Prácticas Matlab

Práctica 9 (30/11/2012)

Objetivos

- Determinar las derivadas parciales de una función de forma simbólica.
- Representar el campo gradiente junto con las curvas de nivel. Analizar geométricamente algunas propiedades del gradiente.

Comandos de Matlab

1.- Para dibujar vectores en el plano a partir de las coordenadas de los puntos iniciales y finales

```
quiver(pix,piy,pfx,pfy)
```

Ejemplo:

```
>> [X,Y]=meshgrid(-1:0.5:1);
>> U=2*X;V=-X+Y;
>> quiver(X,Y,U,W)
```

2.- Para calcular el gradiente de una matriz utilizando hx y hy como distancia entre los puntos en la dirección x e y respectivamente

```
gradient(Z,hx,hy)
```

Ejemplo:

```
>>[X,Y] = meshgrid(-2:.2:2, -2:.2:2);
>> Z = X .* exp(-X.^2-Y.^2);
>>[px,py] = gradient(Z,.2,.2);
```

3- Para etiquetar las curvas de nivel

```
clabel(c,h)
```

Ejemplo:

```
>> [X,Y]=meshgrid(-1:0.5:1);
>> Z=X+Y;
>>[c,h]=contour(X,Y,Z);
>>clabel(c,h)
```

Ejercicios

1

Cálculo de la derivada parcial en forma simbólica

Dada la función $f(x,y) = sen(xy) + \cos(xy^2)$ se pide calcular:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

Recuerda que las derivadas parciales de segundo orden se definen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}(x,y) = f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

(b) Comprueba que se verifica el teorema de Schwarz en $\mathbb{R}^2$

Indicaciones

Utiliza el comando `diff` para calcular las derivadas parciales. Por ejemplo para obtener las derivadas de primer orden las instrucciones serán:

```
syms x y
f=sin(x*y)+cos(x*y^2);
fx=diff(f,1,x)
fy=diff(f,1,y)
```

2

El vector gradiente y la curvas de nivel

Considerar la función $z = f(x,y) = -3x^2 - 4y^2$ sobre la región $D = \{(x,y) / -3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3\}$.

(a) Calcula el vector gradiente en dicho punto.

(b) Representa la superficie S que es gráfica de la función f en una figura.

(c) Representa en otra figura la curva de nivel que pasa por el punto $P(1,2)$ y el vector gradiente en dicho punto $\vec{v} = \nabla f(1,2)$.

(d) Comprueba gráficamente que el vector gradiente, $\vec{v} = \nabla f(1,2)$, es ortogonal a la curva de nivel que pasa por el punto $P(1,2)$. Para ello representa el vector tangente a la curva de nivel en la misma figura que has utilizado en el apartado (c).

(e) Dibujar en la otra figura distintas curvas de nivel y en cada punto de la malla utilizada para representar la función los vectores tangentes y vectores perpendiculares a ellos.

Indicaciones

a) Utilizar el comando `diff` para calcular las componentes del vector gradiente en cualquier punto (x,y) y el comando `subs` para particularizar de este vector en el punto P(1, 2).

```
syms x y
a=1;
b=2;
f=-3*x^2-4*y^2;
fx=diff(f,x);
fy=diff(f,y);
gx=subs(fx,{x,y},{a,b});
gy=subs(fy,{x,y},{a,b});
```

b) Puedes utilizar el comando `surf` para representar la superficie S.

```
[X,Y]=meshgrid(-3:0.2:3,-3:0.2:3);
Z=-3*X.^2-4*Y.^2;
figure(1)
surf(X,Y,Z)
```

c) Representamos varias curvas de nivel. La correspondiente al valor $c = f(1,\ 2)$ será la que pasa por el punto $P(1,\ 2)$

```
figure(2)
c=subs(f,{x,y},{a,b});
valores=c-12:4:c+12;
hold on
```

```
cn=contour(X,Y,Z,valores)
clabel(cn)
axis equal
%Representamos el punto
plot(a,b,'o')
%Representación del vector gradiente normalizado
modulo=sqrt(gx^2+gy^2);
quiver(a,b,gx/modulo,gy/modulo)
```

d) Para representar el vector tangente

```
%Representación de un vector tangente a la curva de nivel
quiver(a,b,-gy/modulo,gx/modulo)
```

e) Puedes utilizar el comando gradient para calcular el gradiente en cada punto de la malla y el comando quiver para representar los vectores gradientes y los vectores tangentes a las curvas de nivel en los puntos de la malla utilizada para represenar la función

```
figure(3)
cn=contour(X,Y,Z,10)
clabel(cn,'manual')
axis equal
[gxt,gyt]=gradient(Z,0.3,0.3)
hold on
quiver(X,Y,gxt,gyt)
quiver(X,Y,-gyt,gxt)
```

3

El vector gradiente y la derivada direccional

Consideramos la función $z = f(x,y) = -2x^2 - 4y^2$.

