

MODELACIÓN NUMÉRICA  
(CB051) CURSO CAVALIERE - PRÁCTICA MARTES 19HS

**Trabajo Práctico**  
**Resolución numérica de problemas de**  
**valores iniciales**  
**Análisis de la suspensión de un vehículo:**  
**sistema oscilatorio amortiguado**

× ×

26 de noviembre de 2024

Daniel Mamani

109932

# Indice

- 0.1. Introducción
- 0.2. Desarrollo
- 0.3. Conclusión
- 0.4. Anexo

## 1. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo principal resolver problemas de valores iniciales mediante el método ponderado implícito. El objetivo principal se llevará a cabo mediante el análisis de la suspensión de un vehículo, que puede ser considerado como un sistema oscilatorio amortiguado, el cual puede modelarse a través de una ecuación diferencial de segundo orden.

## 2. Desarrollo

### 2.1. Discretización

El enunciado brinda la siguiente ecuación para modelar el sistema:

$$y'' = \frac{k}{m}(c - y) + \frac{\lambda}{m}(c' - y')$$

La ecuación de arriba se resuelve hallando  $y(t)$ . Sin embargo, para este trabajo, se hallará una aproximación numérica de  $y(t)$  a través del método ponderado implícito.

Para poder hallar la solución numérica, se tiene que discretizar el problema. El proceso de discretización puede dividirse en tres partes:

#### 2.1.1. Discretizar el tiempo

Para ello se tiene que definir:

$$t \rightarrow t^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$0 \leq t \leq 5 \quad t^0 = 0, t^N = 5$$

$$h = \Delta t = t^{(n+1)} - t^{(n)}$$

#### 2.1.2. Discretizar la EDO

Como en este caso la EDO es de segundo orden, se tiene que definir dos nuevas variables

$$\begin{cases} y(t) \cong y(t^{(n)}) \cong u^{(n)} \\ y'(t) \cong y'(t^{(n)}) \cong u'^n = v^{(n)} \end{cases}$$

Por lo tanto quedaría un sistema de dos EDOS de primer orden

$$\begin{cases} u' = v \Rightarrow f_1(u, v, t) \\ v' = \frac{k}{m}(c - y) + \frac{\lambda}{m}(c' - y') \Rightarrow f_2(u, v, t) \end{cases}$$

#### 2.1.3. Discretizar condiciones iniciales

Condición inicial de la posición:

$$\begin{cases} y(a) = \alpha = 0 \\ t^{(0)} = \alpha = 0 \\ u((0)) = \alpha = 0 \end{cases}$$

Y también es necesario discretizar la condición inicial de la primer derivada:

$$\begin{cases} y'(a) = \beta = 0 \\ v((0)) = \beta = 0 \end{cases}$$

Para poder encontrar distintas aproximaciones se trabajó inicialmente con  $\beta = 0$ , aumentandolo de 0.25 hasta llegar a  $\beta = 1$ .

## 2.2. Obtención de la ecuación del método ponderado implícito

Para el método ponderado implícito se utilizará la siguiente ecuación:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h(\beta * f(u^{(n+1)}, v^{(n+1)}, t^{(n+1)}) + (1 - \beta)(f(u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)})))$$

Como se aplicó la ecuación arriba a dos EDOs de primer orden, se obtuvo:

$$\begin{cases} f_1(u^{(n+1)}, v^{(n+1)}, t^{(n+1)}) = \beta v^{(n+1)} + (1 - \beta)(v^{(n)}) \\ f_2(u^{(n+1)}, v^{(n+1)}, t^{(n+1)}) = \frac{k}{m}(c - u^{(n+1)}) + \frac{\lambda}{m}(c' - v^{(n+1)}) \end{cases}$$

Por ende las ecuaciones serán:

$$\begin{cases} u^{(n+1)} = u^{(n)} + h(\beta v^{(n+1)} + (1 - \beta)(v^{(n)})) \\ v^{(n+1)} = v^{(n)} + h[\frac{k}{m}(c - u^{(n+1)}) + \frac{\lambda}{m}(c' - v^{(n+1)})] \end{cases}$$

