

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

## Conocimientos previos

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo de derivadas.
- Propiedades de las funciones derivables.
- Análisis de extremos en funciones de una variable.

## Resumen teórico

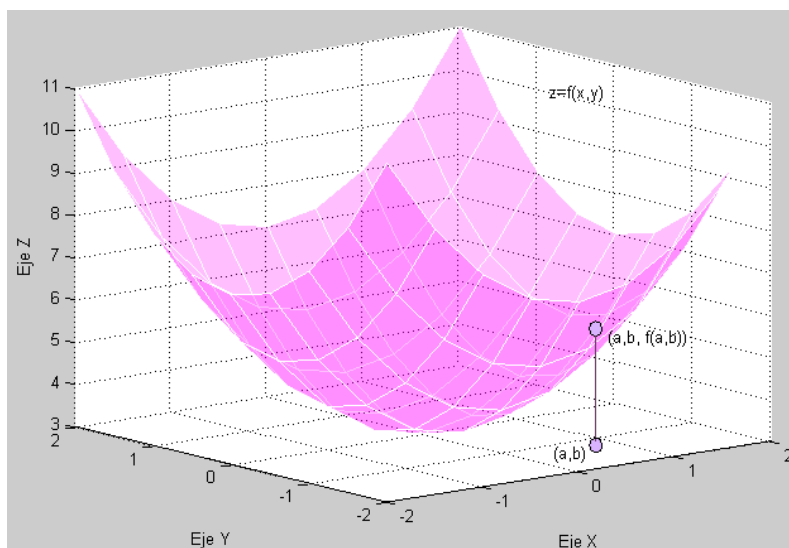
## 1. SUPERFICIES Y CURVAS DE NIVEL

Definición (*Función*).- Una función real de dos variables,  $f$ , no es más que una correspondencia que asigna a cada pareja  $(x, y)$  de números reales otro número real único  $f(x, y)$ .

Definición (*Dominio, rango*).- Se define el *dominio*  $D$  de la función  $f$  como el conjunto de pares reales en los que la función está definida. El *rango* es el conjunto de números reales dado por

$$\text{Im } f = \{z \in \mathbb{R} / (x, y) \in D\}$$

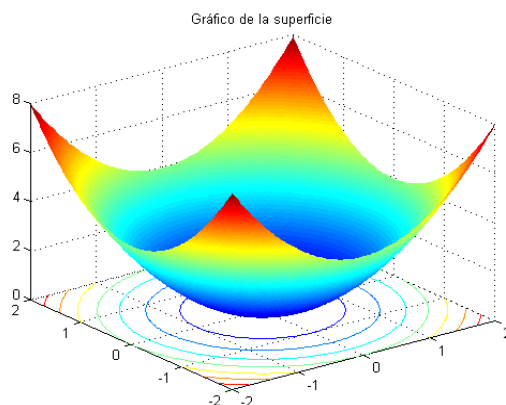
La gráfica de una función de dos variables  $z = f(x, y)$  es la representación en el espacio  $\mathbb{R}^3$  de todos los valores  $(x, y, z)$  siendo  $z$  la imagen de  $(x, y)$  por la función  $f$  con  $(x, y) \in D$ .



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

## Curvas de nivel

Para una función de dos variables,  $z = f(x, y)$ , la curva de nivel de valor  $k$  es el conjunto de todos los pares de valores  $(x, y)$  tales que su imagen es el valor  $k$ .



## 2. CONTINUIDAD

Definición (*Continuidad*).- Una función  $z = f(x, y)$  es continua en un punto  $(a, b)$  de su dominio si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

## 3. DERIVADAS PARCIALES

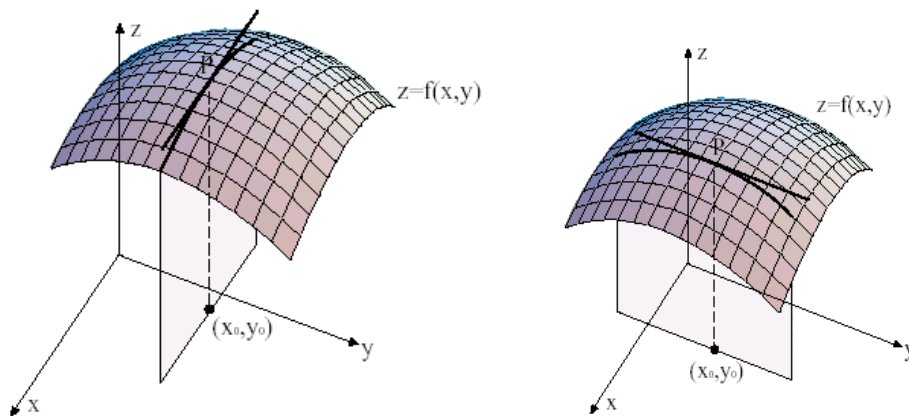
Definición (*Derivadas parciales*).- Si  $z = f(x, y)$  es una función de dos variables se define la derivada parcial de  $f$  en el punto  $(a, b)$

- con respecto a  $x$  como: 
$$f'_x(a, b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$
- con respecto a  $y$  como: 
$$f'_y(a, b) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

siempre que los límites anteriores existan.

**INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.-** Las derivadas parciales no son más que derivadas de una función de una variable: la función cuya gráfica se obtiene como intersección de la superficie con los planos verticales  $x=a$ ,  $y=b$  en los casos de derivada parcial en la dirección de  $y$  y en la dirección de  $x$ , respectivamente.



**NOTACIÓN:** Para hacer referencia a la derivada parcial de la función  $z = f(x, y)$  respecto a la variable  $x$  e  $y$  se suelen utilizar las siguientes notaciones:

$$f'_x(a, b) = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) = z'_x(a, b) \qquad f'_y(a, b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = z'_y(a, b)$$

**DERIVADAS PARCIALES de segundo orden:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}(x, y) = f''_{xx}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z'_x(x + \Delta x, y) - z'_x(x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}(x, y) = f''_{xy}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z'_x(x, y + \Delta y) - z'_x(x, y)}{\Delta y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}(x, y) = f''_{yy}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z'_y(x, y + \Delta y) - z'_y(x, y)}{\Delta y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z'_y(x + \Delta x, y) - z'_y(x, y)}{\Delta x} \end{aligned}$$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

TEOREMA DE SCHWARZ.- Sea  $z = f(x, y)$  es una función de dos variables. Si se verifica que existen  $f, f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$  y además  $f''_{xy}$  es continua en una región abierta D entonces se cumple que en dicha región se da la igualdad de las derivadas cruzadas de segundo orden

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$$

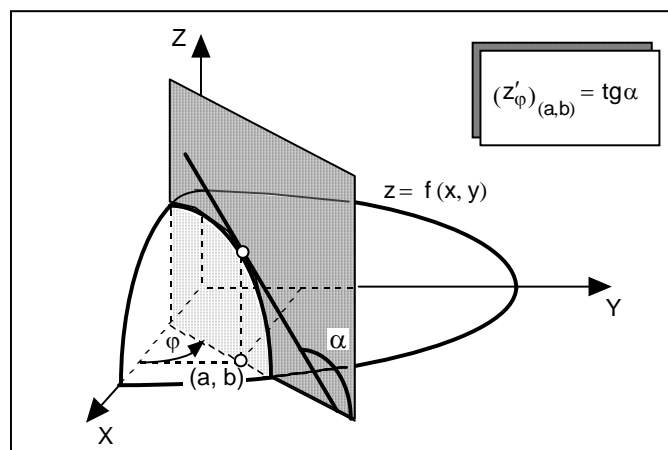
**4. DERIVADAS DIRECCIONALES**

Definición (*Dirección*).- Una dirección en  $\mathbb{R}^2$  es cualquier vector de norma 1.

Si  $\vec{u}$  es una dirección en el plano entonces se puede expresar como  $\vec{u} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  siendo  $\varphi$  el ángulo que forma el vector con el eje positivo de las X.

Definición (*Derivada direccional en un punto*): Sea  $f$  una función de dos variables y  $\vec{u} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  una dirección. Se define la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(a, b)$ , en la dirección de  $\vec{u}$  como el valor del siguiente límite en el caso de que exista:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cos \varphi, b + t \sin \varphi) - f(a, b)}{t} = D_{\vec{u}} f(a, b) = f'_{\vec{u}}(a, b)$$



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: La derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie con el plano vertical que contiene a la dirección dada.

**5. FUNCIONES DIFERENCIABLES**

Definición (*Diferenciable y diferencial*).- Sea  $z = f(x, y)$  una función definida y acotada en un dominio D al cual pertenece el punto  $(a, b)$  y que tiene derivadas parciales en dicho punto. Se dice que  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$  si el incremento total:

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

correspondiente a los incrementos arbitrarios de  $\Delta x$  e  $\Delta y$  se puede expresar como

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

cumpliendo que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$$

A la parte lineal en  $\Delta x$  e  $\Delta y$  se le llama *diferencial* de  $z = f(x, y)$  en el punto  $(a, b)$  y se denota,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

TEOREMA (*Condición necesaria de diferenciabilidad*).- Si la función  $z = f(x, y)$  es diferenciable en el punto  $(a, b)$  entonces es continua en el punto  $(a, b)$ .

TEOREMA.- Si la función  $z = f(x, y)$  y una o las dos derivadas parciales primeras son continuas en un entorno del punto  $(a, b)$  entonces la función es diferenciable en dicho punto.

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

TEOREMA: Si una función es diferenciable existe la derivada direccional en cualquier dirección.

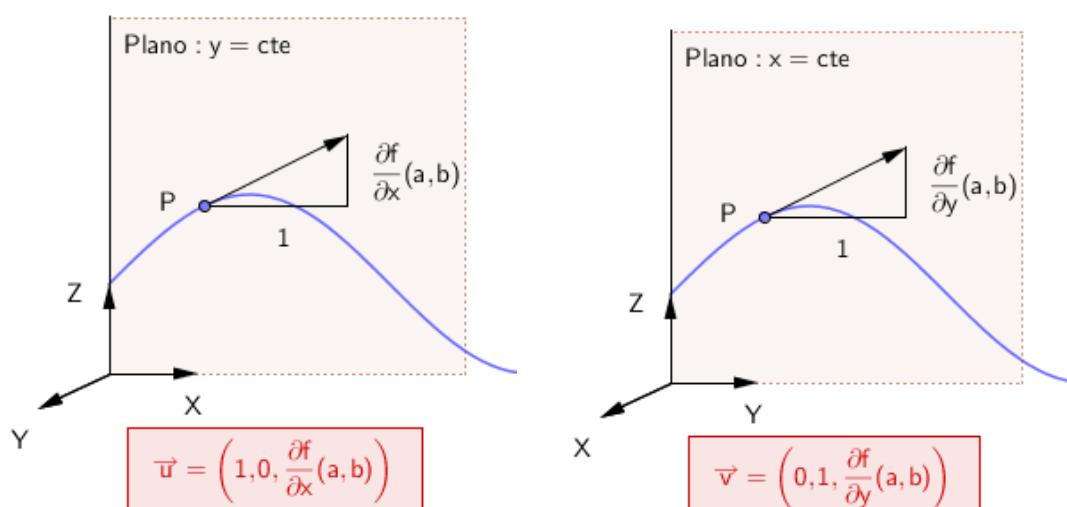
TEOREMA.- Si  $z = f(x, y)$  es una función diferenciable en  $(a, b)$  entonces la derivada direccional de  $f$  en la dirección del vector unitario  $\vec{u} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  es