(a) Calcula las derivadas direccionales de la función en el punto $P(1,2)$ en las direcciones siguientes:

a. del vector $\vec{u} = (\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi))$ para $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

b. del vector $\vec{v} = \nabla f(1,2)$

c. del vector $\vec{w}$ que une los puntos $P(1,2)$ con $R(3,5)$

(b) **Resultado**: Demuestra que si $z = f(x,y)$ es una función continua en un punto (a,b) que tiene derivadas parciales primeras en dicho punto, siendo al menos una de ellas continua en (a,b), la derivada direccional máxima de $f(x,y)$ en el punto (a,b) se alcanza en la dirección del gradiente.

(c) Calcula la derivada direccional máxima de $z = f(x,y) = -2x^2 - 4y^2$ en el punto $P(1,2)$.

(d) **El resultado del apartado (b) indica que situados en el punto**

(a,b) **se alcanzaría el valor máximo de z más rápidamente si en principio nos movemos en la dirección del vector gradiente de la función en dicho punto,** $\nabla f(a,b)$.

Teniendo en cuenta este resultado pretendemos alcanzar el valor máximo de la función $z = f(x,y) = -2x^2 - 4y^2$ describiendo una trayectoria que empiece en el punto $P(1,2)$ y que nos lleve siempre por la máxima pendiente de f.

Como primera aproximación a este idea realizaremos los siguientes pasos:

a. Desde el punto $P(1,2)$ nos movemos en la dirección del vector gradiente $\vec{u} = \nabla f(1,2)$ una distancia determinada para llegar al punto Q. En ese punto nos planteamos nuevamente elegir la dirección que nos proporcionaría el máximo crecimiento de f que será $\overrightarrow{v_1} = \nabla f(Q)$

b. Considerando ahora el punto de partida Q y la dirección $\overrightarrow{v_1} = \nabla f(Q)$ repetiríamos el proceso.

Nota: La trayectoria que seguiría P si se moviera de forma continua en la dirección de máximo crecimiento de la función es la curva de ecuación: $x(t) = e^{-4t},\ y(t) = 2e^{-8t}$

a) Como la función y sus derivadas parciales son continuas, la derivada direccional se puede calcular como el producto escalar del gradiente por la dirección. Para el primer caso, se tendrá:

```
phi=pi/3;
u1=cos(phi);
u2=sin(phi);
%Si en gx, gy almacenamos las coordenadas del gradiente
%en el punto
ddirec=gx*u1+gy*u2
```

b) La derivada direccional máxima se alcanza en la dirección del gradiente y su valor es su módulo.

```
ddirecMax=sqrt(gx^2+gy^2)
```

c) Demostración:

d) Podemos utilizar el siguiente código:

```
%Definimos la función
syms x y
f=-2*x^2-4*y^2;
%Dibujamos 10 curvas de nivel
[X,Y]=meshgrid(-2.5:0.2:2.5,-2.5:0.2:2.5);
Z=-2*X.^2-4*Y.^2;
contour(X,Y,Z,10);
axis equal
%Elegimos como punto de partida P y lo dibujamos
%junto con el punto (0,0)
a=1;
b=2;
hold on
plot(a, b,'o')
plot(0,0,'o')
%******************** Pasos ********************
%La función maxpend calcula el punto Q resultado de
%avanzar una distancia alfa desde el punto (a,b) siguiendo
%la dirección del gradiente de f en el punto (a,b).
[a1,b1]=maxpend(a,b,0.8)
%Desde el punto obtenido volvemos a realizar
%el mismo proceso
[a1,b1]=maxpend(a1,b1,0.5)
%******************** Trayectoria **************
%Si este proceso se hiciera de forma continua
%describiríamos la siguiente curva
t=0:0.1:10;
xt=exp(-4*t);
yt=2*exp(-8*t);
plot(xt,yt,'Color',[0.87,0.49,0],'LineWidth',2)
```

Resumen de comandos

Estos son los comandos utilizados en esta práctica que se darán por conocidos en las prácticas siguientes y que conviene retener porque se podrán preguntar en las distintas pruebas de evaluación.

- Para calcular la derivada de una función `diff`
- Para sustituir en una expresión simbólica as variables por otros valores `subs`
- Para obtener el gradiente númerico `gradient`
- Para dibujar un vector en el plano `quiver`
- Para representar una función de dos variables `surf`
- Para representar las curvas de nivel `contour`
- Para etiquetar las curvas de nivel `clabel`