Maestría de Ciencia de Datos

Optimización Convexa

Tarea 1: Conceptos Básicos y Programación Lineal

Estudiante: Daniel Nuño
Profesor: Dr. Juan Diego Sanchez Torres
Fecha entrega: 13 de febrero de 2022

Problema 1:

Problem 1: On the future of the optimization applications

Note: It is strongly recommended to consider the Further Readings before starting this activity.
Generative design is one of the most impressive topics on engineering, optimization, and design. This approach allows using the optimization concepts in an exceptionally creative way, emphasizing the final results. Consequently, some standard definitions of the optimization theory appear in the generative design process.
This homework proposes reviewing some compelling examples of the generative design to introduce some of the optimization's current applications. With this aim, firstly, consider the following videos' list:

1. The Future of Making Things: Generative Design
2. Generative Design
3. Under Armour Defines The Future of Footwear with Generative Design
4. Using generative design to create one of the lightest wheels in the world
5. Generative Design Holds the Key to the Future of Cool, Fuel-Efficient Car Design
6. Optimizing Airplane Parts with Generative Design
7. JPL Explores a New Approach to Design an Interplanetary Concept Lander

Hence, for the videos under consideration, complete the following items:

1. Make a list of examples from the videos. The primary purpose of that list is to avoid repeated examples and analysis.
2. For each example, detect the following relevant concepts: the utility function, the decision variables and, the constraints. Then, identify the direct impact of the new design on the real-life case under consideration.

Video 1:

- Ejemplo de la silla:
  - Función de costo/utilidad:
  - Variables de decisión: soporte, peso y costo
  - Restricciones: soporte = 250 libras, peso = 15 libras, costo = $30
- El video también habla de otros ejemplos como el plan de un piso para una oficina de trabajo y estructuras y básicamente cualquier diseño sin saber cómo diseñarlo porque la computadora sabe como hacerlo. Considera, con la llegada de impresión 3d e impresión aditiva o sustractiva que las personas y pequeñas empresas puedan costear las ideas y diseños.

Video 2:

- Hack road: no especifica ninguna variable pero que usaron 60 sensores en puntos críticos.
- El video habla de las limitantes de nuestra menta para hacer cálculos y tener en cuenta hasta 6 variables y de la facilidad de una computadora de hacer aún más. La facilidad para generar prototipos con esta tecnología impactara a la industria (automotriz) tarde o temprano.

Video 3:

- Tenis: no especifica ninguna variable, pero menciona que su objetivo era combinar tenis para diferentes actividades en uno solo y que la suela impresa (con espacios) y generada con esta tecnología fuera la más eficiente para atletas.

Video 4:

- La llanta: reducción del peso de la llanta para que sea más ligero el carro, pero con la misma funcionalidad, fuerza y soporte de la estructura.

Video 5:

- La llanta: misma idea del video anterior.
- Generaliza mejoras en cualquier parte de un vehículo para obtener partes mas ligeras y baratas con la misma o mejor funcionalidad a través de inteligencia artificial.

Video 6:

- Asientos de un avión: habla de la facilidad de diseñar asientos más ligeros pero que dan más espacio al final gracias a rápido prototipos incluso con metal.

Video 7

- Modulo de aterrizaje: un 30% de reducción de peso que mantiene las mismas funcionalidades. En un cohete es muy impresionante ya que reduce la energía necesaria para ascender y descender.

Finally, considering the whole list of videos at once:

1. Write a short abstract explaining the methods and objectives of generative design and its relation to the standard optimization theory.
2. Is the generative design restrained to industrial design and architecture? Can it be applied to other areas as mathematical modeling and machine learning?
3. Is there any relationship between data science and generative design?
4. Is there any relationship between evolutionary computation and generative design?

Diseño generativo se puede simplificar como diseño de objetos reales por la computadora utilizando estadística, optimización, simulaciones, e inteligencia artificial en un proceso repetitivo. Los objetivos, usualmente, es reducción de peso, de costo y posiblemente de costo manteniendo las mismas funcionalidades, puede ser usado también con motivos de estética. Diseño generativo es un problema de optimización iterativo.

