Estadística

Diseño completamente al azar con dos factores

Daniel Martínez Bello

Universidad de Santander
Maestria en Biotecnología

Diciembre de 2025

Diseño de dos factores

Diseño factorial

- Queremos comparar entre tratamientos que consisten en varios niveles de dos factores predictores, y la respuesta es continua.
- Estamos interesados en conocer si hay un efecto de los dos factores por aparte o si hay un efecto de interacción de los dos factores.
- Utilizamos el ANALISIS DE VARIANZA, que corresponde a una descomposición de todas las fuentes de variación, el efecto del factor A, el efecto del factor B y el efecto de la interacción entre el factor A y el factor B .

EJEMPLO DISEÑO FACTORIAL CON DOS FACTORES

An experiment was conducted to determine whether either firing temperature or furnace position affects the baked density of a carbon anode. Montgomery, ejercicio 5.13

Diseño con dos factores

EJEMPLO DISEÑO FACTORIAL CON DOS FACTORES

	Factor B		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Factor A			
Nivel 1	a a a	f f f	k k k
	a a a	f f f	k k k
Nivel 2	b b b	g g g	l l l
	b b b	g g g	l l l

Diseño factorial con dos factores

	Temperatura		
	800	825	850
Posicion			
Nivel 1	a a a	f f f	k k k
	a a a	f f f	k k k
Nivel 2	b b b	g g g	l l l
	b b b	g g g	l l l

Cada letra representa un tratamiento, o sea una combinación de niveles del factor A y el factor B. Total de réplicas en cada tratamiento es de 6, total de tratamientos es 18, total de unidades experimentales 90.

Ejemplo diseño factorial con dos factores

Los experimentos factoriales se utilizan para investigar no solo las diferencias entre niveles de un factor (efectos principales) sino también como los niveles de un factor afectan la respuesta a traves de los niveles de otro factor (interacciones).
Para el ejemplo: como la temperatura del horno, o la posición, o la combinación de temperatura con posición afecta afecta la densidad del ánodo de carbon.

Variable de respuesta

Densidad del ánodo de carbon.

Pregunta científica

Existe diferencia en el promedio de densidad del ánodo de carbon entre niveles de temperatura del horno

Existe diferencia en el promedio de densidad del ánodo de carbon entre niveles de posición .

Existe diferencia en el promedio de densidad del ánodo de carbon entre niveles de las combinaciones de temperatura y posición

Diseño con dos factores

Diseño factorial con dos factores

	Temperatura		
	800	825	850
Posición			
Nivel 1	y_{111}	y_{121}	y_{131}
	y_{112}	y_{122}	y_{132}
	y_{113}	y_{123}	y_{133}
Nivel 2	y_{211}	y_{221}	y_{231}
	y_{212}	y_{222}	y_{232}
	y_{213}	y_{223}	y_{233}

Ejemplo diseño factorial con dos factores

	Temperature		
	800	825	850
Position			
1	$\bar{y}_{11.}$	$\bar{y}_{12.}$	$\bar{y}_{13.}$
2	$\bar{y}_{21.}$	$\bar{y}_{22.}$	$\bar{y}_{23.}$

Ejemplo diseño factorial con dos factores

	Temperature			
	800	825	850	
Position				
1	$\bar{y}_{11.}$	$\bar{y}_{12.}$	$\bar{y}_{13.}$	$\bar{y}_{1..}$
2	$\bar{y}_{21.}$	$\bar{y}_{22.}$	$\bar{y}_{23.}$	$\bar{y}_{2..}$
	$\bar{y}_{.1.}$	$\bar{y}_{.2.}$	$\bar{y}_{.3.}$	$\bar{y}_{...}$

El modelo estadístico

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}, \epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$$

- Donde μ es una constante.
- El efecto principal α_i es para el factor A al nivel i.
- El efecto principal β_j es para el factor B al nivel j.
- El efecto de la interacción $(\alpha\beta)_{ij}$ para el factor A al nivel i y el factor B al nivel j.
- ϵ corresponde a los residuales distribuidos Normal con media 0 y varianza σ^2
- $i = 1, \cdots, a$; $j = 1, \cdots, b$; $k = 1, \cdots, n$

Diseño de dos factores

Análisis de varianza:sumas de cuadrados para cada fuente de variación.

