это будет задача линейного программирования.

Соотношения (2.6), образующие систему ограничений, включают в себя и условия неотрицательности переменных, если таковые имеются. Последние могут быть заданы и отдельно. В евклидовом пространстве E_n система ограничений (2.6) определяет область допустимых решений. В отличие от задачи ЛП она не всегда является выпуклой.

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи НП сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$, причем эта точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри нее. Для задачи НП в отличие от задач ЛП нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, гради-

ентные методы, приближенные методы решения, графический метод.

Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим частный случай общей задачи НП (2.5), (2.6), предполагая, что система ограничений (2.6) содержит только уравнение, отсутствуют условия неотрицательности переменных, и $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $q_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – функции, непрерывные вместе со своими частными производными:

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2, \dots, X_n) &\rightarrow \max(\min), \\ q_i(X_1, X_2, \dots, X_n) &= b_i \quad (i = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Это так называемая задача на условный экстремум или классическая задача оптимизации.

Чтобы найти решение этой задачи, вводят набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, называемых множителями Лагранжа, составляют функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \\ = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot [b_i - q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

находят частные производные

$$\frac{dF}{dX_j} \quad (j = \overline{1, n}) \text{ и } \frac{dF}{d\lambda_i} \quad (i = \overline{1, m})$$

и рассматривают систему $n + m$ уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dX_j} = \frac{df}{dX_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{dq_i}{dX_j} &= 0 \quad (j = \overline{1, n}), \\ \frac{dF}{d\lambda_i} = b_i - q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \quad (i = \overline{1, m}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

с $n+m$ неизвестными $X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Всякое решение этой системы уравнений определяет точку $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$, в которой может иметь место экстремум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Следовательно, решив систему уравнений, получают все

точки, в которых функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может иметь экстремальные значения.

Таким образом, определение экстремальных точек задачи НП методом множителей Лагранжа включают следующие этапы:

1. Составляют функцию Лагранжа;
2. Находят частные производные от функции Лагранжа по переменным X_1 и λ_1 и приравнивают их нулю;
3. Решая полученную систему уравнений, находят точки, в которых целевая функция задачи может иметь экстремум;
4. Среди точек, подозрительных на экстремум, находят такие, в которых достигается экстремум, а вычисляют значения целевой функции в этих точках.

Пример

По плану производства предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве X_1 изделий I способом приведенная масса токсичных отходов равна $4X_1 + X_1^2$ кг, а при изготовлении X_2 изделий II способом они составляют $8x_2 + x_2^2$ кг. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общая масса отходов была минимальной.

Решение

Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$$

при условиях $x_1 + x_2 = 180$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Теперь решим задачу, используя метод множителей Лагранжа. Найдем \min целевой функции при условии $x_1 + x_2 = 180$, но без учета требований неотрицательных переменных.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

$$\frac{dF}{dX_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0$$

$$\frac{dF}{dX_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \quad .$$

$$\frac{dF}{d\lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0 \quad .$$

2. Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

а) перенося в правые части первых двух уравнений λ и приравнивая их левые части:

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2 \text{ или } x_1 - x_2 = 2;$$

б) решая это уравнение совместно с последним:

$$x_1 - x_2 = 2,$$

$$180 - x_1 - x_2 = 0, \text{ находим: } x_2 = x_1 - 2,$$

$$180 - x_1 - x_1 + 2 = 0, \text{ получаем } x_1 = 91; x_2 = 89.$$

При решении задач линейного и нелинейного программирования на компьютере можно использовать программу или пакет программ, которые реализуют алгоритмы решения задач математического программирования. К таким программным средствам относятся, например, MATLAB, MathCAD, табличный процессор MSExcel (надстройка «Поиск решения») и другие. При решении задач в MSExcel в надстройке «Поиск решения» по умолчанию производится решение задач нелинейного программирования. Для решения задачи линейного программирования следует выбрать параметр «Решение задачи симплексным методом».

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Приведите понятие и признаки оптимизационной задачи.
2. Приведите классификацию и краткую характеристику задач математического программирования.
3. Перечислите основные принципы реализации методов оптимизации.

4. Дайте определение линейного программирования.
5. Приведите математическую модель линейного программирования.
6. Приведите примеры экономических задач, приводящих к задачам линейного программирования.
7. Сформулируйте постановку задачи оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии.
8. Представьте общий вид задачи оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии.
9. Сформулируйте постановку задачи о смесях (рационе, диете).
10. Представьте общий вид задачи о смесях (рационе, диете).
11. Сформулируйте постановку транспортных задач.
12. Представьте математическую модель транспортной задачи.
13. Перечислите и дайте характеристику этапов моделирования в линейном программировании.
14. Представьте математическую модель задачи нелинейного программирования.
15. Опишите метод множителей Лагранжа.

РАЗДЕЛ 3. МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1 ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование – это вычислительный метод для решения экстремальных задач определенной структуры, который возник и сформировался в 1950-1953г.г. благодаря работам Р. Беллмана над динамическими задачами управления запасами. Динамическое программирование представляет собой направленный последовательный перебор вариантов, который обязательно приводит к глобальному максимуму.

Динамическое программирование (далее – ДП) – один из разделов оптимального управления, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы. На каждом из этапов определяется решение некоторой частной задачи, обусловленной исходной, результаты каждого последующего этапа зависят от результатов предыдущего.

Основные свойства задач, к которым возможно применить принцип динамического программирования:

- задача должна допускать интерпретацию как n -шаговый процесс принятия решений;
- задача должна быть определена для любого числа шагов и иметь структуру, не зависящую от их числа;
- при рассмотрении k -шаговой задачи должно быть задано некоторое множество параметров, описывающих состояние системы, от которых зависят оптимальные значения переменных. Причем это множество не должно изменяться при увеличении числа шагов;
- выбор решения (управления) на k -м шаге не должен оказывать влияния на предыдущие решения, кроме необходимого пересчета переменных.

Предположим, что физическая система S находится в некотором состоянии S_0 принадлежащее S_0 (вектор) и является управ-

ляемой. Таким образом, благодаря осуществлению некоторого управления U указанная система переходит из начального состояния S_0 в конечное состояние $S_{\text{кон}}$, принадлежащее S_k (вектор).

При этом качество каждого из реализуемых управлений U характеризуется соответствующим значением функции $W(U)$.

Задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений U найти такое U^* , при котором функция $W(U)$ принимает экстремальное значение $W(U^*)$.

Экономический процесс является управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием – управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т.д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и т.д., является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

ДП позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от ЛП, в котором симплексный метод является универсальным, в ДП универсального метода не существует.

Задача ДП должна удовлетворять двум условиям:

- 1) условие отсутствия последствия;
- 2) условие аддитивности.

Одним из основных методов ДП является метод рекуррентных соотношений (т.е. соотношений, выражающих n -й член последовательности через предыдущие), который основывается на использовании принципа оптимальности, разрабо-

танного американским математиком Р.Беллманом, благодаря которому выполняется первое условие для задач ДП.

Принцип состоит в том, что, каково бы ни было начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом.

Из принципа следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n -м шаге, затем на двух последних шагах, затем на трех последних шагах и т.д. вплоть до первого шага.

В некоторых задачах, решаемых методом ДП, при распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия, шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями — номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

Методами динамического программирования решаются задачи оптимального распределения ресурсов между объектами, определения оптимальной стратегии замены оборудования и другие.

Математическая модель оптимизации распределения инвестиций между предприятиями

Пусть имеется некоторое количество ресурсов x , которое необходимо распределить между n различными предприятиями, объектами, работами и т.д. так, чтобы получить мак-

симальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Введем обозначения: X_i – количество ресурсов, выделенных i -му предприятию ($i = 1, n$);

$g_i(x_i)$ – функция полезности, в данном случае это величина дохода от использования ресурса x_i , полученного i -м предприятием;

$f_k(x)$ –наибольший доход, который можно получить при использовании ресурсов. Сформулированную задачу можно записать в математической форме: максимизировать значение целевой функции $f_k(x)$, равное

$$\sum_{i=1}^n g_i(x_i) \quad (3.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n (x_i = x)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Требуется распределить имеющиеся B единиц средств среди n предприятий, доход $g_i(x_i)$ от которых, в зависимости от количества вложенных средств x_i , определяется матрицей ($n \times n$) так, чтобы суммарный доход со всех предприятий был бы максимальным.

Для решения задачи необходимо получить рекуррентное соотношение, связывающее $f_k(x)$ и $f_{k-1}(x)$.

Обозначим через X_k количество ресурса, используемого k -м способом ($0 \leq X_k \leq x$), тогда для $(k-1)$ способов остается величина ресурсов, равная $(X - X_k)$. Наибольший доход, который получается при использовании ресурса $(X - X_k)$ от первых $(k-1)$ способов, составит $f_{k-1}(X - X_k)$.

Для максимизации суммарного дохода от k -го и первых $(k-1)$ способов необходимо выбрать X_k таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g_1(x), \\ f_k(x) &= \max_{k=2, \overline{n}} \{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пример задачи оптимизации распределения ресурсов между предприятиями

Совет директоров фирмы рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме.

Для расширения производства совет директоров выделяет средства в объеме 120 млн р. с дискретностью 20 млн р. Прирост выпуска продукции на предприятиях зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в табл. 2.

Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции, причем на одно предприятие можно осуществить не более одной инвестиции.

Таблица 2

Приросты выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенных средств

Выделяемые средства, млн.руб.	Прирост выпуска продукции, т			
	Предприятие № 1	Предприятие № 2	Предприятие № 3	Предприятие №4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

Решение. Разобьем решение задачи на четыре этапа по количеству предприятий, на которых предполагается осуществить инвестиции.

Рекуррентные соотношения будут иметь вид:

1) для предприятия № 1- $f_1(x) = g_1(x_1)$;

2) для всех остальных предприятий -

$$f_k(x) = \max \{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Решение будем проводить согласно рекуррентным соотношениям в четыре этапа.

1-й этап. Инвестиции производим только первому предприятию. Тогда

$$\begin{array}{lll} f_1(20) = 8 & f_1(40) = 16 & f_1(60) = 25 \\ f_1(80) = 36 & f_1(100) = 44 & f_1(120) = 62. \end{array}$$

2-й этап. Инвестиции выделяем первому и второму предприятиям. Рекуррентное соотношение для 2-го этапа имеет вид

$$f_2(x) = \max \{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}.$$

Тогда при $x = 20$ $f_2(20) = \max(8 + 0, 0 + 10) = \max(8, 10) = 10$,
 при $x = 40$ $f_2(40) = \max(16, 8 + 10, 20) = \max(16, 18, 20) = 20$,
 при $x = 60$ $f_2(60) = \max(25, 16 + 10, 8 + 20, 28) = \max(25, 26, 28, 28) = 28$,

при $x = 80$ $f_2(80) = \max(36, 25 + 10, 16 + 20, 8 + 28, 40) = \max(36, 35, 36, 36, 40) = 40$,

при $x = 100$ $f_2(100) = \max(44, 36 + 10, 25 + 20, 16 + 28, 8 + 40, 48) = \max(44, 46, 45, 44, 48, 48) = 48$,

при $x = 120$ $f_2(120) = \max(62, 44 + 10, 36 + 20, 25 + 28, 16 + 40, 8 + 48, 62) = \max(62, 54, 56, 53, 56, 56, 62) = 62$.

3-й этап. Финансируем 2-й этап и третье предприятие. Расчеты проводим по формуле $f_3(x) = \max \{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}$.

Тогда при $x = 20$ $f_3(20) = \max(10, 12) = 12$,

при $x = 40$ $f_3(40) = \max(20, 10 + 12, 21) = \max(20, 22, 21) = 22$,

при $x = 60$ $f_3(60) = \max(28, 20 + 12, 10 + 21, 27) = \max(28, 32, 31, 27) = 32$,

при $x = 80$ $f_3(80) = \max(40, 28 + 12, 20 + 21, 10 + 27, 38) = \max(40, 40, 41, 37, 38) = 41$,

при $x = 100$ $f_3(100) = \max(48, 40 + 12, 28 + 21, 20 + 27, 10 + 38, 50) = \max(48, 52, 49, 47, 48, 50) = 52$,

при $x = 120$ $f_3(120) = \max(62, 48 + 12, 40 + 21, 28 + 27, 20 + 38, 10 + 50, 63) = \max(62, 60, 61, 55, 58, 60, 63) = 63$.

4-й этап. Инвестиции в объеме 120 млн р. распределяем между 3-м этапом и четвертым предприятием.

При $x = 120$ $f_4(120) = \max(63, 52 + 11, 41 + 23, 32 + 30, 22 + 37, 12 + 51, 63) = \max(63, 63, 64, 62, 59, 63, 63) = 64$.

Получены условия управления от 1-го до 4-го этапа. Максимальный прирост выпуска продукции в 64 т получен на 4-м этапе как $41 + 23$, т.е. 23 т соответствуют выделению 40 млн. руб. четвертому предприятию. Согласно 3-му этапу 41 т получена как $20 + 21$, т.е. 21 т соответствует выделению 40 млн. руб. третьему предприятию. Согласно 2-этапу 20 т получено при выделении 40 млн. руб. второму предприятию.

