UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA VICERRECTORÍA ACADÉMICA ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES CÁTEDRA DE MATEMÁTICAS PARA LA ADMINISTRACIÓN Y COMPUTACIÓN

Asignatura: Matemática para Computación I
Código: 03068

Material Complementario Capítulo 3

Funciones

1. Dados los conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$, determine si cada una de las siguientes relaciones definidas de A a B, corresponde o no, a una función

   (a) $f = \{(2, 1), (2, 3)\}$

   (b) $h = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (6, 7)\}$

   (c) $n = \{(2, 1), (4, 1), (6, 1)\}$

   (d) $h = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5)\}$

   Solución: considere que una relación es una función si sólo si a cada elemento del dominio A se le asigna un único elemento del codominio B.

   (a) $f = \{(2, 1), (2, 3)\}$, **no** es función, ya que los elementos 4 y 6 de A no están relacionados con ningún elemento de B, además 2 no está relacionado con un único elemento de B.

   (b) $h = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (6, 7)\}$ **no** es función, ya que 6 no está relacionado con un único elemento de B.

   (c) $n = \{(2, 1), (4, 1), (6, 1)\}$ **si** es función, ya que cada elemento del dominio A se le asigna un único elemento del codominio B

   (d) $h = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5)\}$ **si** es función, ya que cada elemento del dominio A se le asigna un único elemento del codominio B

2. Sea $X = \{1, 2, 3\}$, determine si cada una de las siguientes relaciones sobre X, corresponde o no, a una función de X en X

   (a) $f = \{(1,1),(2,3)\}$

   (b) $h = \{(2,1),(3,1),(1,3)\}$

   (c) $n = \{(3,1),(2,2),(1,3),(3,3)\}$

   (d) $g = \{(1,2),(2,3),(2,2),(3,3)\}$

   Solución: considere que una relación es una función si sólo si a cada elemento del dominio X se le asigna un único elemento del codominio X.

   (a) $f = \{(1,1),(2,3)\}$ **no** es función, ya que el elemento 3 del conjunto de salida X no están relacionado con ningún elemento del conjunto de llegada.

   (b) $h = \{(2,1),(3,1),(1,3)\}$ **si** es función, ya que cada elemento del dominio se le asigna un único elemento del codominio.

   (c) $n = \{(3,1),(2,2),(1,3),(3,3)\}$ **no** es función, ya que 3 del conjunto de salida no está relacionado unicamente con un elemento del conjunto de llegada.

   (d) $g = \{(1,2),(2,3),(2,2),(3,3)\}$ **no** es función, ya que 2 del conjunto de salida no está relacionado unicamente con un elemento del conjunto de llegada.

3. Dados los conjuntos $A = \{r, s, t\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $C = \{v, x, y\}$. Sean las funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ definidas por:

$$f = \{(r, a), (s, b), (t, c)\} \qquad y \qquad g = \{(a, x), (b, y), (c, v)\}$$

Determine:

(a) $g \circ f$
(b) $Im(f)$
(c) $Im(g)$
(d) $Im(g \circ f)$

Solución:

(a) $g \circ f$ para las funciones dadas se tiene que:

$$(g \circ f)(r) = g(f(r)) = g(a) = x$$
$$(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(b) = y$$
$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(c) = v$$

Por lo tanto $g \circ f = \{(r, x), (s, y), (t, v)\}$

(b) $Im(f)$, son los elementos del codominio f que estén relacionados con un elemento del dominio, por lo tanto

$$Im(f) = \{a, b, c\}$$

(c) $Im(g)$, son los elementos del codominio g que estén relacionados con un elemento del dominio, por lo tanto

$$Im(g) = \{x, y, v\}$$

(d) $Im(g \circ f)$, son los elementos del codominio $g \circ f$ que estén relacionados con un elemento del dominio de $g \circ f$, por lo tanto

$$Im(g \circ f) = \{x, y, v\}$$

4. Considere las funciones

$$f(x) = x + 1 \qquad y \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Determine el valor numérico de las siguientes expresiones

