Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación

EJERCICIOS RESUELTOS DE INTERPOLACION NUMERICA

Profesor: Jaime Álvarez Maldonado — Ayudante: Rodrigo Torres Aguirre

1) *Probar que si g interpola a la función f en $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ y h interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n$, entonces a la función $g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x))$ interpola a f en $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ (notar que h y g no necesitan ser polinomios).

<u>Sol:</u>

Sea $F(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_i - x_0}(g(x) - h(x))$ en los nodos x_i, i=1,..., n-1 se tiene

$g(x_i) - h(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$, por lo tanto $F(x_i) = g(x_i) = f(x_i), x_i \; \forall\, i = 1, .., n-1$

Con i=0 ➔ $F(x_0) = g(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0}\left(g(x_0) - h(x_0)\right) = g(x_0) = f(x_0)$.

Con i=n

➔$F(x_n) = g(x_n) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}\left(g(x_n) - h(x_n)\right) = g(x_n) + (-1)\left(g(x_n) - h(x_n)\right) = h(x_n) = f(x_n)$.

2) Se sabe que $H_4(x) = 4 + 3(x+1) - 2(x+1)^2 + \frac{3}{2}(x+1)^2(x-1) - \frac{1}{2}(x+1)^2(x-1)^2$ es el polinomio de interpolación de Hermite de cierta función f ,basado en los datos $f(-1), f'(-1), f(1), f'(1) y\, f''(1)$.

a) Sin evaluar $H_4(x)$ ni sus derivadas en -1 y 1, completar la tabla de diferencias divididas con repetición utilizada en la construcción de $H_4(x)$.

-1	4				
-1	$f[-1]$	3			
1	$f[1]$	$f[-1{,}1]$	-2		
1	$f[1]$	$f[1{,}1]$	$f[-1{,}1{,}1]$	3/2	
1	$f[1]$	$f[1{,}1]$	$f[1{,}1{,}1]$	$f[-1{,}1{,}1{,}1]$	-1/2

b) Sin evaluar $H_4(x)$ ni sus derivadas en -1 y 1, determinar los valores de $f'(-1),\; f(1),\; f'(1)\; y\; f''(1)$.

<u>Sol:</u>

a) Hermite es un método de interpolación en que se involucran las derivadas de la función. Entonces;

Si x=-1 ➔ $f[-1]$= 4 y como el -1 se repite 1 vez, la diferencia dividida entre estos 2 primeros datos dará la primera derivada de la función, es decir;

$f'[-1] = f[-1,-1] = 3$

Ahora se pueden empezar a hacer relaciones entre los datos que se dan, y las incógnitas.

Por lo tanto;

$\frac{f[-1,1]-3}{1--1} = -2$ ➔ $f[-1,1] = -1$

$\frac{f[1]-f[-1]}{1--1} = -1$ ➔ $\frac{f[1]-4}{1--1} = -1$ ➔ $f[1] = 2$

$\frac{f[-1,1,1]+2}{1--1} = \frac{3}{2}$ ➔ $f[-1,1,1] = 1$

$\frac{f[-1,1,1,1]-3/2}{2} = -\frac{1}{2}$ ➔ $f[-1,1,1,1] = 1/2$

$\frac{f[1,1,1]-1}{2} = \frac{1}{2}$ ➔ $f[1,1,1] = 2$

$\frac{f[1,1]+1}{2} = 1$ ➔ $f[1,1] = 1$

Entonces al reemplazar los resultados obtenidos en la tabla, quedara así;

-1	4				
-1	4	3			
1	2	-1	-2		
1	2	1	1	3/2	
1	2	1	2	1/2	-1/2

b) Los valores de $f'(-1)$, $f(1)$, $f'(1)$ y $f''(1)$, estan dados por;

$f[1] = 2 = f(1)$

$f[-1,-1] = 3 = f'(-1)$

$f[1,1] = 1 = f'(1)$

$f[1,1,1] = 2 = f''(1)$

En la tabla los valores pedidos están en los lugares;

-1	4				
-1	$f(-1)$ =4	3			
1	$f(1)$ =2	-1	-2		
1	$f(1)$ =2	$f'(1)$ =1	1	3/2	
1	$f(1)$ =2	$f'(1)$ =1	$f''(1)$ =2	1/2	-1/2

3) Utilizar el método de Hermite para hallar un polinomio P(x) de grado 2 que satisfaga: p(1)= 0, p' (1) = 7, p(2) = 10 .

