Maestría de Ciencia de Datos

Fundamentos Matemáticos de la Ciencia de Datos

Tarea 7: Espacios y subespacios vectoriales lineales

Estudiante: Daniel Nuño

Profesor: Dr. Santiago Elvira

Fecha Entrega: noviembre 6, 2021

Ejercicio 1. Determine si $V = \{(x, y, z) : 2x - y + 3z = 0\}$ es un espacio vectorial.

6 nov 2021

1.- Determine si $V = \{(x,y,z) ; 2x - y + 3z = 0\}$ es un espacio vectorial.

El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que están en el plano con vector normal (a,b,c) y que pasa por el origen.

Suponga 2 vectores que cumplen la ecuación y están en V

(x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2)

1) $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in V$

$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 + 0$

2) $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1)$ ✓

3) $((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) + (x_3, y_3, z_3) = U + (V + W)$ ✓

4) $(x_1, y_1, z_1) + (0, 0, 0) = (x_1, y_1, z_1)$ ✓

5) $(x_1, y_1, z_1) + (-x_1, -y_1, -z_1) = 0 - 0 = 0$ ✓

6) $c(x_1, y_1, z_1) \in V$ ✓

7) $c((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = c(x_1, y_1, z_1) + c(x_2, y_2, z_2)$ ✓

8) $(c+d)(x_1, y_1, z_1) = (cx_1 + cy_1 + cz_1) + (dx_1, dy_1, dz_1)$ ✓

9) $c(dx_1, dy_1, dz_1) = (cdx_1, cdy_1, cdz_1)$ ✓

10) $1(x_1, y_1, z_1) = (x_1, y_1, z_1)$ ✓

Si es espacio vectorial

Ejercicio 2. Indicar cuales axiomas de Espacio Vectorial se cumplen (si los hay) para el conjunto de matrices que tienen la forma $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ bajo la suma y multiplicación por un escalar.

6 nov 2021

Indicar cuales axiomas de espacio vetorial se cumplen para el conjunto de matrices que tienen la forma $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ bajo la suma y multiplicación por un escalar

$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in V$ ✓

2) $10 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} \in V$ ✓

Ejercicio 3. Indique si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V:

a) $V = \mathbb{R}^2; H = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $V = M_{mn}; \text{H} = \{T \in M_{mn}; T \text{ es una matriz triangular superior}\}$

c) $V = \mathbb{R}^3; H = \{x, 0, z\}$

3 Indique si el subconjunto dado H del espacio vectorial $\mathbf{V}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$:

a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\quad U = (1, 0)$ $\quad V = (0, 1)$

1) $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \notin H$ no pertenece

porque $1^2 + 1^2 = 2 \geq 1$

b) $V = M_{mn}$; $H = \{T \in M_{mn}; T$ es una matriz triangular superior$\}$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

1) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0+0 & c+f \end{bmatrix}$ es matriz triangular $\in H$

2) $c \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cd & ce \\ 0 & cf \end{bmatrix}$ es matriz triangular $\in H$

es sub espacio

6 nov 2021

c) $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{x, 0, z\}$

1) $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$ esta en H

2) $c \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ 0 \\ cz_1 \end{bmatrix}$ esta en H

es subconjunto de subespacio

Ejercicio 4. ¿Cuál de los siguientes pares de vectores no pueden generar a $\mathbb{R}^2$?

a) $(1, 1)$ y $(-3, -3)$

b) $(1, 1)$ y $(2, 2)$

c) $(1, 3)$ y $(0, 0)$

d) $(1, 3)$ y $(3, 1)$

Ejercicio 4. ¿Cuál de los siguientes pares de vectores no puede generar a $\mathbb{R}^2$?

a) $(1,1)$ y $(-3,-3)$ $= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + -3b \\ a + (-3b) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

no es conjunto generador

b $(1,1)$ y $(2,2) \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a + 2b \\ a + 2b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ no es conjunto generador

c) $(1,3)$ y $(0,0) \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a + 0 \\ 3a + 0 \end{bmatrix}$

no es conjunto generador

d) $(1,3)$ y $(3,1) \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 3b \\ 3a + b \end{bmatrix}$

no es conjunto generador

Ejercicio 5. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de polinomios generan $\mathcal{P}_2$?

a) $1, x^2$

b) $3, 2x, -x^2$

c) $1 + x, 2 + 2x, x^2$

d) $1, 1 + x, 1 + x^2$

Ejercicio 5. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de polinomios genera polinomios grado 2? 6 nov 2021

$P_2 = a + bx + cx^2$

a) $1, x^2$ $\quad c_1(1) + c_2(x^2) = a + bx + cx^2$

$$c_1 + c_2x^2 = a + bx + cx^2$$

$$c_1 = a \quad 0 = b \quad c_2 = c$$

es conjunto generador

b) $3, 2x, -x^2$ $\quad c_1(3) + c_2(2x) + c_3(-x^2) = a + b + cx^2$

$$3c_1 + 2c_2x - c_3x^2 = a + bx + cx^2$$

$$3c_1 = a \quad 2c_2 = b \quad -c_3 = c$$

$$c_1 = a/3 \quad c_2 = b/2 \quad c_3 = -c$$

es conjunto generador

c) $1+x, 2+2x, x^2$ $\quad c_1(1+x) + c_2(2+2x) + c_3(x^2)$

$$c_1 + c_1x + 2c_2 + 2c_2x + c_3x^2$$

$$(c_1 + 2c_2) + (c_1 + 2c_2)x + c_3x^2 = a + bx + c$$

$c_1 + 2c_2 = a \quad b = a$

$c_1 + 2c_2 = b \quad c_2 = \frac{a}{2} - \frac{c_1}{2}$

$c_3 = c \quad c_2 = \frac{b}{2} - \frac{c_1}{2}$

$c_3 = c$

d) $1, 1+x, 1+x^2$

es conjunto generador

Ejercicio 6. Determinar si (1,-1,2), (1,1,2) y (0,0,1) generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

6 nov 2021

Ejercicio 6= Determinar si $\overset{V_1}{(1,-1,2)}, \overset{V_2}{(1,1,2)}$ y $\overset{V_3}{(0,0,1)}$ generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 = U$$

no es conjunto generador

Ejercicio 7. Determinar si el espacio vectorial M_{22} es generado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7= Determinar si el espacio vectorial M_{22} es generado po

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq a_{11}E_1 + a_{12}E_2 + a_{21}E_3 + a_{22}E_4$$

Solo una matriz de ceros cumple la condición

No es conjunto generador