(a) $(g \circ f)(3)$
(b) $(f \circ g)(121)$

Solución:

(a) $(g \circ f)(3)$, primero determinamos $f(3)$, para luego evaluarlo en g, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(g \circ f)(3) &= g(f(3)) \\ &= g(3+1) \\ &= g(4) \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

(b) $(f \circ g)(121)$, primero determinamos $g(121)$, para luego evaluarlo en f, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(f \circ g)(121) &= f(g(121)) \\ &= f(\sqrt{121}) \\ &= f(11) \\ &= 11 + 1 \\ &= 12\end{aligned}$$

5. Considere las siguientes funciones

$$f(x) = 2x^2 + 3x \qquad g(x) = 9x + 5 \qquad y \qquad h(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$$

Determine las siguientes composiciones:

(a) $(f \circ g)(3)$
(b) $(g \circ f)(-2)$
(c) $(g \circ h)(1)$
(d) $(f \circ g)(x)$
(e) $(h \circ g)(x)$
(f) $(g \circ f)(x)$

Solución:

(a) $(f \circ g)(3)$, primero determinamos $g(3)$, para luego evaluarlo en f, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(f \circ g)(3) &= f(g(3)) \\ &= f(9 \cdot 3 + 5) \\ &= f(32) \\ &= 2 \cdot (32)^2 + 3 \cdot 32 \\ &= 2\,144\end{aligned}$$

(b) $(g \circ f)(-2)$, primero determinamos $f(-2)$, para luego evaluarlo en g, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) \\ &= g(2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot -2) \\ &= g(2) \\ &= 9 \cdot 2 + 5 \\ &= 23\end{aligned}$$

(c) $(g \circ h)(1)$, primero determinamos $h(1)$, para luego evaluarlo en g, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(g \circ h)(1) &= g(h(1)) \\ &= g(\sqrt{4 \cdot 1^2 + 5}) \\ &= g(3) \\ &= 9 \cdot 3 + 5 \\ &= 32\end{aligned}$$

(d) $(f \circ g)(x)$, se realiza de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(9x + 5) \\ &= 2(9x + 5)^2 + 3(9x + 5) \\ &= 2(81x^2 + 90x + 25) + 27x + 15 \\ &= 162x^2 + 180x + 50 + 27x + 15 \\ &= 162x^2 + 207x + 65\end{aligned}$$

(e) $(h \circ g)(x)$ se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(h \circ g)(x) &= h(g(x)) \\
&= h(9x+5) \\
&= \sqrt{4(9x+5)^2+5} \\
&= \sqrt{4(81x^2+90x+25)+5} \\
&= \sqrt{324x^2+360x+100+5} \\
&= \sqrt{324x^2+360x+105}
\end{aligned}$$

(f) $(g \circ f)(x)$ se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(2x^2+3x) \\
&= 9(2x^2+3x)+5 \\
&= 18x^2+27x+5
\end{aligned}$$

6. Sean las funciones f y g cuyos criterios corresponden a:

$$f(x) = x^2 - 2 \qquad y \qquad g(x) = 2x - 2$$

Determine:

(a) $(g \circ f)(2)$

(b) $(f \circ g)(x)$

Solución:

(a) $(g \circ f)(2)$, primero determinamos $f(2)$, para luego evaluarlo en g, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(g \circ f)(2) &= g(f(2)) \\ &= g(2^2 - 2) \\ &= g(2) \\ &= 2 \cdot 2 - 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

(b) $(f \circ g)(x)$, en este caso se debe realizar la composición de funciones como sigue:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (2x - 2)^2 - 2 \\ &= 4x^2 - 8x + 4 - 2 \\ &= 4x^2 - 8x + 2\end{aligned}$$

7. Sean f y g funciones continuas en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = -x^2 + 6x - 4 \qquad y \qquad g(x) = 1 - 3x$$