Sol:

Como existe la derivada del polinomio p(x), quiere decir que el método a utilizar es el de Hermite (en el caso de que no nos dijeran el método a utilizar), entonces la tabla quedaría de la forma;

X	P(x)		
1	0		
1	0	7	
2	10	P [1,2]=10	P [1,1,2]=3

P [1,2]= 10/1

P [1, 1,2]= (10-7)/1 = 3

El polinomio de interpolación quedaría expresado de la forma

P(x)=7(x-1)+3$(x-1)^2$

$\boxed{P(x)=3x^2+x-4}$ ➔ satisface las condiciones de p(1)= 0, p' (1) = 7, p(2) = 10 .

4) Dada una función $f \in C^3(IR)$ y los nodos $x_0 = a - h_1,\ x_1 = a,\ x_2 = a + h_2$, con $h_i > 0, i = 1{,}2$ y $a \in IR$, se pide:

a) Construir el polinomio de interpolación $p(x)$ de $f(x)$ con los nodos dados.

b) Utilizando $p(x)$ obtener la formula

$$f''(a) \approx \frac{2}{h_1+h_2}\left[\frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2} - \frac{f(a)-f(a-h_1)}{h_1}\right]$$

c) Calcular la expresión de error de la formula anterior.

Sol:

a) Construimos nuestra tabla:

x	$f(x)$		
$x_0 = a - h_1$	$f(a-h_1)$		
$x_1 = a$	$f(a)$	$\frac{f(a)-f(a-h_1)}{a-(a-h_1)}$	
$x_2 = a + h_2$	$f(a+h_2)$	$\frac{f(a+h_2)-f(a)}{a+h_2-a}$	$\frac{\frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}-\frac{f(a)-f(a-h_1)}{h_1}}{a+h_2-(a-h_1)}$

Entonces el polinomio de interpolación es;

$$\boxed{\begin{aligned} P_2(x) = {} & f(a-h_1) + \frac{f(a)-f(a-h_1)}{h_1} * (x-a+h_1) \\ & + \frac{1}{h_2+h_1}\left[\frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2} - \frac{f(a)-f(a-h_1)}{h_1}\right] * (x-a+h_1) * (x-a) \end{aligned}}$$

b) Como la intención del los métodos de interpolación es aproximar una función por medio de un polinomio, entonces $f(x_i) \cong P(x_i), \forall\, i, i = 1,2,\dots,n$

Por lo tanto, se puede rescatar que $P''(x_i) \cong f''(x_i) \Rightarrow P''(a) \cong f''(a)$

Entonces;

Si α, β, γ son constantes.

$\alpha = f(a - h_1)$

$$\beta = \frac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1}$$

$$\gamma = \frac{1}{h_2 + h_1}\left[\frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} - \frac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1}\right]$$

El polinomio de interpolación quedaría expresado así;

$$P_2(x) = \alpha + \beta * (x - a + h_1) + \gamma * (x - a + h_1) * (x - a)$$

Al desarrolla el polinomio se obtiene;

$$P_2(x) = \alpha + \beta x - \beta(a + h_1) + \gamma[x^2 - (a + a - h_1)x + a(a - h_1)]$$

$$= \alpha + \beta x - \beta(a + h_1) + \gamma x^2 - \gamma(a + a - h_1)x + \gamma a(a - h_1)$$

La primera derivada es;

$P_2'(x) = \beta + 2x\gamma - \gamma(a + a - h_1)$

La segunda derivada es;

$P_2''(x) = 2\gamma \cong f''(x)$

Entonces se obtiene que;

$$f''(a) \cong \frac{2}{h_2 + h_1}\left[\frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} - \frac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1}\right]$$

c) El error puede expresarse de la siguiente forma;

$E_n(x) = |f(x) - P_n(x)| = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} w_n(x)$;

Con $w_n(x) = \max\left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right|, \quad \forall x \in [a, b]$

$f^{n+1}(\xi) = \max|f^{n+1}(x)|, \ \forall x \in [a, b]$

En nuestro caso, el error es;

$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| = \frac{f^3(\xi)}{3!} w_2(x)$;

Con $w_2(x) = \max\ |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|, \ \forall x \in [x_0, x_2]$

$f^3(\xi) = \max|f^3(x)|, \ \forall x \in [x_0, x_2]$

Entonces, la expresión del error es

$$\boxed{E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| = \frac{\max|f^3(x)|}{6} \max|(x - a + h_1)(x - a)(x - a - h_2)|}$$

4) Sean $P(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-1.5) - 2(x-1)(x-1.5)x$ y

$Q(x) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{5}{3}(x-2)x - 2(x-2)x(x-1.5)$, polinomios de interpolación de $f(x)$ en los nodos señalados.

a) Obtener las tablas de diferencias divididas que dan origen a $P(x) y\ Q(x)$ respectivamente.

b) Estimar $f(1.75)$ usando $P(x) y\ Q(x)$.