Таким образом, инвестиции в объеме 120 млн. руб. целесообразно выделить второму, третьему и четвертому предприятиям по 40 млн. руб. каждому, при этом прирост продукции будет максимальным и составит 64 т.

Для решения задач динамического программирования на компьютере разработаны соответствующие программы, которые можно найти в Интернете. Программа динамического программирования OptInvest разработана обучающимися на факультете экономики и информационных технологий Пермского аграрно-технологического университета.

3.2 МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Задача управления запасами возникает, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребле-

ния с целью удовлетворения спроса в заданном интервале времени. В любой задаче управления запасами требуется определить количество заказываемой продукции и сроки размещения заказа. Спрос можно удовлетворить путём однократного создания запаса на весь период времени или путём создания запаса для каждой единицы времени этого периода.

Управление запасами – это поддержание оптимальной величины запасов с целью:

1) исключения образования избыточных запасов, ведущих к излишнему замораживанию средств предприятия и дополнительным складским издержкам;

2) обеспечения нормальной ритмичности производственно-финансового цикла.

В задачах управления запасами требуется определять количество заказываемой продукции и сроки размещения заказов. Размер заказа определяется через интенсивность потребления и наличие мест хранения.

Основная часть запасов на предприятии представляет собой предметы производства, входящие в материальный поток на различных стадиях его технологической переработки. Запасы на предприятии образуются по двум основным причинам: несоответствие объёмов поставки объёмам разового потребления и разрыв во времени между моментом поступления материала и его потребления.

Спрос можно удовлетворить:

– путём однократного создания запаса на весь рассматриваемый период времени;

– посредством создания запаса для каждой единицы времени этого периода. Эти два случая соответствуют избыточному запасу (по отношению к единице времени) и недостаточному запасу (по отношению к полному периоду времени).

При избыточном запасе требуются более высокие удельные (отнесённые к единице времени) капитальные вложения, но дефицит возникает реже, и частота размещения заказов меньше.

При недостаточном запасе удельные капитальные вложения снижаются, но частота размещения заказов и риск дефицита возрастают.

Использование любого из этих двух крайних случаев приводит к большим потерям денег. Поэтому решение относительно размера заказа и момента его размещения должно основываться на минимизации функции общих затрат (состоящих из затрат, обусловленных потерями от избыточного запаса и от дефицита).

Обобщённая модель управления запасами

Любая модель управления запасами, в конечном счёте, должна дать ответ на два вопроса:

1. Какое количество продукции заказывать?
2. Когда заказывать?

Ответ на первый вопрос выражается через размер заказа, определяющего оптимальное количество ресурсов, которое необходимо поставлять каждый раз, когда происходит размещение заказа. В зависимости от текущей ситуации размер заказа может меняться. Ответ на второй вопрос зависит от типа системы управления запасами.

Если система предусматривает периодический контроль состояния запаса через равные промежутки времени (например, еженедельно или ежемесячно), момент поступления нового заказа обычно совпадает с началом каждого интервала времени. Если же в системе предусмотрен непрерывный контроль состояния запаса, точка заказа обычно определяется уровнем запаса, при котором необходимо размещать новый заказ.

Решение обобщённой задачи управления запасами определяется следующим образом:

1. В случае периодического контроля состояния запаса следует обеспечивать поставку новых заказов через равные интервалы времени;

2. В случае непрерывного контроля состояния запаса необходимо размещать новый заказ, когда уровень запаса достигает точки заказа. Точка заказа представляет собой установленный максимальный уровень запаса, при снижении до которого подается заказ на поставку очередной партии материальных ценностей.

Размер и момент заказа определяются из условий минимизации суммарных затрат системы управления запасами:

$$C_{\Sigma} = C_{np} + C_{оф} + C_{xp} + C_{\partial}. \quad (3.3)$$

Затраты на приобретение C_{np} определяются ценой закупаемых материалов и изменяются в зависимости от оптовой скидки к цене, которая устанавливается при увеличении размера партии заказа.

Затраты на оформление заказа $C_{оф}$ представляют собой постоянные расходы, связанные с его размещением. К их числу относятся такие статьи расходов, как стоимость разработки условий поставки и их подготовка к утверждению; расходы по приобретению рекламных каталогов; расходы, связанные с контролем выполнения заказа и сокращением срока их выполнения; транспортные расходы, если стоимость транспортировки не входит в стоимость получаемого товара; расходы на складирование и получение заказа. Некоторые из них фиксируются в заказе и не зависят от объёма, другие, например, транспортные и складские расходы, находятся в прямой зависимости от величины заказа.

В целом расходы на выполнение заказа включают любые виды расходов, величина которых зависит от числа выполняе-

мых заказов. При удовлетворении спроса в течение заданного периода времени путём размещения более мелких заказов (более часто) затраты возрастают по сравнению со случаем, когда спрос удовлетворяется посредством размещения более крупных заказов (и, следовательно, реже).

Затраты на хранение запаса C_{xp} определяются затратами на хранение материалов и самим фактом наличия запасов. В эту группу расходов входят такие статьи затрат, как возможный процент на капитал, вложенный в запасы; расходы на складские операции и плата за использование или аренду склада; текущие расходы на содержание складов; издержки, связанные с риском порчи и морального старения материалов, а также страховые и налоговые издержки. Снижение запасов приводит к уменьшению складских расходов и текущих расходов на содержание складских помещений. Эти затраты складываются из двух составляющих:

$$C_{xp} = C_{скл} + C_{ф}, \quad (3.4)$$

где $C_{скл}$ – складские затраты на хранение запасов (оплата площадей, энергии, труда);

$C_{ф}$ – финансовые потери. Если используются собственные средства, то увеличение размера заказа ведёт к замораживанию средств в запасах и к упущенной выгоде от повышенной оборачиваемости средств. Если используется кредит, то рост размера заказа ведёт к увеличению кредита и выплат по процентам, что также ведёт к потерям.

Потери от дефицита $C_{э}$ – представляют собой расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции, и состоят из потерь двух видов:

а) потери в производстве, связанные с приостановкой производственного процесса из-за отсутствия необходимых материалов, а также заменой материала на другой по более высокой цене;

б) стоимость потерянных продаж в случае невыполнения заказа, если заказчик обращается к другому изготовителю (в такой ситуации издержки дефицита определяются как потери прибыли).

Следующий рисунок иллюстрирует зависимость четырёх компонент затрат обобщённой модели управления запасами от уровня запаса. Оптимальный уровень запаса соответствует минимуму суммарных затрат.

На рисунке 5 представлена зависимость затрат управления запасами от уровня запаса (затраты отнесены к единице продукции).

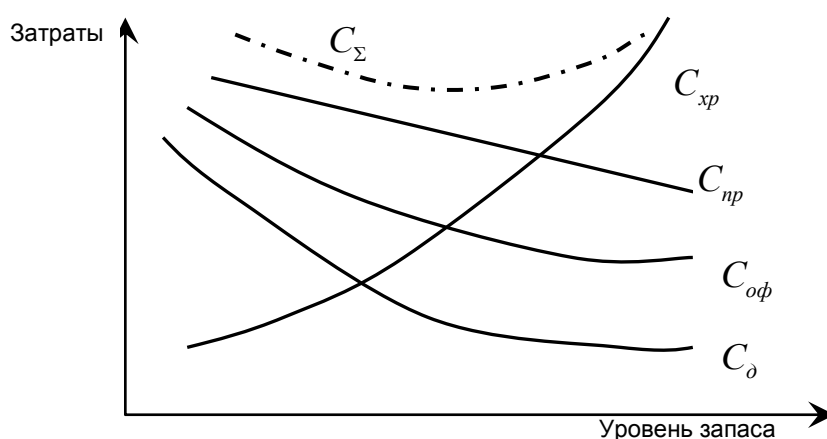


Рисунок 5. Зависимость затрат управления запасами от уровня запаса

Модель управления запасами не обязательно должна включать все четыре вида затрат, так как некоторые из них могут быть незначительными, а иногда учёт всех видов затрат чрезмерно усложняет функцию суммарных затрат. На практике какую-либо компоненту затрат можно не учитывать при условии, что она не составляет существенную часть общих затрат.

Обобщённая модель управления запасами, описанная выше, выглядит довольно простой. Чем же тогда объясняется столь большое разнообразие моделей этого класса и методов решения соответствующих задач, базирующихся на различном математическом аппарате: от простых схем дифференциального и интегрального исчисления до сложных алгоритмов динамического и других видов математического программирования? Ответ на этот вопрос определяется характером спроса, который может быть детерминированным (достоверно известным) или вероятностным (задаваемым плотностью вероятности).

Типы моделей управления запасами

В моделях управления запасами имеется схема классификации видов спроса, среди которых выделяют два основных вида – детерминированный и вероятностный.

Детерминированный спрос может быть статическим, когда интенсивность потребления неизменна во времени, или динамическим, когда спрос известен достоверно, но изменяется во времени.

Вероятностный спрос может быть стационарным, когда функция плотности вероятности спроса неизменна во времени, и нестационарным, когда функция плотности вероятности спроса изменяется во времени.

Примером детерминированного статического спроса может служить потребление сырой нефти на нефтеперерабатывающем заводе. Оно может меняться от одного дня к другому, но эти изменения будут, как правило, столь незначительными, что предположение статичности спроса несущественно искажает действительность.

В реальных условиях случай детерминированного статического спроса встречается редко. Такой случай можно рас-

смаатривать как протейший. Наиболе точно харатер спроса может быть описан посредством вероятностных нестационарных распределений.

Хотя харатер спроса является одним из основных факторов при построении модели управления запасами, имеются другие факторы, влияющие на выбор типа модели:

1) запаздывание поставок. После размещения заказа он может быть поставлен немедленно или потребуетя некоторое время на его выполнение. Интервал времени между моментом размещения заказа и его поставкой называется запаздыванием поставки, или сроком выполнения заказа. Этот интервал может быть постоянным или носить случайный харатер;

2) пополнение запаса. Процесс пополнения запаса может осуществляться мгновенно или равномерно во времени. Мгновенное пополнение запаса происходит, когда заказы поступают от внешнего источника (например, при поступлении заказанной продукции железнодорожным транспортом). Равномерное пополнение может быть тогда, когда запасаемая продукция производится самой организацией (например, при поступлении продукции по трубопроводам или от своих же цехов). В общем случае система может функционировать при запаздывании поставок и равномерном пополнении запаса;

3) период времени, в течение которого осуществляется регулирование уровня запаса. В зависимости от отрезка времени, на котором можно надёжно прогнозировать, рассматриваемый период принимается конечным или бесконечным;

4) число пунктов хранения запасов. В систему управления запасами может входить несколько пунктов хранения запаса. В некоторых случаях эти пункты организованы таким образом, что один выступает в качестве поставщика для другого;

5) число видов продукции. В системе управления запасами может фигурировать более одного вида продукции. Этот

фактор учитывается при условии наличия некоторой зависимости между различными видами продукции. Так, для различных изделий может использоваться одно и то же складское помещение, или же их производство может осуществляться при ограничениях на общие производственные фонды;

б) ограничения по оборотным средствам, складской площади для хранения заказов и др.

Чрезвычайно трудно построить обобщённую модель управления запасами, которая учитывала бы все разновидности условий, наблюдаемых в реальных системах. Но если бы и удалось построить универсальную модель, она едва ли оказалась бы аналитически разрешимой. Рассмотрим ряд моделей, соответствующих некоторым системам управления запасами.

Детерминированная модель управления запасами

Модель управления запасами простейшего типа характеризуется постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита. На рисунке 6 показано изменение уровня запаса во времени.

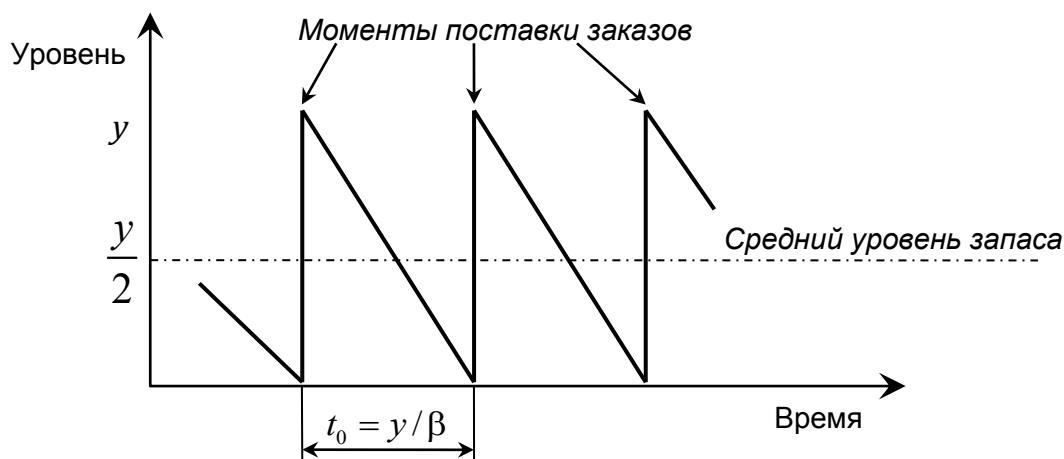


Рисунок 6. Изменение уровня запаса во времени

Предполагается, что интенсивность потребления равна β . Наивысшего уровня запас достигает в момент поставки заказа размером y . Уровень запаса достигает нуля спустя $t_0 = y/\beta$ единиц времени после получения заказа (рисунок 7).

