

به نام خدا



دانشگاه تهران  
پردیس دانشکده‌های فنی  
دانشکده برق و کامپیوتر



درس آمار و احتمال

تمرین کامپیوتری شماره 3

دی ماه ۱۳۹۹

## مقدمه

در این فاز با قانون اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی آشنا می‌شویم و کاربرهایی از آنها را در مسائل متنوع محاسباتی بررسی می‌کنیم.

## بخش اول – قانون دایره‌ای<sup>۱</sup> در تئوری احتمالات

در دروس گذشته خود با مفهوم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌ها آشنا شده‌اید، بردارهای ویژه جهت‌هایی از فضای ورودی یک ماتریس هستند که با بردار نگاشت خود توسط ماتریس هم‌جهت اند. در حالت کلی، مقادیر ویژه ماتریس‌ها در فضای اعداد مختلط قرار دارند.

$$Ax = \lambda x$$

$\lambda$  : *eigen value*

$x$  : *eigen vector*

در تئوری احتمالات، قانون دایره‌ای بیان می‌کند که مقادیر ویژه یک ماتریس  $n \times n$  که درایه‌های آن نمونه‌های i.i.d از توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس  $\frac{1}{n}$  است، در صورتی که  $n \rightarrow \infty$ ، به داخل دایره واحد همگرا می‌شوند.

در حالت کلی‌تر، این قضیه برای هر توزیعی که دارای ویژگی‌های زیر باشد، برقرار است.

$$E(x) = 0; E(x^2) = \frac{1}{n}$$

- نمودارهای مقادیر ویژه را برای توزیع‌های گوسی و یکنواخت، به ازای  $n=10, 50, 100$  رسم کنید و صحت این قضیه را بررسی کنید.
- حال برای مقادیر  $n=5, 15, 60, 100$ ، هر کدام 100 ماتریس تصادفی از توزیع نرمال نمونه‌گیری کنید و مقادیر ویژه هر 100 ماتریس را در یک نمودار به ازای هر  $n$  رسم کنید. آیا توزیع مقادیر ویژه برای  $n$  های مختلف به صورت یک نواخت انجام گرفته است؟

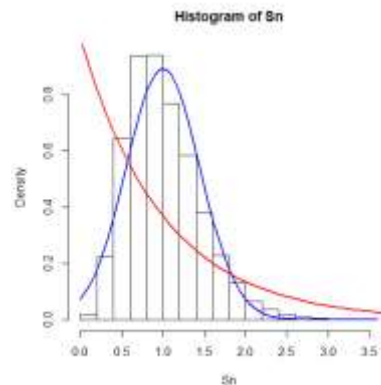
---

<sup>1</sup> Circular Rule

## بخش دوم – قضیه حد مرکزی

متغیر تصادفی  $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$  را در نظر بگیرید به گونه‌ای که  $X \sim \exp(\lambda)$  باشد. طبق قضیه حد مرکزی انتظار می‌رود وقتی  $n$  به بی‌نهایت میل می‌کند داشته باشیم،  $\bar{X}_n \sim N(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2 n})$ . بنابراین با افزایش  $n$  میانگین  $\bar{X}_n$  بدست آمده ثابت می‌ماند، اما عدم قطعیت آن کاهش می‌یابد.

- برای هریک از مقادیر  $n \in [1, 10, 100, 1000, 10000]$  ده هزار نمونه  $\bar{X}_n$  با  $\lambda = 1$  بگیرید و به ازای هر  $n$ ، هیستوگرام توزیع نمونه‌ها را به همراه نمودار توزیع نرمال پیش‌بینی شده توسط قضیه حد مرکزی و منحنی pdf توزیع  $X_i$  در یک پلات رسم کنید. به عنوان مثال برای  $n = 5$  انتظار می‌رود نمودار خروجی به شکل زیر باشد.



- به ازای مقادیر  $n \in [1: 1000]$  در هر مرحله، 1000 نمونه  $\bar{X}_n$  با  $\lambda = 1$  بگیرید و در نهایت نمودار واریانس این نمونه‌ها بر حسب  $n$  را رسم کنید.

## نحوه تحویل

فایل یا فایل‌های R. حاوی کدها و فایل pdf گزارش خود را در یک فایل زیپ با نام CA#3-STD\_NUM.zip قرار داده و بارگذاری کنید.

توجه داشته باشید که تمامی خروجی‌های خواسته شده اعم از اعداد و نمودارها در تمامی بخش‌های سوالات باید در گزارش به طور کامل ذکر شوند تا مورد ارزیابی قرار گیرند.