Separando los pasos de cada lado de la igualdad:

$$\Rightarrow \begin{cases} u^{(n+1)} - h(\beta v^{(n+1)} + (1 - \beta)(v^{(n)})) = u^{(n)} \\ v^{(n+1)} - h[\frac{k}{m}(c - u^{(n+1)}) + \frac{\lambda}{m}(c' - v^{(n+1)})] = v^{(n)} \end{cases}$$

La expresión matricial quedaría:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\beta h \\ -\beta h \frac{k}{m} & 1 + \beta h \frac{\lambda}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h[(1 - \beta)v^{(n)}] \\ h[(1 - \beta)(\frac{k}{m}c^{(n)} + \frac{\lambda}{m}c'^{(n)})] \end{bmatrix}$$

se invierte la matriz:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{m+h*\beta*\lambda}{m-h^2*k*\beta^2+h*\beta*\lambda} & \frac{h*m*\beta}{m-h^2*k*\beta^2+h*\beta*\lambda} \\ \frac{h*k*\beta}{m-h^2*k*\beta^2+h*\beta*\lambda} & \frac{m}{m-h^2*k*\beta^2+h*\beta*\lambda} \end{bmatrix}$$

La expresión matricial en función del paso actual resulta:

$$\begin{bmatrix} u^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m+h*\beta*\lambda}{m-h^2*k*\beta^2+h*\beta*\lambda} & \frac{h*m*\beta}{m-h^2*k*\beta^2+h*\beta*\lambda} \\ \frac{h*k*\beta}{m-h^2*k*\beta^2+h*\beta*\lambda} & \frac{m}{m-h^2*k*\beta^2+h*\beta*\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h[(1 - \beta)v^{(n)}] \\ h[(1 - \beta)(\frac{k}{m}c^{(n)} + \frac{\lambda}{m}c'^{(n)})] \end{bmatrix}$$

## 2.3. Sistema sin amortiguación

Con el objetivo de comparar con los resultados numéricos, mediante la ecuación diferencial dada por el enunciado se obtuvo la solución analítica. Para ello se aplicó una resolución de ecuaciones diferenciales obteniendo la siguiente expresión:

$$y(t) = c - \alpha 2 \sin\left(\frac{\sqrt{kt}}{\sqrt{m}}\right) + \alpha 1 \sin\left(\frac{\sqrt{kt}}{\sqrt{m}}\right)$$

En la que luego reemplazando por los valores iniciales, se obtuvo:

$$y(t) = 0,1 - 0,1 \cos(\omega t)$$

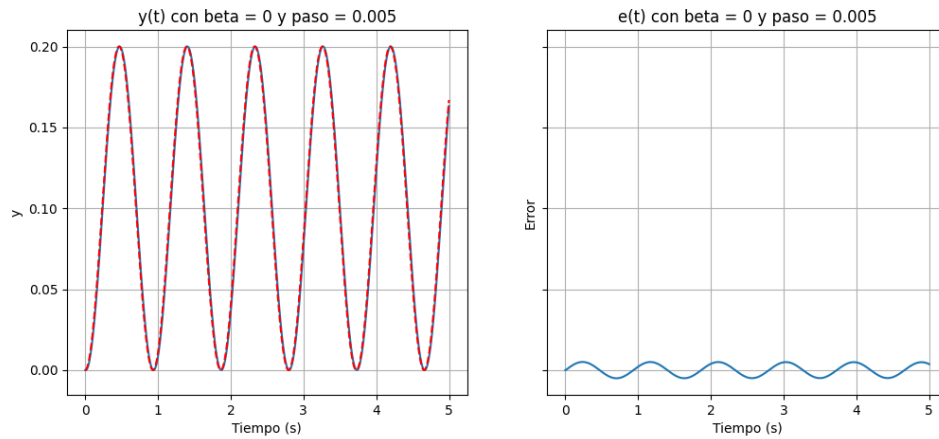


Figura 1: Grafico solución y error con  $h = 0,005$  y  $\beta = 0$

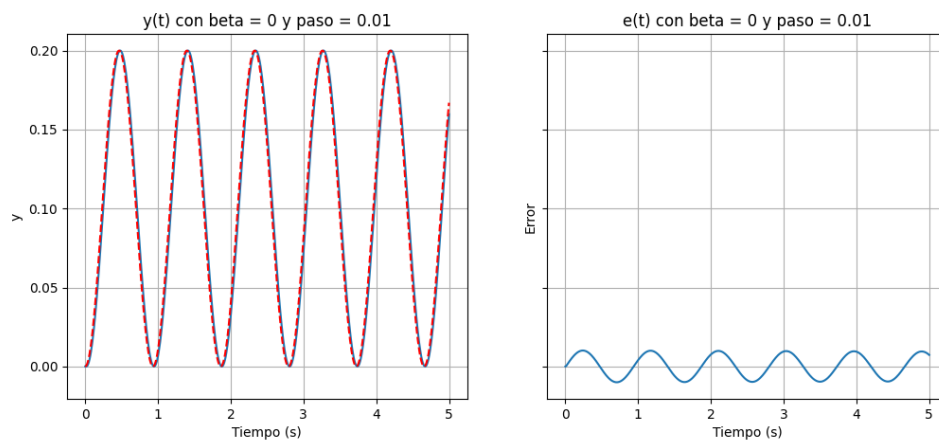


Figura 2: Grafico solución y error con  $h = 0,01$  y  $\beta = 0$

### 2.3.1. Resultados del método para cada valor de $\beta$

A continuación se presentarán los distintos resultados obtenidos para valor de  $\beta$ :

**Aclaración:** En los gráficos la línea roja punteada representa la solución analítica mientras que la línea azul sólida la solución numérica.