Pueden ser utilizado para hacer arte, incluyendo imágenes y música. Considero que sí puede ser usado en situaciones de modelado matemático y machine learning. EL uso de algoritmos genéticos y similares, o un modelo ensamblado (de otros modelos) iterativo que produzca el mejor resultado en términos de exactitud y de interpretación, o creación de graficas.

Sí hay relación entre ciencia de datos y diseño generativo ya que el engine para hacer funcionar esos modelos parte fundamenta de ciencia de datos.

Por supuesto, y como ya lo mencioné, algoritmos como el genético, optimización por partículas y evolución diferencial evolucionan iterativamente buscando la mejor solución.

Problem 2: Basics of Linear Programming

From the Larson's book on linear algebra[3]:
After reading Chapter 9,

1. Revisit (explain in your own words), finish, and make a complete and detailed explanation of the examples: 9.1.4 (p. 446), 9.2.5 (p. 453),
2. Solve the following exercises (from the Review Exercises, pp. 491-493) in a step-by-step fashion: 43, 44, and 50.

Problema 2:

EXAMPLE 4 **An Application of a System of Inequalities**

See LarsonLinearAlgebra.com for an interactive version of this type of example.

The liquid portion of a diet is to provide at least 300 calories, 36 units of vitamin A, and 90 units of vitamin C daily. A cup of dietary drink X provides 60 calories, 12 units of vitamin A, and 10 units of vitamin C. A cup of dietary drink Y provides 60 calories, 6 units of vitamin A, and 30 units of vitamin C. Set up a system of linear inequalities that describes the minimum daily requirements for calories and vitamins.

SOLUTION

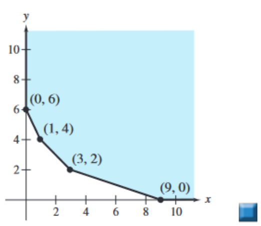
Let

x = number of cups of dietary drink X and
y = number of cups of dietary drink Y.

To meet the minimum daily requirements, the inequalities listed below must be satisfied.

For calories:	$60x + 60y \geq 300$
For vitamin A:	$12x + 6y \geq 36$
For vitamin C:	$10x + 30y \geq 90$
	$x \geq 0$
	$y \geq 0$

The last two inequalities are included because x and y cannot be negative. The graph of this system of linear inequalities is shown at the right.



Parte 1:
-Ejemplo 9.1.4:
Las variables de decisión son calorías, vitamina A y vitamina C.
Las restricciones son al menos 300 calorías, 36 unidades de vitamina A y 90 unidades de vitamina C.
Y, por obviedad, la cantidad bebidas consumidas, X o Y son mayores o iguales a cero en números enteros.
No tiene función de utilidad o costo.

Tiene soluciones ilimitadas, pero considerando que quisiéramos consumir la menor cantidad de productos nos quedamos con los vértices inferiores del polígono ya que todas cumplen con las restricciones

f(0,6) = 360, 36, 180
f(1,4) = 300, 36, 130
f(3,2) = 300, 48, 90

f(9,0) = 540, 108, 90

EXAMPLE 5 **An Application: Optimal Cost**

Example 4 in Section 9.1 set up a system of linear equations for the problem below. The liquid portion of a diet is to provide at least 300 calories, 36 units of vitamin A, and 90 units of vitamin C daily. A cup of dietary drink X provides 60 calories, 12 units of vitamin A, and 10 units of vitamin C. A cup of dietary drink Y provides 60 calories, 6 units of vitamin A, and 30 units of vitamin C. Now, assume that dietary drink X costs \$0.12 per cup and drink Y costs \$0.15 per cup. How many cups of each drink should be consumed each day to minimize the cost and still meet the daily requirements?

SOLUTION

Begin by letting x be the number of cups of dietary drink X and y be the number of cups of dietary drink Y. Moreover, to meet the minimum daily requirements, the inequalities listed below must be satisfied.

