

Matemáticas: una visión al pasado para determinar el futuro

TFG: Métodos de Galerkin discontinuos para la resolución numérica de EDP

Daniel Acosta Soba

Tutor: J. Rafael Rodríguez Galván

Cádiz, 18 de enero de 2021



Modelización matemática mediante EDP

- Modelos del clima

- Modelos biológicos

Resolución matemática

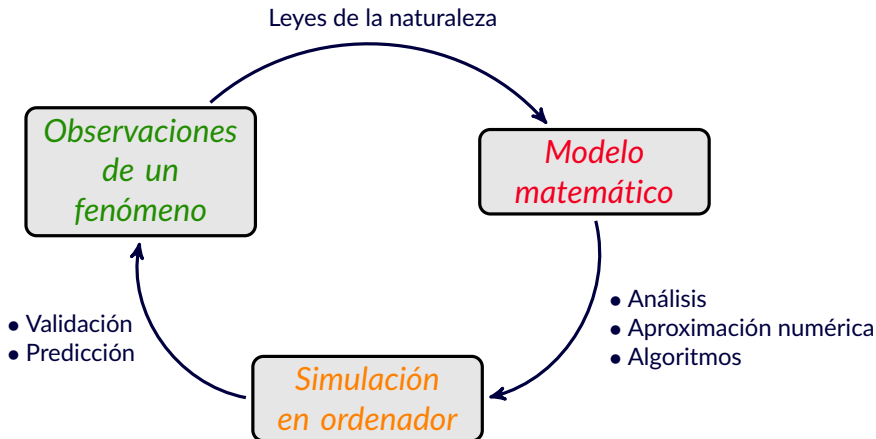
- Problema elíptico

- Problema hiperbólico

Sección 1

Modelización matemática mediante EDP

Modelización matemática mediante EDP



Modelos del clima

Modelos del clima

¿Cómo se comportan los fluidos que forman
«*atmósfera*» y «*océanos*»?

Modelo matemático (simplificado)
(ecuaciones de Navier-Stokes)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

- Presión atmosférica
- Velocidad del fluido
- Análisis del modelo:



¿Existe solución? ¿Con qué características? → Problema del milenio

Modelos del clima

¿Cómo se comportan los fluidos que forman
«*atmósfera*» y «*océanos*»?

Modelo matemático (simplificado)
(ecuaciones de Navier-Stokes)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

- Presión atmosférica
- Velocidad del fluido
- Análisis del modelo:



¿Existe solución? ¿Con qué características? → Problema del milenio

Modelos del clima

¿Cómo se comportan los fluidos que forman
«*atmósfera*» y «*océanos*»?

Modelo matemático (simplificado)
(ecuaciones de Navier-Stokes)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

■ Presión atmosférica

■ Velocidad del fluido

■ Análisis del modelo:

¿Existe solución? ¿Con qué características? →

Problema del milenio



Modelos del clima

¿Cómo se comportan los fluidos que forman
«*atmósfera*» y «*océanos*»?

Modelo matemático (simplificado)
(ecuaciones de Navier-Stokes)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

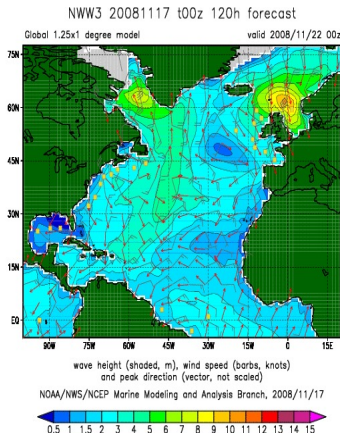
■ Presión atmosférica

■ Velocidad del fluido

■ Análisis del modelo:

¿Existe solución? ¿Con qué características? →

Problema del milenio



Modelos del clima

¿Cómo se comportan los fluidos que forman
«*atmósfera*» y «*océanos*»?