Determine:

(a) $(g \circ f)(-3)$

(b) $(f \circ g)(x)$

Solución:

(a) $(g \circ f)(-3)$, primero determinamos $f(-3)$, para luego evaluarlo en g, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(-3) &= g(f(-3)) \\
&= g(-(-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4) \\
&= g(-31) \\
&= 1 - 3 \cdot -31 \\
&= 94
\end{aligned}$$

(b) $(f \circ g)(x)$ para realizar la composición se realiza el siguiente proceso

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= -(1 - 3x)^2 + 6(1 - 3x) - 4 \\
&= -(1 - 6x + 9x^2) + 6 - 18x - 4 \\
&= -1 + 6x - 9x^2 + 6 - 18x - 4 \\
&= -9x^2 - 12x + 1
\end{aligned}$$

8. Considere las funciones f y g definidas en sus dominios máximos respectivamente, cuyos criterios están definidos por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \qquad y \qquad g(x) = x^2$$

Determine $(f \circ g)(x)$

Solución: para determinar $(f \circ g)(x)$ se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= \frac{\sqrt{x^2} - 1}{x^2 - 1} \\
&= \frac{x - 1}{x^2 - 1} \\
&= \frac{x - 1}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

9. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{3, 5, 7\}$, y f una función de A en B, cuyo gráfico corresponde a

$$G_f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$$

Determine:

(a) El gráfico de la función inversa de f

(b) El valor de la expresión $f(2)$

(c) El valor de la expresión $f^{-1}(5)$

(d) El valor de la expresión $f^{-1}(3)$

Solución:

(a) El gráfico de la función inversa de f, corresponde a la expresión

$$G_{f^{-1}} = \{(3, 1), (5, 2), (7, 3)\}$$

(b) El valor de la expresión $f(2)$, dado que $(2, 5) \in G_f$ entonces

$$f(2) = 5$$

(c) El valor de la expresión $f^{-1}(5)$, dado que $(5, 2) \in G_{f^{-1}}$ entonces

$$f^{-1}(5) = 2$$

(d) El valor de la expresión $f^{-1}(3)$, dado que $(3, 1) \in G_{f^{-1}}$ entonces

$$f^{-1}(3) = 1$$

10. Considere las siguientes funciones y asuma respectivamente el dominio de cada una de manera que sean biyectivas. Determine el criterio de la función inversa para cada una de ellas:

(a) $f(x) = x - 3$

(b) $f(x) = -2x + 6$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x+6}$

(d) $h(x) = \dfrac{x^2+3}{5}$

(e) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+5}{7}}$

(f) $h(x) = \sqrt{x+2} + 1$

(g) $g(x) = \dfrac{-x}{4} - 3$

(h) $h(x) = \dfrac{2x}{5} + 7$

(i) $f(x) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{x}{3}$

Solución:

(a) $f(x) = x - 3$, para determinar la función inversa se sigue el siguiente proceso

$$f(x) = x - 3$$
$$x - 3 = y$$
$$x = y + 3$$

Por lo que la función inversa corresponde a $f^{-1}(x) = x + 3$.

(b) $f(x) = -2x + 6$, para determinar la función inversa se sigue el siguiente proceso

$$f(x) = -2x + 6$$
$$-2x + 6 = y$$
$$-2x = y - 6$$
$$x = \frac{y-6}{-2}$$
$$x = \frac{-y+6}{2}$$

Por lo que la función inversa corresponde a $f^{-1}(x) = \dfrac{-x+6}{2}$.

(c) $f(x)=\sqrt[3]{x+6}$, para determinar la función inversa se sigue el siguiente proceso

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x+6} \\ \sqrt[3]{x+6} &= y \\ x+6 &= y^3 \\ x &= y^3-6 \end{aligned}$$

Por lo que la función inversa es $f^{-1}(x)=x^3-6$.