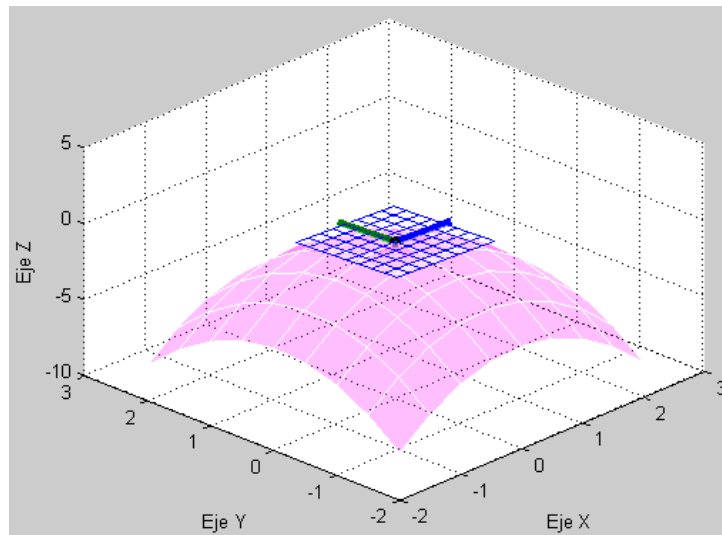
$$D_{\vec{u}} f(a, b) = f_x(a, b) \cos \varphi + f_y(a, b) \sin \varphi$$

**6. PLANO TANGENTE Y APROXIMACIÓN LINEAL**

Sea  $S$  una superficie de ecuación  $z = f(x, y)$  y  $P(a, b, f(a, b))$  un punto de  $S$ . Si  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$  se define el plano tangente como el plano que contiene a las rectas tangentes a cualquier curva  $C$  que esté sobre la superficie  $S$  y que pase por  $P$ .

Definimos en el punto  $P(a, b, f(a, b))$  los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tangentes a las curvas resultantes de la intersección de  $S$  con los planos:  $y = cte$ ,  $x = cte$  respectivamente.



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

Por lo tanto un vector normal al plano tangente es el producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\vec{j} + \vec{k}$$

La ecuación del plano tangente es entonces:

$$\left\langle (x, y, z) - (a, b, f(a, b)), \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right) \right\rangle = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

Si  $f$  es diferenciable, el incremento de la función,  $\Delta z$ , se puede aproximar mediante el valor de la diferencial,  $dz$ , así

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \Delta y = dz$$

para  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$

Interpretación geométrica de la diferencial: la diferencial  $dz$  es la variación de la ordenada del plano tangente al pasar del punto  $(a, b)$  al punto  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ .

**7. GRADIENTE**

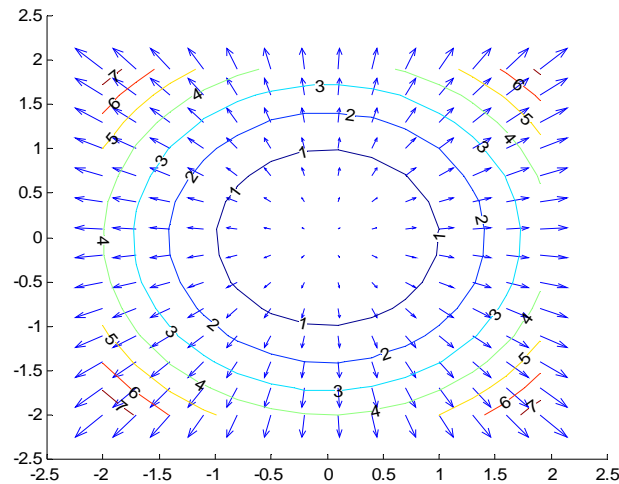
Definición (*Gradiente*).- Si  $z = f(x, y)$  es una función de dos variables se define el gradiente de  $f$  en el punto  $(a, b)$  como el vector:

$$\nabla f(a, b) = f'_x(a, b)\mathbf{i} + f'_y(a, b)\mathbf{j}$$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE: Sea  $f$  una función diferenciable en el punto  $(a, b)$ . Se cumplen las siguientes propiedades:

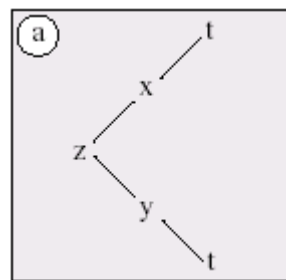
1. Si el gradiente de  $f$  en  $(a, b)$  es el vector nulo entonces la derivada direccional de  $f$  en cualquier dirección es cero.
2. La dirección de máximo crecimiento de  $f$  viene dada por  $\nabla f(x, y)$ . El valor máximo de la derivada direccional es  $\|\nabla f(x, y)\|$ .
3. La dirección de mínimo crecimiento de  $f$  viene dada por  $-\nabla f(x, y)$ . El valor mínimo de la derivada direccional es  $-\|\nabla f(x, y)\|$ .
4. El vector gradiente es normal a las curvas de nivel.



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**Curvas de nivel de la superficie  $z = x^2 + y^2$ **8. REGLA DE LA CADENA**

DERIVACION COMPUESTA DE UNA VARIABLE.- Sea  $z = f(x, y)$  una función definida en un dominio  $D$ , siendo cada una de las variables  $x$  e  $y$  funciones de la variable  $t$

$$x = \phi(t), y = \psi(t), t_0 < t < t_1$$



Si en el punto  $t$  existen las derivadas

$$\frac{dx}{dt} = \phi'(t) \quad \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

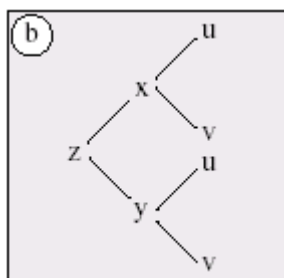
y para cada una de las variables  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  la función  $z = f(x, y)$  es diferenciable entonces se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

*DERIVACIÓN COMPUESTA DE DOS VARIABLES.*- Sea  $z = f(x, y)$  una función definida en un dominio  $D$  siendo cada una de las variables  $x$  e  $y$  funciones de las variables  $u$  y  $v$

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$



Si en el punto  $(u, v)$  existen las derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$$

y en el punto  $(x, y)$  la función  $z$  es diferenciable entonces se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

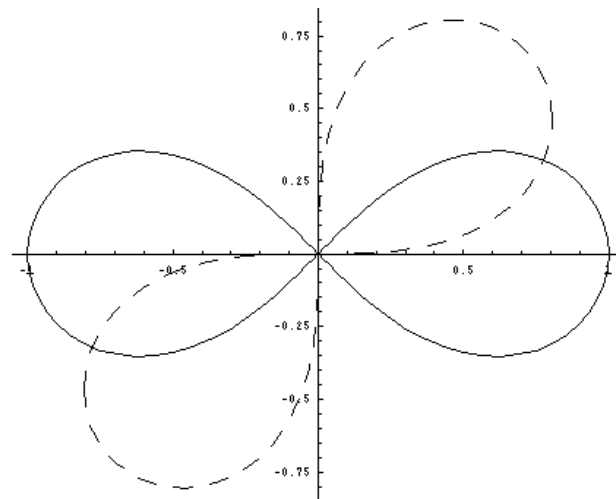
**9. FUNCIONES IMPLÍCITAS**

**TEOREMA FUNCION IMPLÍCITA:** Se considera la ecuación  $F(x, y) = 0$ . Dicha ecuación define en un entorno del punto  $P(a, b)$  a la variable  $y$  como función implícita de  $x$ , es decir,  $y = f(x)$  si:

- a) El punto  $(a, b)$  pertenece a la curva de ecuación  $F(x, y) = 0$
- b) Las derivadas parciales  $F'_x(x, y)$  y  $F'_y(x, y)$  son funciones continuas en un entorno del punto  $(a, b)$
- c)  $F'_y(x, y) \neq 0$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

NOTA: En el caso de que se cumplan los dos primeros puntos y el tercero se sustituya por  $F'_x(x, y) \neq 0$  entonces es la  $x$  la que se define como función implícita de  $y$ , es decir,  $x = h(y)$ .



En trazo continuo:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

En trazo discontinuo:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy$$

TEOREMA.- Si la ecuación  $F(x, y) = 0$  define a  $y$  como función derivable de  $x$  entonces:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ ,  $F'_y(x, y) \neq 0$

Nota: Basta derivar  $F(x, y) = 0$  respecto a  $x$  aplicando la regla de la cadena:

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0$$

TEOREMA FUNCION IMPLÍCITA: Se considera la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ . Dicha ecuación define en un entorno del punto  $P(a, b, c)$  a la variable  $z$  como función implícita de  $x$  e  $y$  es decir,  $z = f(x, y)$  si:

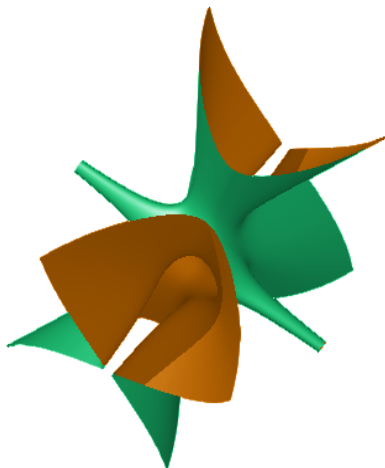
a) El punto  $(a, b, c)$  pertenece a la superficie de ecuación  $F(x, y, z) = 0$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

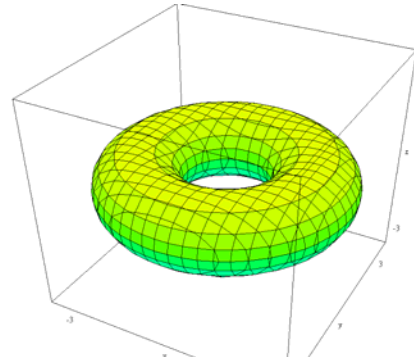
- b) Las derivadas parciales  $F'_x(x, y, z)$ ,  $F'_y(x, y, z)$  y  $F'_z(x, y, z)$  son funciones continuas en un entorno del punto  $(a, b, c)$
- c)  $F'_z(a, b, c) \neq 0$

TEOREMA.- Si la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define a  $z$  como función diferenciable de  $x$  e  $y$  entonces:

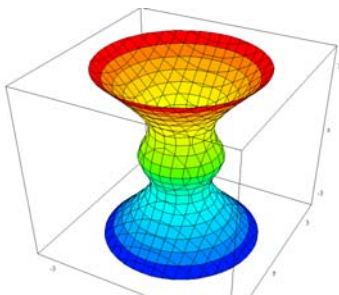
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

**EJEMPLOS DE SUPERFICIES EN IMPLÍCITAS**

$$\sqrt{xy} - \sqrt{yz} - \sqrt{zx} - y = 1$$



$$z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 = 1$$



$$0.8z^2 - \log(0.8(z^2 + 0.3)) = x^2 + y^2$$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

*Superficies implícitas. Plano tangente:*

Sea  $S$  una superficie de ecuación  $F(x, y, z) = C$  y sea  $P(a, b, c)$  un punto de  $S$  donde  $F$  es diferenciable. La ecuación del plano tangente a  $S$  en  $P$  es:

$$F'_x(a, b, c)(x-a) + F'_y(a, b, c)(y-b) + F'_z(a, b, c)(z-c) = 0$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal a  $S$  en  $P(a, b, c)$  son

$$\begin{cases} x = a + F'_x(a, b, c) \cdot t \\ y = b + F'_y(a, b, c) \cdot t \\ z = c + F'_z(a, b, c) \cdot t \end{cases}$$

siempre y cuando no sean simultáneamente cero todas las derivadas parciales en el punto.

