Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Tarea 2
Matemáticas Discretas

Fecha:	30 de septiembre de 2017
Autor:	Daniel Araya Poblete
Email:	Daniel.arayap1@gmail.com
Curso:	CC3101-1
Profesor:	Gonzalo Navarro

Pregunta 1.

El objetivo de esta pregunta es responder la siguiente incógnita: Cuántas personas se necesitan en una sala de clases para que con probabilidad x se repita un cumpleaños? Para ello haremos los siguientes pasos.

a) Encuentra una expresión, en función de n, para la probabilidad de que en una sala con n personas se repita al menos un cumpleaños.

Primero se calculará la probabilidad de que haya *n* personas con cumpleaños distintos. Veamos algunos casos base: para n=1, la probabilidad es 1, ya que son 365 los casos favorables y 365 los casos posibles. Para n=2, la probabilidad será $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365}$, ya que la segunda persona no puede tener el mismo cumpleaños que la primera. Así, la probabilidad de que ninguna persona cumpla años el mismo día será:

$$P(n) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

Esto puede expresarse como:

$Prob\_sin\_repetir(n) = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$, que equivale a la probabilidad de encontrar n personas con diferentes fechas de cumpleaños. Por lo tanto:

$$Prob\_repetir(n) = 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!},$$

corresponde a la probabilidad de que existan repeticiones de cumpleaños entre n personas.

b) Haga un código que ponga, en un mismo gráfico, la función calculada en la parte anterior y la función constante igual a x (Note que x debe ser un parámetro de ésta). Ver archivo P1b.py

c) Qué puede decir del gráfico anterior? Considere $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}\right\}$ para posibles valores de x. Concluya así los valores de n que resuelven el problema para los valores de x antes mencionados.

Se puede notar que la probabilidad de que se repita al menos un cumpleaños entre n personas tiende muy rápidamente a 1 (cuando n es mayor a 40 ya se observa una probabilidad cercana a 0,9; ver figura generada al compilar P1b.py). Uno esperaría que la probabilidad de ½ se alcanzara acercándose a un n=183 o por el estilo (la mitad de 365).

Para los valores dados de x se debe intersectar la funcion constante con la funcion de probabilidad, para llegar a un n aproximado. De este modo se puede estimar que con n=15 personas se alcanza una probabilidad de repetición de ¼. Con n=23 aprox, se alcanza una probabilidad de ½ , para obtener una probabilidad de ¾ tienen que haber al menos aprox. 32 personas y finalmente para obtener probabilidad 0.9 deberían haber al menos 41 personas.

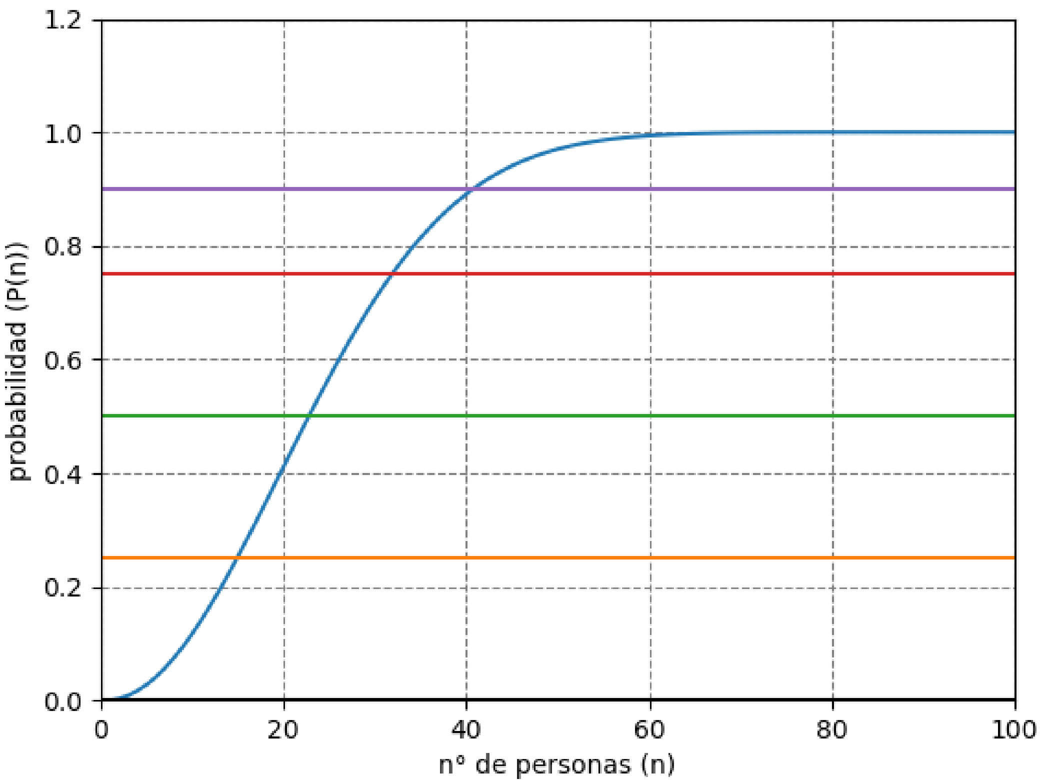

Gráfico 1: función de probabilidad de repetirse cumpleaños y funcion constante igual a {0.25, 0.5, 0.75, 0.9}

d) Ahora haremos un estudio empírico de lo anterior. Programe un código que reciba como parámetros m, n y que simule m veces los cumpleaños de n personas y que devuelva en qué porcentaje de las m veces se repitió algún cumpleaños. Compare con lo obtenido en la parte c para distintos de valores de m y usando los n obtenidos de la parte anterior.
Ver archivo P1d.py
Para comparar con lo obtenido en la parte anterior se testearon las cantidades n= {15, 23, 32, 41} de personas con el programa, con m={100, 1000, 10000} simulaciones.