(d) $h(x)=\dfrac{x^2+3}{5}$, para determinar la función inversa se sigue el siguiente proceso

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^2+3}{5} \\ y &= \frac{x^2+3}{5} \\ 5y &= x^2+3 \\ 5y-3 &= x^2 \\ \sqrt{5y-3} &= x \end{aligned}$$

Por lo que la inversa corresponde a $h^{-1}(x)=\sqrt{5x-3}$

(e) $h(x)=\sqrt{\dfrac{x+5}{7}}$, para determinar la función inversa se sigue el siguiente proceso

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{\frac{x+5}{7}} \\ y &= \sqrt{\frac{x+5}{7}} \\ y^2 &= \frac{x+5}{7} \\ 7y^2 &= x+5 \\ 7y^2-5 &= x \end{aligned}$$

Por lo tanto, el criterio de la función inversa corresponde a $h^{-1}(x)=7x^2-5$

(f) $h(x) = \sqrt{x+2} + 1$, para determinar la función inversa se sigue el siguiente proceso

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \sqrt{x+2} + 1 \\
y &= \sqrt{x+2} + 1 \\
y - 1 &= \sqrt{x+2} \\
(y-1)^2 &= x + 2 \\
y^2 - 2y + 1 &= x + 2 \\
y^2 - 2y + 1 - 2 &= x \\
y^2 - 2y - 1 &= x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el criterio de la función inversa corresponde a $h^{-1}(x) = x^2 - 2x - 1$

(g) $g(x) = \dfrac{-x}{4} - 3$, para determinar la función inversa se sigue el siguiente proceso

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{-x}{4} - 3 \\
y &= \frac{-x}{4} - 3 \\
y + 3 &= \frac{-x}{4} \\
4(y+3) &= -x \\
4y + 12 &= -x \\
-4y - 12 &= x
\end{aligned}
$$

Por lo que la función inversa corresponde a $g^{-1}(x) = -4x - 12$.

(h) $h(x) = \frac{2x}{5} + 7$, para determinar la función inversa se sigue el siguiente proceso

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{2x}{5} + 7 \\
y &= \frac{2x}{5} + 7 \\
y - 7 &= \frac{2x}{5} \\
5(y - 7) &= 2x \\
5y - 35 &= 2x \\
\frac{5}{2}y - \frac{35}{2} &= x
\end{aligned}$$

Por lo que la función inversa corresponde a $h^{-1}(x) = \frac{5}{2}x - \frac{35}{2}$.

(i) $f(x) = \frac{2}{5} - \frac{x}{3}$, para determinar la función inversa se sigue el siguiente proceso

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{5} - \frac{x}{3} \\
y &= \frac{2}{5} - \frac{x}{3} \\
y - \frac{2}{5} &= \frac{-x}{3} \\
3\left(y - \frac{2}{5}\right) &= -x \\
3y - \frac{6}{5} &= -x \\
-3y + \frac{6}{5} &= x
\end{aligned}$$

Por lo que la función inversa corresponde a $f^{-1}(x) = -3x + \frac{6}{5}$.

11. Determine el dominio máximo de cada una de las siguientes funciones

(a) $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

(c) $f(x) = (x-2)^{-2}$

(d) $f(x) = \dfrac{3-2x}{x^2-6x+9}$

(e) $r(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2x}{x-3}$

(f) $h(x) = \sqrt{3-2x}$

(g) $m(x) = \dfrac{\sqrt{20-4x}}{x+8}$

(h) $f(x) = \dfrac{7x-2}{\sqrt{2x-2}}$

(i) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{-7x-7}}$

Solución:

(a) $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$, considere que la función dada no tiene restriciones, por lo que el dominio de f corresponde a

$$D_{max} = \mathbb{R}$$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$, por ser una fracción lo que se debe evitar es que el denominador sea cero, por lo que para determinar el dominio máximo de la esta función, basta con ver donde se anula el denominador de la expresión, es decir, se debe tomar el denominador y buscar donde no se hace cero el mismo, de la siguiente manera:

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Por lo tanto, el dominio máximo corresponde a

$$D_{max} = \mathbb{R} - \{1\}$$

(c) $f(x) = (x-2)^{-2}$, observe que

$$f(x) = (x-2)^{-2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Por ser una fracción lo que se debe evitar es que el denominador sea cero,por lo que , para determinar el dominio máximo de la esta función, basta con ver donde se anula el denominador de la expresión, es decir, se debe tomar el denominador y buscar donde no se hace cero el mismo, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &\neq 0 \\ x-2 &\neq 0 \\ x &\neq 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio máximo corresponde a

$$D_{max} = \mathbb{R} - \{2\}$$

(d) $f(x) = \dfrac{3-2x}{x^2-6x+9}$, por ser una fracción lo que se debe evitar es que el denominador sea cero, por lo que para determinar el dominio máximo de la esta función, basta con tomar el denominador y buscar donde no se hace cero, de la siguiente manera:

$$x^2 - 6x + 9 \neq 0$$

$$(x-3) \quad (x-3) \neq 0$$

$$x \neq 3$$

Por lo que el dominio máximo corresponde a

$$D_{max} = \mathbb{R} - \{3\}$$

.

(e) $r(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2x}{x-3}$, para determinar el dominio máximo de esta función se debe considerar que se trata de facciones, por lo que se debe evitar es que el denominador común sea cero, para esto basta con tomar los denominadores y buscar donde no se hacen cero, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cc} x+2 \neq 0 & x-3 \neq 0 \\ x \neq -2 & x \neq 3 \end{array}$$

Por lo que el dominio máximo corresponde a

$$D_{max} = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$$

(f) $h(x) = \sqrt{3-2x}$, para determinar el dominio máximo de esta función se debe considerar que se trata de una raíz de índice par, por lo que el subradical debe ser positivo o cero, entonces se sigue el siguiente proceso

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -3 \\ x &\leq \frac{-3}{-2} \\ x &\leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Por lo que el dominio máximo de h corresponde a

$$D_{max} = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$$

(g) $m(x) = \dfrac{\sqrt{20-4x}}{x+8}$, observe primero que m es una función racional, donde en el numerador aparece una raíz cuadrada y en el denominador un polinomio de grado 1, por lo que para determinar el dominio máximo de m se debe seguir el siguiente proceso:
En primer lugar, para que $\dfrac{1}{x+8}$ esté definido se debe tener que

$$\begin{aligned} x+8 &\neq 0 \\ x &\neq -8 \end{aligned}$$

Por lo que el dominio sería $\mathbb{R} - \{-8\}$.

Luego para que la raíz cuadrada esté definida en $\mathbb{R}$ se debe tener:

$$\begin{aligned} 20 - 4x &\geq 0 \\ 20 &\geq 4x \\ 5 &\geq x \end{aligned}$$

Por lo que el dominio sería $]-\infty, 5]$

Por lo tanto, el dominio máximo de la función $m(x)$ corresponde a cualquier número real en el intervalo $]-\infty, 5]$ menos el 8

$$D_{max} =]-\infty, 5] - \{-8\}$$

(h) $f(x) = \dfrac{7x-2}{\sqrt{2x-2}}$, primero es importante recordar que para hallar el dominio máximo de una funcion fraccionaria el denominador debe ser distinto de cero, además de el subradical de un radical de indice par debe ser positivo, por lo que para que la función f esté definida se necesita que

$$\begin{aligned} 2x-2 &> 0 \\ 2x &> 2 \\ x &> 1 \end{aligned}$$

Es decir, el dominio máximo de f corresponde a

$$D_{max} :]1, +\infty[$$

(i) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{-7x-7}}$,recuerde que para hallar el dominio máximo de una función fraccionaria el denominador debe ser distinto de cero, además de el subradical de un radical de indice par debe ser positivo, por lo que para que la función f esté definida se necesita que

$$\begin{aligned} -7x-7 &> 0 \\ -7x &> 7 \\ x &< \frac{7}{-7} \\ x &< -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio máximo de f es

$$D_{max} :] -\infty, -1[$$

12. Considere las siguientes permutaciones:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine:

(a) La composición $p_1 \circ p_2$

(b) La composición $p_2 \circ p_1$

(c) p_1^{-1}

(d) $(p_1 \circ p_2)^{-1}$

Solución:

(a) La composición $p_1 \circ p_2$, para realizar la composición solicitada, primero se debe observar a p_2 y se realiza el siguiente proceso: en p_2 1 va a 3 y en p_1 3 va a 3, entonces en $p_1 \circ p_2$ 1 va a 3, además en p_2 2 va a 4 y en p_1 4 va a 2, entonces en $p_1 \circ p_2$ 2 va a 2, siguiendo el mismo proceso se tiene:

$$p_1 \circ p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) La composición $p_2 \circ p_1$, para realizar la composición solicitada, primero se debe observar a p_1 y se realiza el siguiente proceso: en p_1 1 va a 5 y en p_2 5 va a 2, entonces en $p_2 \circ p_1$ 1 va a 2, además en p_1 2 va a 4 y en p_2 4 va a 1, entonces en $p_2 \circ p_1$ 2 va a 1, siguiendo el mismo proceso se tiene:

$$p_2 \circ p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) p_1^{-1}, buscando a 1 en la segunda linea de p_1 vemos que está relacionado con 5 entonces en p_1^{-1} 1 se relacionada con 5, luego buscando a 2 en la segunda linea de p_1 vemos que está relacionado con 4 entonces en p_1^{-1} 2 se relaciona con 4, siguiendo el mismo proceder se obtiene:

$$p_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $(p_1 \circ p_2)^{-1}$, considerando el ejercicio a y el siguiendo el mismo proceso del ejercicio c para determinar la inversa se obtiene que:

$$(p_1 \circ p_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

13. Considere las siguientes permutaciones, sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Determine:

(a) La composición $\alpha \circ \beta$

(b) La composición $\beta \circ \alpha$

(c) β^{-1}

(d) α^{-1}

(e) α^2

(f) $(\alpha \circ \beta)^{-1}$

(g) $(\beta \circ \alpha)^{-1}$

Solución:

(a) La composición $\alpha \circ \beta$, para realizar la composición solicitada, primero se debe observar a β y se realiza el siguiente proceso: en β 1 va a 4 y en α 4 va a 2, entonces en $\alpha \circ \beta$ 1 va a 2, además en β 2 va a 3 y en α 3 va a 1, entonces en $\alpha \circ \beta$ 2 va a 1, siguiendo el mismo proceso se tiene:

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(b) La composición $\beta \circ \alpha$, para realizar la composición solicitada, primero se debe observar a α y se realiza el siguiente proceso: en α 1 va a 5 y en β 5 va a 2, entonces en $\beta \circ \alpha$ 1 va a 2, además en α 2 va a 3 y en β 3 va a 5, entonces en $\beta \circ \alpha$ 2 va a 5, siguiendo el mismo proceso se tiene:

$$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(c) β^{-1}, buscando a 1 en la segunda linea de β vemos que está relacionado con 4 entonces en β^{-1} 1 se relacionada con 4, luego buscando a 2 en la segunda linea de β vemos que está relacionado con 5 entonces en β^{-1} 2 se relaciona con 5, siguiendo el mismo proceder se obtiene:

$$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(d) α^{-1}, buscando a 1 en la segunda linea de α vemos que está relacionado con 3 entonces en α^{-1} 1 se relacionada con 3, luego buscando a 2 en la segunda linea de α vemos que está relacionado con 4 entonces en α^{-1} 2 se relaciona con 4, siguiendo el mismo proceder se obtiene:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(e) α^2, primero se debe notar que $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$ por lo que siguiendo el mismo proceso de los ejercicios anteriores se tiene que