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{For calories:} & 60x + 60y & \geq & 300 \\ \text{For vitamin A:} & 12x + 6y & \geq & 36 \\ \text{For vitamin C:} & 10x + 30y & \geq & 90 \\ & x & \geq & 0 \\ & y & \geq & 0 \end{array}\right\} \quad \text{Constraints}$$

The cost C is

$$C = 0.12x + 0.15y. \qquad \text{Objective function}$$

The graph of the region corresponding to the constraints is shown in Figure 9.8. To determine the minimum cost, test C at each vertex of the region, as shown below.

$$\begin{array}{ll} \text{At } (0, 6)\text{:} & C = 0.12(0) + 0.15(6) = 0.90 \\ \text{At } (1, 4)\text{:} & C = 0.12(1) + 0.15(4) = 0.72 \\ \text{At } (3, 2)\text{:} & C = 0.12(3) + 0.15(2) = 0.66 \qquad \text{(Minimum value of } C\text{)} \\ \text{At } (9, 0)\text{:} & C = 0.12(9) + 0.15(0) = 1.08 \end{array}$$

So, the minimum cost is \$0.66 per day, and this occurs when three cups of drink X and two cups of drink Y are consumed each day.

-Ejemplo 9.2.5:

Ahora le agregamos el costo que es igual a \$0.12 por cada bebida X y \$0.15 por cada bebida Y. Costo es 0.12x + 0.15y.
Se desea que el costo se el menor posible cumpliendo las necesidades nutrimentales. Evaluando en las posibles soluciones (los vértices inferiores del polígono de soluciones), la mejor opción es consumir 3 bebidas X y 2 bebidas Y.

43. Optimal Revenue A tailor has 12 square feet of cotton, 21 square feet of silk, and 11 square feet of wool. A vest requires 1 square foot of cotton, 2 square feet of silk, and 3 square feet of wool. A purse requires 2 square feet of cotton, 1 square foot of silk, and 1 square foot of wool. The purse sells for \$80 and the vest sells for \$50.

(a) How many purses and vests should the tailor make to maximize revenue?

(b) What is the maximum revenue?

Parte 2: Ejercicios 43, 44 y 50

Sea algodón igual x, seda igual a y, lana igual a z.

$x \leq 12$
$y \leq 21$
$z \leq 11$
$chaleco\ (x1) = x + 2y + 3z$
$bolso\ (x2) = 2x + y + z$
$ingreso = 80 * bolso + 50 * chaleco$

Como es un problema 3 variables es mas complicado ver los vértices de las posibles soluciones entonces tenemos que resolver el sistema de ecuaciones con el método simplex, la matriz aumentada, gauss-jordan.

Paso 1:

x1	x2	s1	s2	s3	b	ratios
1	$\boxed{2}$	1	0	0	12	6
2	1	0	1	0	21	21
3	1	0	0	1	11	11
-50	$\boxed{-80}$	0	0	0	0	

x1	x2	s1	s2	s3				
0	0	12	21	11	=	50*0+80*0	=	0

Paso 2:

x1	x2	s1	s2	s3	b		
0.5	1.0	0.5	0.0	0.0	6.0	- 1/2 fila1 + fila1	x2
1.5	0.0	-0.5	1.0	0.0	15.0	- 1/2 fila1 + fila2	s2
2.5	0.0	-0.5	0.0	1.0	5.0	- 1/2 fila1 + fila3	s3
-10	0	40	0	0	480	+40 fila1 + fila3	

x1	x2	s1	s2	s3				
0	6	0	15	5	=	50*0+80*6	=	480

Paso 3:

x1	x2	s1	s2	s3	b	ratios
0.5	1.0	0.5	0.0	0.0	6.0	12
1.5	0.0	-0.5	1.0	0.0	15.0	10
$\boxed{2.5}$	0.0	-0.5	0.0	1.0	5.0	2
$\boxed{-10}$	0	40	0	0	480	

x1	x2	s1	s2	s3	b		
0.0	1.0	0.6	0.0	-0.2	5.0	-1/5fila3 + fila1	x2
0.0	0.0	-0.2	1.0	-0.6	12.0	-3/5fila3 + fila1	s2
1.0	0.0	-0.2	0.0	0.4	2.0	-3/5fila3 + fila3	x1
0	0	9.5	0	1	125	1/4fila3 + fila3	

x1	x2	s1	s2	s3				
2.0	5	0	12	0	=	50*2+80*5	=	500

Le resulto es 2 chalecos y 5 bolsas. Le queda un sobrante te 12 pies de seda.