Modelo matemático (simplificado)
(ecuaciones de Navier-Stokes)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

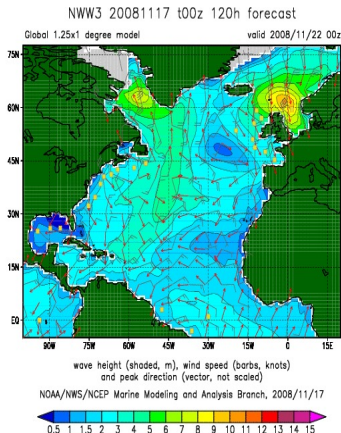
■ Presión atmosférica

■ Velocidad del fluido

■ Análisis del modelo:

¿Existe solución? ¿Con qué características? →

Problema del milenio



Modelo de tsunami en la costa de Cádiz

Modelos biológicos

Modelos de tumores

Modelo de tumores

Ecuación de Cahn-Hilliard (**tumor**) + Ecuación de difusión (**nutrientes**)

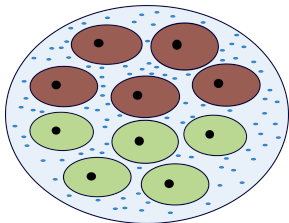


Figura: Interacción entre las cuatro especies.

Variables u y n con valores en $[0,1]$:

- u de tipo campo de fase (1 células tumorales y 0 células sanas).
- n porcentaje de nutrientes en el agua extracelular.

Modelo de tumores

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = \nabla \cdot (M_u \nabla (F'(u) - \varepsilon^2 \Delta u)) - \chi_0 \nabla \cdot (M_u \nabla n) \\ \quad + \delta P_0 u_+ (\mu_n - \mu_u) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t n = \frac{1}{\delta} \nabla \cdot (M_n \nabla n) - \chi_0 \nabla \cdot (M_n \nabla u) \\ \quad - \delta P_0 u_+ (\mu_n - \mu_u) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla n \cdot \mathbf{n} = \nabla \mu_u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, \quad n(0) = n_0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$

donde $u_0, n_0 \in L^2(\Omega)$ son las condiciones iniciales.

- $F(u) = \Gamma u^2(1 - u)^2$, $\Gamma > 0$ funcional de doble pozo Ginzburg-Landau.
- $\mu_u = F'(u) - \varepsilon^2 \Delta u + \partial_u \chi(u, n)$ potencial químico de u .
- $\mu_n = \frac{1}{\delta} n + \partial_n \chi(u, n)$ potencial químico de n .

■ Desplazamiento de células tumorales \leftarrow Términos de difusión cruzada.

■ Reacciones químicas células-nutrientes.

Modelo de tumores

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = \nabla \cdot (M_u \nabla (F'(u) - \varepsilon^2 \Delta u)) - \chi_0 \nabla \cdot (M_u \nabla n) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \quad + \delta P_0 u_+ (\mu_n - \mu_u) & \\ \partial_t n = \frac{1}{\delta} \nabla \cdot (M_n \nabla n) - \chi_0 \nabla \cdot (M_n \nabla u) & \\ \quad - \delta P_0 u_+ (\mu_n - \mu_u) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla n \cdot \mathbf{n} = \nabla \mu_u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, \quad n(0) = n_0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$

donde $u_0, n_0 \in L^2(\Omega)$ son las condiciones iniciales.

- $F(u) = \Gamma u^2(1 - u)^2$, $\Gamma > 0$ funcional de doble pozo Ginzburg-Landau.
- $\mu_u = F'(u) - \varepsilon^2 \Delta u + \partial_u \chi(u, n)$ potencial químico de u .
- $\mu_n = \frac{1}{\delta} n + \partial_n \chi(u, n)$ potencial químico de n .
- Desplazamiento de células tumorales ← **Términos de difusión cruzada.**
- Reacciones químicas células-nutrientes.

Modelo de tumores

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = \nabla \cdot (M_u \nabla (F'(u) - \varepsilon^2 \Delta u)) - \chi_0 \nabla \cdot (M_u \nabla n) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \quad + \delta P_0 u_+ (\mu_n - \mu_u) & \\ \partial_t n = \frac{1}{\delta} \nabla \cdot (M_n \nabla n) - \chi_0 \nabla \cdot (M_n \nabla u) & \\ \quad - \delta P_0 u_+ (\mu_n - \mu_u) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla n \cdot \mathbf{n} = \nabla \mu_u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, \quad n(0) = n_0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$

donde $u_0, n_0 \in L^2(\Omega)$ son las condiciones iniciales.

