Pronósticos de series estacionarias

lunes, 21 de octubre de 2024 03:06 p. m.

Suponga que $\{W_t\}$ es una serie de tiempo estacionaria con media cero, obtenida a partir de la serie $\{Z_t\}$ con $t=1, .., N$ con

$$W_t = \nabla^d T(Z_t) \quad \ldots (1)$$

para algún d y para una cierta transformación T.

Se sabe que W_t admite la representación

$$W_t = \psi(B) a_t \; ; \; a_t \sim WN(0, \sigma_a^2) \quad \ldots (2)$$

para la cual existe un modelo ARIMA equivalente.

Si a partir del origen t se desea pronosticar la observación W_{t+h}, un pronóstico cualquiera de esta observación, que se obtenga como combinación lineal de los valores de la serie $\{W_t\}$ y en consecuencia de los errores $\{a_t\}$ será denotado

$$\breve{W}_t(h)$$

Mientras que el pronóstico óptimo se denotará

$$\hat{W}_t(h)$$

El criterio que se usará para determinar la optimalidad del pronóstico $\hat{W}_t(h)$ será el de error cuadrático medio mínimo, es decir $\hat{W}_t(h)$ debe satisfacer la condición siguiente

$$\underset{t}{E}\left[W_{t+h} - \hat{W}_t(h)\right]^2 = \min_{\breve{W}_t(h)} \underset{t}{E}\left[W_{t+h} - \breve{W}_t(h)\right]^2 \ldots (3)$$

En la cual $\underset{t}{E}$ denota la esperanza condicional dada por la información hasta el tiempo t

Es decir,

$$\underset{t}{E}\left[W_{t+h} - \hat{W}_t(h)\right]^2 = E\left\{\left[W_{t+h} - \hat{W}_t(h)\right]^2 \middle| Z_t, Z_{t-1}, .., Z_1\right\} \quad \ldots (4)$$

Así, el pronóstico con ECM mínimo está dado por

$$\hat{W}_t(h) = \underset{t}{E}(W_{t+h}) \quad \ldots (5)$$

En este caso, los errores de pronóstico están dados por

$$e_t(h) = W_{t+h} - \hat{W}_t(h) \quad (6)$$

Note que

i) $W_{t+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}$

i) $W_{t+h} = -\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}$

ii) $\hat{W}_t(h) = -\sum_{j=h}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}$

luego

$$e_t(h) = -\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j} - \left(-\sum_{j=h}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}\right)$$

$$= \left[-\sum_{j=0}^{h-1} \psi_j a_{t+h-j} - \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}\right] - \left[-\sum_{j=h}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}\right]$$

Entonces $h-1$

Por otra parte como se desea pronosticar W_{t+h} considere

$$\phi(B) W_t = \theta(B) a_t \ ; \ a_t \sim WN(0, \sigma_a^2)$$

Entonces

$$\hat{W}_t(h) = E_t(W_{t+h})$$

$$= E_t\left(\phi_1 W_{t+h-1} + \dots + \phi_p W_{t+h-p} + a_{t+h} - \theta_1 a_{t+h-1} - \dots \theta_q a_{t+h-q}\right)$$

De donde

$$E_t(W_{t+h-j}) = \begin{cases} W_{t+h-j} & \text{si } j \geq h \\ \hat{W}_t(h-j) & \text{si } j < h \end{cases} \quad \dots (8)$$

$$E_t(a_{t+h-j}) = \begin{cases} W_{t+h-j} - \hat{W}_{t+h-j-1}(1) & \text{si } j \geq h \\ 0 & \text{si } j < h \end{cases} \quad \dots (9)$$

De aquí

$$E_t(\hat{a}_{t+h-j}) = \begin{cases} \hat{a}_{t+h-j} & \text{si } j \geq h \\ 0 & \text{si } j < h \end{cases} \quad \dots (10)$$

