Test de independencia de Chi Cuadrado en tablas de contingencia $I \times J$

- Si se presentan dos variables (o dos factores)en una tabla de contingencia $I \times J$, (donde I representa numero de filas, y J representa número de columnas) se puede evaluar si las variables se encuentran asociadas o no, determinando la independencia estadística entre las dos variables.

- Existe un test estadístico que cuantifica la independencia entre dos variables en tablas de contigencia, y se conoce como el Test de Chi cuadrado de Pearson (χ^2)

- Tabla de contingencia de frecuencias

		Variable dos Si	No	Total Filas
Variable	Si	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
uno	No	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
	Total columnas	n_{+1}	n_{+2}	n_{++}

- Tabla de contingencia de proporciones

		Variable dos Si	No	Total Filas
Variable	Si	π_{11}	π_{12}	π_{1+}
uno	No	π_{21}	π_{22}	π_{2+}
	Total columnas	π_{+1}	π_{+2}	π_{++}

- Donde $\pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{++}}$, $\pi_{i+} = \frac{n_{i+}}{n_{++}}$ y $\pi_{+j} = \frac{n_{+j}}{n_{++}}$.

- El test de χ^2 prueba la hipótesis de independencia de las variables (factores)

$$\begin{aligned} H_0 &: \pi_{ij} = \pi_{i+}\pi_{+j} \quad \text{Independencia} \\ H_1 &: \pi_{ij} \neq \pi_{i+}\pi_{+j} \quad \text{No independencia} \end{aligned}$$

- Se fija un nivel de signficancia, $\alpha = 0.05$

- Se fija la regla de decisión, se definen los grados de libertad $= (I-1)(J-1)$, donde I es el numero de niveles de la variable uno y J es el numero de niveles de la variable dos.

$$H_0 : \pi_{ij} = \pi_{i+}\pi_{+j}, \text{ si } \chi^2* \leq \chi^2(1-\alpha/2, \text{grados de libertad})$$
$$H_1 : \pi_{ij} \neq \pi_{i+}\pi_{+j}, \text{ si } \chi^2* > \chi^2(1-\alpha/2, \text{grados de libertad})$$

- El estadístico es
$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \chi^{2*} = \chi^2_\nu$$

- donde O_{ij} son los conteos observados y E_{ij} son los conteos esperados, y los conteos esperados son calculados de la siguiente manera
$$E_{ij} = \frac{n_{i+} \times n_{+j}}{n_{++}}$$

1 Ejemplo

1. Pregunta: existe asociación entre el tipo de vacuna y la presentación de efecto adverso (inflamación en la zona de inoculación).

	Inflamación		
Vacuna	Si	No	Total filas
Tipo 1	21	329	350
Tipo 2	130	550	680
Total Columnas	151	879	1030

2. Hipótesis $H_0 : \pi_{ij} = \pi_{i+}\pi_{+j}; H_1 : \pi_{ij} \neq \pi_{i+}\pi_{+j}$

3. nivel de significancia, $\alpha = 0.05$

4. regla de decisión

$$\text{si } \chi^2* < \chi^2(0.975, 1), \text{ concluir} H_0$$
$$\text{si } \chi^2* \geq \chi^2(0.975, 1), \text{ concluir} H_1$$

5. Estadístico: primero se hallan los conteos esperados

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{350*151}{1030} = 51.31 \;;\; E_{12} = \frac{350*879}{1030} = 298.69 \\ E_{21} &= \frac{680*151}{1030} = 99.7 \;;\; E_{22} = \frac{879*680}{1030} = 580.3 \end{aligned}$$

6. Se calcula el estadístico

$$\chi^2 * = \frac{(51.31 - 21)^2}{53.31} + \frac{(298. - 329)^2}{298.} + \frac{(99.7 - 130)^2}{99.7} + \frac{(580.3 - 550)^2}{580.3} = 33.58$$

7. La decision es rechazar la hipótesis nula ya que el estadístico $\chi^2 *$ es mayor que el valor de $\chi^2_{0.975,1}$.

8. La conclusión es, existe evidencia estadística al nivel de significancia 5% ($\alpha = 0.05$) que el tipo de vacuna no es independendiente de la "inflamación" o sea que estan asociadas las dos variables.

2 Ejercicio

Los siguientes datos corresponden a un reporte de un estudio en España con el título “Body shape and Eating disorders in a sample of students in the Basque country: a pilot study”, que aparece en el URL:

`http://www.psychologyinspain.com/content/full/2002/frame.asp?id=6000`

En este estudio se presentan dos tablas con resultados. Determine la asociación entre los resultados del BSQ (Body Shape Qualification) y el sexo de los estudiantes participantes, y la asociación entre el índice de masa corporal (BMI) y el sexo de los estudiantes participantes, utilizando el test de χ^2 de Pearson.

BSQ	Niñas	Niños	BMI	Niñas	Niños
< 81	343	419	muy bajo(< 17)	23	29
$81 - 110$	80	21	bajo($17 - 20$)	164	108
$111 - 140$	47	15	normal($20 - 25$)	37	173
> 140	38	5	obeso(> 25)	6	26