**10. EXTREMOS. MÁXIMOS, MÍNIMOS Y PUNTOS DE SILLA**

**Definición (Extremos absolutos).**- Sea  $z = f(x, y)$  una función definida en una región  $D$  y sea  $(a, b) \in D$  se dice que

(a)  $f(a, b)$  es el valor máximo absoluto de  $f$  en  $D$  si

$$f(a, b) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$$

(b)  $f(a, b)$  es el valor mínimo absoluto de  $f$  en  $D$  si

$$f(a, b) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$$

**Definición (Extremos relativos).**- Sea  $z = f(x, y)$  una función definida en una región  $D$  y sea  $(a, b) \in D$  se dice que

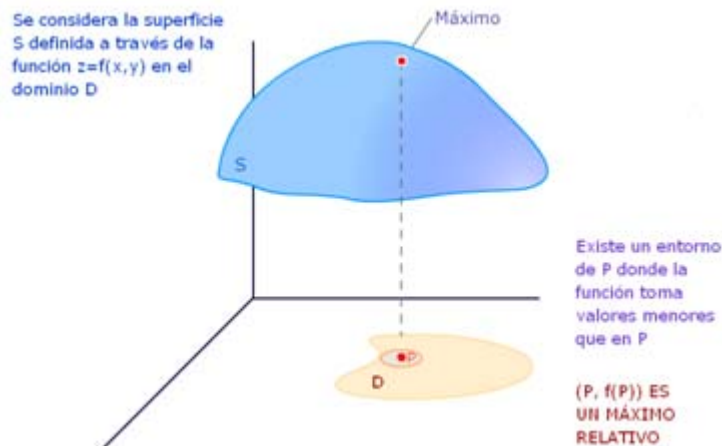
(a)  $f(a, b)$  es un valor máximo relativo de  $f$  en  $D$  si existe un entorno  $B$  de  $(a, b)$  tal que

$$f(a, b) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B$$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

(b)  $f(a,b)$  es un valor mínimo relativo de  $f$  en  $D$  si existe un entorno  $B$  de  $(a,b)$  tal que

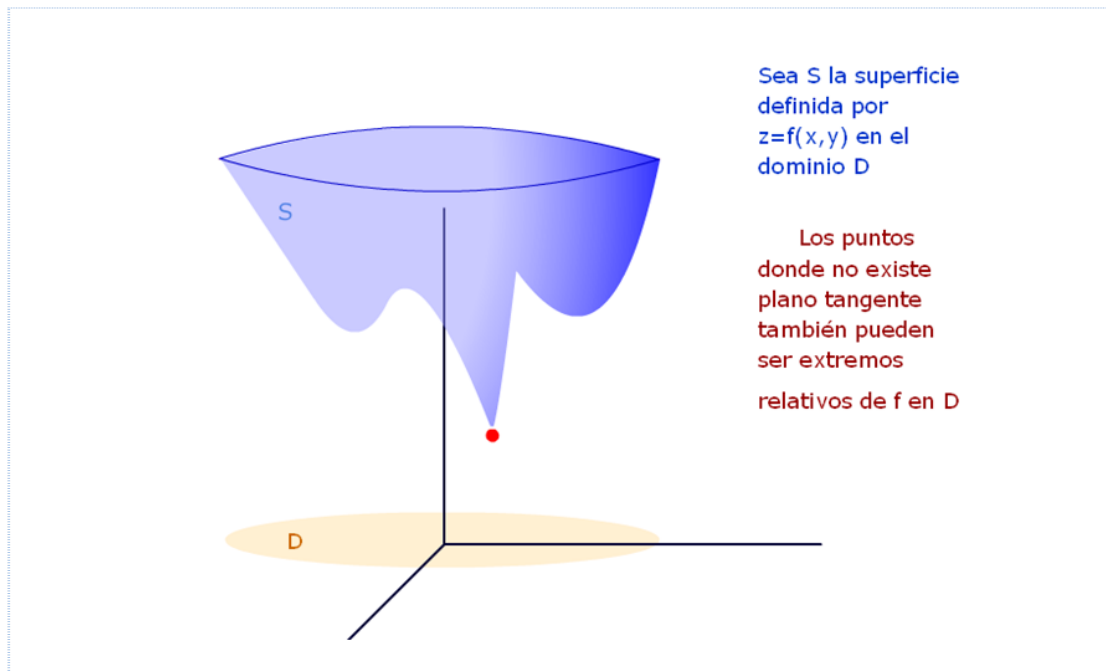
$$f(a,b) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in B$$



**TEOREMA DE WEIERSTRASS.-** Sea  $z = f(x,y)$  una función continua en un subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  acotado y que contiene a su frontera, entonces la función  $f$  tiene máximo y mínimo en  $D$ .

**Definición (Punto crítico).**- Sea  $z = f(x,y)$  una función definida en una región  $D$ . El punto  $(a,b) \in D$  se dice que es un punto crítico si se cumple una de las afirmaciones siguientes:

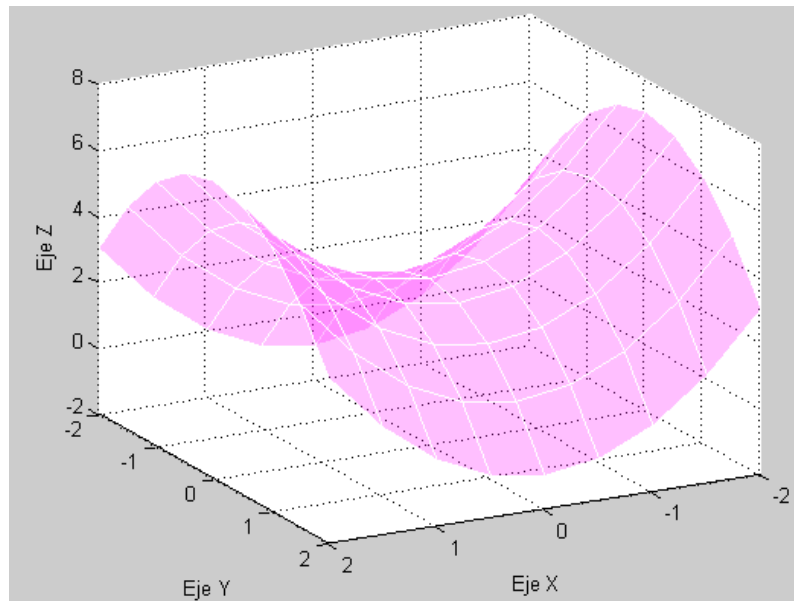
- (1)  $(a,b)$  está situado en el contorno de  $D$ . A estos puntos se les llama puntos *frontera*.
- (2)  $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ , es decir,  $\nabla f(a,b) = 0$ . A estos puntos se les llama *estacionarios*.
- (3) no existe  $f'_x(a,b)$  ó  $f'_y(a,b)$ . A estos puntos se les llama *singulares*.

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

TEOREMA.- Si  $f(a,b)$  es un extremo relativo de  $f$  en una región abierta de  $D$  entonces el punto  $(a,b)$  es un punto crítico de  $f$ .

TEOREMA (Condición necesaria para la existencia de extremo de funciones diferenciables).- Sea  $z=f(x,y)$  una función diferenciable en  $D$ . Es condición necesaria para la existencia de un extremo relativo de  $f$  en  $(a,b) \in D$  que se verifique  $f'_x(a,b)=f'_y(a,b)=0$

IMPORTANTE.- Es condición necesaria pero no suficiente. Basta tomar como ejemplo la función  $f(x,y)=y^2-x^2$ , la cual cumple que  $(0,0)$  es un punto estacionario y sin embargo no es extremo relativo (ni máximo ni mínimo), como muestra la figura siguiente.

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

La generalización de la fórmula de Taylor de grado dos para una función de dos variables,  $z = f(x, y)$ , que admite derivadas parciales de cualquier orden en un entorno de  $(a, b)$  viene dada por<sup>1</sup>:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \\ + \frac{1}{2!} \left[ f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) \right] + R_2$$

donde  $R_2$  es un infinitésimo verificando:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{R_2}{\|(x - a, y - b)\|^2} = 0$$

Haciendo

$$\begin{aligned} x = a + \Delta x &\Leftrightarrow x - a = \Delta x \\ y = b + \Delta y &\Leftrightarrow y - b = \Delta y \end{aligned}$$

la expresión de la fórmula de Taylor es:

---

<sup>1</sup> Con objeto de no complicar la notación se ha considerado únicamente la fórmula de Taylor de orden 2 pudiendo generalizarse fácilmente a cualquier orden.



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y + \\ + \frac{1}{2!} \left[ f''_{xx}(a, b)(\Delta x)^2 + f''_{yy}(a, b)(\Delta y)^2 + 2f''_{xy}(a, b)\Delta x\Delta y \right] + R_2$$

Esta expresión puede escribirse de la manera siguiente:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = \langle \nabla f(a, b), (\Delta x, \Delta y) \rangle + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \cdot Hf(a, b) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + R_2$$

donde

$$Hf(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

se llama *matriz hessiana*. El término entre corchetes se le denomina diferencial segunda y escribiendo  $dx = \Delta x, dy = \Delta y$  se tendrá:

$$d^2 f = f_{xx}(a, b)dx^2 + f_{yy}(a, b)dy^2 + 2f_{xy}(a, b)dxdy = \\ = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

De analizar el signo de la diferencial segunda, o lo que es lo mismo, si la matriz hessiana es definida positiva o negativa se deduce el siguiente método práctico.

Cálculo de los extremos relativos:  
Método práctico

Los pasos a seguir son:

- (1) Cálculo de los puntos críticos como solución del sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

- (b) Si  $(a, b)$  es un punto crítico, el estudio del hessiano

$$H = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{xy}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

nos permitirá concluir:

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

$$H > 0 \quad f''_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow (a,b) \text{ punto de mínimo relativo}$$

$$H > 0 \quad f''_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow (a,b) \text{ punto de máximo relativo}$$

$$H < 0 \Rightarrow (a,b) \text{ punto de silla}$$

## Test de autoevaluación

1

El dominio, el rango y la curva de nivel  $z=0$  de la función  $z=1-\sqrt{x^2+2y^2}$  son respectivamente:

- ☐ A) Dominio =  $\mathbb{R}^2$ , Rango =  $\mathbb{R}$ , la curva de nivel es una circunferencia.
- ☐ B) Dominio =  $\mathbb{R}$ , Rango =  $(-\infty, 1)$ , la curva de nivel es una circunferencia.
- ☐ C) Dominio =  $\mathbb{R}^2$ , Rango =  $(-\infty, 1]$ , la curva de nivel es una elipse.
- ☐ D) Ninguna de las anteriores.

