

## Participantes

Ana Carolina Ferreira de Figueiredo - 121044191

Andrew da Silva Faria - 121081559

Daniel Arruda Ponte - 121048284

Paulo Michel Fajardo Yamagishi -121072893

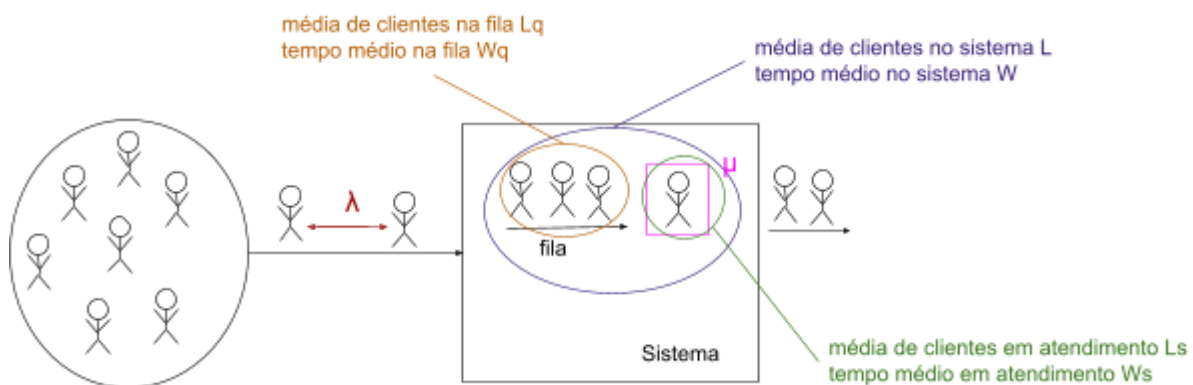
## Introdução

Sistemas de fila são modelos matemáticos usados para representar a dinâmica de filas ou linhas de espera em sistemas onde clientes, usuários ou objetos aguardam para serem atendidos por um ou mais servidores.

Sistemas de Fila podem ser interpretados utilizando a teoria das filas.

### Fila M/M/1

É um tipo de sistema de filas em que a letra "M" refere-se à natureza exponencial das chegadas e tempos de serviço, enquanto o "1" indica que existe apenas um servidor. Neste caso, quando um cliente chega ao sistema, ele entra na fila e aguarda para ser atendido pelo servidor. O servidor atende um cliente por vez, e quando o serviço é concluído, o cliente sai do sistema. O tempo entre chegadas sucessivas de clientes é distribuído exponencialmente com parâmetro  $\lambda$  (taxa de chegada) e o tempo de serviço é distribuído exponencialmente com parâmetro  $\mu$  (taxa de serviço), indicando quanto tempo, em média, o servidor leva para atender um cliente.



Pela Teoria das Filas, podemos realizar uma análise matemática dos cenários apresentados para garantir a veracidade dos simuladores projetados. Nos cenários, temos que a intensidade de tráfego  $\rho = \lambda / \mu$  é menor do que 1, o que garante que o sistema encontra-se no estado estacionário e consequentemente permitindo que calculemos as métricas desejadas pelas seguintes equações:

Métrica de Avaliação de um M/M/1

$$L = \rho / (1 - \rho) = \lambda / \mu - \lambda$$

Fórmula de Little

$$L = \lambda W$$

### **Cenário 1**

Para o cenário 1, temos que  $\lambda=1$  e  $\mu=2$ . Com isso,  $L = \frac{1}{2} / (1 - \frac{1}{2}) = 1$  e  $W = L / 1 = 1$ . Dessa forma, podemos perceber como os simuladores 1 e 2 se aproximam bastante do resultado esperado, quando aplicados para o cenário 1. O simulador 1 obteve tempo médio no sistema de 0.9906651668436333 e média de clientes no sistema de 0.9942147032952927, enquanto o simulador 2 obteve tempo médio no sistema de 0.9978590389262934 e média de clientes no sistema de 0.9991081538431583. Além disso, podemos observar que o simulador 2 obteve resultados com uma precisão maior que o simulador 1. Isso se deve ao fato de que a lista de eventos no simulador 2 permite que o modelo registre e gerencie precisamente cada evento do sistema, incluindo chegadas de clientes, partidas de clientes, entre outros eventos. Essa abordagem permite que o simulador 2 controle o processo de simulação de forma mais precisa e realista. Ademais, o simulador 2 permite que sejam considerados os eventos futuros que afetam a fila, permitindo a estimativa de tempo de espera médio de clientes e a análise de possíveis gargalos no sistema.

### **Cenário 2**

Para o cenário 2, temos que  $\lambda=2$  e  $\mu=4$ . Com isso,  $L = \frac{2}{4} / (1 - \frac{2}{4}) = 1$  e  $W = L / 2 = 1/2$ . Dessa forma, podemos perceber como os simuladores 1 e 2 se aproximam bastante do resultado esperado, quando aplicados para o cenário 2. O simulador 1 obteve tempo médio no sistema de 0.5009020969885749 e média de clientes no sistema de 1.00246815283677, enquanto o simulador 2 obteve tempo médio no sistema de 0.49721007357732333 e média de clientes no sistema de 0.9977141025760924. Além disso, novamente podemos observar que o simulador 2 obteve resultados com uma precisão maior que o simulador 1.

Ao dobrarmos as taxas de chegada e serviço, concluímos que a média de clientes no sistema permaneceu a mesma enquanto o tempo médio no sistema diminuiu pela metade. Quando as taxas são dobradas, o sistema tem o dobro da capacidade de processamento em relação ao número de chegadas de clientes, o que faz com que os clientes sejam atendidos mais rapidamente, diminuindo o tempo médio que cada cliente passa dentro do sistema. Entretanto, como a taxa de clientes que entram aumentou na mesma proporção que a taxa de saída do sistema (taxa de serviço), ou seja, o equilíbrio entre o número de pessoas que entrou e saiu do sistema não foi alterado, a média de clientes dentro do sistema não foi alterada.

