UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA VICERRECTORÍA ACADÉMICA ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES CÁTEDRA DE MATEMÁTICAS PARA LA ADMINISTRACIÓN Y COMPUTACIÓN

Asignatura: Matemática para Computación I
Código: 03068

Material Complementario Capítulo 2

Producto de conjuntos

1. En cada una de las siguientes expresiones con pares ordenados, determine el valor de "x" y de "y" de manera que la igualdad dada se cumpla:

   (a) $(2x+1,\, 6) = (7,\, 3+y)$

   (b) $(3x,\, x+y) = (9,\, 5)$

   (c) $(x+2,\, 4) = (5,\, 2x+y)$

   (d) $(y+2,\, 3x+2) = (x+3,\, y+1)$

   (e) $(x+2,\, y) = \left(8,\, \dfrac{x-4}{3}\right)$

   Solución: Recuerde que $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$ (*)

   (a) $(2x+1,\, 6) = (7,\, 3+y)$, de la propiedad (*) se tiene que $2x+1 = 7$ y $6 = 3+y$, por lo que para la solución primero debemos calcular el valor de x haciendo:

   $$2x+1 = 7$$
   $$2x = 7-1$$
   $$x = \frac{6}{2} = 3$$

   Con la siguiente ecuación se obtiene y

   $$6 = 3+y$$
   $$6-3 = y$$
   $$3 = y$$

   Por lo que los valores corresponden a $x = 3 \quad y \quad y = 3$.

(b) $(3x,\, x+y) = (9,\, 5)$, de la propiedad (*) se tiene que $3x = 9$ y $x + y = 5$, por lo que para la solución primero debemos calcular el valor de x haciendo:

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

Con la siguiente ecuación y sabiendo que $x = 3$ se obtiene y

$$x + y = 5$$

$$3 + y = 5$$

$$y = 5 - 3 = 2$$

Por lo que los valores corresponden a $x = 3 \quad y \quad y = 2$.

(c) $(x+2,\, 4) = (5,\, 2x+y)$, de la propiedad (*) se tiene que $x + 2 = 5$ y $4 = 2x + y$, por lo que para la solución primero debemos calcular el valor de x haciendo:

$$x + 2 = 5$$

$$x = 5 - 2$$

$$x = 3$$

Con la siguiente ecuación y sabiendo que $x = 3$ se obtiene y

$$4 = 2x + y$$

$$4 = 2 \cdot 3 + y$$

$$4 = 6 + y$$

$$4 - 6 = y = -2$$

Por lo que los valores corresponden a $x = 3 \quad y \quad y = -2$.

(d) $(y+2,\, 3x+2) = (x+3,\, y+1)$, de la propiedad (*) se tiene que $y+2 = x+3$ y $3x+2 = y+1$, por lo que para la solución procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y+2 &= x+3 \qquad\qquad & 3x+2 &= y+1 \\ y &= x+3-2 & y &= 3x+2-1 \\ y &= x+1 & y &= 3x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+1 &= 3x+1 \\ x-3x &= 1-1 \\ -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones

$$y = x+1 = 0+1 = 1$$

Por lo que los valores corresponden a $x = 0 \quad y \quad y = 1$.

(e) $(x+2,\, y) = \left(8,\, \dfrac{x-4}{3}\right)$, de la propiedad (*) se tiene que $x+2 = 8$ y $y = \dfrac{x-4}{3}$, por lo que para la solución primero debemos calcular el valor de x haciendo:

$$\begin{aligned} x+2 &= 8 \\ x &= 8-2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Luego sabiendo que la $x = 6$ y utilizando la ecuación siguiente se obtiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{6-4}{3} \\ y &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Por lo que los valores de x y y son 6 y $\dfrac{2}{3}$ respectivamente.