2

Las derivadas parciales de la función  $f(x, y) = xe^{x^2y}$  en el punto  $(1, \log 2)$  son:

- ☐ A)  $f'_x(1, \log 2) = 4\log 2 + 2$ ,  $f'_y(1, \log 2) = 1$ .
- ☐ B)  $f'_x(1, \log 2) = 4\log 2 + 2$ ,  $f'_y(1, \log 2) = 2$ .
- ☐ C)  $f'_x(1, \log 2) = 2\log 2 + 1$ ,  $f'_y(1, \log 2) = 2$ .
- ☐ D) Ninguna de las anteriores.

3

Las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie  $xyz=10$  en el punto  $(1, 2, 5)$  son:

- ☐ A)  $10x + 5y + 2z - 30 = 0$  y  $x = 1 + 10t$ ,  $y = 2 + 5t$ ,  $z = 5 + 2t$ .
- ☐ B)  $10x + 5y + 2z - 30 = 0$  y  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 2 + t$ ,  $z = 5 + 5t$ .
- ☐ C)  $2x + y + 10z - 6 = 0$  y  $x = 1 + 10t$ ,  $y = 2 + 5t$ ,  $z = 5 + 2t$ .
- ☐ D) Ninguna de las anteriores.

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

4

La pendiente de la curva intersección de la superficie  $z = x^2 + 4y^2$  con el plano  $y = 1$  en el punto  $(2, 1, 8)$  es:

- ☐ A)  $m = 4$ .
- ☐ B)  $m = 1$ .
- ☐ C)  $m = 2$ .
- ☐ D) Ninguna de las anteriores.

5

Sea  $z$  una función definida implícitamente por la ecuación  $1 + xyz - e^{xyz} = 0$ , entonces se cumple:

- ☐ A)  $z'_x = -\frac{z}{x}$ .
- ☐ B)  $z'_y = \frac{z}{y}$ .
- ☐ C)  $yz'_x + xz'_y = 0$ .
- ☐ D) Ninguna de las anteriores.

6

El valor máximo de la derivada direccional de la función  $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$  en el punto  $(1, 1)$  es  $f'_\alpha$  y su dirección viene dada por el vector  $\mathbf{u}$ :

- ☐ A)  $f'_\alpha = 5$ ,  $\mathbf{u} = (3, 1)$ .
- ☐ B)  $f'_\alpha = \sqrt{5}$ ,  $\mathbf{u} = (1, 3)$ .
- ☐ C)  $f'_\alpha = 0$ ,  $\mathbf{u} = (1, 1)$ .
- ☐ D) Ninguna de las anteriores.

7

Decir cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- ☐ A) El plano tangente a la superficie  $z = x + y$  en cualquier punto de ella es  $z - x - y = 0$ .

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

- \_\_\_ B) La función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ .
- \_\_\_ C) La función  $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ , en el punto  $(1, -2)$ , crece más rápido en la dirección del eje OX que en la dirección del eje OY.
- \_\_\_ D) Ninguna de las anteriores.

8

Aproximar el valor de  $z = e^{x+2y}$  en el punto  $(0.1, -0.2)$ , utilizando la diferencial de en  $(0, 0)$ . El resultado obtenido es:

- \_\_\_ A)  $e^{-0.3} \approx 0.65$
- \_\_\_ B)  $e^{-0.3} \approx 0.7$
- \_\_\_ C)  $e^{-0.3} \approx 0.75$
- \_\_\_ D) Ninguna de las anteriores.

9

Si  $z = f(x, y)$ , con  $x = s^2 + t^2$  e  $y = \frac{s}{t}$ , se verifica:

- \_\_\_ A)  $2y \frac{\partial z}{\partial x} = t \frac{\partial z}{\partial t} - s^2 \frac{\partial z}{\partial s}$ .
- \_\_\_ B)  $2x \frac{\partial z}{\partial x} = t \frac{\partial z}{\partial t} - s \frac{\partial z}{\partial s}$ .
- \_\_\_ C)  $2x \frac{\partial z}{\partial x} = t \frac{\partial z}{\partial t} + s \frac{\partial z}{\partial s}$ .
- \_\_\_ D) Ninguna de las anteriores.

10

La función  $f(x, y) = x^2 y^2$ :

- \_\_\_ A) Tiene un mínimo absoluto en  $(0, 0)$ .
- \_\_\_ B) Tiene un mínimo absoluto en  $(0, 0)$ .
- \_\_\_ C) Tiene un punto de silla en  $(0, 0)$ .
- \_\_\_ D) Ninguna de las anteriores.

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.****Ejercicios propuestos****1**

Representa gráficamente el dominio de las funciones siguientes:

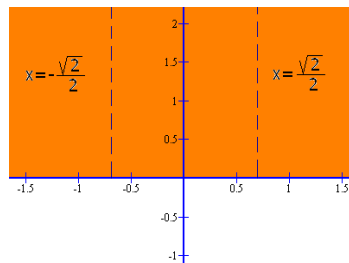
a)  $f(x, y) = \frac{\log y}{2x^2 - 1}$

b)  $f(x, y) = \frac{x - y}{\log(xy)}$

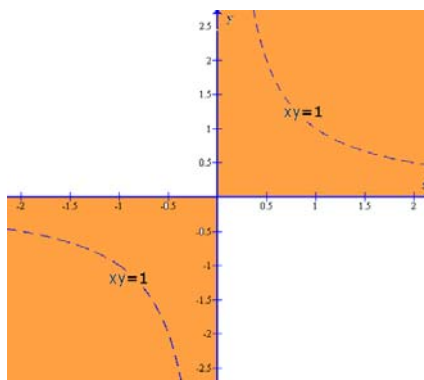
a)  $f(x, y) = \arcsen \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$

Solución:

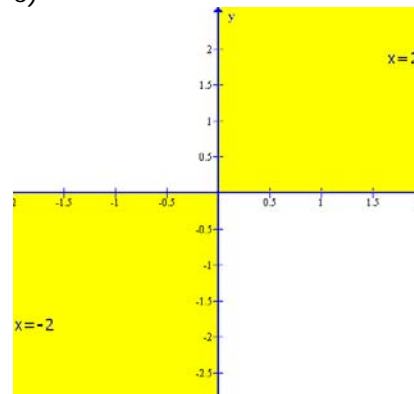
a)



b)



c)

**2**

Representa las curvas de nivel de las funciones:

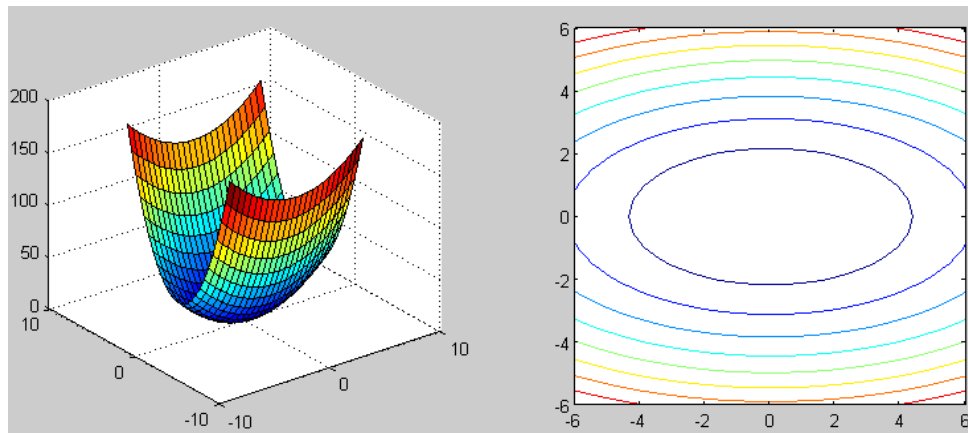
(a)  $z = x^2 + 4y^2 + 1$

(b)  $z = -x^2 + y$

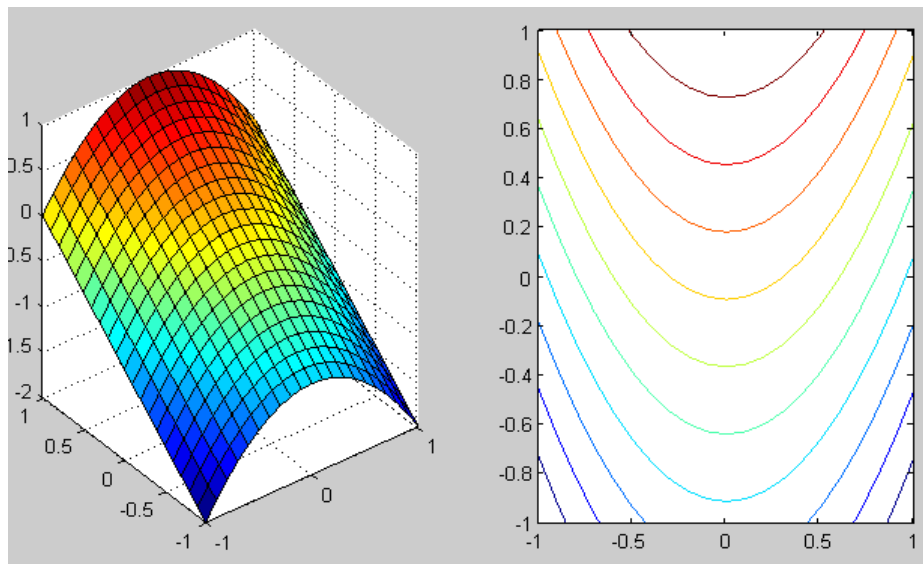
(c)  $z = 100 - x^2 - y^2$ , para  $z = 0, 50, 100, 150$ .

Solución:

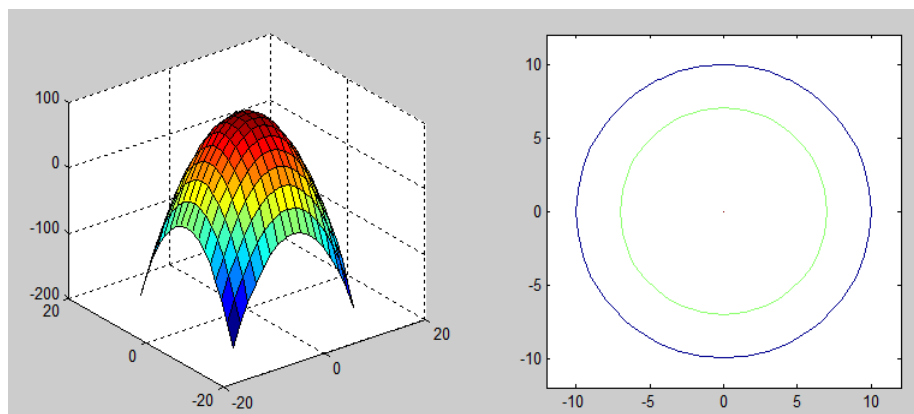
a) Son elipses  $k = x^2 + 4y^2 + 1$  para  $k > 1$ . Para  $k = 1$  es un punto.

