ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Maestría de Ciencia de Datos

Fundamentos matemáticos de la ciencia de datos

Examen 3

Estudiante: Daniel Nuño

Profesor: Dr. Santiago Elvira

Fecha entrega: noviembre 30, 2021

Examen 3

Daniel Nuño

Noviembre 30, 2021

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$ realiza descomposición de valores singulares

1.-

$$\det(A^TA - \lambda I) = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 40 \\ 40 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^TA - \lambda I)\begin{bmatrix} 50-\lambda & 40 \\ 40 & 50-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 100\lambda + 900$$

$$= (\lambda - 90)(\lambda - 10) = 0$$

$$\lambda = 90$$

$$\lambda = 10$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{90} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}$$

2.- Substituyendo con $\lambda = 90$

$$\begin{bmatrix} 50-90 & 40 \\ 40 & 50-90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 40 \\ 40 & -40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} -40 & 40 & 0 \\ 40 & -40 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Fila 1 a Fila 2}} \left[\begin{array}{cc|c} -40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{divide entre 40}} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-V_1 + V_2 = 0$

$V_1 = V_2$

sea $V_2 = 1$

$\vec{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ ortonormal $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

usando $\lambda = 10$

$$\begin{bmatrix} 50-10 & 40 \\ 40 & 5-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 40 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 40 & 40 & 0 \\ 40 & 40 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

resuelta por Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se reescribe como

$V_1 + V_2 = 0$

$V_1 = -V_2 \rightarrow V = \begin{bmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{bmatrix}$

sea $V_2 = 1$,

$\vec{V} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ortonormal

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

3: $$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{90}} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/\sqrt{90} & 5/\sqrt{90} \\ 1/\sqrt{90} & 5/\sqrt{90} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/\sqrt{10} & 5/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 5/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$