**שאלה 5**

a. הגדרת sum-l שתעבוד ב-lazy evaluation semantics:

g = λf. λk. test (iszero k) c0 (plus k (f(prd k)))

Y = λf. (λx. f(x x))(λx. f(x x))

sum-l = Y g

b. סדרת חישוב לביטוי sum-l c1 תחת lazy evaluation semantics:

sum-l c1 = Y g c1 =

(λf. (λx. f(x x))(λx. f(x x))) g c1 =>

(λx. g(x x))(λx. g(x x)) c1 =>

g**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** c1 =

**(**λf. λk. test (iszero k) c0 (plus k (f(prd k)))**)** **(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** c1 =>

**(**λk. test (iszero k) c0 (plus k (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd k)))**)** c1 =>

test (iszero c1) c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =

**(**λl. λm. λn. l m n**)** (iszero c1) c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =>

**(**λm. λn. (iszero c1) m n**)** c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =>

**(**λn. (iszero c1) c0 n**)** (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =>

(iszero c1) c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =

תזכורת: בשאלה 4 הפונקציה iszero הוגדרה כך:

iszero = λm. m (λb. fls) tru

ולכן המשך סדרת החישוב הוא:

((λm. m (λb. fls) tru) c1) c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =>

(c1 (λb. fls) tru) c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =

((λs. λz. s z) (λb. fls) tru) c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =>

((λz. (λb. fls) z) tru) c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =>

((λb. fls) tru) c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =>

fls c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =

(λt. λf. f) c0 (plus c1 (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1))) =>

(λf. f) (plus c1 **((**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)**) =>

plus c1 **((**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** =

(λm. λn. λs. λz. m s (n s z)) c1 **((**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** =>

(λn. λs. λz. c1 s (n s z)) **((**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** =>

(λn. λs. λz. c1 s (n s z)) **((**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** =>

λs. λz. c1 s **(((**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** s z**)** =

ביטוי זה לא מתקדם יותר ב-lazy evaluation, לכן נמשיך לפתח תחת normal order semantics:

λs. λz. (λs. λz. s z) s **(((**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** s z**)** =>

λs. λz. (λz. s z) **(((**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** s z**)** =>

λs. λz. s **((**g**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** s z**)** =

λs. λz. s **(((**λf. λk. test (iszero k) c0 (plus k (f(prd k)))**) (**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd c1)**)** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**λk. test (iszero k) c0 (plus k (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd k)))**)** (prd c1)**)** s z**)** =>

λs. λz. s **((**test (iszero (prd c1)) c0 (plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1))))**)** s z**)** =

λs. λz. s **(((**λl. λm. λn. l m n**)** **(**iszero (prd c1)**)** c0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**λm. λn. **(**iszero (prd c1)**)** m n**)** c0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**λn. **(**iszero (prd c1)**)** c0 n**)** **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**iszero (prd c1)**)** c0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =

λs. λz. s **(((**(λm. m (λb. fls) tru) (prd c1)**)** c0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**(prd c1) (λb. fls) tru**)** c0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**c0 (λb. fls) tru**)** c0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =

λs. λz. s **(((**(λs. λz. z) (λb. fls) tru**)** c0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**(λz. z) tru**)** c0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =>

λs. λz. s **((**truc0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =

λs. λz. s **((**(λt. λf. t) c0 **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =>

λs. λz. s **((**(λf. c0) **(**plus (prd c1) (**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** (prd (prd c1)))**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(**c0 s z**)** =

λs. λz. s **(**(λs. λz. z) s z**)** =>

λs. λz. s **(**(λz. z) z**)** =>

λs. λz. s z =

c1

כלומר קיבלנו שהחישוב של sum-l c1 מסתיים ב-c1, כצפוי על פי ההגדרה.

c. אם היינו מחשבים את הביטוי תחת call by value semantics, היינו נכנסים ללולאה אינסופית. תחילת החישוב הייתה נראית זהה לחישוב בסעיף b, ואז מהשורה הרביעית (צבועה בכחול) והלאה כל צעד היה מוסיף הפעלה של g על הביטוי, אך משאיר את הארגומנט בצורה שניתן לקדם, ולכן היינו ממשיכים לקדם אותו עד אינסוף:

g **(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)** c1 =>

מכיוון ש-g היא אבסטרקציה, הכלל היחיד בו ניתן להשתמש כעת על פי call by value semantics הוא E-APPL2, כלומר הכלל שבו מקדמים את הארגומנט. זה היה מוביל ל:

g**(**g**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**))** c1 =>

g**(**g**(**g**(**(λx. g(x x)) (λx. g(x x))**)))** c1 =>

…

ניתן לראות שהביטוי הכחול נשאר זהה, ובכל צעד הוא נעטף בעוד קריאה ל-g. כך סדרת החישוב תמשיך לנצח ולא תסתיים לעולם.

d. הגדרת sum-s שתעבוד ב-call by value semantics:

g = λf. λk. test (iszero k) c0 (plus k (λa. f(prd k) a))