Ejemplo 1 Suponga que W_t está dado por el siguiente modelo

$$(1-0.6B)W_t = (1+0.2B)a_t \quad ; \quad a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$$

$$W_t = \nabla^d \tilde{Z}_t \quad \text{con} \quad \tilde{Z}_t = Z_t - \mu$$

Entonces

$$W_t - 0.6W_{t-1} = a_t + 0.2a_{t-1}$$

$$W_t = 0.6W_{t-1} + a_t + 0.2a_{t-1}$$

El pronóstico óptimo en $h=1$ partiendo del tiempo t está dado por

$$\hat{W}_t(h=1) = \underset{t}{E}(W_{t+1}) = \underset{t}{E}(0.6W_t + a_{t+1} + 0.2a_t)$$

$$= 0.6\underbrace{\underset{t}{E}(W_t)}_{i} + \underbrace{\underset{t}{E}(a_{t+1})}_{ii} + 0.2\underbrace{\underset{t}{E}(a_t)}_{iii}$$

i) $\underset{t}{E}(W_t) = W_t$ — $h-1=0$ ent $h=1$

ii) $\underset{t}{E}(a_{t+1}) = 0$ — $h-1=1$ ent $1<h$

iii) $\underset{t}{E}(a_t) = W_t - \hat{W}_{t-1}(1)$ — $h-1=0$, $h=1$

Por lo tanto

$$\hat{W}_t(1) = 0.6W_t + 0.2[W_t - \hat{W}_{t-1}(1)]$$

$$\hat{W}_t(2) = 0.6\hat{W}_t(1)$$

$$\vdots$$

En general, $\hat{W}_t(h) = 0.6\hat{W}_t(h-1) \quad .. \quad h \geq 2$

Note que la generación de pronósticos se vuelve recursiva y $\hat{W}_t(1)$ involucra $\hat{W}_{t-1}(1)$ y desarrollando recursivamente se llega hasta $\hat{W}_1(1)$, el cual está dado por

$$\hat{W}_1(1) = 0.6W_1 + 0.2[W_1 - \hat{W}_0(1)]$$

En donde no existe información para calcular $\hat{W}_0(1)$ y por lo tanto, lo supondremos $\hat{W}_0(1) = W_1$.

Ejemplo 2: Considere la serie $T(IPE_t)$

Cuadro 4.7 Intereses pagados al exterior por deuda pública (miles de dólares)

Año	Trimestre I	II	III	IV
1969	44200	61669	46844	68373
1970	55270	82047	73715	79226
1971	73772	72537	80003	79917
1972	69843	94272	71462	85841
1973	82178	107139	120483	132259
1974	162615	149729	187383	207357
1975	268264	273976	238344	250955
1976	290712	321904	302131	403922
1977	381600	377150	333900	449700
1978	322518	573496	446111	680961
1979	471177	774998	777200	865000
1980	799782	1142200	992900	1022732
1981	898800	1454900	1466400	1655900
1982	2129300	1837300	1740300	2084400 $t=56$

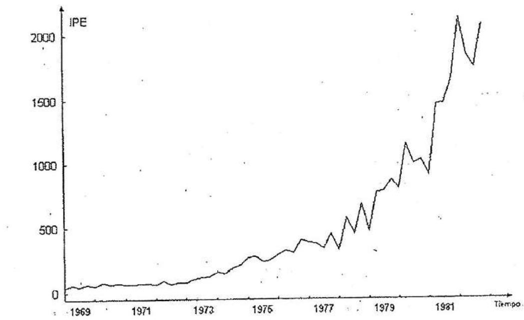

Figura 4.8 Intereses pagados al exterior por deuda pública (millones de dólares).

Donde $T(IPE_t) = \log(IPE_t)$ y suponga que el modelo que representa a $T(IPE_t)$ está dado por

$$(1+0.766B)\nabla T(IPE_t) = 0.115 + (1-0.365B^9 - 0.530B^{16})\hat{a}_t$$

y se quiere pronosticar el valor $T(IPE_t)$ para los 3 primeros trimestres de 1983

$$\hat{T}(IPE_{t=56})(1) = E_t\left(T(IPE_{t+1})\right)$$

$$T(IPE_t) = 0.234\,T(IPE_{t-1}) + 0.766\,T(IPE_{t-2}) + 0.115 + \hat{a}_t - 0.365\hat{a}_{t-9} - 0.530\hat{a}_{t-16}$$