### **Cenário 3**

Para o cenário 3, temos que  $\lambda=1$  e  $\mu=4$ . Com isso,  $L = \frac{1}{4} / (1 - \frac{1}{4}) = 1/3$  e  $W = L / 1 = 1/3$ . Dessa forma, podemos perceber como os simuladores 1 e 2 se aproximam bastante do resultado esperado, quando aplicados para o cenário 3. O simulador 1

obteve tempo médio no sistema de 0.331170503558821 e média de clientes no sistema de 0.3311799220974585, enquanto o simulador 2 obteve tempo médio no sistema de 0.3322151572706508 e média de clientes no sistema de 0.3332910854273491. Além disso, novamente podemos observar que o simulador 2 obteve resultados com uma precisão maior que o simulador 1.

Ao mantermos a mesma taxa de chegada inicial do cenário 1 e dobrarmos a taxa de serviço, obtemos uma diminuição de um terço dos valores de tempo médio no sistema e média de clientes no sistema. Como o tempo médio de um cliente no sistema depende do tempo médio de serviço (diretamente influenciado pela taxa de serviço), ao dobrarmos a taxa de serviço, o tempo de serviço diminui pela metade pois dobramos a capacidade de atendimento do sistema, e com isso, o tempo médio no sistema também diminui. Ademais, diminuindo o tempo de serviço do sistema, aumentamos proporcionalmente a taxa de saída do sistema, ou seja o número de clientes na fila diminui mais rapidamente, sem alterar a taxa de chegada, o que produz uma diminuição na quantidade média de clientes no sistema.

## **Fila M/G/1**

É um tipo de sistema de filas em que a letra "M" refere-se à natureza exponencial das chegadas, a letra "G" refere-se à natureza determinística do tempo de serviço, enquanto o "1" indica que existe apenas um servidor. Neste caso, quando um cliente chega ao sistema, ele entra na fila e aguarda para ser atendido pelo servidor. O servidor atende um cliente por vez, e quando o serviço é concluído, o cliente sai do sistema. O tempo entre chegadas sucessivas de clientes é distribuído exponencialmente com parâmetro  $\lambda$  (taxa de chegada) e o tempo de serviço é distribuído com parâmetro fixo  $\mu$  (taxa de serviço), indicando quanto tempo, em média, o servidor leva para atender um cliente.

Como vimos anteriormente, pela Teoria das Filas, podemos realizar uma análise matemática dos cenários apresentados para garantir a veracidade dos simuladores projetados, permitindo que calculemos as métricas desejadas pelas seguintes equações:

Métrica de Avaliação de um M/G/1

$$W_q = \rho / 2\mu(1-\rho)$$

Fórmula de Little

$$L = \lambda W$$

## **Cenário 4**

Para o cenário 4, temos que  $\lambda=1$  e  $\mu=2$ .  $W$  (tempo médio no sistema) pode ser escrito como a soma do tempo médio na fila com o tempo médio de serviço, ou seja

$W = W_q + W_s$ . Como o tempo médio de serviço é inversamente proporcional à taxa de serviço, quanto maior a taxa de serviço menor o tempo médio de serviço, temos que  $W_s = 1/\mu = 1/2$ . Logo, como  $W_q = 1/2 / 2 * 2 * (1 - 1/2) = 1/4$ ,  $W = 1/4 + 1/2 = 3/4$ . Portanto, sabemos que  $L = 1 * W = 1 * 3/4 = 3/4$ . Dessa forma, podemos perceber como o simulador 2 se aproxima bastante do resultado esperado, quando aplicados para o cenário 4 e como o simulador 1 se distancia consideravelmente do previsto. O simulador 1 obteve tempo médio no sistema de 1.8406934197281737 e média de clientes no sistema de 1.8408785259388314, enquanto o simulador 3 obteve tempo médio no sistema de 0.7495979420279449 e média de clientes no sistema de 0.7492238713467052.

Por fim, podemos observar como o simulador 1 não funciona para o cenário 4, porque ele não é capaz de trabalhar com uma taxa de serviço fixa, uma vez que ele assume que a taxa de serviço segue uma distribuição exponencial. Ou seja, o simulador 1 não é capaz de gerar resultados precisos para um simulador M/G/1.

### **Desafios e Soluções:**

No desenvolvimento do código encontramos algumas dificuldades para calcular as métricas de interesse. No início, tentamos calcular o tempo médio e a média de pessoas na fila, dentro das funções de simulação, no entanto, percebemos que essa não seria uma boa estratégia.

Ao calcularmos as métricas de interesse em funções separadas, fomos capazes de aumentar a legibilidade do código, tornando-o mais elegante, algo que facilitou muito quando tivemos alguns problemas teóricos. Um pouco mais sobre estes, tivemos algumas dúvidas em relação ao tempo que uma pessoa permanece no sistema, depois de algumas horas e ajuda dos colegas de disciplina: Luan Martins e Carlos Eduardo, fomos capazes de comparar alguns resultados e sanar a grande maioria das dúvidas.

Em suma, tivemos alguns problemas relacionados à estrutura do nosso código, que foram solucionados com algumas técnicas de arquitetura de software, e também algumas dúvidas de cunho teórico, que foram solucionadas através de algumas pesquisas e discussões com colegas de sala.

Link para a leitura do Colab:

<https://colab.research.google.com/drive/1KAzHTQE-LBSkJmpgZZpaIU85vGQBnQps?usp=sharing>