UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA VICERRECTORÍA ACADÉMICA ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES CÁTEDRA DE MATEMÁTICAS PARA LA ADMINISTRACIÓN Y COMPUTACIÓN

Asignatura: Matemática para Computación I
Código: 03068

Material Complementario Capítulo 4

Proposiciones

Determine si cada una de las siguientes expresiones corresponde o no a una proposición y en caso que lo sea escriba el valor de verdad de la expresión.

1. $2 + 5 = 9$
2. Para algún entero positivo n, $19340 = n \cdot 17$.
3. Cómprame un chocolate.
4. ¿Donde vives?
5. Costa Rica es un país de América.

Solución: Una proposición es una afirmación declarativa que es falsa o verdadera pero no ambas, por lo que:

1. $2 + 5 = 9$, **si** es una proposición y además es **falsa**, puesto que $2 + 5 \neq 9$.
2. Para algún entero positivo n, $19340 = n \cdot 17$, **si** es una proposición y además es **falsa** puesto que $19340 \div 17$ no es un número entero.
3. Cómprame un chocolate, **no** corresponde a una proposición.
4. ¿Donde vives?, **no** corresponde a una proposición.
5. Costa Rica es un país de América, **si** es una proposición y además es **verdadera**, puesto que Costa Rica si es un país de América.

Proposiciones y operaciones lógicas

1. Considere las siguientes proposiciones

p: Luis hace la tarea
q: Luis es buen estudiante

Utilizando esas proposiciones, escriba cada una de los siguientes enunciados (con forma simbólica) en palabras

(a) $\neg p$
(b) $p \vee \neg q$
(c) $p \wedge q$
(d) $p \vee q$
(e) $\neg p \wedge \neg q$

Solución: Recuerde los símbolos

Símbolo	Se lee
$\wedge$	y
$\vee$	o
$\neg$	es falso que o no

.

(a) $\neg p$: Luis no hace la tarea.

(b) $\neg p \vee q$: Luis no hace la tarea o es buen estudiante.

(c) $p \wedge q$: Luis hace la tarea y es buen estudiante.

(d) $p \vee q$: Luis hace la tarea o es buen estudiante.

(e) $\neg p \wedge \neg q$: Luis no hace la tarea y no es buen estudiante.

2. Considere las siguientes proposiciones

r: Hace calor
p: Hoy es lunes
q: No está lloviendo

Utilizando esas proposiciones escriba cada una de los siguientes enunciados (con forma simbólica) en palabras

(a) $\neg r$
(b) $\neg q$
(c) $p \wedge q$
(d) $p \wedge \neg q$
(e) $\neg p \wedge (q \vee r)$
(f) $\neg(p \vee q)$

Solución: utilizando la lectura de los símbolos mostrada en el ejercicio uno y la tabla de 4.1 del libro de texto, tenemos:

(a) $\neg r$: no hace calor.

(b) $\neg q$: está lloviendo.

(c) $p \wedge q$: hoy es lunes y no está lloviendo.

(d) $p \wedge \neg q$: hoy es lunes y está lloviendo.

(e) $\neg p \wedge (q \vee r)$ hoy no es lunes y no está lloviendo u hoy no es lunes y hace calor.

(f) $\neg(p \vee q)$: hoy no es lunes y está lloviendo.

3. Considere las siguientes proposiciones para representar de forma simbólica los enunciados que se le proponen

p: Hace frío
q: Está lloviendo

(a) Está lloviendo y hace frío
(b) No está lloviendo
(c) Hace frío pero no está lloviendo
(d) No hace frío y no está lloviendo

Solución: utilizando los símbolos mostrados en el ejercicio uno, tenemos:

(a) Está lloviendo y hace frío: $q \wedge p$

(b) No está lloviendo: $\neg q$

(c) Hace frío pero no está lloviendo: $p \wedge \neg q$

(d) No hace frío y no está lloviendo: $\neg p \wedge \neg q$

4. Considere las proposiciones

p: Luisa estudia
q: Jorge estudia
r: Luisa va al cine
s: Jorge va al cine
t: Jorge invita a Luisa a ir al cine

Utilice los enunciados anteriores para representar de forma simbólica las siguientes expresiones:

(a) Luisa o Jorge estudian.

(b) Jorge invita a Luisa a ir al cine, entonces Luisa no estudia.

(c) Si Jorge y Luisa van al cine entonces ni Jorge ni Luisa estudian.

(d) Jorge estudia si y sólo si no va al cine.