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

b) Son parábolas,  $y = x^2 + k$



c) Para  $k=100$  es un punto  $(0,0)$  y para  $k=150$  no hay curva de nivel. Para  $k=0$  y  $k=50$  son circunferencias



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.****3**

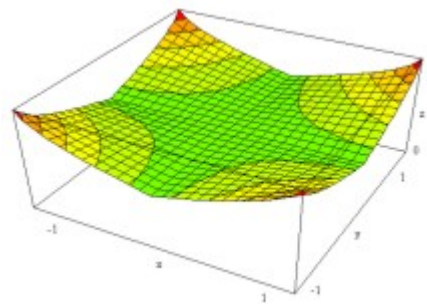
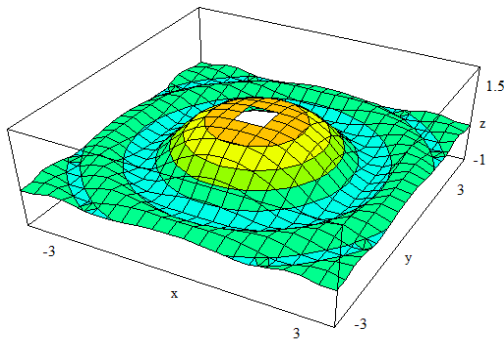
Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

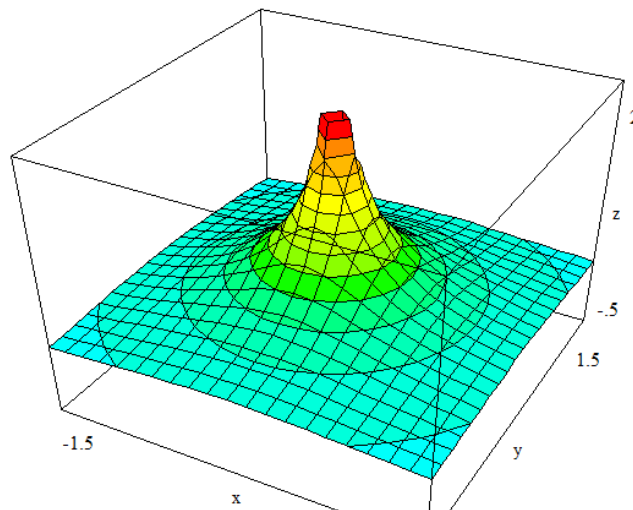
(b)  $f(x, y) = \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$

(c)  $f(x, y) = \frac{\log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - 1}$

Solución:

(a) Continua en  $\mathbb{R}^2$  salvo en el cero, que tiene una discontinuidad evitable.(b) Continua en  $\mathbb{R}^2$ 

(c) Esta función tiene discontinuidades evitables en los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ . En el punto (0,0) no está definida, además  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \infty$

**4**Se considera la función  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ .(a.1) Encontrar todos los puntos en los que  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ (a.2) Calcular  $f'_x(1,1)$  y  $f'_x(-1,1)$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

- (b) Hallar las derivadas parciales de la función  $f(x, y) = 2xe^{xy^2}$ . Evaluarlas en el punto  $(-1, 0)$ .
- (c) Hallar las derivadas parciales primeras de la función  $z = f(x, y) = x^2 \sin(3x + y^3)$ , obteniendo el valor particular de ambas en el punto  $(\pi/3, 0)$

Solución: (a.1) El punto  $(0, 0)$  (a.2)  $f'_x(1, 1) = -2e^{-2}$ ,  $f'_x(-1, 1) = 2e^{-2}$

(b)  $f'_x(-1, 0) = 2$ ,  $f'_y(-1, 0) = 0$

(c)  $z'_x\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = -\frac{\pi^2}{3}$ ,  $z'_y\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = 0$

5

Calcular las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$  (b)  $f(x, y) = x^2 ye^y$

(c)  $f(x, y) = e^{-y} \cos \frac{x}{b}$

Solución: (a)  $f'_x = 10x - 2y$ ,  $f'_y = -2x + 9y^2$ ,  $f''_{xy} = f''_{yx} = -2$ ,  $f''_{xx} = 10$ ,  $f''_{yy} = 18y$

(b)  $f'_x = 2xye^y$ ,  $f'_y = x^2 e^y (1 + y)$ ,  $f''_{xy} = f''_{yx} = 2xe^y (1 + y)$ ,  $f''_{xx} = 2ye^y$   
 $f''_{yy} = x^2 e^y (2 + y)$

(c)  $f'_x = -\frac{1}{b} e^{-y} \sin \frac{x}{b}$ ,  $f'_y = -e^{-y} \cos \frac{x}{b}$ ,  $f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{1}{b} e^{-y} \sin \frac{x}{b}$   
 $f''_{xx} = -\frac{1}{b^2} e^{-y} \cos \frac{x}{b}$ ,  $f''_{yy} = e^{-y} \cos \frac{x}{b}$

6

a) El precio de un piso  $P$  en función de la superficie  $S$  y de la calidad de los materiales  $C$  viene dado por una función  $P(S, C)$ . ¿Es razonable

que  $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$ ? ¿Es razonable que  $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$ ?

b) Hallar la pendiente de la recta que es paralela al plano  $XZ$  y tangente a la superficie  $z = x\sqrt{x+y}$  en el punto  $P(1, 3, 2)$ .

c) El volumen de un tronco de cono viene dado por la fórmula  $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$  ( $h$  es la altura,  $r$  el radio de la base menor y  $R$

el radio de la base mayor). Estudiar la variación de dicho volumen (razón de cambio) cuando se produce un incremento arbitrario (no simultáneo) de cada una de las variables. Analizar cuál es la forma

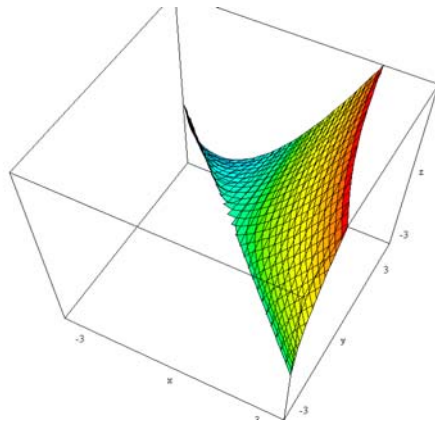


**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

más ventajosa de aumentar el volumen de un tronco de cono de dimensiones  $R=10$ ,  $r=4$  y  $h=6$ .

Solución:

- (a) Si  $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$  significa que a mayor calidad de los materiales aumenta el precio de la vivienda. Parece razonable. Si  $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$  significaría que al aumentar la superficie del piso el precio disminuiría. Esto no parece lógico.
- (b)  $f_x(1,3) = \frac{9}{4}$



- (c) La variable que produce un incremento más rápido del volumen, para los valores dados, es  $h$  por lo que la mejor opción será aumentar la altura del tronco del cono.

7

- a) ¿En qué direcciones se anula la derivada de  $f(x, y) = xy + y^2$  en el punto  $(2, 5)$ ?
- b) Se considera la función  $f(x, y) = x^2y - 4y^3$ . Calcular  $D_{\vec{u}}f(2, 1)$  en los casos siguientes:
- b.1)  $\vec{u} = (1, -2)$
- b.2)  $\vec{u}$  es el vector en la dirección que une los puntos  $(2, 1)$  y  $(4, 0)$
- b.3) siguiendo la dirección que forma con el eje  $X$  un ángulo de  $60^\circ$ .

Solución: (a)  $\mathbf{u}_1 = \left( \frac{-12}{13}, \frac{5}{13} \right)$  ;  $\mathbf{u}_2 = \left( \frac{12}{13}, \frac{-5}{13} \right)$

(b.1)  $4\sqrt{5}$  (b.2)  $\frac{16}{\sqrt{5}}$  (b.3)  $2 - 4\sqrt{3}$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.****8**

- a) La derivada direccional de una función polinómica dada  $f(x, y)$  en el punto  $P_o(1, 2)$  es  $2\sqrt{2}$  en dirección hacia  $P_1(2, 3)$  y  $-3$  en dirección hacia  $P_2(1, 0)$ . Calcúlense  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $P_o(1, 2)$ , así como la derivada direccional de  $f$  en  $P_o(1, 2)$  en dirección hacia  $P_3(4, 6)$ .
- b) Sea  $f(x, y)$  una función diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ . Se conocen las derivadas direccionales de  $f(x, y)$  en el punto  $(1, 2)$ , según las direcciones del plano dadas por los vectores unitarios  $\vec{u} = \frac{\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{10}}$ ;  $\vec{v} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ , cuyos valores son  $f'_u(1, 2) = \frac{5}{\sqrt{10}}$ ,  $f'_v(1, 2) = \frac{3}{\sqrt{2}}$  respectivamente. Hallar las derivadas parciales  $f'_x(1, 2)$  y  $f'_y(1, 2)$ . Hallar la derivada direccional de la función  $f$  en el punto  $(1, 2)$ , según la dirección del vector  $\vec{w} = \frac{-\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$ .

Solución: a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3$ ,  $D_u(1, 2) = 3$  con  $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

b)  $f'_x(1, 2) = -1$ ;  $f'_y(1, 2) = 2$ ;  $f'_w(1, 2) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

**9**

- a) Sea la función  $f(x, y) = 48 - 4x^2 - 3y^2$ . Hallar la derivada direccional máxima en el punto  $(1, -1)$ , indicando en qué dirección se alcanzan mediante el vector unitario correspondiente.
- b) Hallar razonadamente el vector gradiente y el valor de la derivada direccional máxima de la función  $f(x, y) = (x - y - 1)^2 + e^{y-1}$ , en el punto  $(1, 1)$

Solución: a)  $f'_{\varphi_{\max}}(1, -1) = 10$ ;  $\mathbf{u} = -\frac{4}{5} \cdot \mathbf{i} + \frac{3}{5} \cdot \mathbf{j}$  b)  $f'_{\varphi_{\max}}(1, 1) = \sqrt{13}$

**10**

Una colina se representa por la ecuación  $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$ , donde la distancia se mide en metros, el eje  $X$  apunta al este y el eje  $Y$  apunta al norte. Un hombre está en el punto de coordenadas  $(-10, 5, 850)$ .

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

- a) ¿Cuál es la dirección en la que la ladera tiene mayor pendiente?
- b) Si el hombre se mueve hacia el este, ¿está descendiendo o ascendiendo? , ¿con qué pendiente?
- c) Si el hombre se mueve hacia el suroeste ¿está ascendiendo o descendiendo? ¿con qué pendiente?

Solución: a)  $\mathbf{u} = \left( \frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}} \right)$  b)  $z'_x > 0$  si  $-10 \leq x < 0$ , es decir  $z$  es creciente en la dirección del eje  $X$  positivo y, por tanto, el hombre asciende con pendiente  $m = 60$ .

c) Suroeste:  $\mathbf{u} = (-1, -1)$   $z'_u = -20\sqrt{2} < 0$ , por lo tanto  $z$  es decreciente y el hombre desciende.

- 11 Comprobar si el gradiente de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  es perpendicular a la curva de nivel asociada a  $z = 6$ .

Solución:  $\nabla f = \mathbf{n}$ , siendo  $\mathbf{n}$  un vector normal a la curva de nivel.

- 12 Calcular, aplicando la regla de la cadena, las derivadas de las siguientes funciones:

- (a)  $z = x^2 + y^2$  donde  $x = \frac{1}{t}$ ,  $y = t^2$
- (b)  $z = 4x - y^2$  donde  $x = uv^2$ ,  $y = u^3v$
- (c)  $\frac{dz}{dt}$ , siendo  $z = x^2 + xy$  con  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ .
- (d)  $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{3x}{2y} \frac{\partial z}{\partial x}$  en función de  $x$  e  $y$ , siendo  $z = uv$  con  $u = x^2 + y^2$   
 $v = \frac{x^2}{y^3}$ .
- (e)  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , para la función definida así  $z = f(x, y) = \log(x^2 + y)$ , estando las variables  $x$  e  $y$  relacionadas con las variables  $u$  y  $v$  mediante las ecuaciones:  $x = e^{uv}$ ,  $y = \frac{1}{v}$ . Expresar las soluciones en función de las variables  $u$  y  $v$ .