Чем меньше размер заказа y , тем чаще нужно размещать заказы. Однако при этом средний уровень запаса будет уменьшаться. С другой стороны, с увеличением размера заказов уровень запаса повышается, но заказы размещаются реже.

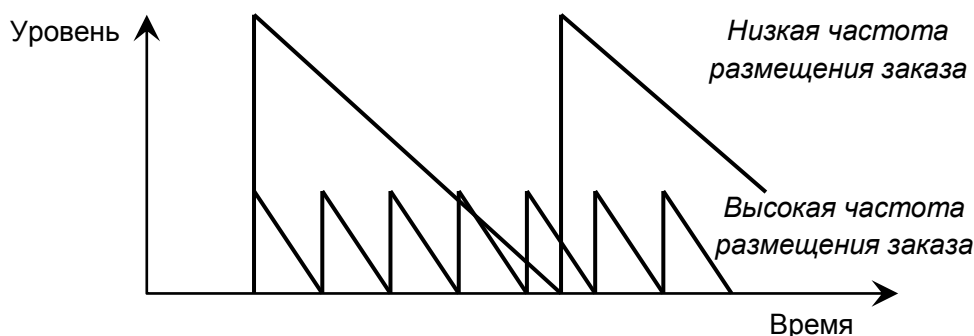


Рисунок 7. Частота размещения заказа

Так как затраты зависят от частоты размещения заказа и объёма хранимого запаса, то величина y выбирается из условия обеспечения сбалансированности между двумя видами затрат. Это принцип построения детерминированной модели управления запасами.

Пусть K – затраты на оформление заказа, имеющие место всякий раз при его размещении, h – затраты на хранение единицы заказа в единицу времени. Следовательно, суммарные затраты в единицу времени можно представить в виде

$$C(y) = \frac{K}{y/\beta} + h \cdot \frac{y}{2}, \quad (3.5)$$

где $\frac{K}{y/\beta}$ – затраты на оформление заказа в единицу времени;

$h \cdot \frac{y}{2}$ – затраты на хранение запасов в единицу времени;

$t_0 = y/\beta$ – продолжительность цикла движения заказа;

$y/2$ – средний уровень запаса.

Оптимальное значение y получается в результате минимизации $C(y)$ по y . Таким образом, оптимальный размер заказа определяется формулой Уилсона:

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}. \quad (3.6)$$

Таким образом, оптимальная стратегия модели предусматривает заказ y^* единиц продукции через каждые $t_0^* = y^* / \beta$ единиц времени. Оптимальные затраты в данном случае равны:

$$C(y^*) = \sqrt{2K\beta h}. \quad (3.7)$$

Для большинства реальных ситуаций существует положительный срок выполнения заказа (запаздывание) t_{Π} от момента размещения заказа до его поставки. Поэтому стратегия размещения заказов должна определять точку возобновления заказа (рисунок 8).

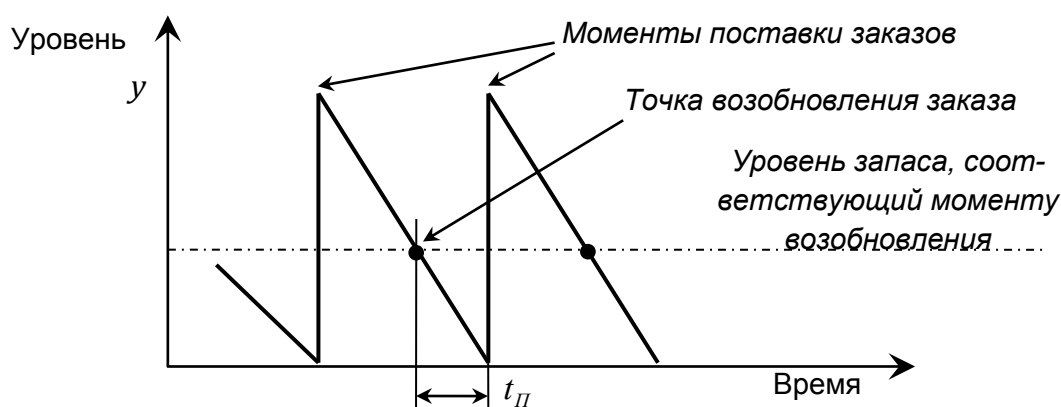


Рисунок 8. Определение точки возобновления заказа

На рисунке 8 показан случай, когда точка возобновления заказа должна опережать на t_{Π} единиц времени ожидаемую поставку. Срок выполнения заказа t_{Π} можно всегда принять меньше продолжительности цикла t_0^* . В практических целях эту информацию можно просто преобразовать, определив точку возобновления заказа через уровень запаса, соответствующий моменту возобновления. На практике это реализуется пу-

тём непрерывного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа.

Система с фиксированным размером заказа

Система с фиксированным размером заказа предусматривает поступление материалов равными, заранее определёнными оптимальными партиями через изменяющиеся интервалы времени. Заказ на поставку очередной партии даётся при уменьшении размера запаса на складе до точки заказа. Точка заказа представляет собой установленный максимальный уровень запаса, при снижении до которого подаётся заказ на поставку очередной партии материальных ценностей.

Интервалы между поставками очередных партий на склад зависят от интенсивности расхода материальных ресурсов (рисунок 9).

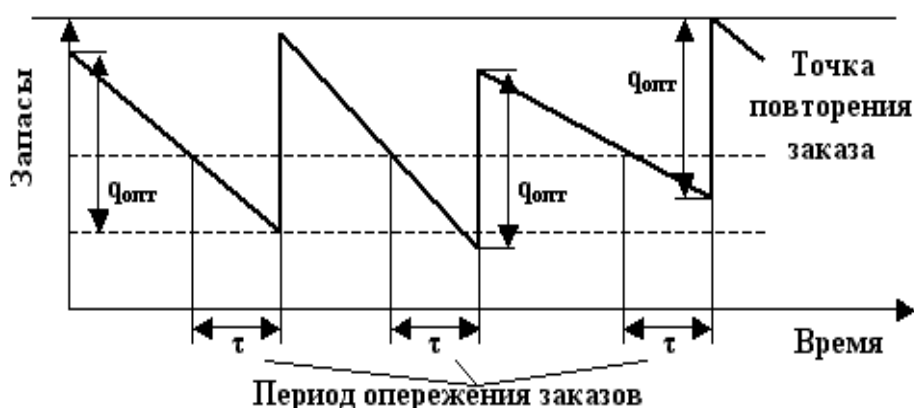


Рисунок 9. Система с фиксированным размером заказа

Уровень запасов, соответствующий точке заказа, равен ожидаемой потребности в течение времени отставания поставки от заказа плюс гарантийный запас:

$$y_{\text{фикс}} = \beta \cdot t_{\Pi} + y_{\text{стр}}, \quad (3.8)$$

где $y_{\text{стр}}$ — страховой запас.

При этом условно принимается, что интервал времени между подачей заказа на поставку и поступлением партии на склад t_{Π} является постоянным. Задача управления запасами сводится к тому, чтобы по фактическим данным о его движе-

нии определить «точку заказа» и оформить заявку на поставку необходимых материалов.

Достоинство системы с фиксированным объёмом заказа – поступление материала одинаковыми партиями, что приводит к снижению затрат на доставку и содержание запасов. Недостаток системы заключается в необходимости ведения постоянного контроля наличия запасов и увеличении издержек, связанных с их регулированием.

Система с фиксированной периодичностью заказа

Система управления запасами с фиксированной периодичностью предполагает поступление материала через равные, регулярно повторяющиеся промежутки времени (периоды проверки наличия запасов). При каждой проверке запасов определяют наличный остаток, после чего оформляют заказ, размер которого зависит от интенсивности потребления материалов (рисунок 10). Размер заказа равен максимальному запасу за вычетом текущего уровня запасов в момент проверки материалов:

$$y = y_{\max} - y_{\text{нал}} + y_{\text{расх}}, \quad (3.9)$$

где y_{\max} – максимальный уровень заказа;

$y_{\text{нал}}$ – фактический объём запаса в момент заказа (он производится, когда выполняется проверка текущего состояния запасов).

$y_{\text{расх}}$ – запас, который будет израсходован в течение размещения и выполнения заказа.

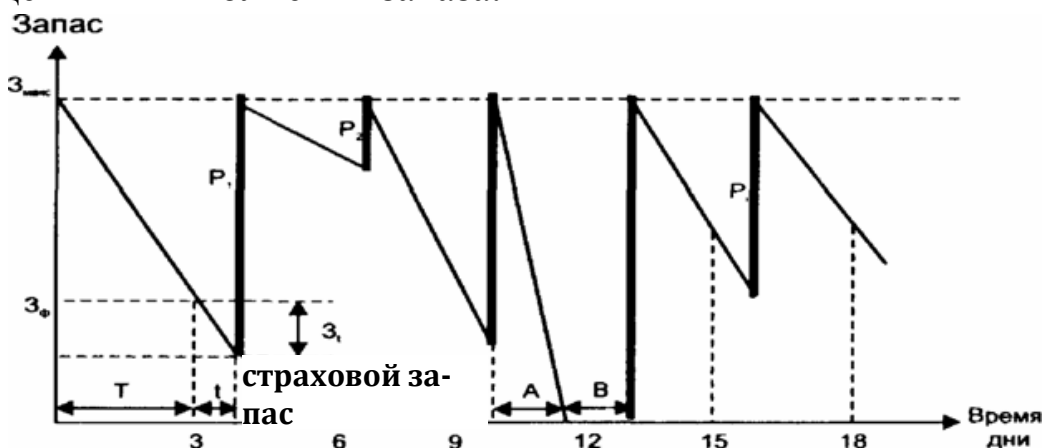


Рисунок 10. Система с фиксированной периодичностью заказа

При использовании периодической системы регулирования запасов интервал времени между заказами остается постоянным, а размер заказа меняется в зависимости от интенсивности потребления. Система наиболее эффективна, когда имеется возможность варьировать размер партии поставки, а транспортно-заготовительные расходы относительно невелики. Не подходит, например, для поставок контейнерами. Достоинством системы является её простота – регулирование осуществляется один раз в течение всего интервала между поставками. К числу недостатков системы относятся:

- необходимость делать заказ даже на незначительное количество материала;
- опасность исчерпания запасов при непредвиденном интенсивном их потреблении до наступления очередного заказа.

Поэтому система с фиксированной периодичностью заказа наиболее эффективна при небольших затратах материалов и равномерном их расходе.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Представьте постановку задачи динамического программирования.
2. Приведите математическую модель задачи динамического программирования.
3. Приведите математическую модель задачи оптимизации распределения инвестиций между предприятиями.
4. Охарактеризуйте постановку задач управления запасами.
5. Представьте обобщенную модель управления запасами.
6. Перечислите и охарактеризуйте типы моделей управления запасами.
7. Охарактеризуйте детерминированную модель управления запасами.
8. Назовите особенности системы управления запасами с фиксированным размером заказа.
9. Представьте особенности системы управления запасами с фиксированной периодичностью заказа.

РАЗДЕЛ 4. ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

4.1 ТРЕНДОВЫЕ МОДЕЛИ

Динамические процессы, происходящие в экономических системах, чаще всего проявляются в виде ряда последовательно расположенных в хронологическом порядке значений того или иного показателя, который в своих изменениях отражает ход развития изучаемого явления в экономике. Эти значения служат основой для разработки прикладных моделей, называемых трендовыми.

Последовательность наблюдений одного показателя (признака), упорядоченных в зависимости от последовательного возрастающих или убывающих значений другого показателя (признака), называют динамическим рядом (временным рядом – при факторном признаке – времени).

Составными элементами рядов являются численные значения показателей, называемых уровнями ряда и моменты или интервалы времени, к которым относятся уровни.

Временные ряды, образованные показателями, характеризующими экономические явления на определенные моменты времени, называются моментными. Если уровни ряда характеризуют размер явления за конкретный период времени (год, квартал, месяц), то такие ряды называют интервальными.

Уровни в динамическом ряду могут быть представлены абсолютными, средними или относительными величинами.

Под длиной временного ряда понимается время, прошедшее от начального момента наблюдения до конечного.

Для того чтобы получить количественную модель, выражающую основную тенденцию изменения уровней динамического ряда, во времени, используется аналитическое выравнивание ряда.

Основным содержанием метода аналитического выравнивания является то, что общая тенденция рассчитывается как функция времени:

$$Y'_t = f(t), \quad (4.1)$$

где Y'_t – уровни динамического ряда, вычисленные по соответствующему аналитическому уравнению на момент времени t .

Определение расчетных уровней производится на основе так называемой адекватной математической модели, которая наилучшим образом отображает (аппроксимирует) основную тенденцию ряда.

Выбор типа модели зависит от цели исследования и должен быть основан на теоретическом анализе, выявляющем характер развития явления.

Трендовая модель может быть описана несколькими видами кривых: полиномиальными, экспоненциальными и S-образными.

Полиномиальные зависимости:

1) полином первой степени:

$$Y_t = a_0 + a_1 t, \quad (4.2)$$

2) полином второй степени:

$$Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad (4.3)$$

3) полином третьей степени:

$$Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (4.4)$$

и т. д.

Параметр a_1 называют линейным приростом, a_2 – ускорением роста, a_3 – изменением ускорения роста.