2. Dados los conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{c, d\}$ y $C = \{2, 3, 4\}$, determine:

(a) $n(B \times C) =$

(b) $n(A \times B \times C) =$

(c) $A \times B =$

(d) $C \times A =$

(e) $B \times B =$

(f) $A \times B \times C =$

Solución:

(a) $n(B \times C)$, corresponde a la cantidad de elementos en $B \times C$ y se determina de la siguiente manera

$$n(B \times C) = n(B) \cdot n(C) = 2 \cdot 3 = 6$$

(b) $n(A \times B \times C)$, corresponde a la cantidad de elementos en $A \times B \times C$ y se determina de la siguiente manera

$$n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

(c) $A \times B$, corresponde al conjunto que contiene todos los posibles pares ordenados de A a B, por lo que:

$$A \times B = \{(1, c), (1, d)\}$$

(d) $C \times A$, corresponde al conjunto que contiene todos los posibles pares ordenados de C a A, por lo que:

$$C \times A = \{(2,1), (3,1), (4,1)\}$$

(e) $B \times B$, corresponde al conjunto que contiene todos los posibles pares ordenados de B a B, por lo que:

$$B \times B = \{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$$

(f) $A \times B \times C$, corresponde al conjunto que contiene todos las posibles ternas ordenadas (x, y, z) tal que $x \in A$, $y \in B$ y $z \in C$, por lo que:

$$A \times B \times C = \{(1, c, 2), (1, c, 3), (1, c, 4), (1, d, 2), (1, d, 3), (1, d, 4)\}$$

3. Dado los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f\}$ y $C = \{a, d\}$ pruebe la validez de las siguientes expresiones:

   (a) $A \times C \neq C \times A$

   (b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

   (c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Solución:

(a) $A \times C \neq C \times A$

$$A \times C = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, d), (c, a), (c, d)\}$$
$$C \times A = \{(a, a), (d, a), (a, b), (d, b), (a, c), (d, c)\}$$

Observe por ejemplo, que:

$$(a, c) \neq (c, a) \text{ puesto que } a \neq c$$

Entonces: $A \times C \neq C \times A$

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, siguiendo el orden de prioridad de las operaciones combinadas se procede de la siguiente manera:

$$B \cap C = \{d\} \qquad \text{Corresponde a los elementos de B y C simultaneamente}$$
$$A \times (B \cap C) = \{a, b, c\} \times \{d\}$$
$$= \{(a, d), (b, d), (c, d)\}$$

Por su parte se tiene que

$$A \times B = \{(a, d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e), (c, f)\}$$
$$A \times C = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, d), (c, a), (c, d)\}$$
$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a, d), (b, d), (c, d)\}$$

Por lo que para esos conjuntos la expresión es valida, es decir

$$A \times (B \cap C) = \{(a, d), (b, d), (c, d)\} = (A \times B) \cap (A \times C)$$

(c) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$, siguiendo el orden de prioridad de las operaciones combinadas se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
B\cup C &= \{a,d,e,f\} \qquad \text{Corresponde a los elementos de B o C}\\
A\times(B\cup C) &= \{a,b,c\}\times\{a,d,e,f\}\\
&= \{(a,a),(a,d),(a,e),(a,f),(b,a),(b,d),(b,e),(b,f),(c,a),(c,d),(c,e),(c,f)\}
\end{aligned}$$

Por su parte se tiene que

$$\begin{aligned}
A\times B &= \{(a,d),(a,e),(a,f),(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f)\}\\
A\times C &= \{(a,a),(a,d),(b,a),(b,d),(c,a),(c,d)\}\\
(A\times B)\cup(A\times C) &= \{(a,a),(a,d),(a,e),(a,f),(b,a),(b,d),(b,e),(b,f),(c,a),(c,d),(c,e),(c,f)\}
\end{aligned}$$

Por lo para esos conjuntos la expresión $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ es valida.

Relaciones

1. Sean A $= \{1, 2\}$, B$= \{x, y, z\}$ y R la relación de A a B dada por:

$$R = \{(1, x), (2, x), (2, y), (2, z)\}$$

Determine:

(a) El dominio de R

(b) El rango de R

(c) La relación inversa (R^{-1}) de R

(d) Realice la matriz de la relación R

Solución:

(a) El dominio de R, corresponde al conjunto de todos los "primeros" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el dominio de R es

$$\{1, 2\}$$

(b) El rango o ámbito de R, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el rango de R es

$$\{x, y, z\}$$

(c) La relación inversa (R^{-1}) de R, corresponde a la relación:

$$R^{-1} = \{(x, 1), (x, 2), (y, 2), (z, 2)\}$$

(d) Realice la matriz de la relación R, recuerde que los reglones se identifican mediante los elementos de A y las columnas mediante los elementos de B, además siempre que un $a \in A$ esté relacionado con un elemento $b \in B$ se coloca un 1 en caso contrario un 0, por lo que la matriz solicitada corresponde a