(e) Si Jorge no invita a Luisa a ir al cine, entonces Luisa estudia.

Solución: Recuerde los símbolos

Símbolo	Se lee
$\wedge$	y
$\vee$	o
$\neg$	es falso que o no
$\longrightarrow$	entonces
$\longleftrightarrow$	si y sólo si

.

(a) Luisa o Jorge estudian: $p \vee q$

(b) Jorge invita a Luisa a ir al cine, entonces Luisa no estudia: $t \longrightarrow \neg p$

(c) Si Jorge y Luisa van al cine entonces ni Jorge ni Luisa estudian: $s \wedge r \longrightarrow \neg q \wedge \neg p$

(d) Jorge estudia si y sólo si no va al cine: $q \longleftrightarrow \neg s$

(e) Si Jorge no invita a Luisa a ir al cine, entonces Luisa estudia: $\neg t \longrightarrow p$

Proposiciones y tablas de verdad

Para resolver los siguientes ejercicios recuerde las siguientes tablas

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

.

1. Dadas las proposiciones p y q realice la tabla de verdad de la siguiente expresión

$$\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

Solución: Se realiza la tabla de verdad para la expresión dada

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \wedge q$	$\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V

.

2. Dadas las proposiciones p y q realice la tabla de verdad de la siguiente expresión

$$(p \wedge \neg q) \longrightarrow (p \vee q)$$

Solución: Se realiza la tabla de verdad para la expresión dada

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$(p \wedge \neg q) \longrightarrow (p \vee q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V

3. Dadas las proposiciones p y q realice la tabla de verdad de la siguiente expresión

$$(p \wedge r) \longleftrightarrow \neg q$$

Solución: Se realiza la tabla de verdad para la expresión dada

p	q	r	$p \wedge r$	$\neg q$	$(p \wedge r) \longleftrightarrow \neg q$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

4. Considerando la proposición **p falsa**, la proposición **q verdadera** y la proposición **r falsa** determine si cada una de las siguientes expresiones es falsa o verdadera.

(a) $p \vee q$

(b) $\neg p \vee r$

(c) $\neg p \wedge \neg q$

(d) $\neg p \longrightarrow \neg q$

(e) $p \longleftrightarrow r$

(f) $(p \vee r) \longrightarrow \neg q$

Solución:

(a) $p \vee q$, recuerde que falso o verdadero es **verdadero**

p	q	p ∨ q
F	V	V

.

(b) $\neg p \vee r$, recuerde que no falso = verdadero, además verdadero o falsa es **verdadero**

p	¬p	r	¬ p ∨ r
F	V	F	V

.

(c) $\neg p \wedge \neg q$, es **falso**

p	q	¬p	¬q	¬ p∧¬ q
F	V	V	F	F

.

(d) $\neg p \longrightarrow \neg q$, es **falso**

p	q	¬p	¬q	¬ p⟶ ¬ q
F	V	V	F	F

.

(e) $p \longleftrightarrow r$, es **verdadero**

p	r	p ⟷ r
F	F	V

.

(f) $(p \vee r) \longrightarrow \neg q$, es **verdadero**

p	r	$p \vee r$	$\neg r$	$(p \vee r) \longrightarrow \neg q$
F	F	F	V	V

5. Sean p y q dos proposiciones tales que el valor de verdad de la expresión $p \wedge q$ es **verdadero**. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes expresiones:

(a) La proposición p

(b) $p \longrightarrow q$

(c) $p \vee q$

(d) $\neg p \longrightarrow \neg q$

(e) $\neg(p \longrightarrow \neg q)$

Solución:

(a) La proposición p, es **verdadero**. Observe la tabla de verdad de $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Según la tabla $p \wedge q$ es **verdadera** si y sólo si tanto la preposición p como la proposición q son **ambas verdaderas**, por lo que el valor de verdad de p es **verdadero**

(b) $p \longrightarrow q$, es **verdadero.** Partiendo del punto anterior donde se determinó que tanto p como q son ambas verdaderas, observe la tabla de verdad para $p \longrightarrow q$

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V

.

(c) $p \vee q$, **verdadero.** Partiendo de que la proposición p y la proposición q son ambas verdaderas, observe la tabla de verdad para $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
V	V	V

.

(d) $\neg p \longrightarrow \neg q$, es **verdadero.** Partiendo de que la proposición p y la proposición q son ambas verdaderas, observe la tabla de verdad para $\neg p \longrightarrow \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \longrightarrow \neg q$
V	V	F	F	V

.