Выравнивание по прямой используется в тех случаях, когда абсолютные приросты практически постоянны (уровни изменяются в арифметической прогрессии).

Выравнивание по показательной (экспоненциальной) функции используется, когда цепные коэффициенты роста

практически постоянны (ряд отражает развитие в геометрической прогрессии).

Простая экспонента $Y_t = ab^t$, где a и b – положительные числа, при этом если b больше единицы, то функция возрастает с ростом времени t , если b меньше единицы – функция убывает.

В тех случаях, когда требуется особо точное изучение тенденции развития (в целях прогнозирования), при выборе вида адекватной модели можно использовать специальные критерии.

Расчет параметров функции обычно производится методом наименьших квадратов, в котором в качестве решения принимается точка минимума суммы отклонений между теоретическими и эмпирическими уровнями:

$$\sum (y'_t - y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (4.5)$$

где y'_t – выровненные уровни;

y_i – фактические уровни.

Параметры уравнения a_i , удовлетворяющие этому условию, могут быть найдены решением системы нормальных уравнений. На основе найденного уравнения тренда вычисляются выровненные уровни.

Основная цель создания трендовых моделей экономической динамики – на их основе сделать прогноз о развитии изучаемого процесса на предстоящий промежуток времени. Прогнозирование на основе временного ряда экономических показателей относится к одномерным методам прогнозирования, базирующимся на экстраполяции, т.е. на продлении на будущее тенденции, наблюдавшейся в прошлом. Поскольку в действительности тенденция развития не остается неизменной, то данные, получаемые путем экстраполяции ряда, следует рассматривать как вероятностные оценки.

Экстраполяцию рядов динамики осуществляют различными способами, например, экстраполируют выравниванием по аналитическим формулам. Подставляя в уравнение тренда

значения t за пределами исследованного ряда, рассчитывают для t вероятностные y_t .

4.2 РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ

Регрессионная модель позволяет выявить закономерные взаимосвязи и её формы, между различного рода факторами (причина и условия), обуславливающими изучаемые явления. Признак, характеризующий следствие, называется результативным; признаки, характеризующие причины – факторными.

Связи между явлениями и их признаками классифицируют по степени связи, направлению и аналитическому выражению.

Функциональные и стохастические связи

Зависимость величины Y от X называется функциональной, если каждому значению величины X соответствует единственное значение величины Y . Если X – детерминированная величина (т.е. принимающая вполне определенные значения), то и функционально зависящая от неё величина Y тоже является детерминированной; если же X – случайная величина, то и Y также случайная величина.

Характерной особенностью функциональных связей является то, что в каждом отдельном случае известен полный перечень факторов, определяющих значение зависимого (результативного) признака, а также точный механизм их влияния, выраженный определенным уравнением:

$$Y_i = f(x_i), \quad (4.6)$$

где Y_i – результативный признак ($i = \overline{1, n}$);

$f(x_i)$ – известная функция связи результативного и факторного признаков;

x_i – факторный признак.

Стохастическая зависимость, когда каждому фиксированному значению независимой переменной X соответствует не одно, а множество значений переменной Y , причем сказать заранее, какое именно значение примет величина Y нельзя.

Характерной особенностью стохастических связей является то, что они проявляются во всей совокупности, а не в каждой единице. Причем неизвестен ни полный перечень факторов, определяющих значение результативного признака, ни точный механизм их функционирования и взаимодействия с результативным признаком.

Модель стохастической связи:

$$Y'_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad (4.7)$$

где Y'_i – расчетное значение результативного признака;

$f(x_i)$ – часть результативного признака, сформировавшаяся под воздействием учтенных известных факторных признаков (одного или множества), находящихся в стохастической связи с признаком;

ε_i – случайная ошибка.

Различия условных распределений имеют выраженную направленность связи. Эту направленность связи можно раскрыть более наглядно, если ограничиться рассмотрением только одного аспекта стохастической связи – изучением вместо условных распределений лишь одного их параметра – условного математического ожидания (частные случаи стохастической связи – корреляционная и регрессионная).

Корреляционная связь существует там, где взаимосвязанные явления характеризуются только случайными величинами. При такой связи среднее значение (математическое ожидание) случайной величины результативного признака y закономерно изменяется в зависимости от изменения другой величины x или других случайных величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Особенность корреляционных связей в том, что они обнаруживаются только в массовых наблюдениях, т.е. требуют статистических данных.

В зависимости от направления действия функциональные и стохастические связи могут быть прямыми и обратными. При прямой связи направление изменения результативного признака совпадает с направлением изменения признака фактора, т.е. с увеличением факторного признака увеличивается и результативный, и наоборот. В противном случае между рассматриваемыми связями существуют обратные связи.

По аналитическому выражению связи могут быть прямолинейными и криволинейными.

По количеству факторов, действующих на результативный признак, связи различаются на однофакторные (парные связи) и многофакторные (множественные связи).

Задачи корреляционного анализа сводятся к измерению тесноты известной связи между варьирующими признаками, определению неизвестных причинных связей и оценке факторов, оказывающих наибольшее влияние на результативный признак.

Задачами регрессионного анализа являются выбор типа модели, установление степени влияния независимых переменных на зависимую и определение расчетных значений зависимой переменной (функции регрессии).

Процесс изучения взаимосвязи состоит из ряда этапов:

- 1) построение системы показателей (факторов). Сбор и предварительный анализ исходных данных;
- 2) выбор вида модели и численная оценка ее параметров;
- 3) проверка качества модели;
- 4) оценка влияния отдельных факторов на основе модели;
- 5) прогнозирование на основе модели.

4.3 МНОГОФАКТОРНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Экономические явления складываются под воздействием не одного, а целого ряда факторов, т.е. эти явления *многофакторные*. Между факторами существуют сложные взаимосвязи, поэтому их влияние комплексное и его нельзя рассматривать как простую сумму изолированных влияний.

Многофакторный корреляционный и регрессионный анализ позволяет оценить меру влияния на исследуемый результативный показатель каждого из включенных в модель (уравнение) факторов при фиксированном положении (на среднем уровне) остальных факторов, а также при любых возможных сочетаниях факторов с определенной степенью точности найти теоретическое значение этого показателя (важным условием является отсутствие между факторами функциональной связи).

Для измерения тесноты связи между двумя из рассматриваемых переменных (без учета их взаимодействия с другими переменными) применяются парные коэффициенты корреляции.

Методика расчета таких коэффициентов и их интерпретация аналогичны методике расчета линейного коэффициента корреляции в случае однофакторной связи.

Теснота связи между переменными определяется частными коэффициентами корреляции, которые характеризуют степень и влияние одного из аргументов на функцию при условии, что остальные независимые переменные закреплены на постоянном уровне. В зависимости от количества переменных, влияние которых исключается, частные коэффициенты корреляции могут быть различного порядка: при исключении влияния одной переменной получаем частный коэффициент корреляции первого порядка; при исключении влияния двух переменных –

второго порядка и т.д. Парный коэффициент корреляции между функцией и аргументом обычно не равен соответствующему частному коэффициенту.

Одним из условий регрессионной модели является предположение о линейной независимости объясняющих переменных, т.е. решение задачи возможно лишь тогда, когда столбцы и строки матрицы исходных данных линейно независимы. Для экономических показателей это условие выполняется не всегда. Линейная или близкая к ней связь между факторами называется *мультиколлинеарностью* и приводит к линейной зависимости нормальных уравнений, что делает вычисление параметров либо невозможным, либо затрудняет содержательную интерпретацию параметров модели. Мультиколлинеарность может возникать в силу разных причин. Например, несколько независимых переменных могут иметь общий временной тренд, относительно которого они совершают малые колебания. В частности, так может случиться, когда значения одной независимой переменной являются лагированными значениями другой. Считают явление мультиколлинеарности в исходных данных установленным, если коэффициент парной корреляции между двумя переменными больше 0.8. Чтобы избавиться от мультиколлинеарности, в модель включают лишь один из линейно связанных между собой факторов, причем тот, который в большей степени связан с зависимой переменной.

На третьей, заключительной стадии производят окончательный отбор факторов путем анализа значимости вектора оценок параметров уравнений множественной регрессии с использованием критерия Стьюдента (k - количество факторов, включенных в модель после исключения незначимых факторов, $k = m$, если включены все анализируемые факторы).

Показателем тесноты связи, устанавливаемой между результативными и двумя или более факторными признаками, является *совокупный коэффициент множественной корреляции* $R_{yx_1x_2...x_n}$. Он измеряет одновременное влияние факторных признаков на результативный.

Его значения находятся в пределах -1 до +1. Чем меньше наблюдаемые значения изучаемого показателя отклоняются от линии множественной регрессии, тем корреляционная связь является более интенсивной, а следовательно, значение R ближе к единице.

Величина R^2 называется *совокупным коэффициентом множественной детерминации*. Она показывает, какая доля вариации изучаемого показателя объясняется влиянием факторов, включенных в уравнение множественной регрессии. Значение совокупного коэффициента множественной детерминации находится в пределах от 0 до 1. Поэтому, чем ближе R к единице, тем вариация изучаемого показателя в большей мере характеризуется влиянием отобранных факторов.

Совокупный коэффициент множественной детерминации показывает, что вариация производительности труда обуславливается анализируемыми факторами. Значит, выбранные факторы существенно влияют на производительность труда.

Однако показатели множественной регрессии и корреляции могут оказаться подверженными действию случайных факторов. Поэтому только после проверки адекватности уравнения оно может быть пригодно, например, для выявления резервов повышения производительности труда.

Общая оценка адекватности уравнения может быть получена с помощью дисперсионного F-критерия Фишера.

Для оценки значимости коэффициентов регрессии при линейной зависимости y от x_1 и x_2 (двух факторов) используют

t- критерий Стьюдента. Расчет t-критерия используют для отбора существенных факторов в процессе многошагового регрессионного анализа. Он заключается в том, что после оценки значимости всех коэффициентов регрессии из модели исключают тот фактор, коэффициент при котором незначим и имеет наименьшее значение критерия. Затем уравнение регрессии строится без исключенного фактора, и снова проводится оценка адекватности уравнения и значимости коэффициентов регрессии. Такой процесс длится до тех пор, пока все коэффициенты регрессии не окажутся значимыми, что свидетельствует о наличии в регрессионной модели только существенных факторов. В некоторых случаях расчетное значение t-расч. находится вблизи t-табл., поэтому с точки зрения содержательности модели такой фактор можно оставить для последующей проверки его значимости в сочетании с другим набором факторов.

Последовательный отсев несущественных факторов рассмотренным выше приемом (или последовательным включением новых факторов) составляет основу многошагового регрессионного анализа.

На основе коэффициентов регрессии нельзя сказать, какой из факторных признаков оказывает наибольшее влияние на результативный признак, так как коэффициенты регрессии между собой не сопоставимы, поскольку они измерены разными единицами. На их основе нельзя также установить в развитии каких факторных признаков заложены наиболее крупные резервы изменения результативного показателя, потому что в коэффициентах регрессии не учтена вариация факторных признаков.

Чтобы иметь возможность судить о сравнительной силе влияния отдельных факторов и о тех резервах, которые в них заложены, должны быть вычислены дополнительные показатели.

Различия в единицах измерения факторов устраняют с помощью *частных коэффициентов эластичности*, которые

показывают, на сколько процентов в среднем изменяется анализируемый показатель с изменением на 1 % каждого фактора при фиксированном положении других факторов.

Для определения факторов, в развитии которых заложены наиболее крупные резервы улучшения изучаемого показателя, необходимо учесть различия в степени варьирования вошедших в уравнение факторов. Это можно сделать с помощью *β-коэффициентов*, которые показывают, на какую часть среднего квадратического отклонения изменяется результативный признак с изменением соответствующего факторного признака на величину его среднего квадратического отклонения.

Для построения трендовых и регрессионных моделей на компьютере используются программы, предназначенные для статистической обработки данных, например, статистические пакеты Statgraphics, Статистика и др. Можно использовать табличный процессор MSExcel. Для построения трендовых моделей в MSExcel можно использовать «Построитель диаграмм», для получения регрессионных моделей – надстройку «Пакет анализа».

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятие временных рядов.
2. Приведите виды зависимостей в трендовых моделях.
3. Опишите методику использования трендовых моделей.
4. Охарактеризуйте функциональные и стохастические связи.
5. Опишите методику использования регрессионных моделей.
6. Приведите виды зависимостей в регрессионных моделях.
7. Дайте понятие мультиколлинеарности.
8. Приведите показатели, которые используются при оценке статистической значимости трендовых и регрессионных моделей.

РАЗДЕЛ 5. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

5.1 ПОНЯТИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

История развития имитационного моделирования (далее – ИМ) насчитывает уже более 50 лет. Многие моделирующие системы, идеологически разработанные в 1970-1980-х гг., претерпели эволюцию вместе с компьютерной техникой и операционными системами и эффективно используются в настоящее время на новых компьютерных платформах. Кроме того, в конце 1990-х гг. появились принципиально новые моделирующие системы, концепции которых не могли возникнуть раньше при использовании ЭВМ и операционных систем 1970-1980-х гг.