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(f) $(\alpha \circ \beta)^{-1}$, considerando el ejercicio a y siguiendo el mismo proceso de los ejercicios anteriores para inversa se obtiene

$$(\alpha \circ \beta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(g) $(\beta \circ \alpha)^{-1}$, considerando el ejercicio b y siguiendo el mismo proceso de los ejercicios anteriores para inversa se obtiene

$$(\beta \circ \alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Funciones uno a uno, sobre e invertibles

1. Determine si cada una de los siguientes enunciados corresponden a funciones uno a uno (inyectivas)

   (a) A cada persona de la UNED se le asigna su edad.

   (b) A cada persona de Costa Rica se le asigna su número de identificación.

   (c) A cada cantón de Costa Rica se le asigna su distrito central.

   (d) A cada niño costarricense menor de 10 años se le asigna su mamá.

   Solución: recuerde que una función es inyectiva (uno a uno) si cada elemento del conjunto de salida está asociado a un elemento diferente en el conjunto de llegada

   (a) A cada persona de la UNED se le asigna su edad, **no** es inyectiva, pueden haber muchas personas con la misma edad.

   (b) A cada persona de Costa Rica se le asigna su número de identificación, **si** es inyectiva, el número de identificación es único para cada costarricense.

   (c) A cada cantón de Costa Rica se le asigna su distrito central, **si** es inyectiva, el distrito central para cada cantón es único.

   (d) A cada niño costarricense menor de 10 años se le asigna su mamá, **no** es inyectiva, pueden haber varios niños hijos de una misma mamá.

2. Considere las siguientes funciones definidas de A a B con $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 6, 8, 10\}$

   (a) $h(x) = 10$

   (b) $f(x) = 2x$

   Determine para cada una, si son: uno a uno (inyectiva), sobreyectiva y/o biyectiva.

   Solución:

   (a) $h(x) = 10$, esta función **no** es inyectiva (la imagen de todos los elementos del conjunto de salida es la misma, 10), **no** es sobreyectiva (hay 3 elementos en el conjunto de llegada, 4,6,8, que no estás relacionados con ningún elemento del conjunto de salida) y por lo tanto no es biyectiva (para ser biyectiva debe ser inyectiva y sobreyectiva). Observe la demostración formal:

   f **no** es inyectiva, para demostrar que f es inyectiva se debe demostrar que si dos elementos $a\,y\,b$ del conjunto de salida estás asociados al mismo elemento del conjunto de llegada, es porque $a = b$, considere el siguiente contra ejemplo

   $$f(3) = 10 = f(4) \text{ pero } 3 \neq 4$$

   f **no** es sobreyectiva, para demostrar que f es sobreyectiva es necesario demostrar que para todo $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$, considere el siguiente contra ejemplo

   $$\text{Para } 4 \in B \text{ no existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = 4$$

   (b) $f(x) = 2x$, esta función **si** es inyectiva (la imagen de todos los elementos del conjunto de salida es un elemento diferente en el conjunto de llegada), **si** es sobreyectiva (todo elemento del conjunto de llegada está asociado a un elemento del conjunto de salida) y por lo tanto **si** es biyectiva (dado que es inyectiva y sobreyectiva). Observe la demostración formal:

   f **si** es inyectiva, para demostrar que f es inyectiva se debe demostrar que si dos elementos $a\,y\,b$ del conjunto de salida están asociados al mismo elemento del conjunto de llegada, es porque $a = b$

   $$\begin{aligned} \text{Si } f(a) = f(b) &\Rightarrow 2a = 2b \\ &\Rightarrow \cancel{2}a = \cancel{2}b \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

   f **si** es sobreyectiva, para demostrar que f es sobreyectiva es necesario demostrar que para todo $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$

   $$\begin{aligned} b = f(a) &\Leftrightarrow b = 2a \\ &\Leftrightarrow a = \frac{b}{2} \end{aligned}$$