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Sean A $= \{1, 2, 3\}$ y R la relación sobre A dada por:

$$R = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$

Determine:

(a) El dominio de R

(b) El ámbito de R

(c) La relación R^{-1}

(d) Realice la matriz de la relación R

(e) Realice la relación composición $R \circ R$

Solución:

(a) El dominio de R, corresponde al conjunto de todos los "primeros" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el dominio de R es

$$\{1, 2, 3\}$$

(b) El ámbito de R, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el ámbito de R es

$$\{1, 2, 3\}$$

(c) La relación R^{-1}, corresponde a la relación:

$$R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (3,2), (1,3), (3,3)\}$$

(d) Realice la matriz de la relación R, en este caso tanto los reglones como las columnas se identifican mediante los elementos de A, por lo que la matriz solicitada corresponde a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ M_R = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(e) Realice la relación composición $R \circ R$, para hacer la composición se sigue el siguiente proceso: si 1 se relaciona con 2 y 2 se relaciona con 3, entonces en $R \circ R$ 1 se relaciona con 3; si 1 se relaciona con 3 y 3 se relaciona con 1, entonces en $R \circ R$ 1 se relaciona con 1, si se procede de la misma manera, entonces se tiene que

$$R \circ R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

3. Sean A $= \{1, 2, 3, 4\}$ y R la relación sobre A dada por:

$$R = \{(x, y)/x, y \in A, x \quad \text{divide a} \quad y\}$$

Realice lo que se le solicita:

(a) Escriba el conjunto R como un conjunto de pares ordenados

(b) Determine el dominio de R

(c) Determine el ámbito de R

(d) Escriba la relación R^{-1}

(e) Realice la matriz de la relación R

Solución:

(a) Escriba el conjunto R como un conjunto de pares ordenados, si x se relaciona con y si sólo si x divide a y, entonces

$$R = \{(x, y)/x, y \in A, x \quad \text{divide a} \quad y\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$$

(b) Determine el dominio de R, el dominio de R, corresponde al conjunto de todos los "primeros" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el dominio de R es

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

(c) El ámbito de R, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el ámbito de R es

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

(d) Escriba la relación R^{-1} corresponde a

$$\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

(e) Realice la matriz de la relación R, en este caso tanto los reglones como las columnas se identifican mediante los elementos de A, por lo que la matriz solicitada corresponde a

$$M_R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Sobre el conjunto $A = \{2, 3, 5, 6\}$ se define una relación R de manera que el par ordenado (a, b) pertenece a la relación R si y solo si $a \cdot b$ es un número par, es decir

$$R = \{(a, b)/a, b \in A, a \cdot b = 2n, n \in \mathbb{N}\}$$

Realice lo que se le solicita:

(a) Escriba el conjunto R como un conjunto de pares ordenados

(b) Determine el dominio de R

(c) Determine el rango de R

(d) Escriba la relación R^{-1}

Solución:

(a) Escriba el conjunto R como un conjunto de pares ordenados, si a se relaciona con b si y sólo si $a \cdot b$ es un número par, se necesita que a y/o b sea par, entonces

$$R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 6), (5, 2), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 5), (6, 6)\}$$

(b) Determine el dominio de R, el dominio de R, corresponde al conjunto de todos los "primeros" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el dominio de R es

$$\{2, 3, 5, 6\}$$

(c) Determine el rango de R, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el rango de R es

$$\{2, 3, 5, 6\}$$

(d) Escriba la relación R^{-1} corresponde a

$$R^{-1} = \{(2, 2), (3, 2), (5, 2), (6, 2), (2, 3), (6, 3), (2, 5), (6, 5), (2, 6), (3, 6), (5, 6), (6, 6)\}$$

5. Sean A $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y R la relación sobre A dada por:

$$R = \{(x, y)/x, y \in A, x + y < 7\}$$

Realice lo que se le solicita:

(a) Escriba el conjunto R como un conjunto de pares ordenados

(b) Determine el dominio de R

(c) Determine el rango de R

(d) Escriba la relación R^{-1}

Solución:

(a) Escriba el conjunto R como un conjunto de pares ordenados, si x se relaciona con y sobre R si y sólo si $x + y < 7$, entonces

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$

(b) Determine el dominio de R, el dominio de R, corresponde al conjunto de todos los "primeros" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el dominio de R es

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

(c) Determine el rango de R, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el rango de R es

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

(d) Escriba la relación R^{-1} corresponde a

$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (1, 5)$

6. Sea R la relación sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ definida por $x + 2y = 8$ es decir

$$R = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{N}, x + 2y = 8\}$$

Realice lo que se le solicita:

(a) Escriba el conjunto R, como un conjunto de pares ordenados

(b) Determine el dominio de R

(c) Determine el rango de R

(d) Escriba la relación R^{-1}

Solución:

(a) Escriba el conjunto R, como un conjunto de pares ordenados. Dado que x se relaciona con y sobre R si y sólo si $x + 2y = 8$, entonces

$$R = \{(2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$$

(b) Determine el dominio de R, el dominio de R, corresponde al conjunto de todos los "primeros" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el dominio de R es

$$\{2, 4, 6\}$$

(c) Determine el rango de R, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el rango de R es

$$\{1, 2, 3\}$$

(d) Escriba la relación R^{-1} corresponde a

$$R^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (1, 6)\}$$

7. Sean R y S relaciones sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dadas por:

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,4)\} \quad \text{y} \quad S = \{(2,3), (2,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

Determine:

(a) El dominio de S

(b) El rango de R

(c) La relación R^{-1}

(d) La relación S^{-1}

(e) $R \cap S$

(f) $R \cup S$

(g) R^C

(h) La relación composición $S^2 = S \circ S$

(i) La relación composición $R \circ S$

(j) La relación composición $S \circ R$

Solución:

(a) El dominio de S, corresponde al conjunto de todos los "primeros" elementos de los pares ordenados que pertenecen a S, por lo que el dominio de S es

$$\{2, 4\}$$

(b) El rango de R, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el rango de R es

$$\{1, 3, 4\}$$

(c) La relación R^{-1}, corresponde a

$$R^{-1} = \{(1,1), (3,1), (3,2), (4,3)\}$$

(d) La relación S^{-1} , correponde a

$$S^{-1} = \{(3,2), (4,2), (1,4), (2,4), (4,4)\}$$

(e) $R \cap S$, corresponde a los pares ordenados que pertenecen a R y S simultaneamente, por lo que

$$R \cap S = \{(2,3)\}$$

(f) $R \cup S$, corresponde a los pares ordenados que pertenecen a R o a S, por lo que

$$R \cup S = \{(1,1), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

(g) R^C, primero considere que todos los posibles pares ordenados de $A \times A$ correponden al conjunto universo para R, $A \times A$ corresponde a

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

Entonces R^C corresponde a los elementos de $A \times A$ que no pertenecen a R, por lo que

$$R^C = \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

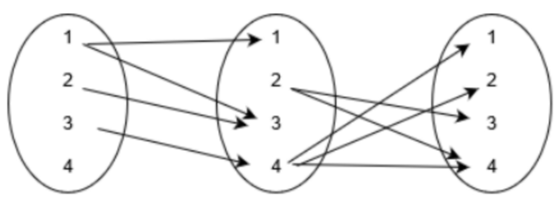
(h) La relación composición $S^2 = S \circ S$, para hacer la composición se sigue el siguiente proceso: si 2 se relaciona con 4 y 4 se relaciona con 1, entonces en $S \circ S$ 2 se relaciona con 1; si 2 se relaciona con 4 y 4 se relaciona con 2, entonces en $S \circ S$ 2 se relaciona con 2, si se procede de la misma manera, entonces se tiene que

$$S \circ S = \{(2,1),(2,2),(2,4),(4,3),(4,4)\}$$

(i) La relación composición $R \circ S$, para hacer la composición se sigue el siguiente proceso: si 3 se relaciona con 4 en R y 4 se relaciona con 1 en S, entonces en $R \circ S$ 3 se relaciona con 1; si 3 se relaciona con 4 en R y 4 se relaciona con 2 en S, entonces en $R \circ S$ 3 se relaciona con 2, si se procede de la misma manera, entonces se tiene que