В последнее десятилетие в связи с появлением объектно-ориентированных визуальных инструментальных средств и высокопроизводительных персональных компьютеров ИМ постепенно становится повседневным инструментом для разработчиков самых различных проектов: транспортных, промышленных, медицинских, военных и т.п. Так, наличие имитационной модели и обоснование с ее помощью выбранного варианта организации является обязательным в странах Европейского Союза в комплекте документов, подаваемых на рассмотрение для проектирования или модернизации нового производства либо технологического процесса. ИМ придается все большее значение и в директивных документах Правительства РФ по технологическому развитию. Такая популярность ИМ по сравнению с другими видами математического моделирования объясняется возможностями детального описания моделируемой системы построения динамических моделей.

Современные персональные компьютеры обладают колоссальным быстродействием и памятью, развитыми внешними устройствами, эффективным системным и прикладным программным обеспечением. Все это дает возможность эффектив-

но организовать диалог человека и машины в рамках имитационной системы.

Имитационное моделирование (от англ. *simulination*) – это распространенная разновидность аналогового моделирования, реализуемого с помощью набора математических инструментальных средств, специальных имитирующих компьютерных программ и технологий программирования, позволяющих посредством процессов-аналогов провести целенаправленное исследование структуры и функций реального сложного процесса в памяти компьютера в режиме имитации, выполнить оптимизацию некоторых его параметров.

Имитационной моделью называется специальный программный комплекс, который позволяет имитировать деятельность какого-либо сложного объекта. Он запускает в компьютере параллельные взаимодействующие вычислительные процессы, которые являются по своим временным параметрам (с точностью до масштабов времени и пространства) аналогами исследуемых процессов. В странах, занимающих лидирующее положение в создании новых компьютерных систем и технологий, научное направление ИМ использует именно такую трактовку имитационного моделирования.

Следует отметить, что любое моделирование имеет в своей методологической основе элементы имитации реальности с помощью какой-либо символики (математики) или аналогов. Поэтому иногда в российских вузах имитационным моделированием стали называть целенаправленные серии многовариантных расчетов, выполняемых на компьютере с применением экономико-математических моделей и методов. Однако с точки зрения компьютерных технологий такое моделирование – это обычные вычисления, выполняемые с помощью расчетных программ или табличного процессора MSExcel. Математиче-

ские расчеты (в том числе табличные) можно производить и без компьютера: используя калькулятор, логарифмическую линейку, правила арифметических действий и вспомогательные таблицы. Но имитационное моделирование – это чисто компьютерная работа, которую невозможно выполнить подручными средствами. Поэтому часто для этого вида моделирования используется синоним компьютерное моделирование.

Имитационную модель нужно создавать. Для этого необходимо специальное программное обеспечение – система моделирования. Специфика такой системы определяется технологией работы, набором языковых средств, сервисных программ и приемов моделирования.

Имитационная модель должна отражать большое число параметров, логику и закономерности поведения моделируемого объекта во времени (временная динамика) и в пространстве (пространственная динамика).

Моделирование объектов экономики связано с понятием финансовой динамики объекта. С точки зрения специалиста (информатика-экономиста, математика-программиста или экономиста-математика), имитационное моделирование контролируемого процесса или управляемого объекта – это высокоуровневая информационная технология, которая обеспечивает два вида действий, выполняемых с помощью компьютера:

- работы по созданию или модификации имитационной модели;
- эксплуатацию имитационной модели и интерпретацию результатов.

В сложных системах, характеризующихся многоуровневостью и взаимодействием между собой элементов, каждый из которых также является системой, при традиционном подходе к моделированию исследователь неизбежно сталкивается с огромными трудностями. Основной сложностью оказывается

непосредственная формализация и математическое описание общесистемных ситуаций на базе умозрительного анализа связей и зависимостей между элементами системы, тем более, что не всегда для этой цели имеются подходящие математические средства. В таких ситуациях возможен иной путь. На помощь приходят приемы моделирования, которые представляют модель в виде алгоритмической программы для компьютера. В этом заключается сущность имитационного моделирования.

Имитационное моделирование – это исследование сложной системы на компьютере, направленное на получение информации о самой системе. ИМ основано на воспроизведении с помощью компьютера развернутого во времени процесса функционирования системы с учетом взаимодействия с внешней средой.

Основными задачами ИМ являются:

- разработка модели исследуемой системы на основе частных имитационных моделей (модулей) подсистем, объединенных своими взаимодействиями в единое целое;
- выбор информативных (интегративных) характеристик объекта, способов их получения и анализа;
- построение модели воздействия внешней среды на систему в виде совокупности имитационных моделей внешних воздействующих факторов;
- выбор способа исследования имитационной модели в соответствии с методами планирования имитационных экспериментов.

Целью ИМ является конструирование имитационной модели объекта и проведение имитационных экспериментов над ней для изучения законов функционирования и поведения с учетом заданных ограничений и целевых функций в условиях взаимодействия с внешней средой.

К достоинствам метода ИМ могут быть отнесены:

- проведение имитационного эксперимента над имитационной моделью системы, для которой натурный эксперимент не осуществим по этическим соображениям или эксперимент связан с опасностью для жизни, или он дорог, или из-за того, что эксперимент нельзя провести с прошлым;

- решение задач, аналитические методы для которых неприменимы или трудоемки, например, в случае непрерывно-дискретных факторов, случайных воздействий, нелинейных характеристик элементов системы и т.п.;

- возможность анализа общесистемных ситуаций и принятия решения с помощью компьютера (в том числе для сложных систем), выбор критерия сравнения стратегий поведения который на уровне проектирования не осуществим;

- сокращение сроков и поиск проектных решений, которые являются оптимальными по некоторым критериям оценки эффективности;

- проведение анализа вариантов структуры больших систем, различных алгоритмов управления, изучение влияния изменений параметров системы на ее характеристики и т.д.

За счет идентичности строения и поведения возможных сочетаний и скачков состояния системы при ИМ имеет место определенное сходство процесса, воспроизводимого компьютером, и реального процесса функционирования системы. Конструируя общесистемные ситуации, компьютер как бы имитирует явления и события моделируемого процесса.

При экспериментах с имитационными моделями на компьютере «проигрываются» различные варианты. Такое «проигрывание» должно быть целенаправленным, организованным и оптимальным (например, в смысле экономии времени исследователя). Для этих целей разработана математическая теория планирования эксперимента, о которой речь пойдет позднее.

Замечательным результатом программной реализации сложных моделей стало понимание того факта, что алгоритмически можно описывать даже такие системы, которые в силу их сложности не допускают аналитического описания. Это обстоятельство резко расширило класс объектов, доступных для ИМ. В настоящее время методы и способы ИМ широко используются в экономике, химии, агротехнике и в других областях, где практически невозможно получить точное аналитическое решение поставленной задачи. Некоторая потеря достоверности и чистоты результатов в ИМ компенсируется значительным упрощением имитационной модели по сравнению с аналитической.

В обычной постановке ИМ ориентировано на решение задачи анализа и параметрического синтеза из условия получения каких-то оптимальных свойств в исследуемой системе. Например, может решаться задача оценки влияния различных факторов маркетинга на величину получаемой прибыли. Решая эти задачи на имитационной модели можно получить оптимальные значения исследуемых факторов.

Для получения и анализа имитационных моделей в ИМ широко применяется математический аппарат корреляционно-регрессионного анализа.

Математическая модель воспроизводит алгоритм («логику») функционирования исследуемой системы во времени при различных сочетаниях значений параметров системы и внешней среды. При этом имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Примером простейшей аналитической модели может служить уравнение прямолинейного равномерного движения. При исследовании такого процесса с помощью имитационной модели должно

быть реализовано наблюдение за изменением пройденного пути с течением времени.

Основным преимуществом имитационных моделей по сравнению с аналитическими является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют легко учитывать наличие дискретных или непрерывных элементов, нелинейные характеристики, случайные воздействия и др. Поэтому этот метод широко применяется на этапе проектирования сложных систем. Основным средством реализации имитационного моделирования служит компьютер, позволяющий осуществлять цифровое моделирование систем и сигналов.

Имитационные модели не только по свойствам, но и по структуре соответствуют моделируемому объекту. При этом имеется однозначное и явное соответствие между процессами, получаемыми на модели, и процессами, протекающими на объекте.

5.2 КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Имитационные модели как подкласс математических моделей можно классифицировать на статические и динамические; детерминированные и стохастические; дискретные и непрерывные.

Класс задачи предъявляет определенные требования к имитационной модели. Так, например, при статической имитации расчет повторяется несколько раз в различных условиях проведения эксперимента, исследование поведения объекта осуществляется «в определенный короткий период времени». При динамической имитации моделируется поведение системы «в течение продолжительного периода времени» без изменений условий. При стохастической имитации в модель включаются случайные величины с известными законами распределения;

при детерминированной имитации эти возмущения отсутствуют, т.е. их влияние не учитывается. [12]

Для описания динамики моделируемых процессов в имитационном моделировании реализован механизм задания модельного времени. Эти механизмы встроены в управляющие программы любой системы моделирования. Чтобы обеспечить имитацию параллельных событий реальной системы вводят некоторую глобальную переменную (обеспечивающую синхронизацию всех событий в системе), которую называют модельным (или системным) временем.

Существуют два основных способа изменения модельного времени:

- Пошаговый (применяются фиксированные интервалы изменения модельного времени);
- Пособытийный (применяются переменные интервалы изменения модельного времени, при этом величина шага измеряется интервалом до следующего события).

Простейшая классификация на основные виды имитационных моделей связана с применением двух этих способов продвижения модельного времени. Соответственно различают имитационные модели: непрерывные, дискретные и непрерывно-дискретные.

В непрерывных имитационных моделях переменные изменяются непрерывно, состояние моделируемой системы меняется как непрерывная функция времени, и, как правило, это изменение описывается системами дифференциальных уравнений.

В дискретных имитационных моделях переменные изменяются дискретно в определенные моменты имитационного времени (наступления событий). Динамика дискретных моделей представляет собой процесс перехода от момента наступления очередного события к моменту наступления следующего события.

Поскольку в реальных системах непрерывные и дискретные процессы часто невозможно разделить, были разработаны непрерывно-дискретные модели, в которых совмещаются механизмы продвижения времени, характерные для этих двух процессов.

5.3 МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Результаты имитационного моделирования работы стохастической системы являются реализациями случайных величин или процессов. Поэтому для нахождения характеристик системы требуется многократное повторение и последующая обработка данных. Чаще всего в этом случае применяется разновидность имитационного моделирования - *статистическое моделирование* (или метод Монте-Карло), то есть воспроизведение в моделях случайных факторов, событий, величин, процессов, полей. По результатам статистического моделирования определяют оценки вероятностных критериев качества, общих и частных, характеризующих функционирование и эффективность управляемой системы.

Создателями метода статистических испытаний (метода Монте-Карло) считают американских математиков Д. Неймана и С. Улама. В 1944 году в связи с работами по созданию атомной бомбы Нейман предложил широко использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Данный метод был назван так в честь города в округе Монако, из-за рулетки, простейшего генератора случайных чисел.

Первоначально метод Монте-Карло использовался главным образом для решения задач нейтронной физики, где традиционные численные методы оказались мало пригодными. Далее его влияние распространилось на широкий класс задач статистической физики, очень разных по своему содержанию.

К разделам науки, где все в большей мере используется метод Монте-Карло, следует отнести задачи теории массового обслуживания, задачи теории игр и математической экономики, задачи теории передачи сообщений при наличии помех и ряд других.

Метод Монте-Карло (или метод статистических испытаний) можно определить как метод моделирования случайной величины с целью вычисления характеристик их распределений.

Суть состоит в том, что результат испытаний зависит от некоторой случайной величины, распределенной по заданному закону. Поэтому результат каждого отдельного испытания носит случайный характер. Как правило, составляется программа для осуществления одного случайного испытания. Проведя серию испытаний, получают выборку. Полученные статистические данные обрабатываются и представляются в виде численных оценок интересующих исследователя величин (характеристик системы).

Испытание повторяется N раз, причем каждый опыт не зависит от остальных, и результаты всех опытов усредняются. Это значит, что число испытаний должно быть достаточно велико, поэтому метод существенно опирается на возможности компьютера.

Теоретической основой метода Монте-Карло являются предельные теоремы теории вероятностей. Они гарантируют высокое качество статистических оценок при весьма большом числе испытаний. Метод статистических испытаний применим для исследования как стохастических, так и детерминированных систем. Практическая реализация метода Монте-Карло невозможна без использования компьютера.

В задачах статистического моделирования обработка реализаций случайных процессов необходима не только для анализа выходных процессов. Весьма важен также и контроль характеристик входных случайных воздействий. Контроль заключается в проверке соответствия распределений генерируемых процессов заданным распределениям. Эта задача часто формулируется как задача проверки гипотез.

5.4 ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЭТАПЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим технологические этапы создания и использования имитационных моделей.

1. Формулировка проблемы и определение целей имитационного исследования

Результатом работ на данном этапе является содержательное описание объекта моделирования с указанием целей имитации и тех аспектов функционирования объекта моделирования, которые необходимо изучить на имитационной модели. В ходе составления содержательного описания объекта моделирования устанавливаются границы изучения моделируемого объекта, дается описание внешней среды, с которой он взаимодействует. Формулируются также основные критерии эффективности, по которым предполагается проводить сравнение на модели различных вариантов решений, проводится генерация и описание рассматриваемых альтернатив

2. Разработка концептуального описания

На данном этапе разрабатывается концептуальная модель (или вербальное описание) и выбор способа формализации для заданного объекта моделирования.