(e) $\neg(p \longrightarrow \neg q)$, es **verdadero.** Partiendo de que la proposición p y la proposición q son ambas verdaderas, observe la tabla de verdad para $\neg(p \longrightarrow \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \longrightarrow \neg q$	$\neg(p \longrightarrow \neg q)$
V	V	F	F	V

6. Dadas las proposiciones p y q determine si la siguiente expresión es una tautología o una contradicción

$$p \vee (p \longrightarrow q)$$

Solución: Se realiza la tabla de verdad para la expresión dada

p	q	$p \longrightarrow q$	$p \vee (p \longrightarrow q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

Por lo tanto como se obtuvo verdadero en todas las filas de la expresión final, se tiene que la expresión $p \vee (p \longrightarrow q)$ es una **tautología**.

7. Dadas las proposiciones p y q determine si la siguiente expresión es una tautología o una contradicción

$$\neg(p \vee (p \longrightarrow q))$$

Solución: Se realiza la tabla de verdad para la expresión dada

p	q	$p \longrightarrow q$	$p \vee (p \longrightarrow q)$	$\neg(p \vee (p \longrightarrow q))$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

Por lo tanto como se obtuvo falso en todas las filas de la expresión final, se tiene que la expresión $\neg(p \vee (p \longrightarrow q))$ es una **contradicción**.

8. Dadas las proposiciones p y q determine si la siguiente expresión es una tautología o una contradicción

$$(p \longleftrightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$$

Solución: Se realiza la tabla de verdad para la expresión dada

p	q	$p \longleftrightarrow q$	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$(p \longleftrightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F

Por lo tanto como se obtuvo falso en todas las filas de la expresión final, se tiene que la expresión $(p \longleftrightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ es una **contradicción.**

9. Dadas las proposiciones p y q pruebe que las siguientes expresiones son logicamente equivalentes, es decir:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Solución: Se realiza la tabla de verdad para la expresión $\neg(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Ahora se realiza la tabla de verdad para la expresión $\neg p \wedge \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Por lo que se concluye que $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ dado que tienen los mismos valores de verdad en sus respectivas tablas.

10. Dadas las proposiciones p, q y r pruebe que las siguientes expresiones son lógicamente equivalentes, es decir:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Solución: Se realiza la tabla de verdad para la expresión $(p \vee q) \vee r$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

Ahora se realiza la tabla de verdad para la expresión $p \vee (q \vee r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

Por lo que se concluye que $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ dado que tienen los mismos valores de verdad en sus respectivas tablas.

Proposiciones condicionales

1. Escriba cada una de las siguientes proposiciones como una proposición condicional

   (a) Ana pasará el examen de matemáticas si estudia duro.

   (b) El programa es legible sólo si está bien estructurado

   (c) Para ir al concierto se deben pagar \$ 100.

   (d) Para matricular el curso de algoritmos es necesario aprobar el de computación I.

   (e) Si él trabaja ganará dinero

   Solución: recuerde que si p y q son proposiciones, la proposición condicional es la proposición si p entonces q, que se denota por $p \longrightarrow q$, por lo que el condicional de de las expresiones dadas son:

   (a) Si Ana estudia duro, entonces pasará el examen de matemáticas.

   (b) Si el programa está bien estructurado, entonces es legible.

   (c) Si se pagan \$ 100, entonces se puede ir al concierto.

   (d) Si se aprueba el curso de computación I, entonces se puede matricular el curso de algoritmos.

   (e) Si él gana dinero, entonces él trabaja.

2. Escriba la recíproca de cada una de las proposiciones del **ejercicio 1**.

   Solución: recuerde que la recíproca de $p \longrightarrow q$ es $q \longrightarrow p$, por lo que la recíproca de las expresiones dadas son:

   (a) Si Ana pasó el examen de matemáticas, entonces estudió duro.

   (b) Si el programa es legible, entonces está bien estructurado.

   (c) Si puede ir al concierto, entonces pagó \$ 100.

   (d) Si pudo matricular el curso de algoritmos, entonces aprobó el computación I.

   (e) Si él trabaja, entonces gana dinero.

3. Escriba la contrapositiva de cada una de las proposiciones del **ejercicio 1**.

   Solución: recuerde que la contrapositiva de $p \longrightarrow q$ es $\neg q \longrightarrow \neg p$, por lo que la contrapositiva de las expresiones dadas son:

   (a) Si Ana no pasó el examen de matemáticas, entonces no estudió duro.