Z = λf. (λx. f(λy. x x y))(λx. f(λy. x x y))

sum-s = Z g

e. סדרת חישוב לביטוי sum-s c1 תחת call by value semantics:

sum-s c1 = Z g c1 =

(λf. (λx. f(λy. x x y))(λx. f(λy. x x y))) g c1 =>

(λx. g(λy. x x y))(λx. g(λy. x x y)) c1 =>

g**(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** c1 =

(λf. λk. test (iszero k) c0 (plus k **(**λa. f(prd k) a**)**)) **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** c1 =>

**(**λk. test (iszero k) c0 (plus k **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd k) a**)**)**)** c1 =

**(**λk. test (iszero k) c0 (plus k **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd k) a**)**)**)** (λs. λz. s z) =>

test **(**iszero (λs. λz. s z)**)** c0 **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =

**(**λl. λm. λn. l m n**)** **(**(λm. m (λb. fls) tru) (λs. λz. s z)**)** c0 **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =>

**(**λl. λm. λn. l m n**)** **(**(λs. λz. s z) (λb. fls) tru**)** c0 **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =>

**(**λl. λm. λn. l m n**)** **(**(λz. (λb. fls) z) tru**)** c0 **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =

**(**λl. λm. λn. l m n**)** **(**(λz. (λb. fls) z) (λt. λf. t)**)** c0 **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =>

**(**λl. λm. λn. l m n**)** **(**(λb. fls) (λt. λf. t)**)** c0 **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =>

**(**λl. λm. λn. l m n**)** **(**fls**)** c0 **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =

**(**λl. λm. λn. l m n**)** **(**λt. λf. f**)** c0 **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =>

**(**λm. λn. (λt. λf. f) m n**)** c0 **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =

**(**λm. λn. (λt. λf. f) m n**) (**λs. λz. z**)** **(**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =>

**(**λn. (λt. λf. f) (λs. λz. z) n**) (**plus (λs. λz. s z) **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =

**(**λn. (λt. λf. f) (λs. λz. z) n**) ((**λm. λn. λs. λz. m s (n s z)**)** **(**λs. λz. s z**)** **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =>

**(**λn. (λt. λf. f) (λs. λz. z) n**) ((**λn. λs. λz. (λs. λz. s z) s (n s z)**)** **(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**))** =>

**(**λn. (λt. λf. f) (λs. λz. z) n**) (**λs. λz. (λs. λz. s z) s (**(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**)** s z)**)** =>

**(**λt. λf. f**)** **(**λs. λz. z**)** **(**λs. λz. (λs. λz. s z) s (**(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**)** s z)**)** =>

**(**λf. f**)** **(**λs. λz. (λs. λz. s z) s (**(**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**)** s z)**)** =>

λs. λz. **(**λs. λz. s z**)** s **((**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**)** s z**)** =>

ביטוי זה לא מתקדם יותר ב-lazy evaluation, לכן נמשיך לפתח תחת normal order semantics:

λs. λz. **(**λz. s z**)** **((**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**)** s z**)** =>

λs. λz. s **((**λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) a**)** s z**)** =>

λs. λz. s **((**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (λs. λz. s z)) s z**)** =>

λs. λz. s **((**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** (prd (λs. λz. s z))s z**)** =>

λs. λz. s **((**g **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**))** (prd (λs. λz. s z))s z**)** =

λs. λz. s **(((**λf. λk. test (iszero k) c0 (plus k (λa. f(prd k) a))**)** **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**))** (prd (λs. λz. s z))s z**)** =>

λs. λz. s **((**λk. test (iszero k) c0 (plus k (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd k) a))**)** (prd (λs. λz. s z))s z**)** =>

λs. λz. s **((**test (iszero (prd (λs. λz. s z))) c0 (plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a))**)** s z**)** =

λs. λz. s **(((**λl. λm. λn. l m n**)** **(**iszero (prd (λs. λz. s z))**)** c0 **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**λm. λn. (iszero (prd (λs. λz. s z))) m n**)** c0 **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**λn. (iszero (prd (λs. λz. s z))) c0 n**)** **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**iszero (prd (λs. λz. s z))**)** c0 **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =

λs. λz. s **(((**(λm. m (λb. fls) tru) (prd (λs. λz. s z))**)** c0 **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**(prd (λs. λz. s z)) (λb. fls) tru**)** c0 **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**(λs. λz. z) (λb. fls) tru**)** c0 **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**(λz. z) tru**)** c0 **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**tru**)** c0 **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =

λs. λz. s **(((**λt. λf. t**)** c0 **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =>

λs. λz. s **(((**λf. c0**)** **(**plus (prd (λs. λz. s z)) (λa. **(**λy. **(**λx. g(λy. x x y)**)** **(**λx. g(λy. x x y)**)** y**)** (prd (prd (λs. λz. s z))) a)**))** s z**)** =>

λs. λz. s **((**c0**)** s z**)** =

λs. λz. s **((**λs. λz. z**)** s z**)** =>

λs. λz. s **((**λz. z**)** z**)** =>

λs. λz. s z=

c1

כלומר קיבלנו שהחישוב של sum-s c1 מסתיים ב-c1, כצפוי על פי ההגדרה.