Концептуальная модель – есть логико-математическое описание моделируемой системы в соответствии с формули-

ровкой проблемы. Основное содержание этого этапа – формулировка общего замысла модели, переход от реальной системы к логической схеме ее функционирования. Здесь приводится описание объекта в терминах математических понятий и алгоритмизация функционирования ее компонент. Концептуальное описание представляет собой упрощенное алгоритмическое отображение реальной системы.

При разработке концептуальной модели осуществляется установление основной структуры модели, которое включает статическое и динамическое описание системы. Определяются границы системы, приводится описание внешней среды, выделяются существенные элементы и дается их описание, формируются переменные, параметры, функциональные зависимости как для отдельных элементов и процессов, так и для всей системы, ограничения, целевые функции (критерии). Результат работы на этом этапе – документированное концептуальное описание плюс выбранный способ формализации моделируемой системы

Каждая модель представляет собой некоторую комбинацию таких составляющих, как компоненты, переменные, параметры, функциональные зависимости, ограничения, целевые функции (критерии).

Под компонентами понимают составные части, которые при соответствующем объединении образуют систему. Иногда компонентами считают также элементы системы или ее подсистемы.

Параметрами являются величины, которые исследователь может выбирать произвольно, в отличие от переменных модели, которые могут принимать только значения, определяемые видом данной функции. В модели будем различать переменные двух видов: экзогенные и эндогенные. Экзогенные переменные

называются также входными. Это означает, что они порождаются вне системы или являются результатом взаимодействия внешних причин. Эндогенными переменными называются переменные, возникающие в системе в результате воздействия внутренних причин. В тех случаях, когда эндогенные переменные характеризуют состояние или условия, имеющие место в системе, назовем их переменными состояния. Когда же необходимо описать входы и выходы системы, мы имеем дело с входными и выходными переменными.

Функциональные зависимости описывают поведение переменных и параметров в пределах компоненты или же выражают соотношения между компонентами системы. Эти соотношения по природе являются либо детерминистскими, либо стохастическими.

Ограничения представляют собой устанавливаемые пределы изменения значений переменных или ограничивающие условия их изменений. Они могут вводиться либо разработчиком, либо устанавливаться самой системой вследствие присущих ей свойств.

Целевая функция (функция критерия) представляет собой точное отображение целей или задач системы и необходимых правил оценки их выполнения. Выражение для целевой функции должно быть однозначным определением целей и задач, с которыми должны соизмеряться принимаемые решения.

3. Формализация имитационной модели

Процесс формализации сложной системы включает выбор способа формализации и составление формального описания системы.

Цель формализации – получить формальное представление логико-математической модели, т.е. алгоритмов поведения компонент сложной системы и отразить на уровне моделирующего алгоритма вопросы взаимодействия между собой этих компонент.

Наблюдается существенное разнообразие схем (концепций) формализации и структуризации, нашедших применение в имитационном моделировании. Схемы формализации ориентируются на различные математические теории и исходят из разных представлений об изучаемых процессах – отсюда их многообразие – отсюда проблема выбора подходящей (для описания данного объекта моделирования) схемы формализации.

Для дискретных моделей, например, могут применяться процессно-ориентированные системы (processdescription), системы, основанные на сетевых парадигмах (networkparadigms), для непрерывных – потоковые диаграммы моделей системной динамики.

В рамках одной концепции формализации могут быть реализованы разнообразные алгоритмические модели. Как правило, та или иная концепция структуризации (схема представления алгоритмических моделей) или формализации на технологическом уровне закреплена в системе моделирования, языке моделирования. Концепция структуризации более или менее явно лежит в основе всех имитационных систем и поддерживается специально разработанными приемами технологии программирования. Это упрощает построение и программирование модели. Например, язык моделирования GPSS имеет блочную концепцию структуризации, структура моделируемого процесса изображается в виде потока транзактов, проходящего через обслуживающие устройства, очереди и другие элементы систем массового обслуживания.

В основе построения имитационных моделей лежат современные методы структуризации сложных систем и описания их динамики. Широко используются в практике анализа сложных систем следующие модели и методы:

– сети кусочно-линейных агрегатов, моделирующие дискретные и непрерывно-дискретные системы;

– сети Петри (сети событий, Е-сети, КОМБИ-сети и др. расширения), применяемые при структуризации причинных связей и моделировании систем с параллельными процессами, служащие для стратификации и алгоритмизации динамики дискретных и дискретно-непрерывных систем;

– потоковые диаграммы и конечно-разностные уравнения системной динамики, являющиеся моделями непрерывных систем и другие.

4. Программирование имитационной модели (разработка программы-имитатора)

На этапе осуществляется выбор средств автоматизации имоделирования, алгоритмизация, программирование и отладка имитационной модели. Концептуальное или формальное описание модели сложной системы преобразуется в программу-имитатор в соответствии с некоторой методикой (дисциплиной) программирования, с применением языков и систем моделирования.

5. Испытание и исследование модели, проверка модели

Проводится верификация модели, оценка адекватности, исследование свойств имитационной модели и другие процедуры комплексного тестирования разработанной модели.

После того, как имитационная модель реализована на компьютере, необходимо провести испытание, проверку достоверности модели. Это является чрезвычайно важным и ответственным моментом в имитационном моделировании. Проверка, выполненная не тщательно, может привести к неизвестным последствиям.

На этапе испытания и исследования разработанной имитационной модели организуется комплексное тестирование модели (testing) –планируемый итеративный процесс, направленный главным образом на поддержку процедур верификации и валидации имитационных моделей и данных.

6. Планирование и проведение имитационного эксперимента

На данном технологическом этапе осуществляется стратегическое и тактическое планирование имитационного эксперимента. Результатом является составленный и реализованный план эксперимента, заданные условия имитационного прогона для выбранного плана.

Организация направленного вычислительного эксперимента на имитационной модели предполагает выбор и применение различных аналитических методов для обработки результатов имитационного исследования. Для вычислительного эксперимента аналитическими методами применяются методы планирования вычислительного эксперимента, регрессионный и дисперсионный анализ, градиентные и другие методы оптимизации.

На этом этапе проводятся серийные расчеты по составленной и отлаженной программе. Этап включает следующие подэтапы:

- планирование машинного эксперимента;
- проведение рабочих расчетов;
- представление результатов моделирования;
- интерпретацию результатов моделирования;
- выдачу рекомендаций по оптимизации режима работы реальной системы.

Перед проведением рабочих расчетов на компьютере должен быть составлен план проведения эксперимента с указанием комбинаций переменных и параметров, для которых должно проводиться моделирование системы. Задача заключается в разработке оптимального плана эксперимента, реализация которого позволяет при сравнительно небольшом числе испытаний модели получить достоверные данные о закономерностях функционирования системы.

7. Анализ результатов моделирования

Исследователь проводит интерпретацию результатов моделирования и их использование – собственно принятие решений. Интерпретация результатов моделирования имеет целью переход от информации, полученной в результате машинного эксперимента с моделью, к выводам, касающимся процесса функционирования объекта-оригинала. На основании анализа результатов моделирования принимается решение о том, при каких условиях система будет функционировать с наибольшей эффективностью.

5.5 ПРОВЕДЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

С точки зрения представления поведения моделируемой системы имитационные модели относятся к классу описательных. Если в модели учитываются случайные факторы, то в процессе имитации обычно осуществляется большое число прогонов модели как с разными входными данными, так и с разными значениями последовательностей случайных чисел. Для детерминированной модели (без учета случайностей) достаточно одного прогона модели для каждой комбинации входных данных, однако в жизни такие модели встречаются крайне редко.

В результате экспериментирования с моделью получают большое количество выходных данных, которые должны быть структурированы и интерпретированы так, чтобы их можно было использовать для принятия решений по результатам моделирования. Для правильной интерпретации полученных от модели выходных данных необходимо организовать эксперименты с моделью.

Организация эксперимента – это разработка плана проведения экспериментов, который дает возможность за минимальное число прогонов модели и при минимальной стоимости ра-

бот сделать статистически значимые выводы или найти наилучшее решение. При организации эксперимента обычно определяют:

- 1) входные данные для каждого эксперимента;
- 2) количество прогонов имитационной модели;
- 3) длительность одного прогона модели;
- 4) длительность переходного процесса моделирования, после которого необходимо собирать выходные данные;
- 5) стратегию сбора данных для каждого прогона модели;
- 6) методы оценки точности выходных данных с построением доверительных интервалов;
- 7) чувствительность модели к входным данным, различным видам распределений, сценариям поведения моделируемой системы;
- 8) условия эксперимента и сценарии;
- 9) условия генерации потоков случайных чисел внутри систем и моделирования и для вероятностных входных данных;
- 10) стратегию достижения цели эксперимента (например, сравнение альтернативных вариантов или оптимизация целевой функции).

Конечная цель проведения экспериментов – это получение достаточной статистической информации для принятия решений по результатам моделирования. Как правило, моделирование проводится с целью нахождения некоторых экстремальных значений характеристик моделируемой системы (оптимизирующий эксперимент) или для выявления важных факторов, влияющих на моделируемую систему (отсеивающий эксперимент). Оба эти эксперимента используют факторные планы и аппроксимируют поверхность отклика полиномами разного порядка; для поиска экстремальных значений приме-

няются численные методы оптимизации. Для этих экспериментов необходима некоторая функциональная зависимость значений выходной переменной (отклика) от входных переменных или факторов, которая отражает критерий эффективности моделируемой системы. Таким образом, поиск наилучшего решения выражается численной характеристикой этого критерия, а для нахождения экстремальных значений необходимо исследовать поверхности отклика (проводить эксперименты) в разных точках. От выбора начальной точки в факторном пространстве во многом зависит эффективность экспериментов.

Другой вид экспериментов, проводимых с моделью, – это структурная оптимизация, под которой будем понимать поиск наилучшей структуры моделируемой системы. В этом случае эксперименты проводятся с разными моделями, а не с одной, как в предыдущем случае, причем модели могут отличаться структурой, параметрами и принятыми алгоритмами поведения. Для таких экспериментов нет единого числового критерия оптимизации, что затрудняет использование классических методов. Однако количество рассматриваемых вариантов, как правило, невелико, поэтому для структурной оптимизации можно использовать метод выдвижения гипотез с перебором вариантов. Оптимизация каждого варианта моделируемой системы обычно осуществляется с помощью поиска узких мест и их устранения, т.е. балансировки моделируемой системы. Узкие места определяют пропускную способность всей системы. Поиск наилучшего решения осуществляется путем сравнения рассмотренных вариантов.

Основные задачи организации и проведения вычислительного эксперимента на имитационной модели включают:

- стратегическое планирование вычислительного эксперимента;

– выбор (математического) метода анализа (обработки) результатов вычислительного эксперимента.

Стратегическое планирование вычислительного эксперимента – это организация вычислительного эксперимента, выбор метода сбора информации, который дает требуемый (для данной цели моделирования, для принятия решения) ее объем при наименьших затратах. То есть основная цель стратегического планирования – получить желаемую информацию для изучения

моделируемой системы при минимальных затратах на экспериментирование, при наименьшем числе прогонов.

Перед началом исследования необходимо спланировать эксперимент – разработать план проведения эксперимента на модели. Цель планирования эксперимента заключается в следующем:

1) планирование эксперимента позволяет выбрать конкретный метод сбора необходимой для получения обоснованных выводов информации, т.е. план задает схему исследования. Таким образом, план эксперимента служит структурной основой процесса исследования;

2) достигнуть цели исследования эффективным образом, т.е. уменьшить число экспериментальных проверок (прогонов).

Действительно, если в процессе имитационного исследования рассматривается большое число вариантов (для каждого варианта могут меняться параметры, переменные, структурные отношения), то число прогонов растет, растут и затраты машинного времени.

Допустим, число уровней, принимаемых значений переменной всего 2. В случае 3-х двухуровневых факторов необходимо проводить прогонов $N = 2^3 = 8$, при 7 факторов требуемое число прогонов возрастает до $2^7 = 128$.

Проблема выбора ограниченного числа прогонов может быть решена с помощью статистических методов планирования эксперимента.

Вторая задача при организации и проведении направленного вычислительного эксперимента на имитационной модели – выбор метода анализа результатов.

Имитационная модель представляется исследователю в виде взаимосвязи между входом X (факторы) и выходом Y (отклик) имитационной модели, которая должна быть промоделирована с помощью некоторой вторичной модели, отвечающей стратегическим требованиям. В простейшем случае – это может быть некоторая линейная регрессионная модель. В задачах интерполяции ищется функция F , в задачах оптимизации – экстремум функции F .

Линейная регрессионная модель для выражения эффектов от k факторов имеет вид:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + \dots + b_k X_{ik} + e_i, \quad (i = 1, N), \quad (5.1)$$

где в i -м имитационном прогоне (i -наблюдение) фактор j имеет значение X_{ij} ($j=1, k$) и e_i представляет ошибку в регрессионной модели и по предположению имеет нулевое математическое ожидание.

Полным факторным планом будет план, если в факторном эксперименте производятся все возможные повторения, то есть проводятся испытания при всех сочетаниях факторов. При этом строится матрица планирования эксперимента, где в столбцах размещаются факторы, а в строках – номера испытаний.