   (b) Si el programa no es legible, entonces no está bien estructurado.

   (c) Si no puede ir al concierto, entonces no pagó $ 100.

   (d) Si no pudo matricular el curso de algoritmos, entonces no aprobó el computación I.

   (e) Si él no trabaja, entonces no gana dinero.

4. Escriba la inversa de cada una de las proposiciones del **ejercicio 1**.

   Solución: recuerde que la inversa de $p \longrightarrow q$ es $\neg p \longrightarrow \neg q$, por lo que la inversa de las expresiones dadas son:

   (a) Si Ana no estudia duro, entonces no pasará el examen de matemáticas.

   (b) Si el programa no está bien estructurado, entonces no es legible.

   (c) Si no se pagan $ 100, entonces no se puede ir al concierto.

   (d) Si no se aprueba el curso de computación I, entonces no se puede matricular el curso de algoritmos.

   (e) Si él no gana dinero, entonces no trabaja.

Argumentos

1. Determine la validez del siguiente argumento

$$p \longrightarrow \neg q, \neg q \vdash q$$

Solución: Recuerde la definición de argumentos válidos para la solución de los siguientes ejercicios, la cual dice:

Un argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ es válido si, Q es verdadero **siempre** *que todas las premisas $P_1, P_2, ..., P_n$ son verdaderas.*

Para el caso de este ejercicio las premisas y Q son

$$P_1 = p \longrightarrow \neg q$$

$$P_2 = \neg q$$

$$Q = q$$

Realizamos la tabla de verdad y revisamos si se cumple la definición para que el argumento sea válido, o en caso contrario será una falacia

p	q	$\neg q$	$p \longrightarrow \neg q$	q
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	F

Después de analizar la tabla de verdad anterior se nota que el argumento es una **falacia**, dado que en la segunda y cuarta línea las dos premisas son verdaderas pero Q es falso.

2. Determine la validez del siguiente argumento

$$p \longrightarrow q, q \longrightarrow p \vdash p \longleftrightarrow q$$

Solución: Para el caso de este ejercicio las premisas y Q son

$$P_1 = p \longrightarrow q$$

$$P_2 = q \longrightarrow p$$

$$Q = p \longleftrightarrow q$$

Realizamos la tabla de verdad y revisamos si se cumple la definición para que el argumento sea válido, o en caso contrario será una falacia

p	q	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Después de analizar la tabla de verdad anterior se nota que el argumento es **valido**, dado que si las dos premisas son verdaderas se tiene que Q es verdadero.

3. Determine la validez del siguiente argumento

$$p \longrightarrow q, \neg p \vdash \neg q$$

Solución: Para el caso de este ejercicio las premisas y Q son

$$P_1 = p \longrightarrow q$$

$$P_2 = \neg p$$

$$Q = \neg q$$

Realizamos la tabla de verdad y revisamos si se cumple la definición para que el argumento sea válido, o en caso contrario será una falacia

p	q	$p \longrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

Después de analizar la tabla de verdad anterior se nota que el argumento es una **falacia**, dado que en la tercera línea las dos premisas son verdaderas pero Q es falso.

4. Determine la validez del siguiente argumento

$$\begin{array}{c} \text{Si llueve, José se enferma.} \\ \text{No llovió.} \\ \hline \text{José no se enfermó.} \end{array}$$

Solución: Primero se debe traducir el argumento a su forma simbólica, para esto considere

p : llueve

q : José se enferma

Por lo que las premisas y Q son:

$P_1 = p \longrightarrow q$	Si llueve, José se enferma
$P_2 = \neg p$	No llovió
$Q = \neg q$	José no se enfermó

Entonces la forma simbólica del argumento es

$$p \longrightarrow q, \neg p \vdash \neg q$$

Este caso es el **ejercicio tres**, donde se determinó que el argumento es una **falacia**.

5. Determine la validez del siguiente argumento

$$\begin{array}{c} \text{Si estudio, apruebo matemáticas.} \\ \text{No aprobé matemáticas.} \\ \hline \text{No estudié.} \end{array}$$

Solución: Primero se debe traducir el argumento a su forma simbólica, para esto considere

p : estudio

q : apruebo matemáticas

Por lo que las premisas y Q son:

$P_1 = p \longrightarrow q$ Si estudio, apruebo matemáticas

$P_2 = \neg q$ No aprobé matemáticas

$Q = \neg p$ No estudié

Entonces la forma simbólica del argumento es

$$p \longrightarrow q, \neg q \vdash \neg p$$

Realizamos la tabla de verdad y revisamos si se cumple la definición para que el argumento sea válido, o en caso contrario será una falacia

p	q	$p \longrightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Después de analizar la tabla de verdad anterior se nota que el argumento es **valido**, dado que si las dos premisas son verdaderas se tiene que Q es verdadero.