- $F(u) = \Gamma u^2(1 - u)^2$, $\Gamma > 0$ funcional de doble pozo Ginzburg-Landau.
- $\mu_u = F'(u) - \varepsilon^2 \Delta u + \partial_u \chi(u, n)$ potencial químico de u .
- $\mu_n = \frac{1}{\delta} n + \partial_n \chi(u, n)$ potencial químico de n .

■ Desplazamiento de células tumorales \leftarrow Términos de difusión cruzada.

■ Reacciones químicas células-nutrientes.

Crecimiento de un tumor con fuente de nutrientes

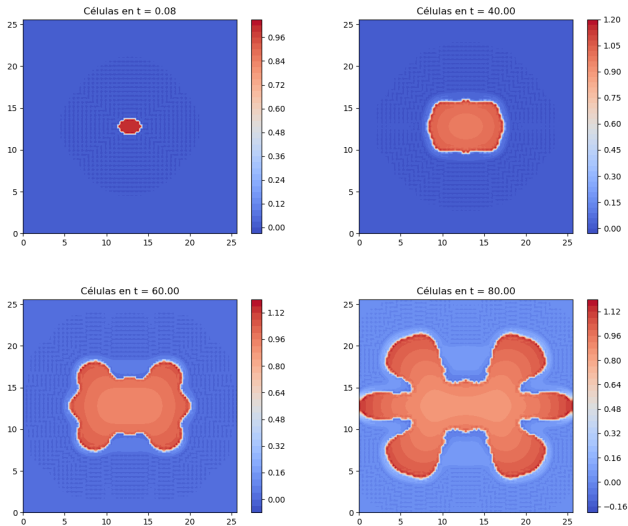


Figura: Representación de las células para la solución obtenida.

Agregación de tumores circulares

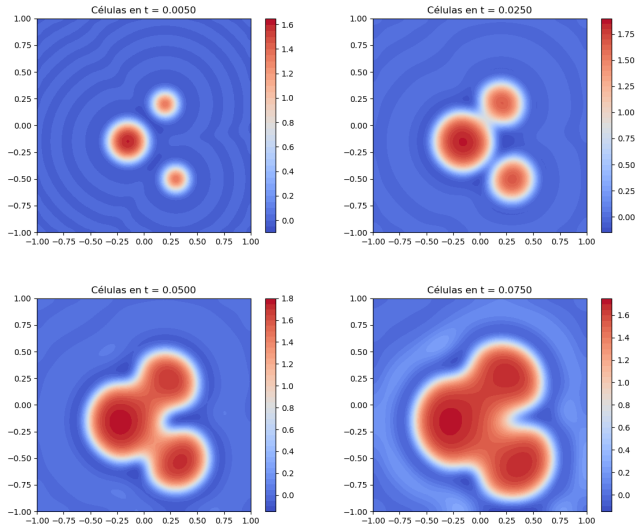


Figura: Representación de las células para la solución obtenida.

Modelos de migración celular

Modelo de migración celular

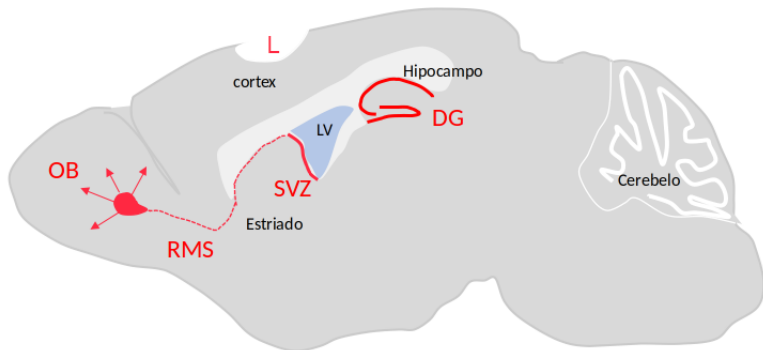


Figura: Esquema del movimiento de los neuroblastos por el cerebro de un roedor.

Sección 2

Resolución matemática

Problema elíptico

Consideramos el problema de Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$.