Неполным факторным планом называется план эксперимента, если в эксперименте производится лишь часть всех возможных повторений. Такой эксперимент называется дробным факторным экспериментом, а его матрица планирования –

дробной репликой. Для того, чтобы сократить число опытов, применяются соответствующие методы.

5.6 ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА АВТОМАТИЗАЦИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В процессе построения имитационной модели мы выделяли три уровня ее представления: концептуальную модель, формализованное или алгоритмическое описание, программу-имитатор.

Формальное или концептуальное описание модели, преобразуется в программу-имитатор в соответствии с технологией программирования. В принципе, имитационную модель можно реализовать на любом универсальном языке моделирования. Однако для облегчения написания и работы с программой-имитатором созданы специальные системы автоматизации моделирования.

Языки и системы моделирования упрощают построение программ-имитаторов и проведение имитационных экспериментов за счет частичной или полной автоматизации переходов от одного уровня представления модели к другому. В этом состоит основное назначение языков моделирования, именно здесь и проявляется их главное преимущество перед универсальными алгоритмическими языками.

Общепризнанными являются следующие преимущества языков и систем моделирования по сравнению с универсальными языками и системами программирования.

Концептуальная выразительность. Языки моделирования обеспечивают более строгое следование выбранной концепции построения модели.

Язык моделирования содержит абстрактные конструкции, непосредственно отражающие понятия, в которых представлена формализованная модель, или близкие концептуальному

уровню описания моделируемой системы, с помощью которых четко классифицируют элементы моделируемой системы, элементы различных классов различают по характеристикам и свойствам, описываются связи между элементами системы и внешней среды, позволяющие изменять структуру модели.

Это упрощает программирование программы-имитатора, позволяет автоматизировать выявление, диагностику ошибок в программах.

Автоматизация стандартных функций моделирования (функций управляющей программы) позволяет реализовать механизм модельного времени. Системы моделирования имеют эффективный встроенный механизм продвижения модельного времени (календарь событий, методы интегрирования и др.), средства разрешения временных узлов.

Языки моделирования, как правило, содержат встроенные датчики случайных чисел, генераторы случайных чисел и других типовых воздействий, в них автоматизирован сбор стандартной статистики и других результатов моделирования.

В языках моделирования имеются средства автоматизации выдачи результатов в табличной или графической форме, управления процессом моделирования (анализ ошибочных ситуаций и т.д.).

Языки моделирования имеют средства, упрощающие программирование имитационных экспериментов (в частности, автоматизирующие установку начального состояния и перезапуск модели.) и другие интерактивные и технологические возможности, используемые при проведении имитационных исследований.

Множество языков моделирования можно разделить на две группы:

- 1) методо-ориентированные языки моделирования, поддерживающие определенный класс формализованных или алгоритмических описаний;

2) проблемно-ориентированные языки моделирования – языки моделирования конечного пользователя, позволяющие формулировать задачи моделирования непосредственно на концептуальном уровне. Связь с пользователем в такой системе моделирования на уровне программного интерфейса осуществляется через набор понятий непосредственно из предметной области исследований. Для этого в проблемно-ориентированные системы моделирования включаются абстрактные элементы, языковые конструкции и наборы понятий, взятые непосредственно из предметной области исследований. Примерами таких решений могут служить системы моделирования: Simular, Simflex – управление материальными потоками в производственной системе; MAST- моделирование гибких производственных систем (применяется блочная концепция структуризации); TOMAS – технологическая подготовка производственных систем (используемые формальные схемы – автоматы); SIRE – календарное планирование производственных процессов (сети с очередями); COMNET – телекоммуникации; MEDMODEL – медицинское обслуживание.

Система моделирования – это совокупность языковых и программных средств, которая включает:

- язык моделирования;
- язык управления системой моделирования – язык команд интерактивного взаимодействия с пользователем;
- управляющая программа – программные средства, обеспечивающие трансляцию модели и другие стандартные функции системы моделирования (продвижение модельного времени, генерацию случайных чисел, сбор статистической информации, вывод результатов и т. д.).

Проблемно-ориентированные системы моделирования включают также средства разработки языков конечного пользователя.

Классификация языков и систем моделирования позволяет упорядочить сведения о существующих многочисленных языках моделирования, а также более обоснованно выбирать подходящую систему моделирования.

В основу классификации положим следующие общепризнанные характеристики языков и систем моделирования:

- класс моделируемых систем;
- средства описания моделируемых систем;
- инструментально-технологические возможности систем моделирования.

Выше мы указали три класса моделируемых объектов: дискретные, непрерывные, дискретно-непрерывные (комбинированные). Соответственно различают три класса языков моделирования. Области применения языков непрерывного и дискретного моделирования практически не пересекаются. Языки комбинированного моделирования используются при работе с моделями объектов и непрерывного, и дискретного класса. Примерами классических языков и систем непрерывного типа являются: DYNAMO, Vensim и др., поддерживающие методы системной динамики. Широко известные в свое время языки непрерывно-дискретного моделирования: GASP, SLAM, языки дискретного моделирования: SMPL, SIMULA, GPSS, АИС (агрегативная имитационная система) и др.

Средства описания моделируемых систем включают базовую для языка моделирования схему алгоритмизации; альтернативные схемы алгоритмизации; синтаксическую основу языка моделирования; средства проблемной ориентации в языке моделирования.

Под базовой схемой алгоритмизации подразумевается совокупность понятий, которые используются для алгоритмизации (формализации) моделируемой системы и непосредственно представлены в языке моделирования. В настоящее время

используется большое число различных способов алгоритмизации. В языках непрерывного моделирования широко применяются системы дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, структурные схемы, графы связей. Среди дискретного моделирования различают: языки событий, языки работ, языки процессов, языки транзактов, языки, основанные на автоматных и сетевых представлениях, и др. Языки комбинированного моделирования могут основываться на агрегатах, КОМБИ-сетях, использовать комбинированные схемы алгоритмизации языков непрерывного и дискретного моделирования. Базовая схема алгоритмизации предполагает определенную организацию работы управляющей системы моделирования.

В качестве доминирующих базовых концепций формализации и структуризации в современных системах моделирования используются:

- для дискретного моделирования – системы, основанные на описании процессов (processdescription) или на сетевых концептах (networkparadigms), – (Extend, Arena, ProModel, Witness, Taylor, Gpss/H'Proof, ARIS и др.);
- для систем, ориентированных на непрерывное моделирование, – модели и методы системной динамики – (Powersim, Vensim, Dynamo, Stella, Ithink и др.).

Актуальной задачей сегодня является разработка систем моделирования, интегрирующих различные подходы в имитационном моделировании. Примером является система моделирования AnyLogic, совмещающая различные подходы в описании динамических процессов: транзактно-ориентированный способ описания дискретных систем, динамическое моделирование, диаграммы состояний универсального языка моделирования UML, агентный подход в моделировании.

По синтаксической основе различают языки моделирования: вложенные в базовый язык моделирования или расширяющие его, а также с собственным синтаксисом. Классическим языком с собственным синтаксисом является язык моделирования GPSS.

Наличие средств проблемной ориентации в языке моделирования позволяет разрабатывать языки конечных пользователей, вводить макропонятия для упрощения программирования. Средства проблемной ориентации могут быть реализованы различными способами. Весьма распространенный способ – использование макросов. В универсальном языке моделирования SIMULA для проблемной ориентации языка служат классы. В процедурно-ориентированных языках могут использоваться подпрограммы или процедуры.

Язык моделирования GPSS

Язык GPSS является языком, который определил современные технологические тенденции в дискретном имитационном моделировании и явился предвестником современных языков и систем моделирования дискретного типа, таких как Extend, Arena, ProcessModel, Taylor, WITNESS и сотен других современных коммерческих симуляторов. Эти тенденции предопределила, прежде всего, удачно сформированная базовая схема структуризации, заложенная в GPSS, поддерживающая блочно–ориентированный подход, в рамках которого моделирующий блок имеет свое функциональное назначение и представлен соответствующими функциональными объектами (имеющими аналоги с элементами систем массового обслуживания), а также возможности языка для описания параллельных процессов.

В настоящее время на рынке информационных технологий представлены 3 направления, поддерживающие технологи-

ческое развитие базового языка GPSS: корпорация Wolverin – GPSS/H и современное ее решение язык SLX, корпорация MinutemanSoftware – GPSS World, и решения Стокгольмской школы высшей экономики – Micro GPSS, Web GPSS.

В языке GPSS реализована блочно-ориентированная концепция структуризации моделируемого процесса, разработанная с ориентацией на описание систем массового обслуживания (далее – СМО).

Структура моделируемого процесса изображается в виде потока, проходящего через обслуживающие устройства (далее – ОУ), очереди, ключи и другие элементы СМО.

Модель имеет блочную структуру. Моделируемый процесс представляется как поток заявок в системе обслуживания. Блоки интерпретируются как ОУ. Заявки (транзакты) конкурируют между собой за место в ОУ, образуют очереди перед ОУ, если они заняты. Дуги на блок-схеме – потенциальные потоки заявок между ОУ. Существуют истоки и стоки этих заявок. В этом случае блок-схема модели описывает маршруты движения заявок в системе.

GPSS является гибкой языковой средой, поэтому позволяет моделировать не только СМО, но и другие системы (например, склад, распределение ресурсов и многие другие).

Системы массового обслуживания

Система массового обслуживания – абстрактный объект, в котором выполняется последовательность операций, включает совокупность приборов обслуживания, которые связаны определенным логическим порядком. В соответствии с этой логикой происходит движение материальных носителей – заявок на обслуживание от канала (ОУ) к каналу (ОУ).

Заявка характеризуется моментом появления на входе системы, статусом по отношению к другим заявкам, некоторыми

параметрами, определяющими потребности во временных ресурсах на обслуживание.

Постоянно поступающие заявки на обслуживание образуют поток заявок – совокупность заявок, распределенную во времени. Поток заявок может быть однородным (с точки зрения обслуживания все заявки равноправны) и неоднородным. Основным параметр потока заявок – промежуток времени между моментами поступления 2-х соседних заявок.

Поток заявок может быть стационарным и нестационарным (например, изменяться от времени суток).

Поток заявок рассматривается как случайный процесс, характеризующийся функцией распределения периода поступления заявок (например, простейший поток, поток Эрланга).

Элемент системы, в котором происходят операции, называется обслуживающим устройством. В момент выполнения операций он занят, иначе – свободен. Если ОУ (канал) свободен, то заявка принимается к обслуживанию. Обслуживание каждой заявки каналом означает задержку в нем заявки на время, равное периоду обслуживания. После обслуживания заявка покидает прибор обслуживания. Таким образом, ОУ характеризуется временем обслуживания заявки.

При случайном характере поступления заявок образуются очереди.

Заявки принимаются к обслуживанию в порядке очереди (FIFO, очереди с приоритетами и др.), в случайном порядке в соответствии с заданными распределениями, по минимальному времени получения отказа и др.

Реальный процесс функционирования СМО следует представлять в виде последовательности фаз обслуживания, выполняемых различными устройствами. Обслуженная заявка покидает прибор обслуживания и покидает систему (поглотитель

заявок), либо движется дальше в соответствии с технологической схемой работы системы.

Классические математические методы исследования СМО предложены теорией массового обслуживания, но в них, например, используются предположения о простейшем потоке заявок, об однотипных устройствах и т.п. В имитационном моделировании подобные и другие ограничения снимаются: могут применяться произвольные законы распределения, различные схемы обслуживания, например, порядок обслуживания заявок из очереди и т.п. СМО исследуется не обязательно в стационарном режиме, возможно изучение переходного режима, когда показатели отличаются от предельных асимптотических значений.

При применении имитационного моделирования для СМО используются специальные алгоритмы, позволяющие вырабатывать случайные реализации потоков событий и моделировать процессы функционирования обслуживающих систем. Далее осуществляется многократное воспроизведение, реализация случайных процессов обслуживания и на выходе модели – статистическая обработка полученных статистических данных, оценка показателей качества обслуживания.

При использовании GPSS система представлялась в виде множества состояний и правил перехода из одного состояния в другое, определяемых в дискретной пространственно-временной области. Для регистрации изменений во времени используется таймер модельного времени.

MATLAB – это средство математического моделирования, обеспечивающее проведение исследований практически во всех известных областях науки и техники. При этом структура пакета позволяет эффективно сочетать оба основных подхода к созданию модели: аналитический и имитационный.

Именно в сфере математического моделирования MATLAB позволяет наиболее полно использовать все современные достижения компьютерных технологий, в том числе средства визуализации и аудификации (озвучивания) данных, а также возможности обмена данными через Интернет. Кроме того, пользователь имеет возможность создавать средствами MATLAB собственный графический интерфейс, отвечающий как его вкусам, так и требованиям решаемой задачи. Как следует из названия пакета, он ориентирован, в первую очередь, на обработку массивов данных (матриц и векторов). Это позволило его разработчикам существенно повысить эффективность процедур, работающих с указанными типами данных, по сравнению с языками программирования «общего назначения» (Pascal, C и т. п.).

С точки зрения пользователя, MATLAB представляет собой богатейшую библиотеку, единственная проблема при работе с которой заключается в умении быстро отыскать те из них, которые нужны для решения данной задачи.