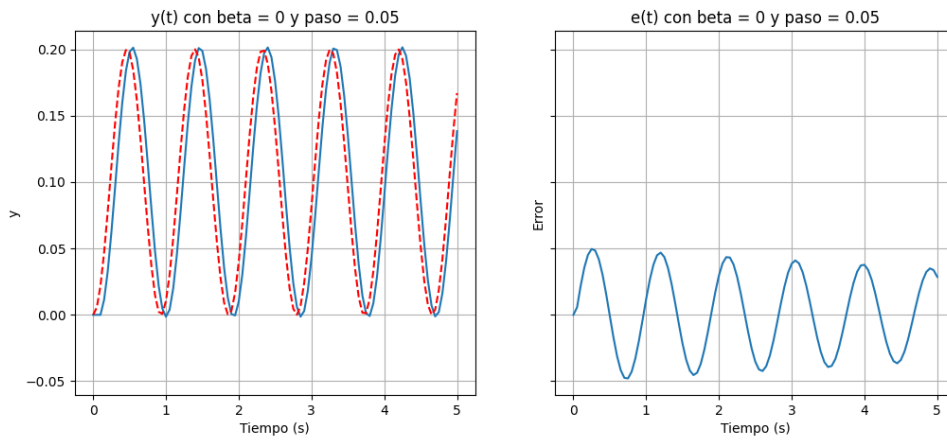


Figura 3: Grafico solución y error con  $h = 0,05$  y  $\beta = 0$

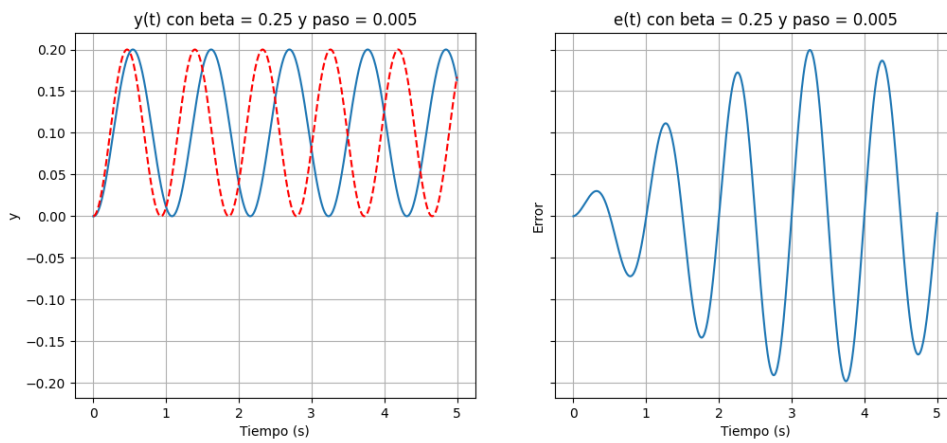


Figura 4: Gráfico solución y error con  $h = 0,005$  y  $\beta = 0,25$

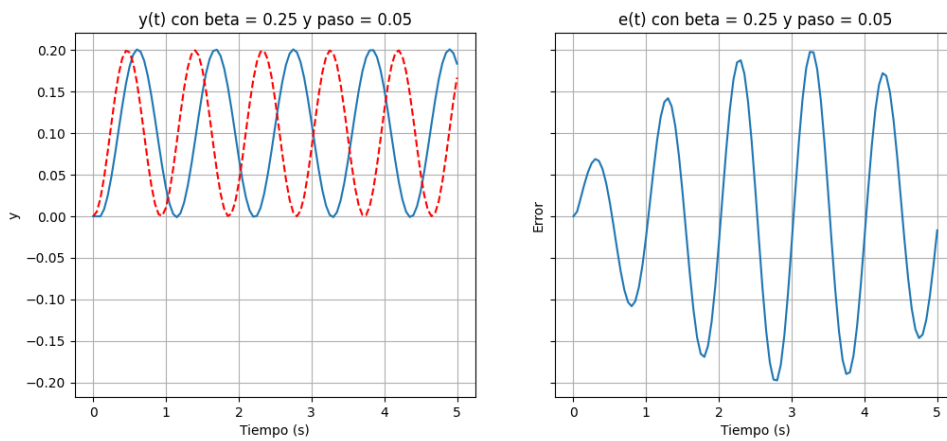


Figura 5: Gráfico solución y error con  $h = 0,05$  y  $\beta = 0,25$

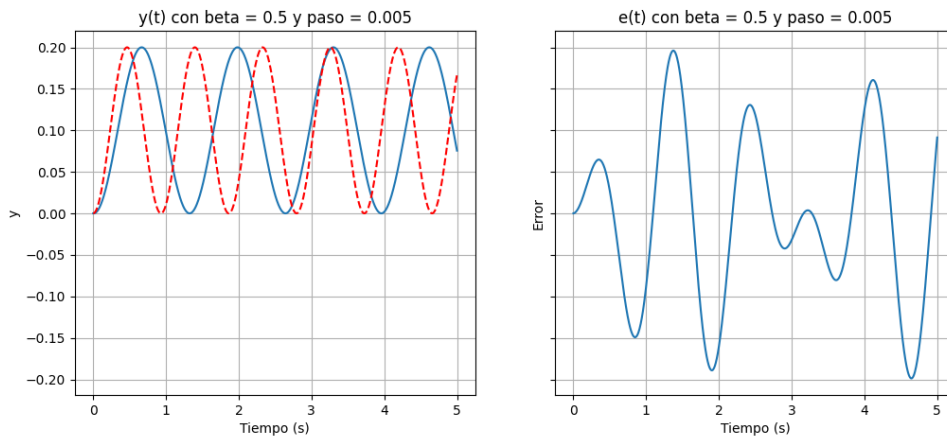


Figura 6: Gráfico solución y error con  $h = 0,005$  y  $\beta = 0,5$

