UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA VICERRECTORÍA ACADÉMICA ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES CÁTEDRA DE MATEMÁTICAS PARA LA ADMINISTRACIÓN Y COMPUTACIÓN

Asignatura: Matemática para Computación I
Código: 03068

Material Complementario Capítulo 5

Funciones matemáticas

1. Determine el valor de las siguientes expresiones, utilizando la definición de la función factorial

(a) $4! =$

(b) $5! =$

(c) $6! =$

(d) $55! =$

(e) $\dfrac{7!}{6!} =$

(f) $\dfrac{7!}{8!} =$

Solución: puede ir al capítulo 3 y repasar la definición de función factorial si lo necesita, para efectos de este capitulo cuando sea posible se va a utilizar que

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

(a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

(b) $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$

(c) $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

(d) Para determinar el valor de la expresión $55!$, por tratarse de un número muy grande, utilizamos la fórmula de Stirling:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

De donde se obtine que $55! = \sqrt{2\pi \cdot 55} \cdot 55^{55} \cdot e^{-55} = 1,269640335x10^{73}$

(e) $\dfrac{7!}{6!} = \dfrac{7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 7$

(f) $\dfrac{7!}{8!} = \dfrac{\cancel{7!}}{8 \cdot \cancel{7!}} = \dfrac{1}{8}$

2. Determine el valor de las siguientes permutaciones

   (a) $P(8,3) =$
   (b) $P(9,5) =$
   (c) $P(11,7) =$

   Solución: Considere que $P(n,r)$ se lee "permutación de los n objetos tomando r a la vez" y se calcula

   $$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

   Observe que en $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ hay "r" factores.

   (a) $P(8,3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

   (b) $P(9,5) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$

   (c) $P(11,7) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,663\,200$

3. En cada una de las siguientes expresiones determine el valor de n de manera que la igualdad se cumpla:

   (a) $P(n,2) = 42$
   (b) $4 \cdot P(n,2) = P(n,3)$
   (c) $P(n,4) = 42 \cdot P(n,2)$
   (d) $2 \cdot P(n,2) + 50 = P(2n,2)$

   Solución: aplicando la definición y resolviendo las ecuaciones en cada caso se obtiene

   (a)

   $$\begin{aligned} P(n,2) &= 42 \\ n \cdot (n-1) &= 42 \\ n^2 - n &= 42 \\ n^2 - n - 42 &= 0 \\ (n-7)(n+6) &= 0 \\ n = 7 &\qquad n = -6 \end{aligned}$$

   Dado que n debe ser positiva, para este caso tomamos $n = 7$

(b)

$$4 \cdot P(n, 2) = P(n, 3)$$
$$4 \cdot n \cdot (n-1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$
$$\frac{4 \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)}}{\cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)}} = (n-2)$$
$$4 = n - 2$$
$$n = 4 + 2 = 6$$

Por lo que el valor de n es 6

(c)

$$P(n, 4) = 42 \cdot P(n, 2)$$
$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 42 \cdot n \cdot (n-1)$$
$$\frac{\cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)} \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{\cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)}} = 42$$
$$(n-2) \cdot (n-3) = 42$$
$$n^2 - 5n + 6 - 42 = 0$$
$$n^2 - 5n - 36 = 0$$
$$(n-9)(n+4) = 0$$
$$n = 9 \qquad n = -4$$

Dado que n debe ser positiva, para este caso tomamos $n = 9$