- La suma de cuadrados del Factor A.

$$SC_{FactorA} = nb\sum(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$$

- La suma de cuadrados del Factor B.

$$SC_{FactorB} = na\sum(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$$

- La suma de cuadrados de la interacción del factor A y B

$$SC_{AB} = n\sum\sum(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$$

- La suma de cuadrados del error

$$SC_{Error} = \sum_{i}\sum(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$$

- La suma de cuadrados total

$$SC_{Total} = \sum\sum\sum(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$$

MAGNA EDUCATIO AD MELLIOR
UNIVERSIDAD DE SANTANDER

Diseño de dos factores

Análisis de varianza: sumas de cuadrados para cada fuente de variación.

Fuente de Variacion	G.L.	Sumas de Cuadrados (SC)	Cuadrados Medios (CM)
Factor A	a-1	$nb\sum(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2$	$\frac{SC_{FactorA}}{a-1}$
Factor B	b-1	$na\sum(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...})^2$	$\frac{SC_{FactorB}}{b-1}$
Interaccion AB	(a-1)(b-1)	$n\sum\sum(\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...})^2$	$\frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}$
Error	ab(n-1)	$\sum_i\sum(Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij.})^2$	$\frac{SC_{error}}{ab(n-1)}$
Total	nab-1	$\sum\sum\sum(Y_{ijk}-\bar{Y}_{...})^2$	

Diseño de dos factores

EL ANALISIS DE VARIANZA: el estadístico F para cada Factor

- El estadístico F para el Factor A prueba la hipótesis de un efecto mediado por el factor A en la respuesta.

$$F^{*}_{FactorA} = \frac{\frac{SC_{FactorA}}{a-1}}{\frac{SC_{Error}}{ab(n-1)}}$$

- El estadístico F para el Factor B prueba la hipótesis de un efecto mediado por el factor B en la respuesta.

$$F^{*}_{FactorB} = \frac{\frac{SC_{FactorB}}{b-1}}{\frac{SC_{Error}}{ab(n-1)}}$$

Diseño de dos factores

Análisis de varianza: el estadístico F para cada Factor

- El estadístico F para la interacción del Factor A y el Factor B, prueba la hipótesis de un efecto en la respuesta mediado por diferentes niveles del factor A en diferentes niveles del factor B.

$$F^*_{InteraccionAB} = \frac{\frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}}{\frac{SC_{Error}}{ab(n-1)}}$$

Densidad del ánodo por temperatura del horno

Table: Descriptive Statistics

	densidad		
	t1	t2	t3
Valid	6	6	6
Mean	552.333	1034	543.500
Std. Deviation	24.557	34.980	29.036
Minimum	521	988	510
Maximum	583	1080	590

Densidad del ánodo por posición del horno

Table: Descriptive Statistics

	densidad	
	p1	p2
Valid	9	9
Mean	729.889	690
Std. Deviation	250.254	237.306
Minimum	510	521
Maximum	1080	1026

Densidad del ánodo por combinación de temperatura y posición en el horno

Table: Descriptive Statistics

	densidad					
	p1t1	p1t2	p1t3	p2t1	p2t2	p2t3
Valid	3	3	3	3	3	3
Mean	572.667	1062	555	532	1006	532
Std. Deviation	9.292	18.520	40.927	13.454	19.079	6
Minimum	565	1043	510	521	988	526
Maximum	583	1080	590	547	1026	538

Tabla de análisis de varianza para la densidad del ánodo

Table: ANOVA - densidad

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
temperatura	945342.111	2	472671.056	1056.117	$<$ .001
position	7160.056	1	7160.056	15.998	0.002
temperatura * position	818.111	2	409.056	0.914	0.427
Residuals	5370.667	12	447.556		

Comparaciones múltiples para la densidad del ánodo entre niveles de temperatura

Table: Post Hoc Comparisons - temperatura

		Mean Difference	SE	t	p_{tukey}
t1	t2	-481.667	12.214	-39.435	$< .001$
	t3	8.833	12.214	0.723	0.755
t2	t3	490.500	12.214	40.158	$< .001$

Comparaciones múltiples para la densidad del ánodo entre niveles de posición

Table: Post Hoc Comparisons - position

		Mean Difference	SE	t	p_{tukey}
p1	p2	39.889	9.973	4.000	0.002

Evaluación de supuestos, homogeneidad de varianzas

Table: Test for Equality of Variances (Levene's)

F	df1	df2	p
2.572	5.000	12.000	0.084

Prueba de normalidad de los residuales