<u>Sol:</u>

Como el enunciado del problema nos indica que P y Q interpolan a f, quiere decir que;

$P(x) \cong f(x)$

$Q(x) \cong f(x)$

Lo que nos indica los polinomios son iguales, entonces si evaluamos un punto en P(x), será igual que si lo evaluásemos en Q(x).

⇨ $P(x_i) = Q(x_i), \forall\, i, i = \{0, 1, 1.5, 2\}$

La tabla de diferencias divididas que da origen al polinomio

$P(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-1.5) - 2(x-1)(x-1.5)x$, es;

X	P(x)			
1	3			
1.5	P (1.5)	1/2		
0	P (0)	P [1.5,0]	1/3	
a	P (a)	P[0,a]	P[1.5,0,a]	-2

La tabla de diferencias divididas que da origen al polinomio

$Q(x) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{5}{3}(x-2)x - 2(x-2)x(x-1.5)$, es;

X	Q(x)			
2	5/3			
0	Q (0)	-2/3		
1.5	Q (1.5)	Q [0,1.5]	-5/3	
b	Q (b)	Q [1.5,b]	Q[0,1.5,b]	-2

Si vemos las tablas, la de P(x), esta tiene los puntos {1, 1.5, 0, a} y la de Q(x) tiene {2, 0,1.5, b}. Es evidente que el punto que falta para la tabla de P(x) es 2 y el punto que falta para Q(x) es 1.

Luego para $P(x=1) = 3 = Q(x=1)$ y para $Q(x=2) = 5/3 = P(x=2)$

Por lo tanto $\boxed{b=1 \Rightarrow Q(b=1)=3 \quad y \quad a=2 \Rightarrow P(a=2)=5/3}$

Los coeficientes faltantes para la tabla del polinomio P(x) son (con $P\ (a = 2) = 5/3$);

$\frac{P\ (1.5)-3}{1.5-1} = 1/2 \quad \Rightarrow \quad P\ (1.5) = 13/4$

$\frac{P\ [1.5,0]-1/2}{0-1} = 1/3 \quad \Rightarrow \quad P\ [1.5,0] = 1/6$

$\frac{P\ (0)-P\ (1.5)}{0-1.5} = P\ [1.5,0] \quad \Rightarrow \quad P\ (0) = 3$

$\frac{P\ (a)-P\ (0)}{2-0} = P[0, a] \quad \Rightarrow \quad P[0, a] = -2/3$

$\frac{P[0,a]-P\ [1.5,0]}{2-1.5} = P[1.5,0, a] \quad \Rightarrow \quad P[1.5,0, a] = -5/3$

Los coeficientes faltantes para la tabla del polinomio Q(x) son (con $Q(b = 1) = 3$);

$\frac{Q\ (0)-5/3}{0-2} = -2/3 \quad \Rightarrow \quad Q\ (0) = 3$

$\frac{Q\ [0,1.5]]- -2/3}{1.5-2} = -5/3 \quad \Rightarrow \quad Q\ [0,1.5] = 1/6$

$\frac{Q\ (1.5)-Q\ (0)}{1.5-0} = Q\ [0,1.5] \quad \Rightarrow \quad Q\ (1.5) = 13/4$

$\frac{Q\ (b)-Q\ (1.5)}{1-1.5} = Q\ [1.5, b] \quad \Rightarrow \quad Q\ [1.5, b] = 1/2$

$\frac{Q\ [1.5,b]-Q\ [0,1.5]}{1-0} = Q[0,1.5, b] \quad \Rightarrow \quad Q[0,1.5, b] = 1/3$

Por lo tanto las tablas son:

Tabla de diferencias divididas que da origen a P(x);

X	P(x)			
1	3			
1.5	13/4	1/2		
0	3	1/6	1/3	
2	5/3	-2/3	-5/3	-2

Tabla de diferencias divididas que da origen a Q(x);

X	Q(x)			
2	5/3			
0	3	-2/3		
1.5	13/4	1/6	-5/3	
1	3	1/2	1/3	-2

Obs: Una de las tablas esta invertida con respecto a la otra.

c) Estimar $f(1.75)$ usando $P(x) y\ Q(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1.75) = 2.78125 \\ Q(1.75) = 2.78125 \end{array}\right\} \ P(1.75)=Q(1.75)$$

Era predecible el resultado de ambos por separado, pues estos 2 polinomios interpolan a la misma función, por lo que son iguales.