$$R \circ S = \{(3,1),(3,2),(3,4)\}$$

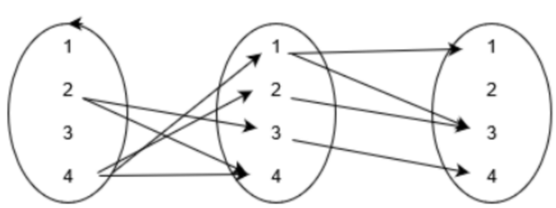
El siguiente diagrama, donde la primer relación es R y la segunda S, le puede ayudar a comprenderlo mejor.



(j) La relación composición $S \circ R$, para hacer la composición se sigue el siguiente proceso: si 2 se relaciona con 3 en S y 3 se relaciona con 4 en R, entonces en $S \circ R$ 2 se relaciona con 4; si 4 se relaciona con 1 en S y 1 se relaciona con 1 en R, entonces en $S \circ R$ 4 se relaciona con 1, si se procede de la misma manera, entonces se tiene que

$$S \circ R = \{(2,4),(4,1),(4,3)\}$$

El siguiente diagrama, donde la primer relación es S y la segunda R, le puede ayudar a comprenderlo mejor.



8. Sean $M = \{4,6\}$, $N = \{1,3,5\}$ y $P = \{6,8\}$ Considere la relación R de M a N y la relación S de N a P dadas por:

$$R = \{(4,1),(4,3),(6,1),(6,5)\} \quad \text{y} \quad S = \{(1,6),(1,8),(3,6)\}$$

Determine:

(a) La relación inversa S^{-1} de S

(b) El rango de R

(c) Realice la matriz de la relación S

(d) Determine la composición $R \circ S$

Solución:

(a) La relación inversa S^{-1} de S, correponde a

$$S = \{(6,1),(8,1),(6,3)\}$$

(b) El rango de R, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el rango de R es

$$\{1,3,5\}$$

(c) Realice la matriz de la relación S, recuerde que los reglones se identifican mediante los elementos de N y las columnas mediante los elementos de P, además siempre que un $a \in N$ esté relacionado con un elemento $b \in P$ se coloca un 1 en caso contrario un 0, por lo que la matriz solicitada corresponde a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 6 & 8 \end{array} \\ M_R = \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(d) Determine la composición $R \circ S$, siguiendo el mismo razonamiento de los ejercicios anteriores, se obtiene que

$$R \circ S = \{(4,6),(4,8),(6,6),(6,8)\}$$

9. Dados los conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{e, f\}$ y $D = \{g, h\}$ con las relaciones R de A a B, S de B a C y T de C a D, dadas por

$$R = \{(a, c), (a, d), (b, c)\} \quad , \qquad S = \{(c, e), (d, e)\} \quad \text{y} \quad T = \{(e, g), (f, h)\}$$

Pruebe la validez de la siguiente expresión:

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

Solución: siguiendo el orden de prioridad de operaciones combinadas y trabajando cada expresión por separado se tiene

$$\begin{aligned} R \circ S &= \{(a, e), (b, e)\} \\ (R \circ S) \circ T &= \{(a, e), (b, e)\} \circ \{(e, g), (f, h)\} \\ &= \{(a, g), (b, g)\} \end{aligned}$$

Por su parte se tiene que

$$\begin{aligned} S \circ T &= \{(c, g), (d, g)\} \\ R \circ (S \circ T) &= \{(a, c), (a, d), (b, c)\} \circ \{(c, g), (d, g)\} \\ &= \{(a, g), (b, g)\} \end{aligned}$$

Por lo que la expresión $(R \circ S) \circ T = \{(a, g), (b, g)\} = R \circ (S \circ T)$ es valida.

10. Sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se definen las relaciones R y S bajo las siguientes condiciones:

a se relaciona con b bajo R si y sólo si $a + b \in A$
a se relaciona con b bajo S si y sólo si $b = a + 1$

Determine:

(a) Escriba el conjunto R, como un conjunto de pares ordenados
(b) Escriba el conjunto S, como un conjunto de pares ordenados
(c) El dominio de R
(d) El dominio de S
(e) El rango de R
(f) El rango de S
(g) La relación R^{-1}
(h) La relación S^{-1}
(i) La relación composición $R \circ S$

Solución:

(a) Escriba el conjunto R, como un conjunto de pares ordenados, si a se relaciona con b bajo R si y sólo si $a + b \in A$ entonces

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$$

(b) Escriba el conjunto S, como un conjunto de pares ordenados, si a se relaciona con b bajo S si y sólo si $b = a + 1$ entonces

$$S = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$$

(c) El dominio de R, corresponde al conjunto de todos los "primeros" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el dominio de R es

$$\{1,2,3\}$$

(d) El dominio de S, corresponde al conjunto de todos los "primeros" elementos de los pares ordenados que pertenecen a S, por lo que el dominio de S es

$$\{1,2,3\}$$

(e) El rango de R, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, por lo que el rango de R es

$$\{1,2,3\}$$

(f) El rango de S, corresponde al conjunto de todos los "segundos" elementos de los pares ordenados que pertenecen a S, por lo que el rango de S es

$$\{2,3,4\}$$

(g) La relación R^{-1}, correponde a

$$R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(1,2),(2,2),(1,3)\}$$

(h) La relación S^{-1}, correponde a

$$S^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$$

(i) La relación composición $R \circ S$, siguiendo el mismo razonamiento de los ejercicios anteriores, se obtiene que

$$R \circ S = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2)\}$$

Relaciones de equivalencia

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4 definidas como sigue

   (a) $R_1 = \{(1, 1), (4, 4)\}$

   (b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

   (c) $R_3 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$

   (d) $R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$

   Para cada una de estas relaciones, establezca si son reflexivas, simétricas, transitivas y/o antisimétricas.

   Solución: Recuerde que una relación R es

   - **Reflexiva** si para todo $a \in X$ se tiene que $(a, a) \in R$.
   - **Simétrica** si siempre que $(a, b) \in R$, también $(b, a) \in R$
   - **Transitiva** si siempre que $(a, b)\ y\ (b, c) \in R$ también $(a, c) \in R$
   - **Antisimétrica** si siempre que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ se tiene que $a = b$

   Por lo que la solución del ejercicio es:

   (a) $R_1 = \{(1, 1), (4, 4)\}$ es no reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica.

   (b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ es reflexiva, no simétrica, transitiva y antisimétrica.

   (c) $R_3 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ es no reflexiva, simétrica, no transitiva y no antisimétrica.

   (d) $R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$ es no reflexiva, no simétrica, transitiva y antisimétrica.

2. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y R una relación sobre X tal que:

$$R = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,6)\}$$

Determine si R es una relación de equivalencia.

Solución: Para probar que R es una relación de equivalencia, se debe probar que es refexiva, simétrica y transitiva.

(a) Refexiva: Observe que en R se tienen los elementos $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$ es decir para todo $x \in X$ se tiene que $(x,x) \in R$ por lo tanto, R es refexiva.

(b) Simétrica: Observe que siempre que $(x,y) \in R$, también $(y,x) \in R$ pues

$$(1,3)\, y\, (3,1) \in R,\ (3,5)\, y\, (5,3) \in R,\ (2,6)\, y\, (6,2) \in R$$

y así sucesivamente, por lo tanto, R es simétrica.

(c) Transitiva: Observe que si $(1,1)\, y\, (1,3) \in R$ entonces $(1,3) \in R$, si $(5,3)\, y\, (3,1) \in R$ entonces $(5,1) \in R$ y así sucesivamente, es decir, siempre que $(x,y)\, y\, (y,z) \in R$ también $(x,z) \in R$, por lo tanto,R es transitiva.

De esta forma se demuestra que R es una relación de equivalencia.

3. Sea R una relación sobre $A = \{p, q, r\}$ tal que

$$R = \{(p,p),(p,q),(p,r),(q,p),(q,q),(q,r),(r,p),(r,q),(r,r)\}$$

Determine si R es una relación de equivalencia

Solución: Para probar que R es una relación de equivalencia, se debe probar que es refexiva, simétrica y transitiva.