Formulación variacional continua

Espacio de soluciones: $H_0^1(\Omega)$.

$$\blacksquare a: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v;$$

$$\blacksquare L: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, L(v) := \int_{\Omega} f v.$$

Problema variacional:

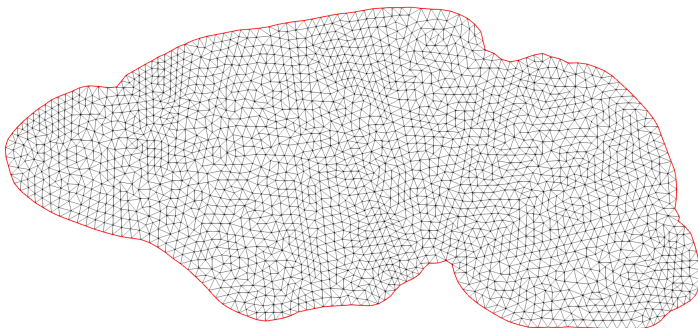
encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

El problema modelo y su formulación variacional son **equivalentes**.

Malla de $\bar{\Omega}$

Conjunto \mathcal{T}_h de d -símplices $(K_i)_{i \in \{1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}_h}\}}$ no degenerados que satisfacen:

- $K_i \subseteq \bar{\Omega}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}_h}\}$;
- $\text{int}(K_i) \cap \text{int}(K_j) = \emptyset$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}_h}\}$ con $i \neq j$;
- $\bigcup_{i=1}^{N_{\mathcal{T}_h}} K_i = \bar{\Omega}$.



Método de los Elementos Finitos:

$$V_h := \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_k(K_i) \text{ con } K_i \in \mathcal{T}_h, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}_h}\} \right\}$$

con base $\{\varphi_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, N_h\}}$.

Métodos de Galerkin discontinuos:

$$\mathcal{S}_h := \left\{ v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_k(K_i) \text{ con } K_i \in \mathcal{T}_h, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}_h}\} \right\}$$

con base $\{\phi_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, N_h\}}$.

Método de los Elementos Finitos

- Encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$.



- Encontrar $u_h \in V_h$ tal que $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ para todo $v_h \in V_h$.



- Resolver el sistema lineal $\mathbf{AU} = \mathbf{F}$ donde:

- $A = (A_{ij})_{i,j \in \{1,2,\dots,N_h\}}$ con $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$;
- $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_{N_h})^t$ con $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \varphi_i$;
- $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_{N_h})^t$ con $F_i = L(\varphi_i)$.

Método de Galerkin discontinuo

Primera idea:

- Encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$.

↓ ← ¡ERROR!

- Encontrar $u_h \in \mathcal{S}_h$ tal que $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ para todo $v_h \in \mathcal{S}_h$.

Idea correcta:

- Encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$.

↓

- Encontrar $u_h \in \mathcal{S}_h$ tal que $a_h^{\text{sip}, \sigma}(u_h, v_h) = L(v_h)$ para todo $v_h \in \mathcal{S}_h$.

Método de Galerkin discontinuo

Primera idea:

- Encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$.



- Encontrar $u_h \in \mathcal{S}_h$ tal que $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ para todo $v_h \in \mathcal{S}_h$.

Idea correcta:

- Encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$.



- Encontrar $u_h \in \mathcal{S}_h$ tal que $a_h^{\text{sip}, \sigma}(u_h, v_h) = L(v_h)$ para todo $v_h \in \mathcal{S}_h$.

Forma bilinear SIP

■ $a_h^{\text{sip}} : \mathcal{S}_{*h} \times \mathcal{S}_h \rightarrow \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} a_h^{\text{sip}, \sigma}(u, v_h) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h u \nabla_h v - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla_h u \cdot \mathbf{n}_e\}\} [v_h] \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla_h v \cdot \mathbf{n}_e\}\} [u] \\ &\quad + \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \frac{1}{h_e} [u] [v_h]; \end{aligned}$$

■ Fórmula de integración por partes

■ Simetría

■ Coercitividad

■ $L_h : \mathcal{S}_h \rightarrow \mathbb{R}, L_h(v_h) := \int_{\Omega} f v_h.$

Forma bilinear SIP

■ $a_h^{\text{sip}} : \mathcal{S}_{*h} \times \mathcal{S}_h \rightarrow \mathbb{R},$

$$a_h^{\text{sip}, \sigma}(u, v_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h u \nabla_h v - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla_h u \cdot \mathbf{n}_e\}\} \llbracket v_h \rrbracket \\ - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla_h v \cdot \mathbf{n}_e\}\} \llbracket u \rrbracket \\ + \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \frac{1}{h_e} \llbracket u \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket;$$