5) Un polinomio $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, $P_3(0)=1$, $P_3(2)=3$ y $\int_0^2 P_3(x)dx=4$. Averiguar $P_3(1)$.

Sol:

X	$P_3(x)$		
0	1		
1	$P_3(1)$	$P_3(x) - 1$	
2	3	$3 - P_3(x)$	$(3- P_3(x)- P_3(x)+1)/2 = 2- P_3(1)$

$P_3(x)=1+x\,P_3(x) - x+ (2- P_3(x))\,x(x-1)$

$=1 + x\,P_3(1) - x + 2x^2 - 2x - x^2P_3(1) + x\,P_3(1)$

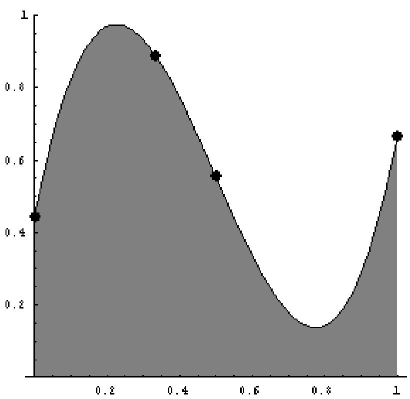
$=1+2x\,P_3(1) + 2x^2 - x^2\,P_3(1) - 3x$ /* $\int_0^2 dx$

$\int_0^2 P_3(x)dx= 2 + 4P_3(1) + (16/3) - (8/3)P_3(1) - 6$

$4=2 + 4P_3(1) + (16/3) - (8/3)\,P_3(1) - 6$

➔ $P_3(1)=2$

6) En la figura izquierda, se representa un polinomio de grado 3 del que se sabe que pasa por los puntos: $\{(0,4/9),(1/3,8/9),(1/2,5/9),(1,6/9)\}$.



Halla el polinomio y comprobar el resultado del apartado anterior.

Sol:

Al ordenar los puntos en una tabla y hacer el proceso de diferencias divididas, quedan;

X				
0	4/9			
1/6	8/9	4/3		
1/2	5/9	-2	-20/3	
1	6/9	2/9	10/3	10

$P_3(x)= (4/9)+ (4x/3)-(20x/3)(x-1/6)+10x(x-1/6)(x-1/2)$ ➔ Polinomio de interpolación de grado 3.

$\Rightarrow \quad P_3(x) = \frac{4}{9} + \frac{47}{9}x - 15x^2 + 10x^3 \quad /*\int_0^1 dx$

$\int_0^1 P_3(x)dx \ = \left[\frac{10}{4}x^4 - 5x^3 + \frac{47}{18}x^2 + \frac{4}{9}\mathrm{x}\right]\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

$\int_0^1 P_3(x)dx = \frac{5}{9}$ ➔ Área bajo la curva del grafico entre 0 y 1

7) Un fabricante de refrigeradores desea saber la densidad del agua, dada cierta temperatura. Sin embargo, solo tiene datos sobre temperaturas distintas a las de interés, como la siguiente tabla:

T[ºC]	Densidad[Kg/m^3]
18	998.5
20	998.2
22	997.7

Le pide su ayuda, porque no sabe qué hacer y necesita calcular la densidad cuando T=20.256ºC.

a) Calcule el polinomio de interpolación por el método de diferencias divididas.

b) Calcule el polinomio de interpolación por el método matricial.

c) Calcule el polinomio de interpolación por el método de Lagrange.

d) Calcule la densidad para T=20.256ºC.

<u>Sol:</u>

a) La tabla de diferencias divididas que da origen al polinomio de interpolación es:

t ºC	$P(t)$		
18	998.5		
20	998.2	-0.15	
22	997.7	-0.25	-0.025

$P_2(t) = 998.5 - 0.15(t-18) - 0.025(t-18)(t-20)$

$\boxed{P_2(t) = -0.025t^2 + 0.8t + 992.2}$ [Kg/m^3]

b) Se entiende que el polinomio es $M_2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

Entonces para:

T=18ºC ➔ $M_2(18) = a_0 + a_1 18 + a_2 18^2 = 998.5$

T=20ºC ➔ $M_2(20) = a_0 + a_1 20 + a_2 20^2 = 998.2$

T=22ºC ➔ $M_2(22) = a_0 + a_1 22 + a_2 22^2 = 997.7$

Las ecuaciones se pasan a matriz;

$$\begin{pmatrix}1 & 18 & 18^2\\ 1 & 20 & 20^2\\ 1 & 22 & 22^2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}998.5\\ 998.2\\ 997.7\end{pmatrix}$$

Después de hacer eliminación gaussiana la matriz, los coeficientes son:

$a_0 = 992.2$

$a_1 = 0.8$

$a_2 = -0.025$

El polinomio de interpolación por el método matricial es:

$\boxed{M_2(t) = 992.2 + 0.8t - 0.025t^2}$

c) Para el método de lagrange se necesita saber de ante mano que, el polinomio de interpolación de lagrange esta dado por la forma:

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} l_i(t)\, f(t_i)$$

$$l_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(t-t_j)}{(t_i-t_j)}$$

Entonces para n=2;

$$L_2(t) = l_0(t)\, f(t_0) + l_1(t)\, f(t_1) + l_2(t)\, f(t_2)$$

$$= \frac{(t-t_1)}{(t_0-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_0-t_2)}\, f(t_0) + \frac{(t-t_0)}{(t_1-t_0)}\frac{(t-t_2)}{(t_1-t_2)}\, f(t_1) + \frac{(t-t_0)}{(t_2-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)}\, f(t_2)$$

$$= \frac{(t-20)(t-22)}{8}\, 998.5 + \frac{(t-18)(t-22)}{4}\, 998.2 + \frac{(t-18)(t-20)}{8} 997.7$$

$$= 124.8125t^2 - 5242.125t + 54917.5 - 249.55t^2 + 9982t - 98821.8 + 124.7125t^2$$
$$-4739.075t + 44896.5$$

El polinomio de interpolación de lagrange es:

$\boxed{L_2(t) = -0.025t^2 + 0.8t + 992.2}$

d) Para calcular la densidad para T=20.256ºC, podemos tomar cualquiera de los 3 polinomios (ya que son iguales) y evaluarlo en t=20.256.

$L_2(t = 20.256) = -0.025(20.256)^2 + 0.8 * 20.256 + 992.2$

$\boxed{L_2(20.256) = 998.1471616\ [\mathrm{Kg}/m^3]}$

Entonces para una temperatura de 20.256ºC la densidad del agua es 998.1471616[Kg/m^3].

8) Aproxime el valor de la función $f(x) = \cos(x), \forall x, x \in [0,2\pi]$ en x=$\frac{5\pi}{4}$ considerando la partición $P = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ y usando el método de las matrices.

Sol:

Necesitamos saber el es el valor de $f(x)$ para cada punto de la partición P.

Entonces:

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x)	1	0	-1	0	1

Como la partición P tiene 5 nodos, el polinomio de interpolación será de grado 4.

$M_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

De forma matricial, los puntos evaluados en el polinomio M será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & (\frac{\pi}{2})^2 & (\frac{\pi}{2})^3 & (\frac{\pi}{2})^4 \\ 1 & \pi & \pi^2 & \pi^3 & \pi^4 \\ 1 & \frac{3\pi}{2} & (\frac{3\pi}{2})^2 & (\frac{3\pi}{2})^3 & (\frac{3\pi}{2})^4 \\ 1 & 2\pi & (2\pi)^2 & (2\pi)^3 & (2\pi)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Después de realizar eliminación gaussiana a la matriz de 5x5, los coeficientes son:

$a_0 = 1$

$a_1 = 4/(3\,\pi)$

$a_2 = -34/(3\pi^2)$

$a_3 = 32/(3\,\pi^3)$

$a_4 = -8/(3\pi^4)$

Entonces el polinomio de interpolación es:

$$M_4(x) = 1 + \frac{4}{3\pi}x - \frac{34}{3\pi^2}x^2 + \frac{32}{3\,\pi^3}x^3 - \frac{8}{3\pi^4}x^4$$

Para x=$\frac{5\pi}{4}$, se tiene:

$$\boxed{M_4\left(x = \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{23}{32}}$$

9) Usando la siguiente tabla de valores del seno de un ángulo en grados, por interpolación lineal y cuadrática, hallar aproximadamente mediante la fórmula de Lagrange el seno de 72 grados.

X	65	70	75
Y	0.906308	0.939693	0.965926

Sol:

La tabla de diferencias divididas es:

X	Y		
65	0.906308		
70	0.939693	0.006677	
75	0.965926	0.0052466	-1.4304*10^{-4}

Para obtener la interpolación lineal podemos debemos elegir 2 nodos de los 3(lo recomendado es que sean consecutivos), los que podrían ser {65,70} o {70,75}.