(a) R es reflexiva, lo cual se cumple porque para todo $p, q, r \in A$ se tiene que $(p,p),(q,q),(r,r)$ están en R

(b) R es simétrica, lo cual se cumple porque

(p,q) está en R y (q,p) está en R
(p,r) está en R y (r,p) está en R
(q,r) está en R y (r,q) está en R

(c) R es transitiva, lo cual se cumple porque:

Si (p,q) está en R y (q,r) está en R también (p,r) está en R
Si (p,r) está en R y (r,q) está en R también (p,q) está en R
Si (q,p) está en R y (p,r) está en R también (q,r) está en R

... y así para cualesquiera de los otros elementos. De esta forma se demuestra que R es una relación de equivalencia.

4. Sea R una relacion sobre A= $\{2, 4, 6, 8\}$ tal que

$$R = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4), (6,6), (8,8)\}$$

Determine si R es una relación de equivalencia

Solución: Para probar que R es una relación de equivalencia, se debe probar que es refexiva, simétrica y transitiva.

(a) R es reflexiva: lo cual se cumple porque para todo $2, 4, 6, 8 \in A$ se tiene que

$$(2,2), (4,4), (6,6), (8,8) \in R$$

(b) R es simetrica: lo cual se cumple porque

$$(2,4) \text{ está en } R \text{ y } (4,2) \text{ está en } R$$

(c) R es transitiva: lo cual se cumple porque:

Si $(2,4)$ está en R y $(4,2)$ está en R también $(2,2)$ está en R
Si $(2,4)$ está en R y $(4,4)$ está en R también $(2,4)$ está en R
Si $(4,2)$ está en R y $(2,2)$ está en R también $(4,2)$ está en R

... y así para cualesquiera de los elementos

Por lo tanto R si es una relación de equivalencia.

5. Sea A= $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ y R una relación sobre A definida por $(x,y) \in R$ si y sólo si "$x \cdot y$ es un cuadrado," es decir:

$$R = \{(x,y)/x,y \in A, \quad x \cdot y = n^2, \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

Realice lo que se le solicita:

(a) Escriba el conjunto R como un conjunto de pares ordenados

(b) Demuestre que R es una relación de equivalencia

(c) Determine la clase de equivalencia del 1

(d) Determine la clase de equivalencia del 2

(e) Determine la clase de equivalencia del 3

Solución:

(a) Escriba el conjunto R como un conjunto de pares ordenados, dado que x se relaciona con y bajo R si y sólo si $x \cdot y$ es un cuadrado, entonces

$$R = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,8),(3,3),(4,1),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,2),(8,8)\}$$

(b) Demuestre que R es una relación de equivalencia. Para probar que R es una relación de equivalencia, se debe probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

i. R es reflexiva: lo cual se cumple porque para todo $x \in A$ se tiene que $(x,x) \in R$

ii. R es simétrica: lo cual se cumple porque por ejemplo:

$(1,4)$ está en R y $(4,1)$ está en R
$(2,8)$ está en R y $(8,2)$ está en R

Es decir para todos los elementos en R si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$.

iii. R es transitiva: lo cual se cumple porque por ejemplo:

Si $(1,4)$ está en R y $(4,1)$ está en R también $(1,1)$ está en R
Si $(2,8)$ está en R y $(8,2)$ está en R también $(2,2)$ está en R
Si $(4,1)$ está en R y $(1,1)$ está en R también $(4,1)$ está en R

Es decir para todos los elementos en R si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$.
Por lo tanto R si es una relación de equivalencia.

(c) Determine la clase de equivalencia del 1, corresponde a

$$[1] = \{x/(1,x) \in R\} = \{1,4\}$$

(d) Determine la clase de equivalencia del 2, corresponde a

$$[2] = \{x/(2,x) \in R\} = \{2,8\}$$

(e) Determine la clase de equivalencia del 3, corresponde a

$$[3] = \{x/(3,x) \in R\} = \{3\}$$

6. Utilice la siguiente relación de equivalencia R sobre $A = \{1,2,3,4\}$ para realizar lo que se le solicita

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

(a) Determine la clase de equivalencia del 1

(b) Determine la clase de equivalencia del 2

(c) Determine la clase de equivalencia del 3

(d) Determine la clase de equivalencia del 4

(e) Determine la partición de A inducida por R

Solución:

(a) La clase de equivalencia del 1, corresponde a

$$[1] = \{x/(1,x) \in R\} = \{1,2\}$$

(b) La clase de equivalencia del 2, corresponde a

$$[2] = \{x/(2,x) \in R\} = \{1,2\}$$

(c) La clase de equivalencia del 3, corresponde a

$$[3] = \{x/(3,x) \in R\} = \{3\}$$

(d) La clase de equivalencia del 4, corresponde a

$$[4] = \{x/(4,x) \in R\} = \{4\}$$

(e) La partición de A inducida por R, corresponde a la colección de todas las clases de equivalencia diferentes de R, por lo que la partición de A inducida por R es

$$[\{1,2\},\{3\},\{4\}]$$

7. Sea $A = \{a, b, c, d, f\}$ y R una relación definida sobre A, definida por

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (c, c), (d, a), (d, d), (f, f)\}$$

Si se sabe que R es una relación de equivalencia sobre A, determine:

(a) Todas las clases de equivalencia de la relación sobre A.

(b) El conjunto cociente de la relación R sobre A.

Solución:

(a) Todas las clases de equivalencia de la relación sobre A
Los elementos relacionados con a son a,b y d, entonces

$$[a] = \{a, b, d\}$$

Se elige un elemento que no esté en $[a]$, por ejemplo c, el elemento relacionado con c es c entonces

$$[c] = \{c\}$$

Finalmente el único elemento que no está en $[a]$ ni $[c]$ es f que está relacionado con f, entonces

$$[f] = \{f\}$$

(b) El conjunto cociente de la relación R sobre A, corresponde a la colección de todas las clases de equivalencia de R, por lo que tomando las clases anteriores, se tiene que el conjunto cociente es

$$[\{a, b, d\}, \{c\}, \{f\}]$$

8. Sobre $\mathbb{Z}$ se define la relación R dada por aRb si y sólo si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b - a = 3k$, es decir, $b - a$ es múltiplo de 3, la cual es una relación de equivalencia. Determine las clases de equivalencia de esa relación.

Solución: Observe que la clase de equivalencia del 2 es $[2] = \{b \in \mathbb{Z} / \, 2Rb\}$, es decir, el conjunto de los números enteros b para los cuales $b - 2$ es un múltiplo de 3, así:

$$[2] = \{..., -4, -1, 2, 5, 8...\}$$

De la misma manera se obtiene que

$$[0] = \{..., -6, -3, 0, 3, 6...\}$$

$$[1] = \{..., -5, -2, 1, 4, 7...\}$$

Observe que cualquier otra clase de equivalencia será igual a cualquiera de las tres anteriores, por lo que esas son las clases de equivalencia para esa relación.

9. Dada una relación de equivalencia R que satisface que, dados $x, y \in \mathbb{Z}$, x se relaciona con y si y sólo si $x \equiv y(mod \quad 4)$ es decir $x - y$ es divisible por 4. Determine las clases de equivalencia de esa relación.

Solución: Las clases de equivalencia de esa relación corresponden a

$$\mathbb{Z}_0 = \{y \in \mathbb{Z}/y \equiv 0 \quad (mod \quad 4)\} = \{..., -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...\}$$

$$\mathbb{Z}_1 = \{y \in \mathbb{Z}/y \equiv 1 \quad (mod \quad 4)\} = \{..., -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, ...\}$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{y \in \mathbb{Z}/y \equiv 2 \quad (mod \quad 4)\} = \{..., -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, ...\}$$

$$\mathbb{Z}_3 = \{y \in \mathbb{Z}/y \equiv 3 \quad (mod \quad 4)\} = \{..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, ...\}$$

Observe que $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_0$ por lo que las anteriores son las clases de equivalencia de esa relación.

Referencias Bibliográficas

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas.* Chicago. Pearson Educación.

Lipschutz, S. & Lars, M. (2017). *Matemáticas para computación I.* México D.F. McGraw-Hill Education.

Murillo M. (2010). *Introducción a la matemática discreta.* Costa Rica. Editorial Tecnológica de Costa Rica.