Daniel Nuño

23 nov, 2021

Tarea 9

Ejercicio 1. Calcular los valores propios y vectores propios de las siguientes matrices

1) ~~M~~ $I\lambda$ $M = \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

$|M - I\lambda| = 0$

$$\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} -\lambda-9 & 7 \\ -7 & -\lambda+5 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda-9 & 7 \\ -7 & -\lambda+5 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

encuentra λ que satisfaga la condición

$\lambda = -2 \qquad -2^2 + 4(2) + 4 = 0$

eigenvectores V tal que $(M - I\lambda)V = 0$ para $\lambda_1 = -2$.

substituye λ en $(M - I\lambda)$

$$\begin{pmatrix} +2-9 & 7 \\ -7 & +2-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = 0$$

Sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{cc|c} -7 & 7 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ahora escribimos el sistema como

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix} = \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}V_1 - V_2 = 0\\ V_1 = V_2\end{matrix}$$

Usando la ecuación para determinar las entradas de V en terminos de V_2

$$V = \begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}V_2\\V_2\end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix}V_2\\V_2\end{bmatrix}$$ es un eigen vector para cualquier valor

Todos los eigen vectores son escalares multiplos de cada uno.

$V_2 = 1$ entonces $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ es un eigen vector de la matriz

asociado con el eigen valor $= -2$

$\lambda = -2 \quad V = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

B) $\begin{bmatrix}-2 & -5\\5 & -2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}-2 & -5\\5 & 2\end{bmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\lambda = \begin{bmatrix}-\lambda-2 & -5\\5 & -\lambda-2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-\lambda-2 & -5\\5 & -\lambda-2\end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$$

Resuelve para λ

$\lambda_1 = -2-5i \quad o \quad \lambda_2 = -2+5i$

resuelve $(M - I\lambda)\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix} = 0$ para cada λ.

$\lambda_1 = -2-5i$

$$\begin{pmatrix} 5i & -5 \\ 5 & 5i \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 5i & -5 \\ 5 & 5i \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \rightarrow \begin{matrix} 5i & -5 \\ 0 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

suma $i \times$(fila 1) a 2

divide fila 1 entre 5

$$\left[\begin{matrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \rightarrow \text{reescribe la matriz}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_1 + iV_2 = 0$$

$$V_1 = -iV_2$$

reescribe la ecuación para determinar las entradas de V en terminos de V_2

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iV_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2+5i$

$$\begin{pmatrix} -5i & -5 \\ 5 & -5i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resuelve la matrix aumentada

$$\left(\begin{matrix} -5i & -5 \\ 5 & -5i \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 - iV_2 = 0$$

$$V_1 = iV_2$$

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iV_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

es un eigenvector para cualquier valor de V_2 diferente a cero. todos los eigenvectores [illegible] multiples de cada otro

$V = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

eigen valor	eigenvector
$-2-5i$	$(-i \ \ 1)$
$-2+5i$	$(i \ \ 1)$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \overset{(M-I\lambda)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} -\lambda-1 & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda+3 & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda+5 \end{bmatrix} = 0$

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 = \det(M - I\lambda) = 0$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 5$ son los valores que igualan la ecuación a $\emptyset$

resuelve $\begin{bmatrix} -\lambda-1 & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda+2 & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para cada λ

el sistema para λ_1 es

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ resolviendo con gauss-jordan la matrix aumentada

$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ se traduce a $V_2 = 0$, $V_3 = 3$

usa las ecuaciones para determinar las entradas de V en terminos de V_1.

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sea $V_1 = 1$ entonces $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un eigenvector de la matrix $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ asociada $\lambda = -1$

el sistema para λ_2 es

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ => resolviendo con gauss jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

reescribiendo como ecuación

$$V_1 - \frac{2V_2}{3} = 0 \qquad V_3 = 0$$

$$V_1 = \frac{2V_2}{3}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2V_2 \\ V_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$ es un vector para cualquier valor de V_2 diferente a 0. todos son escalares multiples.

se $V_2 = 1$, entonces

$$V = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resolviendo con λ_3

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando gauss, la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

reescribiendo se reescribe como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad V_1 - V_3 = 0 \quad V_2 - V_3 = 0$$

$$V_1 = V_3 \qquad V_2 = V_3$$

$V = \begin{bmatrix} V_3 \\ V_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$ es un eigen vector para cualquier valor de V_3 diferente de zero. Sea $V_3 = 1$. $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

eigen values	eigen vector
-1	(1, 0, 0)
2	(2/3, 1, 0)
5	(1, 1, 1)

Ejercicio 2.- sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

¿son $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ vectores propios de A?

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 6 \\ 5 & -\lambda+2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 28 = 0$$

Encontrando los valores que satisfagan la ecuación

$\lambda = -4$

$\lambda = 7$

Ahora $\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 6 \\ 5 & -\lambda+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ resuelve con cada λ

resolviviendo con $\lambda = -4$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones aumentada por gauss jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ reescribiendo como matrix • V

$$\begin{bmatrix} 1 & 6/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 + \frac{6V_2}{5} = 0$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6V_2}{5} \\ V_2 \end{bmatrix}$$

sea $V_2 = 1$, encontramos que $\begin{bmatrix} -6/5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Resolviendo con $\lambda = 7$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 - V_2 = 0$$

$$V_1 = V_2$$

$V = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$ sea $V_2 = 1$ entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

eigenvalue	eigenvector
-4	$(-6/5, 1)$
7	$(1, 1)$

$\bar{U}_1$ ni U_2 son vectores propios por que U_2 nunca puede ser V_2

Ejercicio 3: Demuestre que $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $Y = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Son valores propios de A

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\det(A - I\lambda) = 0$

$\begin{vmatrix} -\lambda + 1 & 2 \\ 4 & -\lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

cuando $\lambda = -1$ o $\lambda = 5$ se cumple la ecuación

resuelve $(M - I\lambda)V = 0$ para todas λ

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

resolviendo la matrix aumentada con gauss

$\left.\begin{matrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$

se reescribe la ecuación

$V_1 + V_2 = 0$

$V_1 = -V_2$

$V_1 = \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$ V_1 es diferente a X y Y

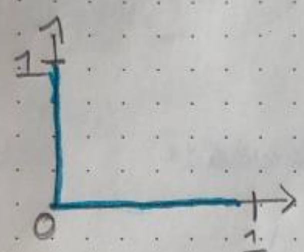
No es vector propio ni valores propios.

Ejercicio 4. Encuentre gráficamente los valores propios y vectores propios de la matriz de reflexión.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$V_1 = (1,0) \quad V_2 = (0,1)$



Ejercicio 5. Verificar que $\bar{U} = a(1,0,0) + b(0,-3,1)$, con a y b números reales, es vector propio de

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1$

$V_1 = (0,-3,1) \quad V_2 = (1,0,0)$

Sea $a = 1$ y $b = 2$

$\bar{U} = 1(1,0,0) + 2(0,-3,1) = (1,0,0) + (0,-6,2)$
$= (1,-6,2)$

no es vector propio.