Cuantificadores y Proposiciones condicionales

1. Represente simbólicamente las siguientes proposiciones, utilizando cuantificadores.

   (a) Para todo número real x existe un número real y tal que $x < y$

   (b) Existe un número natural n tal que su cuadrado es menor que 2.

   (c) Para todo número real x se tiene que $x^2 \geq 0$

   (d) Existe un número entero n tal que $n - 3 = -5$.

   (e) No existe un número real tal que $x^2 = -1$

Solución: Para representar de forma smbólica cada una de las expresiones dadas es importante recordar los símbolos utilizados, por eso observe el siguiente cuadro

Símbolo	Se lee
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe

Por lo que la representación solicitada es

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}), (x < y)$.

(b) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < 2$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

(d) $\exists n \in \mathbb{Z}, n - 3 = -5$.

(e) $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1 \equiv \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$

2. Dado el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, determine el valor de verdad de cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $(\forall x \in A)(x + 2 > 4)$
   (b) $(\forall x \in A)(x - 2 \leq 8)$
   (c) $(\exists x \in A)(x + 2 = 4)$
   (d) $(\exists x \in A)(x^2 = 100)$
   (e) $(\nexists x \in A)(\sqrt{x} = 2)$
   (f) $(\forall x \in A)(x \text{ es primo})$
   (g) $(\exists x \in A)(x \text{ es par})$
   (h) $(\forall x \in A)(|x| = x)$

Solución: Para determinar el valor de verdad de cada una de las expresiones dadas considere los símbolos de la tabla en el ejercicio uno, por lo que

(a) $(\forall x \in A)(x + 2 > 4)$, es **falso**. La expresión dice: para todo x en A, $x + 2$ es mayor que 4, lo cual es falso porque para $x = 2$ se tiene que $2 + 2 = 4$ que no es mayor que 4.

(b) $(\forall x \in A)(x - 2 \leq 8)$, es **verdadero**. La expresión dice: para todo x en A, $x - 2$ es menor o igual que 8, lo cual es cierto dado que $2 - 2 = 0 \leq 8$, $4 - 2 = 2 \leq 8$, $6 - 2 = 4 \leq 8$, $8 - 2 = 6 \leq 8$ y $10 - 2 = 8$.

(c) $(\exists x \in A)(x + 2 = 4)$, es **verdadero**. La expresión dice: existe un x en A tal que $x + 2 = 4$ ese número es $x = 2$.

(d) $(\exists x \in A)(x^2 = 100)$, es **verdadero**. La expresión dice: existe un x en A tal que $x^2 = 100$ ese número es $x = 10$.

(e) $(\nexists x \in A)(\sqrt{x} = 2)$, es **falso**. La expresión dice: **no** existe un x en A tal que $\sqrt{x} = 2$ es falsa porque si existe, corresponde a $x = 4$.

(f) $(\forall x \in A), x$ es primo, es **falso**. La expresión dice: para todo x en A se tiene que x es un número primo, lo cual se contradice con el ejemplo $x = 10$.

(g) $(\exists x \in A), x$ es par, es **verdadero**. La expresión dice: existe un x en A tal que x es par, lo cual es cierto porque cualquier número de A es par.

(h) $(\forall x \in A), |x| = x$, es **verdadero**. La expresión dice: para todo x en A el valor absoluto de x es x, lo cual se puede confirmar aplicando la definición de la función factorial.

3. Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como el conjunto universo, determine el valor de verdad de cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$

   (b) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 1 > 0)$

   (c) $(\exists x \in \mathbb{R})(x + 2 = 5)$

   (d) $(\exists x \in \mathbb{R})\left(\dfrac{x}{2} = 3\right)$

   Solución: igual que en el ejercicio anterior tenga presente los símbolos para todo y existe.

   (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$, es **verdadero**. La expresión dice: para todo número real x, x^2 es mayor o igual que 0, lo cual es verdadero porque cualquier número real elevado al cuadrado siempre será o cero o mayor.