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{dz}{dt} &= -\frac{2}{t^3} + 4t^3 & \text{b) } \frac{\partial z}{\partial u} &= 4v^2 - 6u^5v^2, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 8uv - 2u^6v \\
 \text{c) } \frac{dz}{dt} &= \sin 2t + 2\cos^2 t - 1 & \text{d) } \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{3x}{2y} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x^2}{y^2} + \frac{3x^4}{y^4} \\
 \text{e) } \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{2v^2 e^{2uv}}{v e^{2uv} + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2uv^2 e^{2uv} - 1}{v^2 e^{2uv} + v}
 \end{aligned}$$

**13**

a) Calcular  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en la superficie definida de forma implícita:

$$xy^2 + z^3 + \sin xyz = 0$$

b) Suponiendo que la ecuación  $xy - x + 2z + e^{2z} - 2 = 0$ , define implícitamente a  $z$  como función diferenciable de  $x$  e  $y$ , calcular  $dz$  y  $d^2z$ , sabiendo que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2$$

c) Suponiendo que la ecuación  $z \arctg(1 - z^2) + 3x + 5z - 8y^3 = 0$ , define a  $z$  como función implícita de  $x$  e  $y$ , calcular  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en el punto  $(1,1,1)$ .

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{y^2 + (yz)\cos(xyz)}{3z^2 + (xy)\cos(xyz)} & \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{2xy + (xz)\cos(xyz)}{3z^2 + (xy)\cos(xyz)} \\
 \text{b) } dz &= \frac{(1-y)dx - xdy}{2(1+e^{2z})} \\
 d^2z &= -\frac{\left[ (y-1)^2 e^{2z} dx^2 + 2\left( (1+e^{2z})^2 + e^{2z}x(y-1) \right) dx dy + x^2 e^{2z} dy^2 \right]}{2(1+e^{2z})^3} \\
 \text{c) } z'_x(1,1,1) &= -1, \quad z'_y(1,1,1) = 8
 \end{aligned}$$

**14**

Calcular el valor de la diferencial,  $dz$ , para las funciones siguientes, en el punto indicado:

- a)  $z = f(x, y) = x^3 + xy^2$ , en el punto  $(-1, 2)$   
 b)  $z = f(x, y) = x \sin y + y \sin x$ , en el punto  $(0, 0)$

Solución:

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

a)  $dz|_{(-1,2)} = 7 \cdot dx - 4 \cdot dy$

b)  $dz|_{(0,0)} = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0$

**15**

- a) Utilizar la diferencial primera para aproximar la variación de la función  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  cuando  $(x, y)$  varía desde el punto  $(1,1)$  hasta el punto  $(1.01, 0.97)$ . Comparar esta aproximación con la variación exacta de  $z$ .
- b) Obtener el valor aproximado de  $(-1.05)^2 + (3.03)^2$  utilizando la diferencial primera de la función  $z = x^2 + y^2$ .
- c) Utilizar la diferencial primera de una función para aproximar el valor de  $\sqrt[4]{1.01} \cdot \sqrt[5]{31.98}$ .
- d) El radio  $r$  y la altura  $h$  de un cilindro circular recto se miden con un error posible del 4 por 100 y 2 por 100, respectivamente. Aproximar el error porcentual máximo al medir el volumen, utilizando la diferencial.
- e) Se mide el radio y la altura de un cono circular recto con errores, a lo más, 3% y 2% respectivamente. Utilice incrementos para aproximar el porcentaje máximo de error que se puede cometer al calcular el volumen del cono si se utilizan estas medidas (la fórmula es  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ )

Solución:

a)  $\Delta z = f(1.01, 0.97) - f(1, 1) \cong dz|_{(1,1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0.01 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = 0.0141$

b)  $(-1.05)^2 + (3.03)^2 \cong (-1)^2 + 3^2 + (-2) \cdot (-0.05) + 6 \cdot (0.03) = 10.28$

c)  $\sqrt[4]{1.01} \cdot \sqrt[5]{31.98} \cong \sqrt[4]{1} \cdot \sqrt[5]{32} + \frac{1}{2} \cdot (0.01) + \frac{1}{80} \cdot (-0.02) = 2.00475$  d) 10%

e) El máximo porcentaje de error al calcular el volumen es de aproximadamente 8%.

**16**Se considera  $f(x, y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ . Se pide:

- a) Representa el dominio de la función  $f(x, y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$
- b) Determina las curvas de nivel de  $f(x, y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$  y represéntalas
- c) Calcula la derivada direccional de  $f(x, y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$  en el punto  $(5, 8)$  en cualquier dirección  $\vec{u}$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

- d) Demuestra que el vector gradiente a  $f(x, y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$  en un punto  $(a, b)$  de su dominio es ortogonal a la curva de nivel que pasa por el punto  $(a, b)$ .
- e) Calcula la recta tangente a la curva intersección de la superficie definida por  $f(x, y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$  y el plano que es perpendicular a  $z=0$  y contiene a la recta que pasa por  $(5, 8, 0)$  y tiene por vector director  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ . Justifica la respuesta.

Solución: a)



El dominio es la región del plano sombreada en la figura

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > -1, y > 2 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < -1, y < 2 \right\}$$

b) Rectas:  $y = \frac{1}{e^k}(x+1) + 2$

c)  $D_u f = \frac{1}{6} \cos \varphi - \frac{1}{6} \sin \varphi$  siendo  $u = (\cos \varphi, \sin \varphi)$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

d) El vector gradiente en el punto  $(a,b)$  es  $\nabla f(a,b) = \left( \frac{1}{a+1}, \frac{1}{2-b} \right)$ , luego está contenido en la recta de pendiente  $m = \frac{a+1}{2-b}$ . La curva de nivel que pasa por el punto  $(a,b)$  es la recta de pendiente  $m' = \frac{b-2}{a+1}$ , siendo  $m \cdot m' = -1$ .

e) La ecuación de la recta pedida en paramétricas es:

$$r \equiv \left\{ x = 5 + \frac{1}{2}t, \quad y = 8 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad z = 0 + \frac{1-\sqrt{3}}{12}t \right\}$$

**17**

a) Determinar los extremos relativos y los puntos de silla, si existen, de las siguientes funciones:

a.1)  $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 20$

a.2)  $z = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$

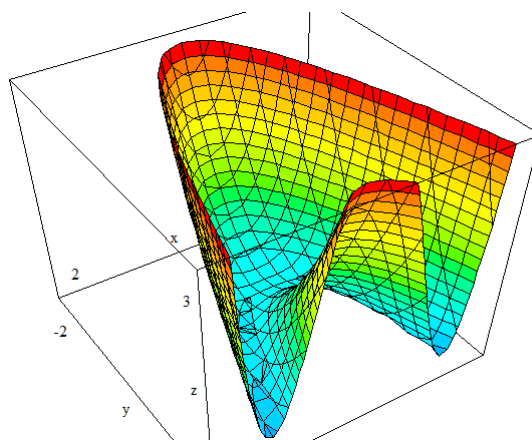
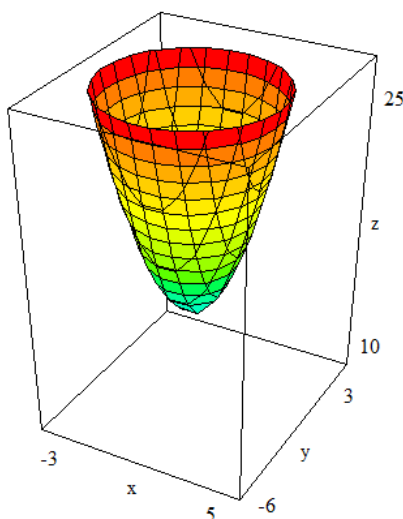
a.3)  $z = x^3 + y^2 + yx^2 + 2y + 1$

a.4)  $f(x,y) = x^2y + 2y^2x - 2xy$ .

b) Estudiar los extremos relativos de  $f(x,y) = x^2(y+1)$  en el conjunto  $x^2 + y^2 < 1$ .

Solución:

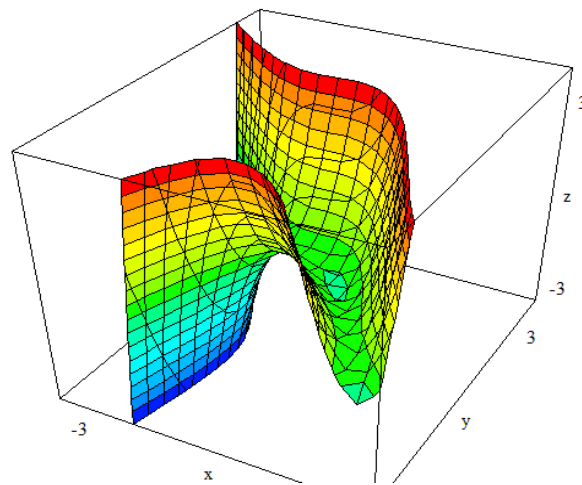
a.1)  $f(1,-2) = 15$  es un mínimo relativo. a.2)  $f(0,0) = 0$  es un mínimo relativo.



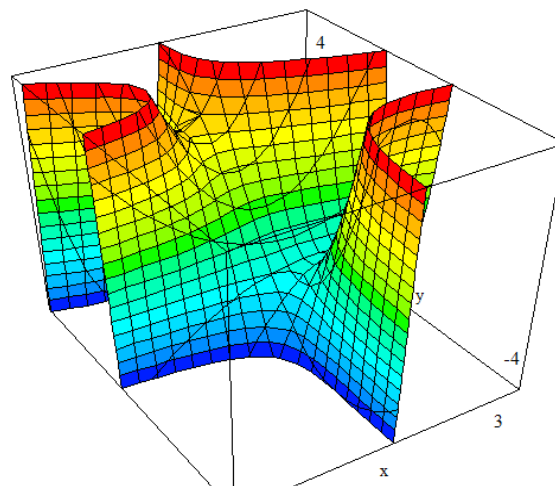
a.3)  $f\left(1, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$  es un mínimo relativo. Además, hay dos puntos de silla en

$$P_1(0,-1) \quad y \quad P_2(2,-3)$$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