Elegiremos {70,75}, pues el grado 72 está comprendido entre estos 2 nodos., y la idea es tratar de aproximarse lo mejor posible.

Entonces el polinomio de interpolación de grado 1 (lineal) es:

$P_1(x) = 0.939693 + 0.0052466(x - 70)$

$P_1(x) = 0.0052466x + 0.572431$

El seno de 72, se puede aproximar en este polinomio, y esa aproximación es:

$\boxed{P_1(x = 72) = 0.9501862}$

El error absoluto es:

$E_a(P_1(x)) = |sen(72) - P_1(72)| = |0.951056516295 - 0.9501862| = 8.70316295 * 10^{-4}$

El polinomio de grado 2 (interpolación cuadrática), ocupando necesariamente los 3 nodos es;

$P_2(x) = 0.906308 + 0.006677(x - 65) - 1.4304 * 10^{-4}(x - 65)(x - 70)$

$P_2(x) = -1.4304 * 10^{-4}x^2 + 0.0259874x - 0.178529$

Para aproximar el seno de 72, se debe evaluar este número en el polinomio, lo cual da;

$\boxed{P_2(x) = 0.95104444}$

El error absoluto es:

$E_a(P_2(x)) = |sen(72) - P_2(72)| = |0.951056516295 - 0.95104444| = 1.2076295 * 10^{-5}$

El polinomio de interpolación de lagrange es:

$$L_2(x) = l_0(x)\, f(x_0) + l_1(x)\, f(x_1) + l_2(x)\, f(x_2)$$

$$= \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)}\, f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)}\, f(x_1) + \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}\, f(x_2)$$

$$= \frac{(x-70)}{(65-70)} \frac{(x-75)}{(65-75)}\, f(65) + \frac{(x-65)}{(70-65)} \frac{(x-75)}{(70-75)}\, f(70) + \frac{(x-65)}{(75-65)} \frac{(x-70)}{(75-70)}\, f(75)$$

$$= \frac{(x-70)(x-75)}{50}\, 0.906308 + \frac{(x-65)(x-75)}{-25} 0.939693 + \frac{(x-65)(x-70)}{50}\, 0.965926$$

$L_2(x) = -0.00014304x^2 + 0.0259874x - 0.178529$

Para aproximar el seno de 72, se debe evaluar este número en el polinomio de interpolación de lagrange, el cual da;

$\boxed{L_2(x = 72) = 0.95104444}$

El error absoluto es:

$E_a(L_2(x)) = |sen(72) - L_2(72)| = |0.951056516295 - 0.95104444| = 1.2076295 * 10^{-5}$

10) En el ejercicios anterior, se va a usar un valor mas de la función. Concretamente el seno de 80 grados, 0.984808. Halle un polinomio de interpolación que aproxime al seno de 72, y compare con el valor obtenido en el ejercicio 9 mediante los errores.

Sol:

La tabla de diferencias divididas con un valor más es:

X	Y			
65	0.906308			
70	0.939693	0.006677		
75	0.965926	0.0052466	-1.4304*10^{-4}	
80	0.984808	0.0037764	-1.4702*10^{-4}	-2.65333*10^{-7}

El polinomio de interpolación será de grado 3, pues existen 4 nodos:

$$P_3(x) = 0.906308 + 0.006677(x - 65) - 1.4304 * 10^{-4}(x - 65)(x - 70) - 2.6533 * 10^{-7} * (x - 65)(x - 70)(x - 75)$$

$$P_3(x) = -2.6533 * 10^{-7}x^3 - 8.73207 * 10^{-5}x^2 + 0.02209368225x - 0.0879851375$$

Para aproximar el seno de 72, se debe evaluar este número en el polinomio, lo cual da;

$$P_3(x = 72) = 0.95105558386$$

El error absoluto es:

$$E_a(P_3(x)) = |sen(72) - P_3(72)| = |0.951056516295 - 0.95105558386| = 9.32435*10^{-7}$$

La comparación que se puede obtener es que al agregar un cuarto valor a la tabla de diferencias divididas (con los nodos a una misma distancia) se mejora la precisión del polinomio.

$$E_a\left(P_3(x)\right) < E_a\left(P_2(x)\right) = E_a(L_2(x))$$

Nota: Entre mayor grado del polinomio de interpolación, mayor precisión de podrá lograr