   (b) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 1 > 0)$, es **falso**. La expresión dice: para todo número real x, $x^2 - 1$ es mayor que 0, lo cual es falso porque por ejemplo para $x = 1$ se tiene que $1^2 - 1 = 0$ que no es mayor que 0.

   (c) $(\exists x \in \mathbb{R})(x + 2 = 5)$, es **verdadero**. La expresión dice: existe un número real x, tal que $x + 2 = 5$, lo cual es verdadero haciendo $x = 5 - 2 = 3$, el número es $x = 3$

   (d) $(\exists x \in \mathbb{R})\left(\dfrac{x}{2} = 3\right)$, es **verdadero**. La expresión dice: existe un número real x, tal que $\dfrac{x}{2} = 3$, lo cual es verdadero haciendo $x = 3 \cdot 2 = 6$, el número es $x = 6$

   Nota: observe que en el caso del ejercicio c y d, existe un número real que cumple la condición, pero no sería cierta si el cuantificador es un "para todo," dado que solo existe uno.

4. Considere el conjunto $A = \{2, 3, 5\}$ como el conjunto universo para el cual se definen las siguientes proposiciones, determine el valor de verdad de cada una de ellas:

   (a) $\exists x \; \forall y, x - 3 < y$

   (b) $\forall x \; \exists y, x + y \leq 7$

   (c) $\exists x \; \forall y, y + 2 = x$

   (d) $\forall x \; \exists y, x < y$

Solución:

(a) $\exists x \; \forall y, x - 3 < y$, es **verdadero**. La expresión dice: existe un x para todo y talque $x - 3 < y$, lo cual es verdadero, basta ver $x = 2$ hace verdadera la expresión ya que $2 - 3 = -1 < 2$, $2 - 3 = -1 < 3$ y finalmente $2 - 3 = -1 < 5$.

(b) $\forall x \; \exists y, x + y \leq 7$, es **verdadero**. La expresión dice: para todo x existe un y talque $x + y$ es mayor o igual a 7, basta con tomar a $y = 2$ para que la expresión sea verdadera, observe $2 + 2 = 4 \leq 7$, $3 + 2 = 5 \leq 7$ y finalmente $5 + 2 = 7$.

(c) $\exists x \; \forall y, y + 2 = x$, es **falsa**. La expresión dice: existe un x para todo y talque $y + 2 = x$ basta con tomar como contra ejemplo $y = 5$ y observar que $5 + 2 = 7$ y 7 no es parte del conjunto A.

(d) $\forall x \; \exists y, x < y$, es **falsa**. La expresión dice: para todo x existe un y talque x es menor que y, basta con tomar como contra ejemplo $x = 5$ y observar que 5 no es menor que ningún elemento del conjunto A.

5. Considere las siguientes proposiciones sobre un conjunto cualquiera, escriba de forma simbólica la negación de cada una de ellas.

   (a) $\exists x\ \forall y, x = 2y$
   (b) $\forall x\ \exists y, p(x, y)$
   (c) $\exists x\ \forall y, x + y > 2$

   Solución: para realizar las negaciones correctamente debe considerar las siguientes equivalencias

$$\neg\forall x, p(x) \equiv \quad \exists x, \neg p(x)$$

$$\neg\exists x, p(x) \equiv \quad \forall x, \neg p(x)$$

   Por lo que las negaciones solicitadas corresponden a

   (a) $\neg(\exists x\ \forall y, x = 2y) \equiv \forall x\, \exists y, x \neq 2y$

   (b) $\neg(\forall x\ \exists y, p(x, y)) \equiv \exists x\, \forall y, \neg p(x, y)$

   (c) $\neg(\exists x\ \forall y, x + y > 2) \equiv \forall x\ \exists y, x + y \leq 2$

6. Escriba la negación de las siguientes proposiciones.

   (a) Todos los estudiantes de computación son hombres.
   (b) Algunos estudiantes tienen 30 años o más de edad.
   (c) A todas las personas les gusta el chocolate

   Solución: para realizar las negaciones se pueden usar varias expresiones por ejemplo:

   (a) Algún estudiante de computación es mujer.

   (b) Hay estudiantes menores de 30 años de edad.

   (c) hay personas a las cuales no les gusta el chocolate

Referencias Bibliográficas

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas*. Chicago. Pearson Educación.

Lipschutz, S. & Lars, M. (2017). *Matemáticas para computación I*. México D.F. McGraw-Hill Education.

Murillo M. (2010). *Introducción a la matemática discreta*. Costa Rica. Editorial Tecnológica de Costa Rica.