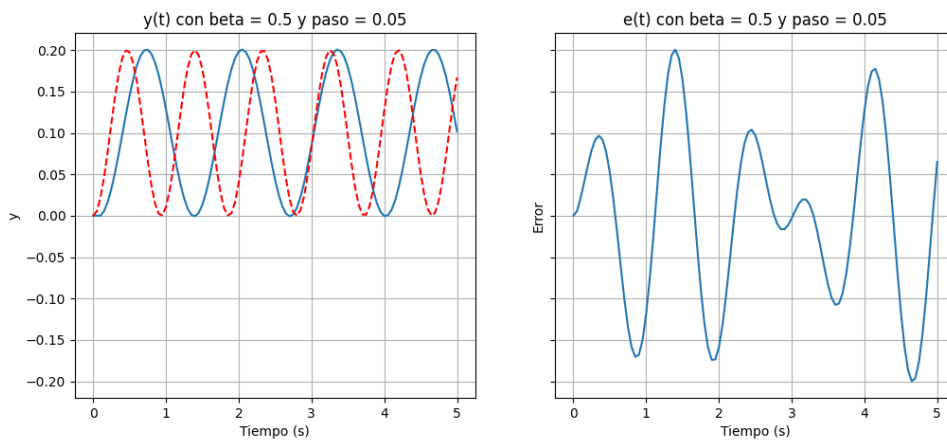


Figura 7: Gráfico solución y error con  $h = 0,05$  y  $\beta = 0,5$

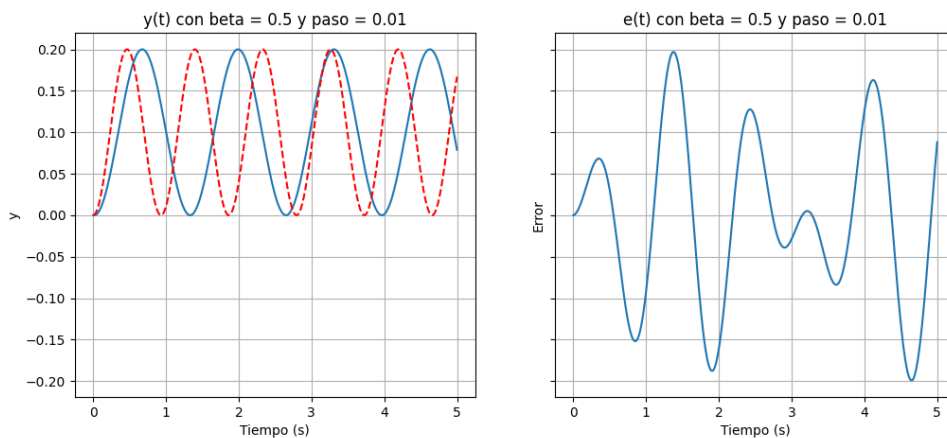


Figura 8: Gráfico solución y error con  $h = 0,01$  y  $\beta = 0,5$

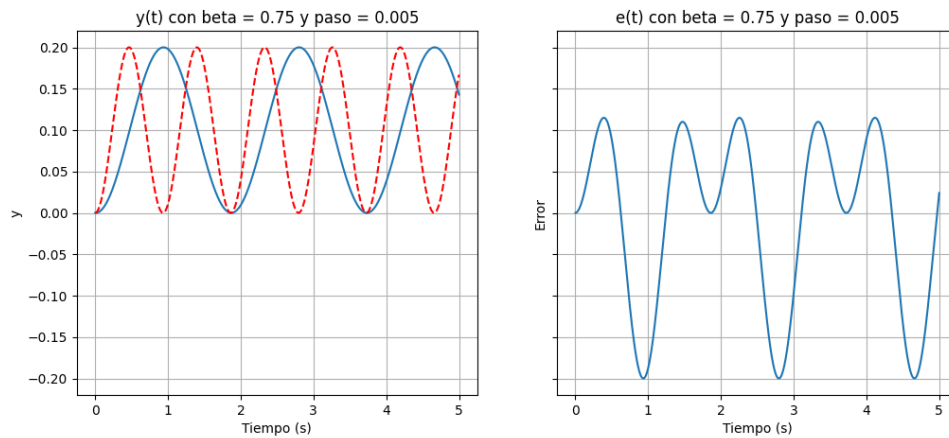


Figura 9: Gráfico solución y error con  $h = 0,005$  y  $\beta = 0,75$

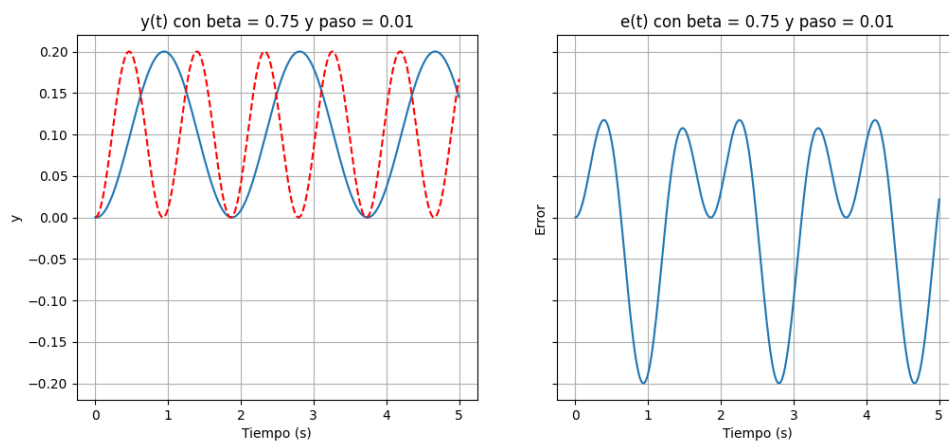


Figura 10: Gráfico solución y error con  $h = 0,01$  y  $\beta = 0,75$