44. Optimal Income A wood carpentry workshop has 400 board-feet of plywood, 487 board-feet of birch, and 795 board-feet of pine. A bar stool requires 1 board-foot of plywood, 2 board-feet of birch, and 1 board-foot of pine. A step stool requires 1 board-foot of plywood, 1 board-foot of birch, and 3 board-feet of pine. An ottoman requires 2 board-feet of plywood, 1 board-foot of birch, and 1 board-foot of pine. The bar stool sells for \$22, the step stool sells for \$42, and the ottoman sells for \$29. What combination of products yields the maximum income?

$$plywood(x) \leq 400$$
$$birch(y) \leq 487$$
$$pine(z) \leq 795$$
$$bar\ stool(x1) = x + 2y + z$$
$$step\ stool(x2) = x + y + 3z$$
$$ottoman(x3) = 2x + y + z$$
$$ingreso = 22x1 + 42x2 + 29x3$$

La matriz aumentada inicial es la siguiente

	banco	escalerita	otomana	slack variables			restricciones
	x1	x2	x3	s1	s2	s3	b
plywood	1	1	2	1	0	0	400
birch	2	1	1	0	1	0	487
pine	1	3	1	0	0	1	795
ingreso	-22	-42	-29	0	0	0	0

Paso 1: Encuentra el mayor negativo en la última fila y en esa columna la menor ratio.

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	ratios
1	1	2	1	0	0	400	400
2	1	1	0	1	0	487	487
1	3	1	0	0	1	795	265
-22	-42	-29	0	0	0	0	

Paso 2: Aplica Gauss-Jordan para que el valor elegido sea 1 y los demás valores sean 0.

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	cálculos	variables básicas
0.7	0.0	1.7	1.0	0.0	-0.3	135.0	- 2/6 fila3 + fila1	s1
1.7	0.0	0.7	0.0	1.0	-0.3	222.0	-2/6 fila3 + fila2	s2
0.3	1.0	0.3	0.0	0.0	0.3	265.0	- 2/3 fila3 + fila3	x2
-8.0	0.0	-15.0	0.0	0.0	14.0	11130.0	14 fila3 + fila4	

x1	x2	x3	s1	s2	s3				
0	265	0	135	222	0	=	0*22+265*42+0*29	=	11130

Paso 3: Encuentra el mayor negativo en última fila y en esa columna em menor ratio.

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	ratios	variables básicas
2/3	0	1 2/3	1	0	- 1/3	135.0	81	x1
1 2/3	0	2/3	0	1	- 1/3	222.0	333	s2
1/3	1	1/3	0	0	1/3	265.0	795	x2
-8	0	-15	0	0	14	11130		

Paso 4: utiliza Gauss-Jordan

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	cálculos	variables básicas
3/8	0	1	5/9	0	- 1/5	75	-4/9fila1 + fila1	x3
1 2/5	0	0	- 2/5	1	- 1/5	168	-2/5*fila1+fila2	s2
1/5	1	0	- 1/5	0	2/5	238	-1/5*fila1 + fila 3	x2
-2	0	0	9	0	11	12345	9*fila1 + fila4	

x1	x2	x3	s1	s2	s3				
0.0	238	75	168	0	0	=	0*22+238*42+75*29	=	12171

Paso 5: Encuentra el mayor negativo en última fila y en esa columna em menor ratio.

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	ratios	variables básicas
3/8	0	1	5/9	0	- 1/5	75.0	202.5	x3
1 2/5	0	0	- 2/5	1	- 1/5	168.0	120	s2
1/5	1	0	- 1/5	0	2/5	238.0	1190	x2
-2	0	0	9	0	11	12345		

Paso 6: utiliza Gauss-Jordan

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	cálculos	variables básicas
0	0	1	2/3	- 1/4	- 1/7	33	-1/4fila2+fila1	x3
1	0	0	- 2/7	5/7	- 1/7	120	-2/7*fila2+fila2	x1
0	1	0	- 1/7	- 1/7	3/7	214	-1/7fila2+fila3	x2
0	0	0	8 3/7	1 3/7	10 5/7	12585	10/7fila2 +fila4	

x1	x2	x3	s1	s2	s3				
120	214	33	0	0	0	=	0*22+238*42+75*29	=	12585

Son 120 bancos, 214 escaleritas y 33 otomanas nos dan un total de $12585 de ganancia.