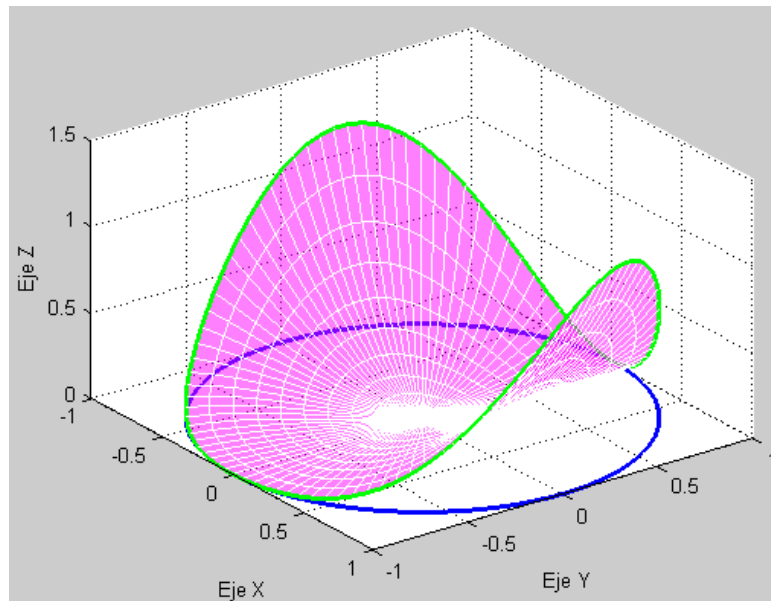


a.4)



b) La gráfica de la función es:



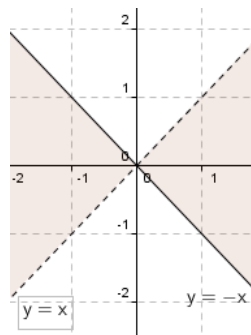
**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.****Ejercicios resueltos****1**

Representar el dominio de la función  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} e^{\frac{x+y}{x-y}}$

Solución: El dominio es el conjunto de los puntos

$$\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-y)(x+y) \geq 0, x \neq y\}$$

es decir, los puntos del plano comprendidos entre las rectas  $x = y$ ,  $x = -y$  salvo los de la recta  $x = y$ , gráficamente



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.****2**

Dada las superficies

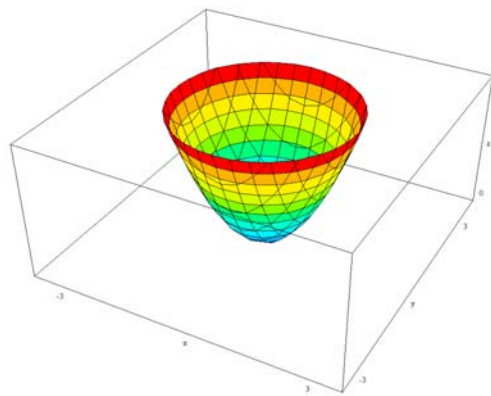
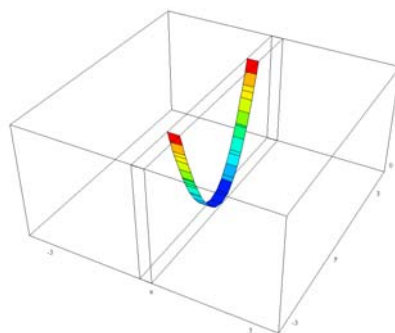
(1)  $z = x^2 + y^2$

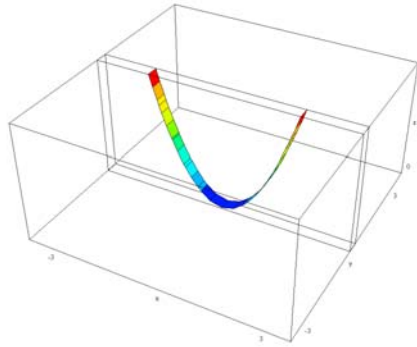
(2)  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9}$

Se pide:

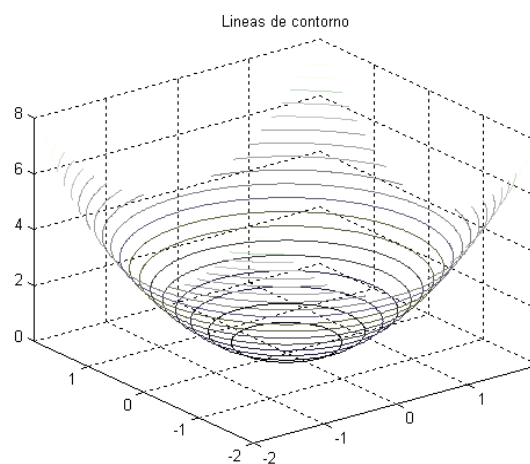
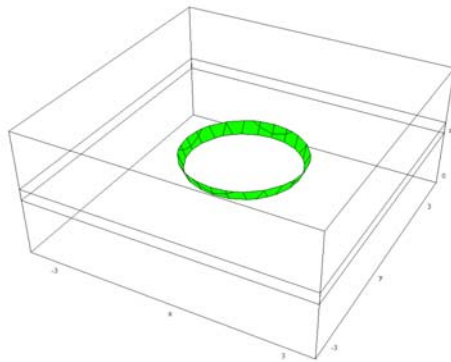
- (a) Obtener las trazas
- (b) Obtener las curvas de nivel
- (c) Realizar un bosquejo de su gráfica

Solución: (a) Se trata de un paraboloides

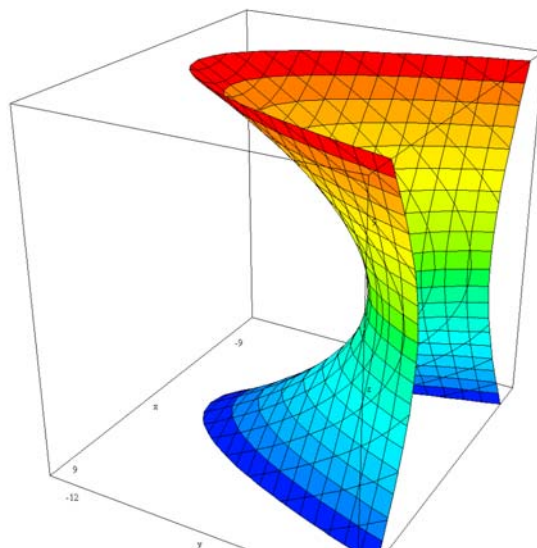
Al cortar por planos  $x=cte$ : Parábolas  $z = cte + y^2$ Al cortar por planos  $y=cte$ : Parábolas  $z = x^2 + cte$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

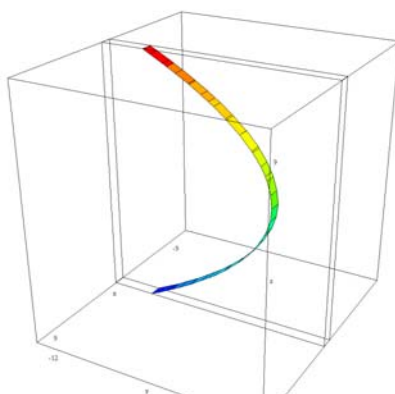
Al cortar por planos  $z=cte$  (curvas de nivel): Circunferencias  
 $Cte = x^2 + y^2$  ( $Cte > 0$ )



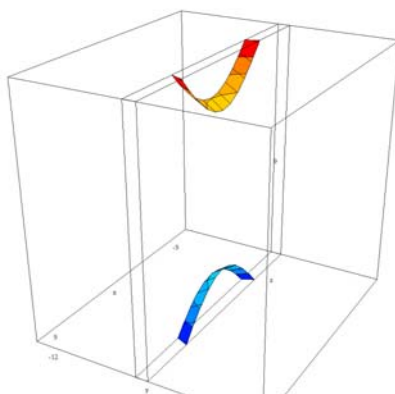
(2) Se trata de un hiperboloide

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

Curvas  $x = cte$ : Parábolas  $y = Cte - \frac{z^2}{9}$

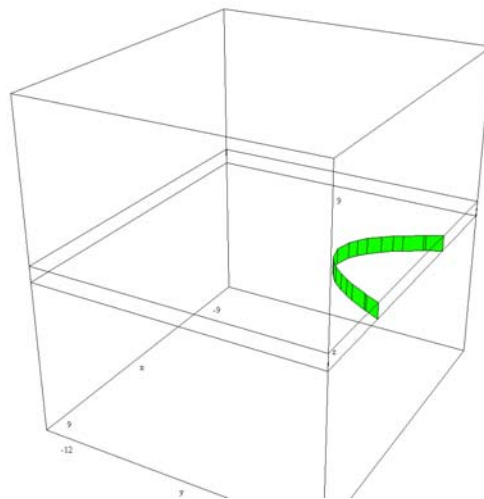


Curvas  $y = cte$ : Hipérbolas  $Cte = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9}$



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

Curvas  $z = cte$ : Parábolas  $y = \frac{x^2}{4} - Cte$

**3**

Estudiar la continuidad en todo  $\mathbb{R}^2$  de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{\arctg(3xy - 6)}{xy - 2} \quad \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|}{|x| + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución:

a) Esta función debe estudiarse en los puntos de la curva  $xy = 2$ , porque en ellos se produce una indeterminación de la forma  $\frac{0}{0}$ .

Para resolver esta indeterminación calcularemos el límite doble, utilizando la equivalencia:  $\arctg x \underset{x \rightarrow 0}{\approx} x$

que aplicada a nuestra función se traduce en:  $\arctg(3xy - 6) \underset{xy \rightarrow 2}{\approx} 3(xy - 2)$

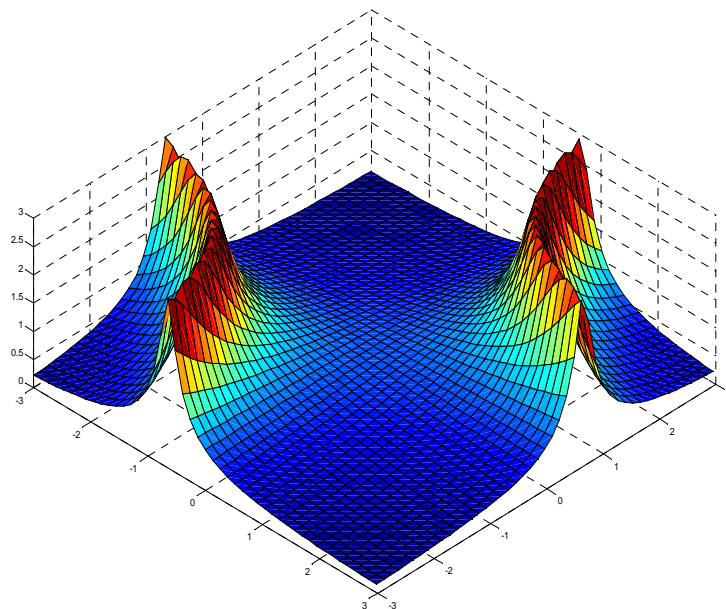
Por lo tanto,

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ ab=2}} \frac{\arctg(3xy-6)}{xy-2} \approx \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ ab=2}} \frac{(3xy-6)}{xy-2} = 3$$

Si se define de nuevo la función como  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctg(3xy-6)}{xy-2}, & xy \neq 2 \\ 3, & xy = 2 \end{cases}$

Resulta una función continua en  $\mathbb{R}^2$ , como se aprecia en la gráfica.