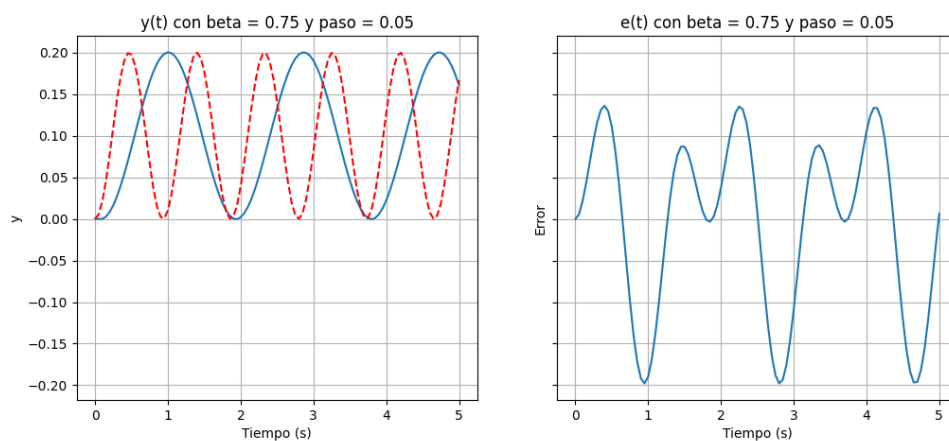


Figura 11: Gráfico solución y error con  $h = 0,05$  y  $\beta = 0,75$



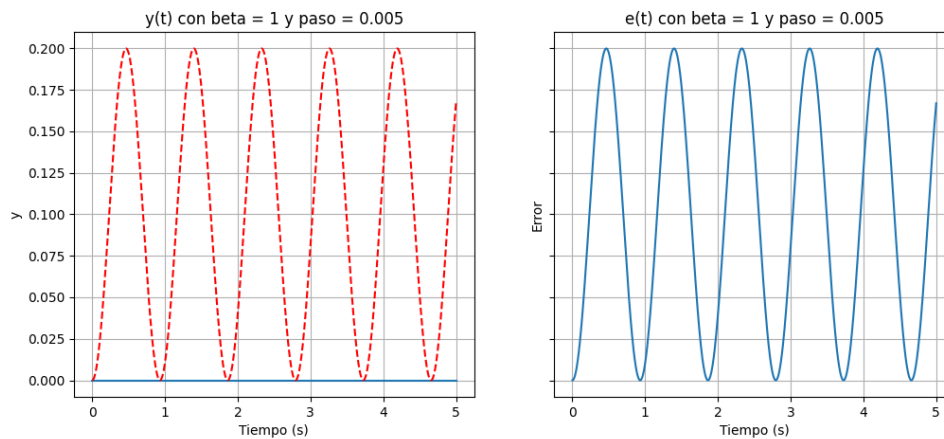


Figura 12: Gráfico solución y error con  $h = 0,005$  y  $\beta = 1$

## 2.4. Sistema amortiguado

### 2.4.1. Obtención de $c'$

Para la obtención de la derivada de  $c$  se dividió al perfil del terreno en distintos tramos de tiempo y se utilizó la siguiente fórmula