■ Fórmula de integración por partes

■ Simetría

■ Coercitividad

■ $L_h : \mathcal{S}_h \rightarrow \mathbb{R}, L_h(v_h) := \int_{\Omega} f v_h.$

Forma bilinear SIP

■ $a_h^{\text{sip}} : \mathcal{S}_{*h} \times \mathcal{S}_h \rightarrow \mathbb{R},$

$$a_h^{\text{sip}, \sigma}(u, v_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h u \nabla_h v - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla_h u \cdot \mathbf{n}_e\}\} [v_h]$$

$$- \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla_h v \cdot \mathbf{n}_e\}\} [u]$$

$$+ \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \frac{1}{h_e} [u] [v_h];$$

■ Fórmula de integración por partes

■ Simetría

■ Coercitividad

■ $L_h : \mathcal{S}_h \rightarrow \mathbb{R}, L_h(v_h) := \int_{\Omega} f v_h.$

Forma bilinear SIP

■ $a_h^{\text{sip}} : \mathcal{S}_{*h} \times \mathcal{S}_h \rightarrow \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} a_h^{\text{sip}, \sigma}(u, v_h) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h u \nabla_h v - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla_h u \cdot \mathbf{n}_e\}\} [v_h] \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla_h v \cdot \mathbf{n}_e\}\} [u] \\ &\quad + \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \frac{1}{h_e} [u] [v_h]; \end{aligned}$$

■ Fórmula de integración por partes

■ Simetría

■ Coercitividad

■ $L_h : \mathcal{S}_h \rightarrow \mathbb{R}, L_h(v_h) := \int_{\Omega} f v_h.$

Método de Penalización Interior Simétrica

- Encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$.



- Encontrar $u_h \in \mathcal{S}_h$ tal que $a_h^{\text{sip}, \sigma}(u_h, v_h) = L_h(v_h)$ para todo $v_h \in \mathcal{S}_h$.



- Resolver el sistema lineal $A^{\text{sip}} \mathbf{U}^{\text{sip}} = \mathbf{F}^{\text{sip}}$ donde:

- $A^{\text{sip}} = \left(A_{ij}^{\text{sip}} \right)_{i,j \in \{1,2,\dots,N_h^{\text{sip}}\}}$ con $A_{ij}^{\text{sip}} = a_h^{\text{sip}, \sigma}(\phi_j, \phi_i)$;

- $\mathbf{U}^{\text{sip}} = \left(U_1^{\text{sip}}, U_2^{\text{sip}}, \dots, U_{N_h^{\text{sip}}}^{\text{sip}} \right)^t$ con $u_h = \sum_{i=1}^{N_h^{\text{sip}}} U_i^{\text{sip}} \phi_i$;

- $\mathbf{F}^{\text{sip}} = \left(F_1^{\text{sip}}, F_2^{\text{sip}}, \dots, F_{N_h^{\text{sip}}}^{\text{sip}} \right)^t$ con $F_i^{\text{sip}} = L_h(\phi_i)$.

Soluciones numéricas

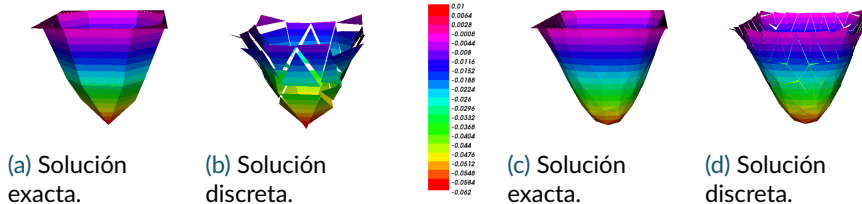


Figura: A la izquierda $h \approx \frac{1}{4}$. A la derecha $h \approx \frac{1}{8}$.

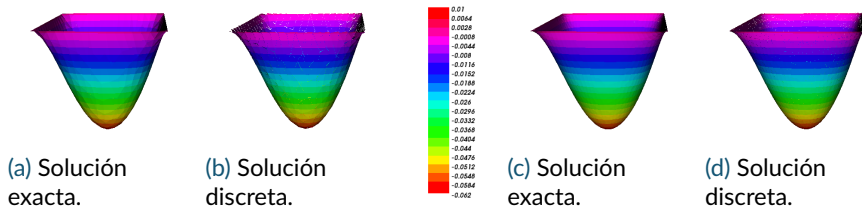


Figura: A la izquierda $h \approx \frac{1}{16}$. A la derecha $h \approx \frac{1}{32}$.

