Punto 5: Muestra que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j.$$

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}$$

Se puede expresar mediante la siguiente matriz aumentada:

$$[A|b] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow R_1 \\ \leftarrow R_2 \\ \vdots \\ \leftarrow R_n \end{array}$$

Ahora, bien, note que la operación $\frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i - R_j \longrightarrow R_j$ donde $i \in [2,n]$ y para cada $j \in [0, i-1]$ se anula el coeficiente a_{ji}. Así, se llega a:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Que es una matriz Triangular inferior. Se tiene entonces:

$$a_{11}x_1 = b_1 \longrightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \longrightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \longrightarrow x_n = \frac{b_n - a_{n,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{n2}x_2 - a_{n1}x_1}{a_{nn}}$$

En general se tendrá $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$

En particular, si se hace $a_{ii} = 1$ $\forall i \in [1,n]$, entonces $x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j$