Особое место среди наборов инструментов занимает система визуального моделирования SIMULINK. Она позволяет моделировать и анализировать физические и математические системы, включая моделирование систем с нелинейными элементами и систем, которые используют непрерывное и дискретное время.

В определенном смысле SIMULINK можно рассматривать как самостоятельный продукт фирмы MathWorks, который в некоторых случаях продается в «именной» упаковке. Однако он работает только при наличии ядра MATLAB и использует многие функции, входящие в его состав.

Необходимо отметить, что в MATLAB использована технология ассоциативной обработки файлов, поддерживаемая

операционной системой Windows. Она заключается в том, что каждому типу файлов ставится в соответствие (ассоциируется с ним) определенное приложение, обеспечивающее обработку хранящихся в нем данных. Чтобы активизировать ассоциированное приложение, пользователю достаточно дважды щелкнуть на значке файла кнопкой мыши. Например, при выборе файла с расширением .doc загружается текстовый редактор MS Word.

Для MATLAB характерны файлы нескольких типов, для каждого из которых определен свой допустимый набор операций и реализующие их средства.

Система MATLAB не зависит от платформы и может работать под управлением и других операционных систем – UNIX и MacOS. При этом технология моделирования средствами SIMULINK остается неизменной.

Разработка моделей средствами SIMULINK (в дальнейшем S-моделей) основана на технологии drag-and-drop («перетаски и оставь»). В качестве «кирпичиков» для построения S-модели используются модули (или блоки), хранящиеся в библиотеке SIMULINK.

Библиотека SIMULINK хороша тем, что, с одной стороны, обеспечивает пользователю доступ ко всем основным возможностям пакета MATLAB, а с другой – является достаточно самостоятельной его компонентой, в том смысле, что при работе с ней не обязательно иметь навыки в использовании других инструментов, входящих в состав пакета.

Блоки, включаемые в создаваемую модель, могут быть связаны друг с другом как по информации, так и по управлению. Тип связи зависит от типа блока и логики работы модели. Данные, которыми обмениваются блоки, могут быть скалярными величинами, векторами или матрицами произвольной размерности.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение имитационного моделирования.
2. Охарактеризуйте статистическое моделирование (метод Монте-Карло).
3. Приведите классификацию имитационных моделей.
4. Перечислите технологические этапы имитационного моделирования и дайте их краткую характеристику.
5. Опишите процессы планирования и проведения вычислительного эксперимента.
6. Укажите назначение и составляющие систем моделирования.
7. Укажите назначение языков моделирования.
8. Приведите классификацию языков моделирования.
9. Охарактеризуйте язык моделирования GPSS.
10. Укажите особенности моделирования систем массового обслуживания.
11. Охарактеризуйте возможности использования MATLAB/Simulink для имитационного моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое моделирование позволяет исследовать и прогнозировать производственные, экономические и другие системы и явления с помощью математических моделей микро- и макроуровней. Математическая модель представляет собой формализованное описание системы (или процесса) на математическом языке, например, в виде совокупности математических соотношений или схемы алгоритма, т. е. такое математическое описание, которое обеспечивает имитацию работы систем или процесса на уровне, достаточно близком к их реальному поведению систем или процессов. Любая математическая модель описывает реальный объект, явление или процесс с некоторой степенью приближения к действительности.

В основе решения практических задач лежит научная база, связанная с построением математической модели, выбором и реализацией математического метода, использующего эту модель.

В учебном пособии рассмотрены:

- основы математического моделирования, классификация видов моделирования и экономико-математических моделей, этапы математического моделирования;
- теоретические и практические основы, связанные с математическим программированием, и, в частности, с линейным и нелинейным программированием;
- модели динамического программирования и управления запасами;
- теоретические и практические вопросы, связанные со строением и использованием трендовых и регрессионных моделей, корреляционно-регрессионного анализа;
- основные понятия имитационного моделирования, технологические этапы, вопросы назначения и классификации

языков моделирования и систем моделирования, планирования и проведения вычислительного эксперимента.

В результате изучения данного учебного пособия обучающийся получит теоретические и практические знания в области математического моделирования. Однако успех в использовании математического аппарата от формулировки задачи до получения решения во многом зависит от творческих способностей, интуиции, опыта специалиста, решающего задачу.

Учебное пособие поможет обучающимся:

- освоить современные математические модели анализа и научного прогнозирования поведения экономических объектов и явлений;

- применять системный подход и математические модели в формализации решения прикладных задач;

- сформировать систему основных понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов, и раскрытие взаимосвязи этих понятий;

- развить логическое мышление, приобрести навыки математического исследования явлений и процессов, связанных с производственной деятельностью;

- сформировать навыки самостоятельной работы, организации исследовательской работы.

Дальнейшее развитие теоретических и практических знаний по математическому моделированию обучающиеся могут получить при использовании изданий с конкретизацией алгоритмов решения по приведенным в пособии моделям, в том числе с использованием современных программных средств на компьютере. Углубленные знания по имитационному моделированию обучающийся может получить при изучении учебной дисциплины «Имитационное моделирование», которая также входит в учебный план по данному направлению подготовки.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Понятия модели, моделирования. Классификация видов моделирования.
2. Определение математической модели. Общая схема математической модели функционирования системы.
3. Понятие и классификация экономико-математических моделей.
4. Основные стадии моделирования.
5. Этапы построения модели.
6. Понятие, признаки и математическая постановка оптимизационной задачи.
7. Классификация и краткая характеристика задач математического программирования.
8. Основные принципы реализации методов оптимизации.
9. Понятие и математическая модель линейного программирования.
10. Постановка и математическая модель задачи оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии.
11. Постановка и математическая модель задачи о смесях (рационе, диете).
12. Постановка и математическая модель транспортной задачи.
13. Этапы моделирования в линейном программировании.
14. Постановка и математическая модель задачи нелинейного программирования.
15. Метод множителей Лагранжа.

16. Постановка и математическая модель задачи динамического программирования.
17. Математическая модель задачи оптимизации распределения инвестиций между предприятиями.
18. Постановка и обобщенная модель задач управления запасами.
19. Типы моделей управления запасами.
20. Детерминированная модель управления запасами.
21. Система управления запасами с фиксированным размером заказа.
22. Система управления запасами с фиксированной периодичностью заказа.
23. Временные ряды. Виды зависимостей в трендовых моделях. Использование трендовых моделей.
24. Функциональные и стохастические связи. Зависимости в регрессионных моделях.
25. Использование регрессионных моделей.
26. Мультиколлинеарность.
27. Показатели оценки статистической значимости трендовых и регрессионных моделей.
28. Понятие имитационного моделирования.
29. Понятие статистического моделирования (метода Монте-Карло).
30. Классификация имитационных моделей. Технологические этапы имитационного моделирования.
31. Назначение и классификация языков моделирования.
32. Назначение и составляющие систем моделирования.
33. Язык моделирования GPSS.
34. Особенности моделирования систем массового обслуживания.
35. Планирование и проведение вычислительного эксперимента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алпатов, Ю.Н. Моделирование процессов и систем управления [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю.Н. Алпатов. — Электрон.дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 140 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/106730>. — Загл. с экрана.
2. Вьюненко, Л.Ф. Имитационное моделирование : учебник и практикум для академического бакалавриата / Л. Ф. Вьюненко, М. В. Михайлов, Т. Н. Первозванская ; под ред. Л. Ф. Вьюненко. — М.: Издательство Юрайт, 2019. — 283 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-01098-5. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/DB650518-E8B1-4A49-84B8-53FC0D88C3B5.
3. Гармаш, А.Н. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев ; под ред. В. В. Федосеева. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2019. — 328 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3698-8. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/F1ED488F-DE26-4F3D-BD14-B5DE28846453.
4. Гетманчук, А.В. Экономико-математические методы и модели :<учебное пособие> / А. В. Гетманчук, М. М. Ермилов. - Москва : Дашков и К', 2013. - 185с.
5. Данилов, Н.Н. Курс математической экономики :<учебное пособие>* / Н. Н. Данилов. - Москва : Лань, 2016. - 400с.
6. Дубина, И.Н. Основы математического моделирования социально-экономических процессов [Электронный ресурс] : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / И. Н. Дубина. — Москва :Юрайт, 2017. —Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru>. — Загл. с экрана.
7. Катаргин, Н.В. Экономико-математическое моделирование [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.В. Катаргин. — Электрон.дан. — СанктПетербург : Лань, 2018. — 256 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/107939>.
8. Каштаева, С.В. Моделирование экономических процессов в АПК [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / С. В. Каштаева ; Пермская ГСХА. — Пермь : Пермская ГСХА, 2012. — Режим доступа: <http://pgsha.ru/web/generalinfo/library>. —Загл. с экрана.
9. Королев, А.В. Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. В. Королев. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 280 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-00883-8. — Режим доступа :www.biblio-online.ru/book/05CB5B2D-5625-4F53-8E26-B0A5A951365F.
10. Косников,С.Н. Математические методы в экономике : учеб.пособие для вузов / С. Н. Косников. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 172 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-04098-2. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/018ECE89-72FD-4206-AFAA-CF33A150D178.
11. Набатова, Д.С. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Д. С. Набатова. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 292 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-02699-3. — Режим доступа :www.biblio-online.ru/book/87534563-ED76-4F42-8F09-6EF53F605FC9.
12. Лычкина, Н.Н. Имитационное моделирование экономических процессов : учебное пособие* / Н. Н. Лычкина. - М. : ИНФРА-М, 2012. - 253с.
13. Петров, А.В. Моделирование процессов и систем [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com>.—Загл. с экрана.

14. Попов, А.М. Экономико-математические методы и модели : учебник [Электронный ресурс] / А. М. Попов, В. Н. Сотников. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2019. – Режим доступа : <http://www.biblio-online.ru>. – Загл. с экрана.

15. Фомин, Г.П. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник для бакалавров / Г. П. Фомин. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 462 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3021-4. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/F776ADFE-ABC7-41C9-8FC9-6480EBC8B68E.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронный каталог библиотеки Пермского ГАТУ [Электронный ресурс]: базы данных содержат сведения о всех видах лит., поступающей в фонд библиотеки Пермского ГАТУ. – Электрон.дан. (251 141 запись). – Пермь: [б.и., 2005]. Доступ не ограничен. <https://pgsha.ru/generalinfo/library/webirbis/>

2. Собственная электронная библиотека. Доступ не ограничен <https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/>

3. Система ГАРАНТ: электронный периодический справочник [Электронный ресурс]. – Электр.дан. (7162 Мб: 887 970 документов). – [Б.и., 199 -]; Срок не ограничен. Доступ из корпусов университета.

4. ConsultantPlus: справочно - поисковая система [Электронный ресурс]. – Электр.дан. (64 231 7651 документов) – [Б.и., 199 -]. Срок не ограничен. Доступ из корпусов университета.

5. ЭБС издательского центра «Лань» - «Ветеринария и сельское хозяйство», «Лесное хозяйство и лесоинженерное дело»; «Инженерно-технические науки», «Информатика», «Технологии пищевых производств», «Доступ к произведениям отдельно от Разделов (39 наименований)». <http://e.lanbook.com/> Доступ не ограничен.

6. Электронно-библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» www.biblio-online.ru

7. Электронная библиотечная система «Национальный цифровой ресурс «Руконт». Коллекция «Электронная библиотека авторефератов диссертаций ФГБОУ ВПО РГАУ МСХА имени К.А. Тимирязева» (массив документов с 1992 года по настоящее время), тематическая коллекция «Сельское хозяйство. Лесное дело. <http://rucont.ru/> Доступ не ограничен.

8. ООО Научная электронная библиотека. Интегрированный научный информационный портал в российской зоне сети Интернет, включающий базы данных научных изданий и сервисы для информационного обеспечения науки и высшего образования. (Включает РИНЦ- библиографическая база данных публикаций российских авторов и SCIENCE INDEX- информационно - аналитическая система, позволяющая проводить аналитические и статистические исследования публикационной активности российских ученых и научных организаций). <http://elibrary.ru/>. Доступ не ограничен.

9. ООО «ИД «Гребенников». Электронная библиотека Grebennikon содержит статьи, опубликованные в специализированных журналах Издательского дома «Гребенников», где освещается широкий спектр вопросов по экономике (в том числе – по маркетингу, менеджменту, управлению персоналом, управлению финансами и т.д.). <http://grebennikon.ru>. Доступ не ограничен.

10. ООО «Ай Пи Эр Медиа». База данных ЭБС IPRbooks. Тематические коллекции через платформу Библиокомплектатор «Информатика и вычислительная техника», «Геодезия. Землеустройство», «Технические науки». <http://www.bibliocomplectator.ru/>. Доступ не ограничен.

11. ООО «ПОЛПРЕД Справочники». ЭБС Polpred.com (Полпред.ком). Доступ к электронным изданиям «Агропром в РФ и за рубежом. Доступ не ограничен.

Учебное издание

Каштаева Светлана Васильевна
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Учебное пособие

Подписано в печать 03.08.20. Формат 60х84 ¹/₁₆.
Усл. печ. л.7,0. Тираж 50 экз. Заказ № 66

ИПЦ «Прокрость»

Пермского государственного аграрно-технологического университета
имени академика Д.Н. Прянишникова,
614990, Россия, Пермь, ул. Петропавловская, 23
тел. (342) 217-95-42