Problema hiperbólico

Problema modelo

Consideramos el problema de convección-reacción:

$$\begin{cases} \beta \cdot \nabla u + \mu u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega^-, \end{cases}$$

donde

- $\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega : \beta(x)\mathbf{n}(x) < 0\}$,
- $\mu \in L^\infty(\Omega)$,
- $\beta \in [\text{Lip}(\Omega)]^d$,
- $f \in L^2(\Omega)$.

Asumimos que existe $\mu_0 > 0$ tal que $\mu - \frac{1}{2}\nabla \cdot \beta \geq \mu_0$ en Ω .

Formulación variacional continua

Espacio de soluciones: V (espacio de los grafos).

■ $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R},$

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v + \int_{\Omega} \mu uv + \int_{\partial\Omega} (\beta \mathbf{n})^- uv;$$

■ $L: V \rightarrow \mathbb{R},$

$$L(v) := \int_{\Omega} f v.$$

Problema variacional:

encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$.

- El problema modelo y su formulación variacional son **equivalentes** en V .
- Existe solución y es única.

Métodos de flujos

- Encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$.



- Encontrar $u_h \in \mathcal{S}_h$ tal que $a_h^{\text{DG}}(u_h, v_h) = L_h(v_h)$ para todo $v_h \in \mathcal{S}_h$.



- Resolver el sistema lineal $A^{\text{DG}} \mathbf{U}^{\text{DG}} = \mathbf{F}^{\text{DG}}$ donde:

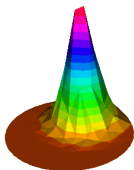
- $A^{\text{DG}} = \left(A_{ij}^{\text{DG}} \right)_{i,j \in \{1,2,\dots,N_h^{\text{upw}}\}}$ con $A_{ij}^{\text{DG}} = a_h^{\text{DG}}(\phi_j, \phi_i)$;

- $\mathbf{U}^{\text{DG}} = \left(U_1^{\text{DG}}, U_2^{\text{DG}}, \dots, U_{N_h^{\text{DG}}}^{\text{DG}} \right)^t$ con $u_h = \sum_{i=1}^{N_h^{\text{DG}}} U_i^{\text{DG}} \phi_i$;

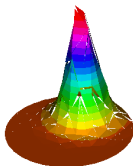
- $\mathbf{F}^{\text{DG}} = \left(F_1^{\text{DG}}, F_2^{\text{DG}}, \dots, F_{N_h^{\text{DG}}}^{\text{DG}} \right)^t$ con $F_i^{\text{DG}} = L_h(\phi_i)$.

Donde $a_h^{\text{DG}}(u_h, v_h) = a_h^{\text{cf}}(u_h, v_h)$ (flujos centrados) o $a_h^{\text{upw}}(u_h, v_h)$ (flujos aguas arriba).

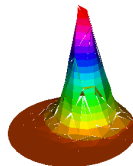
Soluciones numéricas



(a) Solución exacta.



(b) Flujos Centrados.



(c) Aguas Arriba.

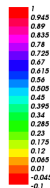
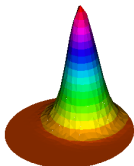
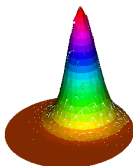


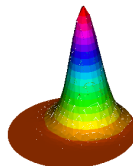
Figura: Gráficas obtenidas con $h \approx \frac{\pi}{16}$.



(a) Solución exacta.



(b) Flujos Centrados.



(c) Aguas Arriba.

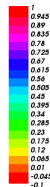


Figura: Gráficas obtenidas con $h \approx \frac{\pi}{32}$.

¡Gracias por su atención!

Imágenes sobre el clima utilizadas:

- 1 Madrid 264 weather girl. David Holt, licencia CC-by-sa.
- 2 Isobaras. MediaCommons, User:Asierog, licencia CC-by-sa.
- 3 NOAAWavewatch III 120-hour wind and wave forecast for the North Atlantic. Public domain.