ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

# Maestría de Ciencia de Datos

## Fundamentos matemáticos de la ciencia de datos

# Tarea 10: Descomposición de valores singulares

Estudiante: Daniel Nuño

Profesor: Dr. Santiago Elvira

Fecha entrega: noviembre 30, 2021

Ejercicio 1. Encuentre los valores singulares de las matrices siguientes

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ - $MV = \underline{\lambda} V$ is equivalente a la ecuación que implica $\begin{bmatrix} 9 V_1 \\ 4 V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda V_1 \\ \lambda V_2 \end{bmatrix}$.

obteniendo el n elemento de V igual a 1, y siendo el resto cero en la ecuación inicial muestra que $\lambda$ es el n elemento diagonal de M. por lo tanto, los eigen valores son la diagonal de los elementos

$$\lambda = 9 \quad y \quad \lambda = 4$$

Los valores singulares son los eigenvalues de $M = AA^T$

$$\Sigma \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}$

$$\left| \begin{bmatrix} 12-\lambda & 9 \\ 16 & 12-\lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 - 24\lambda = \lambda^2 = 24\lambda = \begin{array}{l} \lambda = 24 \\ \lambda = 0 \end{array}$$

los valores singulares son $\sqrt{24}$ y $\sqrt{0}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{24} \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(AA^T - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 V_1 \\ 9 V_2 \\ 4 V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda V_1 \\ \lambda V_2 \\ \lambda V_3 \end{bmatrix}$

obteniendo el elemento de V igual a 1, y dejando el resto a 0 en la ecuación muestra que el elemento a la diagonal de $AA^T$ es igual a los eigen valores:

$\lambda = 0 \; , \; \lambda = 9 \; , \; \lambda = 4$

los valores singulares son $\sqrt{9}$, $\sqrt{4}$

$\Sigma \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

Ejercicio 1 Demuestre que A y $A^T$ tiene los mismos valores singulares

sea A y $A^T$     La matriz $\underline{A}A^T$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ cA+db & c^2+d^2 \end{bmatrix}$

La matriz $\underline{A^T}A^{TT} = \underline{A^T}A$

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ \cancel{bA}+dc & b^2+d^2 \end{bmatrix}$

$$AA^T = \begin{bmatrix} a^2+b^2-\lambda & ac+bd \\ cA+db & c^2+d^2-\lambda \end{bmatrix} = ((a^2+b^2)-\lambda)((c^2+d^2)-\lambda) - (cA+db)(ac+bd)$$

$$= (a^2c^2 + a^2d^2 + a^2-\lambda$$
$$b^2c^2 + b^2d^2 - \lambda b^2$$
$$-\lambda c^2 - \lambda d^2 - \lambda^2) -$$
$$(a^2c^2 + cabd + dbac + b^2d^2)$$

$$= a^2d^2 - \lambda a^2 + b^2c^2 - \lambda b^2 - \lambda c^2 - \lambda d^2 - \lambda^2 - 2abcd$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} a^2+c^2-\lambda & ab+cd \\ ba+db & b^2+d^2-\lambda \end{bmatrix} = (a^2+c^2-\lambda)(b^2+d^2-\lambda) - (ba+db)(ab+cd)$$

$$= (a^2b^2 + a^2d^2 - \lambda a^2$$
$$c^2b^2 + c^2d^2 - \lambda b^2$$
$$-\lambda b^2 - \lambda d^2 - \lambda^2) -$$
$$(a^2b^2 + bacd + dcab + c^2d^2)$$

$$= a^2d^2 - \lambda a^2 + c^2b^2 - \lambda c^2 - \lambda b^2 - \lambda d^2 - \lambda^2 + 2abcd$$

En el determinante son iguales entonces los valores singulares son iguales.

Ejercicio 3. Obtenga la descomposición en valores singulares de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

1.- los valores singulares

$\det(A^TA - \lambda I) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & V_1 \\ 9 & V_2 \\ 4 & V_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \lambda V_1 \\ \lambda V_2 \\ \lambda V_3 \end{matrix}$

$\lambda = 9, \lambda = 4, \lambda = 0$

$\Sigma = \begin{array}{cc|} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$ en orden

2.- $V$ = los vectores propios ortonormales

El vector propio correspondiente a la diagonal de la matriz M es el elemento n de la matriz identidad

$\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

Ya son ortonormales

$V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.- $\vec{U} = \frac{1}{\sigma_1} A \vec{V}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 0] = [0 \ 1 \ 0]$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] = [0 \ 0 \ -1]$

$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ 1 Valores singulares

$$\det(A^T A - \lambda I)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 7 \\ 14 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333-\lambda & 81 \\ 81 & 117-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det = \lambda^2 - 450\lambda + 32400 = 0$$

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{360} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{90} & 0 \end{array}\right]$$

$\lambda_1 = 90$
$\lambda_2 = 360$
$\lambda_3 = 0$

2- vectores propios ortonormales

Para $\lambda_1 = 90$

$\left[\begin{array}{cc|c} 243 & 81 & 0 \\ 81 & 27 & 0 \end{array}\right]$ -> resuelve por gauss jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 + \frac{V_2}{3} = 0$$

$$V_1 = -\frac{V_2}{3}$$

$\begin{bmatrix} \frac{V_2}{3} \\ V_2 \end{bmatrix}$ Sea $V_2 = 1$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda = 360$

$\begin{bmatrix} -27 & 81 \\ 81 & -243 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ -> $\begin{array}{cc|c} -27 & 81 & 0 \\ 81 & -243 & 0 \end{array}$ resuelve la matriz aumentada con Gauss

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

se reescribe como

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 - 3v_2 = 0$$

$$v_1 = 3v_2$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

sea $1 = v_2$,

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

| | |
|---|---|
| 9 0 | $(-2, -1, 2) \to (-2/3, 1/3, 2/3)$ |
| 3 60 | $(1, 2, 2) \to (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ |
| 0 | $(2, -2, 1) \to (2/3, 2/3, 1/3)$ |

3. $\vec{U}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \vec{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{360}}\begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}[1/3, 2/3, 2/3] = \left[\frac{3}{\sqrt{10}} \; \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$

$$\vec{U}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \vec{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{90}}\begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$