50. Investment An investor has up to \$250,000 to invest in three types of investments. Type A investments pay 8% annually and have a risk factor of 0. Type B investments pay 10% annually and have a risk factor of 0.06. Type C investments pay 14% annually and have a risk factor of 0.10. To have a well-balanced portfolio, the investor imposes some conditions. The average risk factor should be no greater than 0.05. Moreover, at least one-fourth of the total portfolio is to be allocated to type A investments and at least one-fourth of the portfolio is to be allocated to type B investments. How much should the investor allocate to each type of investment to obtain a maximum return?

Sea type A = x1, type B = x2, type C = x3

$$\frac{1}{4} \leq x1 \leq \frac{2}{4}$$
$$\frac{1}{4} \leq x2 \leq \frac{2}{4}$$
$$x3 \leq \frac{2}{4}$$
$$risk = 0x1 + 0.06x2 + 0.1x3$$
$$return = 0.08x1 + 0.1x2 + 0.14x3$$

Para poner x1 y x2 en función del total del portafolio y que sea menor a ¼:

$$x1 \geq \frac{1}{4}(x1 + x2 + x3)$$
$$\frac{3}{4}x1 - \frac{1}{4}x2 - \frac{1}{4}x3 \geq 0$$
$$x2 \geq \frac{1}{4}(x1 + x2 + x3)$$
$$-\frac{1}{4}x1 + \frac{3}{4}x2 - \frac{1}{4}x3 \geq 0$$

Matrix aumentada inicial:

	type a	type b	type c	slack variables			restricciones
	x1	x2	x3	s1	s2	s3	b
risk	0	0.06	0.1	1	0	0	0.05
type a w	3/4	-1/4	-1/4	0	1	0	0
type b w	-1/4	3/4	-1/4	0	0	1	0
payoff	-0.08	-0.1	-0.14	0	0	0	0

Paso 1:

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	ratios	variables básicas
0	0	0	1	0	0	0	0.5	s1
3/4	- 1/4	- 1/4	0	1	0	0		s2
- 1/4	3/4	- 1/4	0	0	1	0		s3
-0.08	-0.10	-0.14	0.00	0.00	0.00	0.00		

Paso 2:

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	cálculos
0	0.6	1	10	0	0	0.5	9fila1 + fila1
3/4	-0	0	2 1/2	1	0	1/8	2.5fila1 + fila2
- 1/4	8/9	0	2 1/2	0	1	1/8	2.5fila1 + fila3
-0.08	-0.016	0	1.4	0	0	0.07	2.5fila1+fila4

Paso 3:

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	ratio
0	0.6	1	10	0	0	0.5	0
0.75	-0.1	0	2.5	1	0	0.125	6
-0.25	0.9	0	2.5	0	1	0.125	-2
-0.08	-0.016	0	1.4	0	0	0.07	

Paso 4:

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	cálculos	variables
0	0.6	1	10	0	0	0.5	fila1	x3
0	2.6	0	10	1	3	0.5	3fila3+fila2	s2
1	-3.6	0	-10	0	-4	-0.5	-1/2fila3+fila3	x1
0	-0.304	0	0.6	0	-0.32	0.03	0.32fila3+fila4	

Paso 5:

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	ratio
0	0.6	1	10	0	0	0.5	1.2
0	2 3/5	0	10	1	3	0.5	5.2
1	-3 3/5	0	-10	0	-4	-0.5	7.2
0	- 1/3	0	0.6	0	-0.32	0.03	

Paso 6:

x1	x2	x3	s1	s2	s3	b	cálculos	variables
0	-0	1	7 1/2	- 1/4	- 3/4	3/8	-1/4fila2+fila1	x3
0	1	0	3 3/4	3/8	1 1/8	1/5	5/8fila2+fila2	x2
1	-0	0	3 3/4	1 3/8	1/8	1/5	11/8fila2+fila3	x1
0	0	0	1 6/7	1/8	0	0.09	1/8fila2+fila4	

Paso 7:

payoff	0.09	=0.08*1/5+0.1*1/5+3/8*0.14
risk	0.05	=0.06*1/5+0.1*3/8