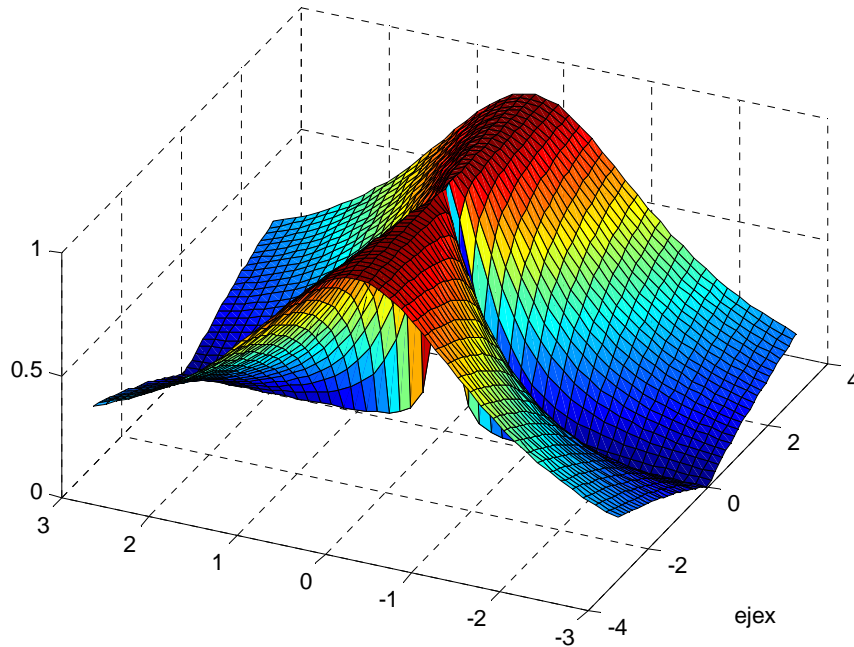
b) Esta función debe estudiarse en  $(0,0)$ , puesto que es el único punto que anula el denominador. Calculamos el límite doble,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x>0}} \frac{|x|}{|x|+y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x>0}} \frac{x}{x+y^2} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|}{|x|+y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x<0}} \frac{-x}{-x+y^2} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{-x} = 1$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x=0)}} \frac{|x|}{|x|+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0+y^2} = 0$$

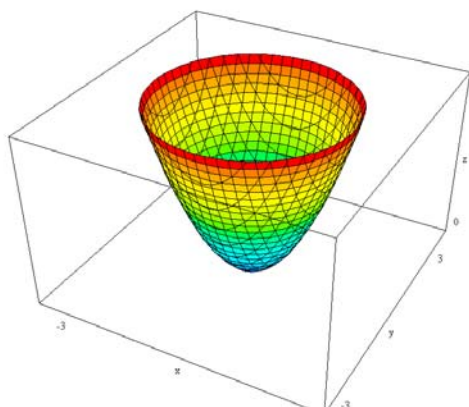
Por lo tanto, la función no es continua en  $(0,0)$ , puesto que el límite depende de la dirección de aproximación al origen, como se aprecia en la figura.

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

4

El conjunto de los puntos  $(x,y)$  con  $0 \leq x \leq 5$ ,  $0 \leq y \leq 5$  es un cuadrado colocado en el primer cuadrante del plano XY. Supongamos que se caliente ese cuadrado de tal manera que  $T(x,y) = x^2 + y^2$  es la temperatura en el punto  $P(x,y)$ . ¿En qué sentido se establecerá el flujo de calor en el punto  $P_0(2,5)$ ?

Solución:



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

*Indicación:* El flujo de calor en la región está dado por una función vectorial  $C(x, y)$  porque su valor en cada punto depende de las coordenadas de éste. Sabemos por física que  $C(x, y)$  será perpendicular a las curvas isotermas  $T(x, y) = c$  donde  $c$  es constante. El gradiente y todos sus múltiplos verifican esta condición. En esta situación nos dice la física que  $C = -K\nabla T$  donde  $K$  es una constante positiva (llamada conductividad térmica). Nótese que la razón del signo negativo es que el calor fluye desde puntos de mayor temperatura a puntos de menor temperatura.

Solución:

Como  $T(3, 4) = 25$  el punto  $P$  está en la isoterma  $T(x, y) = 25$ , que es un cuadrante de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 25$ . Sabemos que el flujo de calor en  $P_o(2, 5)$  es  $C_o = -K\nabla T_o$ .

Como  $\nabla T = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$  se tiene que  $\nabla T_o = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ . Así el flujo de calor en  $P_o$  es:  $C_o = -K(6\vec{i} + 8\vec{j})$ . Como la conductividad térmica es positiva se puede afirmar que el calor fluye en  $P_o$  en el sentido del vector unitario:

$$\vec{u} = \frac{-(6\vec{i} + 8\vec{j})}{\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2}} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

**5** Hallar  $a$  y  $b$  para que la derivada direccional máxima de la función  $e^{ax+by} \cos(x+y) - z = 0$  en el punto  $(0, 0)$  sea  $3\sqrt{2}$  en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante

Solución:

La función  $z = e^{ax+by} \cos(x+y)$  es continua por ser composición de funciones continuas y es diferenciable por ser las derivadas parciales continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ :

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = ae^{ax+by} \cos(x+y) - e^{ax+by} \sin(x+y)$$

$$z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = be^{ax+by} \cos(x+y) - e^{ax+by} \sin(x+y)$$



**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

Esto significa que la derivada direccional en un punto siguiendo una dirección se puede obtener como el producto escalar de la dirección por el gradiente en el punto considerado.

$$D_u f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), u \rangle = 3\sqrt{2}$$

Por otro lado el gradiente nos marca la dirección donde la derivada direccional es máxima que en este caso es además la bisectriz del primer cuadrante luego en este caso:

$$\|\nabla f(0,0)\| = 3\sqrt{2} \quad u = \frac{1}{\|\nabla f(0,0)\|} \nabla f(0,0) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Calculando el gradiente en el origen:

$$\nabla f(0,0) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

se tiene que cumplir que:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{2} \quad u = \left( \frac{a}{3\sqrt{2}}, \frac{b}{3\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow a = b$$

Por lo tanto, resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones:  
 $a = b = 3$

6

De una función  $z = f(x, y)$  diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$  se sabe que el plano tangente a  $f(x, y)$  en el punto  $(1, 2)$  es:  $2x + 3y + 4z = 1$ . ¿Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de  $f$  en la dirección que une el punto  $(1, 2)$  con el punto  $(3, 4)$ ? Justificar la respuesta.

Solución:

La dirección en la que nos piden calcular la derivada direccional es:

$$v = (3-1, 4-2) = (2, 2) \Rightarrow u = \frac{v}{\|v\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Como el plano tangente en el punto  $(1, 2)$  es

$$2x + 3y + 4z = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + z = \frac{1}{4} \quad (I)$$

que corresponde a la ecuación

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2) = z - f(1,2) \quad (\text{II})$$

se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{-1}{2} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{-3}{4}$$

sin más que igualar los coeficientes en las dos expresiones (I) y (II).

Luego la derivada direccional pedida es:

$$D_u(f, (1,2)) = \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \right), u \right\rangle = \left\langle \left( \frac{-1}{2}, -\frac{3}{4} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = \frac{-5}{4\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{2}}{8}$$

7

Sea  $u = x^4 y + y^2 z^3 + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$  donde

$$\begin{cases} x = 1 + rse^t \\ y = rs^2 e^{-t} \\ z = r^2 s \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Calcular  $\frac{\partial u}{\partial s}$  cuando  $r=2, s=1, t=0$  sabiendo que  $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$

Solución.-

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \\ &= \left( 4x^3 y + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{y} \right) re^t + \left( x^4 + 2yz^3 + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \frac{-x}{y^2} \right) 2rse^{-t} + 3y^2 z^2 r^2 \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Para  $r=2, s=1, t=0$  se tiene que  $x=3, y=2, z=0$ . Sustituyendo estos valores en la expresión anterior, así como  $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$ , resulta que  $\frac{\partial u}{\partial s} = 758$ .

8

Calcular la expresión de las derivadas parciales respecto de "x" e "y" de la función:

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

$$\omega = f(g(x^2) + h(y), g(x)h(y))$$

Considerando que  $g$  y  $h$  son funciones derivables y que  $f$  es una función diferenciable.

Solución:

Se trata de calcular las derivadas parciales de  $\omega = f(u, v)$  siendo

$$u = g(x^2) + h(y) \quad v = g(x)h(y)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial u} g'(x^2) 2x + \frac{\partial \omega}{\partial v} g'(x) h(y)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u} h'(y) + \frac{\partial \omega}{\partial v} g(x) h'(y)$$

9

Determine los puntos críticos de la siguiente función y clasifíquelos:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

Solución:

Para determinar los puntos críticos se plantea la condición necesaria de extremo local. Los puntos que cumplan estas condiciones necesarias son los puntos críticos de la función.

*Condición necesaria*

$$\nabla f(x, y) = (0, 0)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1.$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3y^2 - 12 = 0 \rightarrow 3y^2 = 12 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \sqrt{4} = \pm 2.$$

Los puntos que anulan las derivadas son los que resultan de combinar los dos posibles de  $x$  que anulan la derivada parcial respecto a  $x$  con los dos valores de  $y$  que anulan la derivada parcial respecto a  $y$ :

$$(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$$

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

Para clasificar estos puntos críticos como máximos locales, mínimos locales o puntos de silla se pasa a estudiar las condiciones suficientes de máximo o mínimo local, condiciones de segundo orden, pues sólo son suficientes para aquellos puntos que previamente hubiesen anulado el gradiente de la función (condición de primer orden).

*Condición suficiente*

Para estudiar estas condiciones se debe estudiar el signo de la forma cuadrática representada por la matriz hessiana de la función en cada uno de los puntos críticos. En general, para cualquier punto  $(x, y) \in D_f$  (dominio de  $f(x, y)$ ) se tiene que

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

- En el  $(1, 2)$  se tiene

$$Hf(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, H_1 = |6| = 6 > 0, H_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 72 > 0.$$

La función alcanza un mínimo local estricto en el punto  $(1, 2)$ .

- En el  $(1, -2)$  se tiene

$$Hf(1, -2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = |6| = 6 > 0, H_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -72 < 0.$$

El punto  $(1, -2)$  es un punto de silla.

- En el  $(-1, 2)$  se tiene

$$Hf(-1, 2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = |-6| = -6 > 0, H_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -72 < 0.$$

El punto  $(-1, 2)$  es un punto de silla.

- En el  $(-1, -2)$  se tiene

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

$$Hf(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = |-6| = -6 < 0, H_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 72 > 0.$$

La función alcanza un máximo local estricto en el punto  $(-1, -2)$ .

**10**

Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 3 = 0$ , en el punto  $(a, b, c)$ .

Solución:

La ecuación del plano tangente viene dada por

$$F'_x(a, b, c)(x - a) + F'_y(a, b, c)(y - b) + F'_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

$$F'_x = \frac{2x}{a^2} \rightarrow F'_x(a, b, c) = \frac{2}{a} ; F'_y = \frac{2y}{b^2} \rightarrow F'_y(a, b, c) = \frac{2}{b} ; F'_z = \frac{2z}{c^2} \rightarrow F'_z(a, b, c) = \frac{2}{c}$$

sustituyendo tendremos

$$\frac{2}{a}(x - a) + \frac{2}{b}(y - b) + \frac{2}{c}(z - c) = 0$$

simplificando

$$bcx + acy + abz - 3abc = 0$$

La ecuación de la recta normal viene dada por

$$F'_x(a, b, c)(x - a) + F'_y(a, b, c)(y - b) + F'_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

en este caso,

$$F'_x(a, b, c)(x - a) + F'_y(a, b, c)(y - b) + F'_z(a, b, c)(z - c) = 0$$