$$c' = \frac{\Delta c}{\Delta t}$$

Resultando  $c'$  en función del tiempo como:

$$c' = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq c \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq c \leq 1,2 \\ 0 & \text{si } 1,2 \leq c \leq 1,4 \\ -1 & \text{si } 1,4 \leq c \leq 1,6 \\ 0 & \text{si } 1,6 \leq c \leq 5 \end{cases}$$

### 2.4.2. Resultados con los datos propuestos

El sistema amortiguado se eligió resolverlo usando  $\beta = 0,5$ , por razones que se explicarán en la conclusión del informe. El gráfico usando los datos propuestos por el enunciado y con un  $h = 0,005$  es el siguiente:

### 2.4.3. Búsqueda del $k$ y $\lambda$ óptimo

Para intentar buscar el  $k$  y  $\lambda$  óptimos por separado, se varió el valor uno mientras el valor del otro se dejaba constante. El objetivo fue primero dejar  $\lambda$  constante y encontrar el valor de  $k$  óptimo y después dejar ese a  $k$  óptimo constante y variar  $\lambda$  para encontrar el  $\lambda$  óptimo.

### 3. Conclusión

#### 3.1. Análisis de cada caso del método para el sistema sin amortiguación

Al observar los resultados obtenidos de los gráficos en sección 2.5 se puede llegar a varias conclusiones. En principio para el caso con  $\beta = 0$  se ve que para  $h = 0,005$  propuesto por el enunciado, el método usado corresponde al método de Euler explícito. Se puede observar que la solución numérica se ajusta razonablemente bien a solución analítica en la primera parte de gráfica. Sin embargo a medida que se pasa el tiempo se ve una discrepancia creciente entre la solución numérica y la analítica. Es decir, el error aumenta en amplitud y frecuencia indicando una acumulación de errores de truncamiento. La acumulación de errores sugiere que el caso donde  $\beta = 0$  puede ser inestable para este problema, en especial el  $h$  utilizado. La inestabilidad numérica se manifiesta en la forma de oscilaciones no físicas en la solución numérica que no están presentes en la solución analítica. Al probar el mismo caso con  $h = 0,01$  se espera una mejora en la precisión de la solución numérica, ya que el método se basa en aproximaciones locales más pequeñas. Sin embargo, los resultados obtenidos indican que:

- La inestabilidad se mantiene, las oscilaciones no físicas en la solución numérica aumentan con el tiempo.
- La tasa a la que los errores se acumulan es menor, sin embargo los errores siguen creciendo.

Se puede observar que los casos donde  $\beta$  toma los valores 0.25, 0.5 y 0.75 que el método se vuelve más implícito y generalmente más estable

Para el caso  $\beta = 0,5$  se puede observar:

- Buen ajuste de solución numérica a la solución analítica, indicando que este caso captura bien las principales características del problema.
- Las oscilaciones mostradas en el error son relativamente pequeñas y no crecen exponencialmente con el tiempo, sugiriendo que el caso es estable.
- Al elegir un punto medio entre los extremos de  $\beta$  0 y 1, se obtiene un buen equilibrio entre la estabilidad de del método de Euler implícito ( $\beta = 1$ ) y la simplicidad del método de Euler explícito ( $\beta = 0$ ).

Para el caso donde  $\beta = 1$  se puede observar:

- La solución numérica obtenida se ajusta bien a la solución analítica. Indicando que este caso captura bien la dinámica del problema.
- El error entre ambas soluciones es relativamente chico y oscila alrededor de 0, sugiriendo que el  $h$  elegido es suficientemente pequeño para obtener una buena precisión