El resultado esperado es una probabilidad cada vez más cercana a la aproximada en la parte c) mediante la expresión teórica calculada en la parte a). Vea la tabla 1.

n\m	100	1000	10000	Prob. teórica
15	0.30	0.256	0.2520	0.2529
23	0.52	0.514	0.5092	0.5073
32	0.81	0.749	0.7535	0.7533
41	0.92	0.889	0.9053	0.9032

Tabla 1: probabilidades encontradas con distinta cantidad de ensayos.

Pregunta 2.

Esteban cree tener una buena demostración de que toda relación simétrica y transitiva es necesariamente refleja. Su argumento es el siguiente:

- Dado que la relación es simétrica, para todo par (a,b) se tiene que el par (b,a) también está.
- Dado que también es transitiva, al estar (a,b) y (b,a) se tiene que (a,a) pertenece a la relación, y así análogamente como (b,a) y (a,b) están entonces también lo está (b,b).
- Luego la relación es refleja pues contiene a todos los pares (x,x).

a) Demuestre formalmente que el argumento de Esteban esta incorrecto.

"Dado que la relación es simétrica, para todo par (a,b) se tiene que el par (b,a) también está." El problema yace en esta parte de la demostración, ya que se está asumiendo que para todo elemento a en la relacion existe un b, pero puede ocurrir que a no se relacione con ningún otro y en ese caso no se puede llegar a que (a,a) pertenezca a la relación, y por lo tanto no se puede asumir que ésta sea refleja.

Entonces como contraejemplo, sea un conjunto {0,1,2} y una relación {(0,0),(1,1),(0,1),(1,0)}. Esta relación es simétrica y transitiva en el conjunto, pero no es refleja ya que no está el par (2,2) en la relación.
En general, cuando en una relacion binaria la cantidad de elementos m en su dominio es menor que la cantidad de elementos n del conjunto, la relacion no puede ser refleja, ya que existe entonces un subconjunto de (n-m) de elementos tal que no estan relacionados con ningun otro elemento en la relacion.

b) Ahora, solo con el objetivo de molestar a Esteban, contaremos la cantidad de contraejemplos de su argumento. Programe una función contrajemplos(n) que cuente la cantidad de contraejemplo a la teoría de Esteban para un dominio de tamaño n. Es decir, que cuente la cantidad de relaciones binarias sobre un dominio de tamaño n simétricas y transitivas que no son de equivalencia. Sin embargo, dado que esta cantidad puede ser muy grande (y de hecho lo es), debe computarse el resultado y resto al ser dividida por 2145483647. Su algoritmo debe ser O(n2) y debe mostrar claramente en su informe que cumple esta restricción.

Pregunta 3.

Usted y su amigo juegan fifa en su casa; luego de un difícil partido se van a los penales donde el primero que acierta n gana. Su amigo siempre acierta exactamente n de los primeros k penales; donde siempre alcanza el n-ésimo gol en el k-ésimo tiro. Usted tiene una probabilidad p de acertar un penal y parte tirando.

a) Calcule la probabilidad que usted le gane a su amigo. La expresión resultante puede ser una sumatoria en función de n, k y p.
La probabilidad de ganarle a mi amigo es igual a la probabilidad de acertar n penales antes que él (sabiendo que mi amigo acertará su n-ésimo penal en el k-ésimo tiro). Es decir, para ganarle a mi amigo deberé acertar n penales como máximo en mi k-ésimo tiro. Asi, el problema se reduce a calcular la probabilidad de anotar n penales dentro de k tiros (ya que parto tirando). Esto corresponde a:

$$P_r(x = n) = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n}$$

Que corresponde a las formas de anotar n goles en k tiros, y cada una de estas es de la forma $p^n(1-p)^{k-n}$ por los n goles convertidos con probabilidad p, y $(k-n)$ penales fallados con probabilidad $(1-p)$. Pero esto es un caso particular, en general mi victoria se alcanza cuando anoto al menos n goles en los k primeros tiros (ya que en caso contrario gana mi amigo), por lo que la probabilidad total de ganar es la sumatoria:

$$P_r(x \geq n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} P_r(\,x = i) \text{ ó } P_r(x \geq n) = \sum_{i=n}^{k} \mathrm{P_r}(x = i)$$

b) Programe una función que reciba p, k, n y que retorne con qué probabilidad la ganará a su amigo.
Ver archivo P3b.py